МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

АБЕЛЕВІ ГРУПИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала студентка 2 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти

Слюсарчук Світлана Федорівна

Керівник доцент, кандидат фізико-математичних наук

Котова Ольга Володимирівна

Рецензент професор, доктор фізико-математичних наук

Львов Михайло Сергійович

ЗМІСТ

ВСТУП

Математика є структурною наукою і вивчає формальні залежності реальності. Математика включає вивчення математичних структур. В свою чергу математичні структури є множинами з заданими на них відношеннями і операціями. Математичні структури вивчаються в теорії множин, яка є базою класичної математики.

Дана тема міститься в розділі «Теорія груп». Вивчення теорії груп служить базою для вивчення інших алгебраїчних об’єктів. В свою чергу теорія груп – це розділ загальної алгебри, який вміщує навчальний матеріал про алгебраїчні структури. Саме ж поняття групи, на даний час, має вагоме значення над різними розділами математики і відноситься до фундаментальних математичних понять.

Актуальність досліджуваної теми в тому, що ця тема має вагоме значення в теорії груп. Більша частина теоретичного матеріалу надається для самостійного вивчення студентам і необхідна для повноцінного опанування всього курсу математики для математичних спеціальностей.

Мета дослідження: вивчення абелевих груп і підготовка теоретичного матеріалу для більш глибшого самостійного вивчення студентами.

Завдання дослідження:

1. Дослідити науково-методичну літературу з теми дослідження.
2. Вивчити основні поняття теорії абелевих груп та описати їх.
3. Проаналізувати теоретичний матеріал і систематизувати його.
4. Розглянути теореми: «Існування ульмовських факторів», «теорема Ульма», «Абелева група з оператором», «Теорема про підгрупи абелевої групи з скінченною кількістю твірних», «Абелеві групи з оператором».

5. Розглянути способи доведення теорем: «теорема Тейхмюллера», «Існування ульмовських факторів», «теорема Ульма», «Абелева група з оператором», «Теорема про підгрупи абелевої групи з скінченною кількістю твірних», «Абелеві групи з оператором».

Об’єкт дослідження: курсу «Основні алгебраїчні структури» з вміщеним розділом «Теорія груп».

Предмет дослідження: абелеві групи і їх властивості.

В роботі були використані наступні **методи дослідження:**

- метод аналізу і синтезу;
- описовий метод;
- порівняльний метод;
- систематизація;
- узагальнення.

Апробація отриманих результатів та публікації

Апробація:

1. Доповідь на всеукраїнській науково-практичній конференції Херсонського державного університету «Актуальні проблеми природничо-математичних дисциплін у закладах освіти», 2020р.

2. Доповідь на засіданні наукового гуртка з алгебри та геометрії, алгебри та теорії чисел, числових систем про результати дослідження, 06.10.2020р.

Керівники гуртка:

Котова О.В. канд. фізико-математичних наук, доцент;

Григор’єва В.Б. канд. педагогічних наук, старший викладач.

Публікація: всеукраїнська науково-практична конференція Херсонського державного університету, факультету комп’ютерних наук, фізики та математики «Актуальні проблеми природничо-математичних дисциплін у закладах освіти». Тема доповіді «Місце теми «Абелеві групи» в курсі загальної алгебри».

Дана наукова робота має **практичне значення**, оскільки може бути корисною для всіх студентів вищих навчальних закладів, які вивчають вищу математику, а саме розділ «Теорія груп» і «Алгебраїчні структури», у розробці пропедевтики основних алгебраїчних структур та як теоретична база відповідного курсу.

Освоєння теми «Абелеві групи» має **зв'язок з програмою** підготовки вчителів математики, адже включена до основного навчального матеріалу курсу «Основні алгебраїчні структури». Даний курс вивчається на першому курсі рівня підготовки – магістр.

Робота складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Перший розділ присвячено дослідженню необхідного теоретичного підґрунтя теми досліджень. У другому розділі приділено увагу вивченню основних понять абелевих груп: повна абелева група, циклічні групи, сервантна підгрупа, змішана абелева група, примарні групи. У третьому розділі описані абелеві групи без скручення, описані типи елементів без скручення, розглянуте поле p-адичних чисел.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВИ ТЕОРІЇ АБЕЛЕВИХ ГРУП

1.1. Огляд літератури

Усвідомлення алгебраїчної природи понять топології і теорії функцій комплексної змінної привели в 80-ті роки XX ст. до формування комбінаторної теорії груп. Вперше термін «групи» зустрічається в роботах Клейна, Пуанаре та інших математиків. Термін «група» набув самостійного значення в 1882 році, після відкриття Діком універсального способу визначення породжуючих елементів і визначення відношення.

Теорія абелевих груп – це розділ загальної алгебри, який вивчає комутативні (абелеві) групи. Спочатку теорію абелевих груп розглядали, як частину курсу «Загальної теорії груп». На одному з перших етапів розвитку цього поняття (1940-1950-ті роки) виникли суперечності, щодо належності абелевих груп до загальної теорії груп, адже апарат і методологія теорії абелевих груп відрізняється від положень загальної теорії груп. Саме тому, абелеві групи стали окремою частиною загальної алгебри[53].

Вперше Жордан ввів визначення комутативних абелевих груп на честь Нільсона Генріха Абеля. Саме Абель першим довів, що для комутативної групи многочлена, корені многочлена є радикалами. Системне вивчення абелевих груп має початок з XX ст. Перші роботи по темі «Абелеві групи» датовані 1917-1925 роками. Ці роботи належать Леві Фрідріху і Прюферу. В абелевій групі для позначення операції використовується адитивний запис, знак + для операції додавання, знак 0 для нейтрального елементу (нуля)[54].

На початку XXI ст. теорія абелевих груп відносилась до загальної алгебри, але нині більшість науковців відносять її до одного з розділів загальної теорії модулів. В 1940 році завдяки роботам Кулікова, математики відділили теорію абелевих груп, як окремий розділ загальної алгебри. З 1950-тих – 1970-тих років відбувалось вивчення примарних абелевих груп. В результаті плідної роботи науковців, було опубліковано багато монографій, що присвячені вивченню абелевих груп. Друга половина 1970-х років відзначається вивченням абелевих груп без скручення. Найбільш вагоме значення для абелевих груп без скручення мають роботи Б’ярна Йоунсона[61].

Теорія абелевих груп є одним з розділів в теорії чисел і має вагоме значення для багатьох математичних тверджень. Наприклад, розвиток теорії модулів пов'язаний з абелевими групами як модулями над кільцем цілих чисел. Більшість результатів теорії абелевих груп переносять на модулі над кільцем головних ідеалів, теорія двоїстості характерів скінченних абелевих груп має важливе значення для топологічних локально компактних груп в теорії двоїстості. Гомологічна алгебра знаходить відповіді на питання теорії абелевих груп. Наприклад, дає опис множин всіх розширень однієї групи за допомогою іншої.

Тема «Абелеві групи» розглядається в різних підручниках теорії груп і теорії алгебраїчних структур. Найпоширеніші підручники, які узагальнюють теоретичний матеріал з теорії абелевих груп, були опубліковані такими математиками: Курош А. Г., Беккер І.Х., Фукс Л., Завало С. Т. Автор П. Кроулі в своєму підручнику наводить приклади нескінченних примарних абелевих груп, які не маєть елементів нескінченної висоти. В роботі Хілл і Ч. Меджіббен подають звичайну конструкцію груп без ізоморфних підгруп. В роботі Г.С. Монка досліджуються абелеві p -адичні групи, які не містять власних ізоморфних підгруп, які ізоморфні самій групі. Сучасні погляди стосовно даної теми опубліковані в роботах Б. Голдсміта, С. Охогейна , Г.С.Монка і С. Валлутис.

1.2. Абелеві групи

Абелева група (комутативна група) – це група в якій операції що виконуються є комутативними. Дану назву впровадили в честь математика з Норвегії Нільса Хенріха Абеля, який проводив дослідження над властивостями різних груп. Абелеву групу позначають буквою A[61].

Нагадаємо, що якщо існує множина T, яка складається з всіх елементів скінченої абелевої групи A , то дану множину називають періодичною. Якщо порядок всіх елементів окрім нуля з групи T є скінченним, тоді дану групу називають групою без скручення . Абелеву групу T називають змішаною, якщо вона складається з елементів, які мають скінченний порядок, так і з елементів,якы мають нескінченний порядок.

Якщо G змішана абелева група, яка має множину F , що складається лише з елементів скінченого порядку, тоді F являється підгрупою групи G. Підгрупу F називають максимально періодичною підгрупою або ж періодичною частиною групи G. До періодичних груп відносять такі абелеві групи, які складаються з елементів що є степенями деякого звичайного числа p, вони називаються примарними за числом p. Групу яка складається з елементів які є степенями деякого простого числа p позначають символом G_p і є підгрупами в G. Треба звернути увагу на те, що будь - яку періодичну абелеву групу можна лише одним способом розкласти в пряму суму примарних груп, які мають відношення до різних звичайних чисел p.

Пригадаємо поняття ранга абелевої групи G. Має місце рівність

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0,$$

в якій $v_1, v_2, \dots v_k -$ скінчена кількість елементів групи G і $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k -$ цілі числа з яких хоча б одне не рівне нулю.

Якщо дана рівність виконується, то систему елементів $v_1, v_2, \dots v_k$ називають лінійно залежною. Якщо нерівність не виконується то елементи системи називають лінійно незалежними.

Будь - яку періодичну абелеву групу можна єдиним способом розкласти в пряму суму примарних груп, які відносяться до різних чисел p, при чому p є простим числом[39].

Нехай елемент u з групи G лінійно залежний від систем елементів $u', u'', \dots, u^{(s)}$ цієї ж групи, але в тому випадку коли αu деяке кратне число цього елемента. Число α не дорівнює нулю $(\alpha \neq 0)$ і міститься в підгрупі $\{u', u'', \dots, u^{(s)}\}$, тобто існують цілі числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ що виконується рівність

$$\alpha u = \beta_1 u' + \beta_2 u'' + \dots + \beta_s u^{(s)}.$$

Система що складається з елементів $v_1, v_2, \dots v_k$ лише тоді є лінійно залежною, коли хоча б один з цих елементів лінійно залежний від іншого елемента цієї ж системи. Властивості лінійної залежності: будь-яка система елементів, яка містить елемент скінченого порядку (може містити нульовий елемент) лінійно залежна. Будь-яка підсистема лінійно незалежної системи також є лінійно незалежною. Елемент який входить в деяку скінченну систему елементів, лінійно залежить від даної системи[25].

Системи елементів групи G , $u', u'', \dots, u^{(s)}$ і $v', v'', \dots, v^{(t)}$ еквівалентні якщо будь-який елемент з першої системи лінійно залежить від другої системи. Зворотне твердження також вірне. Якщо $\alpha \neq 0$

$$\alpha u \in \{u', u'', \dots, u^{(s)}\}$$

при $\beta_i \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, s$,

$$\beta_i u^{(t)} \in \{v', v'', \dots, v^{(t)}\},$$

тоді елемент $(\alpha\beta_1\beta_2 \dots \beta_s)$ міститься в підгрупі $\{v', v'', \dots, v^{(t)}\}$.

Можна зробити висновок, що поняття еквівалентності системи елементів є транзитивним, тобто це таке бінарне відношення R при якому $\forall\ a, b, c \in X$ такі, що виконується умова $aRb \land bRc \Longrightarrow aRc$ [25].

Ранг абелевої групи визначається за допомогою теореми про заміну.

Теотема 1.1(про заміну). Нехай в групі G дані дві скінченні системи елементів

$$u', u'', \dots, u^{(k)} \tag{1.1}$$

$$v', v'', \dots, v^{(l)} \tag{1.2}$$

з яких перша система незалежна, причому кожен її елемент лінійно залежний від другої системи. Тоді $k \leq l$ з системи (1.2) можна так видалити k елементів, що елементи які залишаться з елементами системи (1.1) утворять систему, яка еквівалентна системі (1.2)[40].

З даної теореми можна зробити висновок, що дві лінійно незалежні еквівалентні системи елементів з групи G складаються з однакової кількості елементів.

В абелевій групі G нескінченна система елементів називається лінійно залежною, якщо вона містить хоча б одну підсистему яка є скінченною і лінійно залежною. Нескінченна система елементів лінійно незалежна, якщо всі її підсистеми є скінченними і лінійно незалежними. Елемент лінійно залежить від нескінченної системи елементів, якщо він лінійно залежить від деякої певної нескінченної підсистеми системи елементів.

Об’єднання зростаючих послідовностей лінійно незалежних систем групи G є також незалежним і в такому випадку група G не періодична, вона володіє максимальними лінійно незалежними системами, причому будь-яка її лінійно незалежна система може включатись в максимальну. Якщо G періодична , то вона не містить жодної лінійно незалежної системи. Всі ці системи еквівалентні між собою і тому складаються з однакової кількості елементів. Цю однакову кількість елементів і називають рангом абелевої групи G, а групу G називають групою скінченного рангу.

Ранг групи – це кількість елементів максимально лінійно незалежної системи. Ранг рівний потужності фактор-групи даної групи по періодичності[5].

Будь-яка підгрупа A і фактор-група G/A абелевої групи G скінченного ранга мають скінченні ранги, причому сума їх рангів рівна рангу самої групи G.

Ранг змішаної групи дорівнює рангу її фактор-групи по періодичній частині. Ранг прямої суми скінченого числа груп, скінченного рангу є скінченним і рівний сумі рангів прямих доданків[24].

Одним з типів абелевих груп є вільна абелева група.

Вільною абелевою групою називається пряма сума нескінченних циклічних груп, які взяті в скінченній або нескінченній кількості[3].

Якщо $U = \sum_v \{u_v\}$ розклад вільної абелевої групи U в пряму суму нескінченних циклічних груп. Сукупність елементів u_v цих циклічних прямих доданків, які взяті по одному з кожного доданка називаються базою групи U. Всі елементи групи U записуються у вигляді суми скінченного числа елементів даної бази, які беруться з цілими коефіцієнтами. Якщо база групи U складається з елементів $u_1, u_2, \ldots$, тоді u_1 елемент цієї бази, можна представити у вигляді $u_1 + \alpha u_2$, де $\alpha -$ ціле число.

Будь-яка база вільної абелевої групи є однією з максимальних лінійно незалежних систем і утворює групу без скручення. Тому, якщо вільна група U має скінченний ранг n, то всі її бази складаються з n елементів і будь-який розклад групи U в пряму суму нескінченних циклічних груп складається з n доданків. Потужність будь-якої бази співпадає з потужністю самої групи, якщо ранг цієї групи U нескінченний[18].

В теорії абелевих груп, вільні абелеві групи виконують ті ж функції що й вільні групи в теорії груп.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1.2. Будь-яка абелева група G ізоморфна фактор-групі деякої вільної абелевої групи, причому абелева група з n твірними ізоморфна фактор-групі вільної абелевої групи рангу.

Теорема 1.3. Будь-яка підгрупа вільної абелевої групи, яка відрізняється від нуля є вільною.

Теорема 1.4. Якщо фактор-група абелевої групи G по підгрупі B є вільною групою, тоді B є прямим доданком для G.

Нехай $G/B = \sum_{\alpha}\{\overline{\alpha_{\alpha}}\}$ розклад групи G/B в пряму суму нескінченно циклічних груп. В кожному суміжному класі $\overline{\alpha_{\alpha}}$ обирають елемент α_{α}. Підгрупа A групи G яка складається з елементів α_{α}є прямою сумою циклічних підгруп $\{\alpha_{\alpha}\}$ і $A \cap B = 0$. Так як група G з підгрупою B містить деякий елемент A тоді $G = \{B, A\} = B + A$.

1.3. Абелеві групи з скінченною кількістю твірних

Абелеві групи з скінченною кількістю твірних використовуються в комбінаторній топології.

Будь-яка абелева група з n твірними є фактор-групою вільної абелевої групи з рангом n . Абелеву групу з n твірними позначають як U_n. Будь-яка підгрупа групи U_n вільна і її ранг не більший за n.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1.5(про підгрупи групи U_n).

Будь-яка підгрупа V групи U_n, яка не є 0 є вільною групою і її ранг k не перевищує n. Виберемо бази $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}$ групи U_n і $u_1, u_2, \dots, u_k$ групи V, що $u_i = \varepsilon_i \overline{u_i}$, $= 1, 2, \dots, k$, де $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k -$ додатні цілі числа і $\varepsilon_{i+1} \vdots \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Теорема 1.6(основна теорема).

Будь-яка абелева група з скінченною кількістю твірних розкладається в пряму суму циклічних підгруп[40].

Ця пряма сума може складатись з одного доданка, якщо група циклічна.

Для доведення цієї теореми нехай дана абелева група G з скінченною кількістю твірних. Група G ізоморфна фактор-група деякої вільної групи U_n по підгрупі V . Дані бази $u_1, u_2, \dots, u_n$ для U_n і

$v_1, v_2, \dots, v_k$ для V, $i = 1, 2, \dots, k$ тоді $u_i = \varepsilon_i u_i$, де $\varepsilon_i > 0$ і $\varepsilon_{i+1} \vdots \varepsilon_i$. Тоді елемент

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (1.3)$$

міститься в підгрупі V, якщо $\alpha_1 \vdots \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ і коефіцієнт α_j, $j = k + 1, \dots, n$, рівні нулю. Якщо коефіцієнти α_i задовольняють ці умови, тоді елемент u записують через базу $v_1, v_2, \dots, v_k$. Якщо

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k$$

тоді вводимо заміну v_i через $\varepsilon_i u_i$ і порівнюємо з елементом u рівняння (1.3), так як будь-який елемент з U_n записують через базу цієї групи. В фактор-групі U_n/V елемент $u_i + V$ має порядок ε_i при $i \leq k$, при $i > k$ має нескінченний порядок. Всі ці елементи з циклічної підгрупи в сумі утворюють фактор-групу і утворюють пряму суму. Будь-який елемент U_n/V однозначно подається у вигляді суми елементів циклічних підгруп $\{u_i + V\}$. Якщо $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots = 1$ тоді відповідні прямі доданки $\{u_1 + V\}$, $\{u_2 + V\}$, … виключаються з всіх доданків. Для групи G з фактор-групою U_n/V для якої виконується ізоморфізм теорема доведена[39].

З теореми слідує, що будь-яка нециклічна абелева група розкладається, якщо з скінченною кількістю утворюючих. Будь-яка примарна циклічна група і нескінченна циклічна група, циклічна група порядку p^m, де p – просте число є нерозкладною. Група розкладається в пряму суму примарних циклічних груп, якщо вона є не примарною скінченною циклічною групою.

Теорема 1.7. Будь-яка абелева група G з скінченною кількістю твірних розкладається в пряму суму скінченного числа нерозкладних циклічних підгруп, частиною скінченних примарних, частиною нескінченних.

Елементи цієї підгрупи, які взяті по одному з кожного циклічного прямого доданка, утворюють базу цієї групи.

Наслідок 1.1. Будь-яка скінченна абелева група G розкладається в пряму суму скінченних примарних циклічних груп.

Теорема 1.8. Сукупність кількості і порядку нескінченних циклічних доданків не залежать від вибору розкладу абелевої групи, яка розкладається і має скінченну кількість твірних в прямій сумі підгруп які є нерозкладними, тобто не залежать від вибору бази[11].

Це означає, що будь-які два розклади абелевої групи G є ізоморфними і утворюють скінченну кількість прямих сум нерозкладних циклічних груп.

Наслідок 1.2. Підгрупа H абелевої групи G з скінченним числом твірних має скінченну систему твірних.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1.9 (про підгрупи абелевої групи C з скінченним числом твірних). Нехай деякий розклад групи G в пряму суму нерозкладних циклічних груп містить n нескінченних циклічних доданків $r \geq 0$. Кількість примарних циклічних доданків які відносяться до простого числа p рівна k_p, де $k_p \geq 0$, порядок чисел задається наступним чином

$$p^{\alpha_{p_1}}, p^{\alpha_{p_2}}, \dots, p^{\alpha_{pk_p}},$$

де $$\alpha_{p_1} \geq \alpha_{p_2} \geq \dots \geq \alpha_{pk_p}$$

Розклад підгрупи H групи G в пряму суму циклічних груп які не розкладаються, де s – нескінченні циклічні доданки, p – просте число, l_p –циклічні доданки, які примарні на p[18]. Порядком доданків є числа

$$p^{\beta_{p_1}}, p^{\beta_{p_2}}, \dots, p^{\beta_{pl_p}},$$

де

$$\beta_{p_1} \geq \beta_{p_2} \geq \cdots \geq \beta_{pl_p}. \qquad (1.4)$$

$s \leq r$ і для p

$$l_p \leq k_p \qquad (1.5)$$

$$\beta_{p_i} \leq \alpha_{p_i}, i = 1, 2, \dots, l_p. \qquad (1.6)$$

Кількість елементів рівна рангу групи і не залежить від вибору бази. Ранг підгрупи не перевищує ранг групи G.

Інваріанти групи – кількість нескінченних циклічних доданків (ранг групи) і порядок примарних циклічних доданків з розкладу абелевої групи з скінченним числом утворюючих[26].

Повна система інваріантів – кількість нескінченних циклічних доданків з двох абелевих груп у яких інваріанти співпадають і групи ізоморфні[40].

Скінченна інваріанта групи – порядок примарних циклічних доданків.

1.4. Кільце ендоморфізмів

Введемо операцію додавання для ендоморфізмів абелевої групи G. Сумою ендоморфізмів χ і η є відображення, яке переводе елемент α групи G в елемент $\alpha\chi + \alpha\eta$,

$$\alpha(\chi + \eta) = \alpha\chi + \alpha\eta.$$

Відображення є ендоморфізмом групи групи G

$$(a + b)(\chi + \eta) = (a + b)\chi + (a + b)\eta = (\alpha\chi + b\chi) + \cdots$$

$$\ldots + (a\eta + b\eta) = a(\chi + \eta) + b(\chi + \eta).$$

Операція додавання ендоморфізмів комутативна і асоціативна. Нульовий ендоморфізм виконує роль нуля.

χ −ендоморфізм групи G, відображення переводить елемент групи α в елемент групи $\alpha\chi$

$$\alpha(-\chi) = -\alpha\chi,$$

$$(a + b)(-\chi) = -(a + b)\chi = -(\alpha\chi + b\chi) = \alpha(-\chi) + b(-\chi),$$

Різниця протилежних елементів χ і $-\chi$ дорівнює ендоморфізму, що рівний нулю: $\chi + \left(-\chi\right) = 0$.

$$\chi - \eta = \chi + (-\eta).$$

Виконуються закони дистрибутивності:

$$(\chi_1 + \chi_2)\eta = \chi_1\eta + \chi_2\eta, \quad (1.7)$$

$$\eta(\chi_1 + \chi_2) = \eta\chi_1 + \eta\chi_2. \quad (1.8)$$

Теорема 1.10. Відносно операцій додавання і множення множина всіх ендоморфізмів абелевої групи є асоціативним кільцем[30].

Оскільки операції додавання і множення є не постійними, тому ендоморфізми не утворюють кільця. Цілі числа разом з ендоморфізмами нескінченної циклічної групи утворюють взаємно однозначну відповідність. Якщо

$\alpha\chi = na, \; a\eta = ka$, тоді $a(\chi\eta) = (na)\eta = (nk)a$,

$$a(\chi + \eta) = na + ka = (n + k)a.$$

Де a – елемент групи, χ – ендоморфізм який переводить елемент групи a в елемент $na\ (n \gtreqless 0)$. Таким чином утворюється кільце ендоморфізмів нескінченної циклічної групи. Кільце ендоморфізмів нескінченної циклічної групи ізоморфне кільцю C цілих чисел.

Ендоморфізм χ визначається числом 1 і виконується умова:

$$1 \cdot \chi = r$$

якщо $\left(\frac{1}{n}\right)\chi = r'$, тоді $nr' = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right)\chi = r$, $r' = \frac{r}{n}$ тому

$$\left(\frac{m}{n}\right)\chi = \frac{m}{n}r.$$

Данною формулою задається кільце ендоморфізмів адитивної групи раціональних чисел R . Між раціональними числами і ендоморфізмами групи R утворюється взаємно однозначна відповідність. Кільце ендоморфізмів групи R ізоморфне полю раціональних чисел, оскільки:

$$1 \cdot \chi = r_1, \qquad 1 \cdot \eta = r_2$$

$$1 \cdot (\chi\eta) = r_1\eta = r_1 r_2, \ \ 1 \cdot (\chi + \eta) = r_1 + r_2 .$$

Будь-який ендоморфізм групи R є автоморфізмом, оскільки відмінний від нуля і має зворотній ендоморфізм.

Кільце ендоморфізмів групи типу p^∞ складається з елементів $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

$$pa_1 = 0, \qquad pa_{n+1} = a_n, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

всі елементи групи не перевищують порядок p^n і лежать в підгрупі $\{a_n\}$ з ендоморфізмом χ

$$a_n\chi = k_n a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$0 \leq k_n < p^n.$$

Тоді $p(a_{n+1}\chi) = a_n\chi$, де $p(k_{n+1}a_{n+1}) = k_{n+1}a_n = k_n a_n$, тобто

$$k_{n+1} \equiv k_n (\mathrm{mod}\ p^n), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Будь-якому ендоморфізму χ групи p^{∞} відповідає послідовність натуральних чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, двом різним ендоморфізмам відповідають різні послідовності.

Групи гомоморфізмів – множина всіх гомоморфних відображень абелевої групи A в абелеву групу B з гомоморфізмами χ, η при яких виконується формула $\alpha(\chi + \eta) = \alpha\chi + \alpha\eta$ де $\alpha \in A$. Дана формула відтворює пряму суму кільця ендоморфізмів[7].

Нехай A, B, C абелеві групи. Результатом добутку гомоморфізмів A в B на гомоморфізм B в C є гомоморфізм A в C (гомоморфізми виконуються послідовно).

$G -$ абелева група, що представлена у вигляді прямої суми скінченного числа групи H_i,

$$G = \sum_{i=1}^{n} H_i.$$

Теорема 1.11. Кільце ендоморфізмів групи $G = \sum_{i=1}^{n} H_i$ ізоморфне кільцю квадратних матриць (χ_{ij}) порядку n, де $\chi_{ij} \in R_{ij}$ і виконуються операції додавання і множення[29].

В теоремі $R_{ii} -$ кільце ендоморфізмів групи H_i , $R_{ij} -$ група гомоморфізмів групи H_i в групу H_j, при $i \neq j$.

Якщо $g \in G$

$$g = \sum_{i=1}^{n} h_i, \qquad h_i \in H_i$$

тоді

$$g\chi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\chi_{ij}.$$

Зворотна теорема також дійсна , якщо h_i – довільний елемент з H_i і якщо

$$h_i\chi = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}, \quad h_{ij} \in H_j,$$

$$h_i\chi_{ij} = h_{ij}$$

тоді будь-який ендоморфізмχ групи G відповідає даній матриці і відображення χ_{ij} – гомоморфізм групи H_i в групу H_j.

Наслідок 1.3. Група автоморфізмі групи

$$G = \sum_{i=1}^{n} H_i$$

ізоморфна мультиплікативній групі з матрицями χ_{ij}. В кільці даних матриць існують обернені матриці.

В кільці ендоморфізмів циклічних груп де A і B –циклічні групи, скінченні або нескінченні примарні, тоді група гомоморфізмів A в B має наступні властивості:

- група A ізоморфна групі B, якщо A нескінченно циклічна група;
- група A циклічна відносно порядку $p^{\min(k,l)}$ при умові, що групи A і B примарні по одному простому числу p і має порядки p^k і p^l;

- група A рівна нулю[10].

Для вільної абелевої групи виконуються наступні наслідки:

Наслідок 1.4. Для вільної абелевої групи з рангом n кільце ендоморфізмів ізоморфне кільцю всіх квадратних матриць з цілими елементами порядку n.

Наслідок 1.5. В вільній абелевій групі з рангом n група автоморфізмів ізоморфна мультиплікативній групі квадратних матриць з цілими елементами порядку n, якщо визначник групи рівний ± 1.

1.5. Теорія Тейхмюллера

Область операторів є асоціативним кільцем R з елементами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ в якому виконуються наступні умови:

$$\alpha(\alpha + \beta) = \alpha a + \alpha\beta \tag{1.9}$$

$$\alpha(\alpha\beta) = (\alpha\alpha)\beta. \tag{1.10}$$

При виконанні даних умов, група G має кільце з операторів R (група G є модулем над кільцем R або R −модулем). Будь-яка абелева група без операторів є модулем над кільцем цілих чисел. З формули (1.9) слідує $\alpha a = \alpha(a + 0) = \alpha a + \alpha \cdot 0$, тоді $\alpha \cdot 0 = 0$. В лівій частині рівності нуль є нулем кільця R, в правій частині нуль є нульовим елементом групи G. Нульовому ендоморфізму групи G відповідає, як оператор нуль кільця R[10].

$$\alpha a = a[\alpha + \beta - \beta] = \alpha(\alpha - \beta) + \alpha\beta,$$

$$\text{де } \ \alpha(\alpha - \beta) = \alpha\alpha - \alpha\beta.$$

В абелевій групі G оператору ε може не відповідати тотожній автоморфізм групи G, якщо кільце операторів R містить одиницю ε.

Якщо $\alpha a = 0$, $\forall\alpha \in G, \forall\alpha \in R$ тоді виконуються умови (1.9) і (1.10). $H -$ множина елементів α з G, $\alpha\varepsilon = \alpha$, $F -$ множина α з G, що $\alpha\varepsilon = 0$. $F, H -$ підгрупи групи G. $F \cap H = 0$, $F + H -$ пряма сума, яка належить групі G і для $\forall\alpha \in G$ виконується нерівність $\alpha = \alpha\varepsilon + (\alpha - \alpha\varepsilon)$, де $\alpha\varepsilon \in H$, $\alpha - \alpha\varepsilon \in F$. В кільці операторів з одиницею $\alpha\varepsilon = \alpha, \forall\alpha \in G$. Якщо в групі G з оператором R елемент $\alpha \in G$ є нульовим елементом і $\alpha a = 0$, тоді множина всіх цих елементів утворює правосторонній ідеал кільця R. Ідеал $\alpha -$ порядок елемента α.

Елемент α називається елементом нескінченного порядку, якщо порядок елемента α є нульовим ідеалом кільця R[19]. В адитивній групі кільця R без дільників нуля в кільці R всі елементи області правосторонніх операторів мають нескінченний порядок. Кільце операторів R з одиницею є циклічною підгрупою елемента α групи G і складається з елементів виду $\alpha a, \alpha \in R$.

Теорема 1.12. Циклічна підгрупа елемента α операторно ізоморфна фактор-групі R/α, де $\alpha -$ порядок елемента α. Якщо $\alpha -$ двосторонній ідеал кільця R, тоді циклічна підгрупа елемента α операторно ізоморфна адитивній групі кільця R/α[40].

Перетин двох ненульових правосторонніх ідеалів кільця R відмінний від нуля. Ця умова виконується при комутативності кільця R. З будь-яким кільцем оператора R визначається лінійна залежність елементів. Якщо кільце комутативне, тоді виконується теорема про заміну і вводиться поняття рангу групи.

Теорема 1.13. Ранг групи рівний сумі рангу будь-якої її підгрупи і рангу фактор-групи.

Вільний R- модуль – пряма сума будь-якої множини нескінченно циклічних груп з кільцем операторів R.

Теорема 1.14. Будь-який R-модуль ізоморфний фактор-модулю деякого вільного R-модуля, при комутативному R R-модуль з n утворюючими ізоморфний фактор-модулю вільного R-модуля рангу n.

Теорема 1.15. Будь-яка вільна доступна підгрупа вільного R-модуля, відмінного від нуля, вільна якщо всі правосторонні ідеали кільця R є головними.

Розглянемо теорію Тейхмюллера. Нехай $U_n(R)$ – база вільного R-модуля з n утворюючими, V – підгрупа.

Теорема 1.16. Всі лівосторонні і правосторонні ідеали кільця операторів R є головними[19].

Тобто якщо A – лівий або правий ідеал кільця K, тоді в A існує елемент α, що $A = R\alpha\ (A = \alpha R)$. Нехай елемент b кільця R, який міститься в ідеалі $R\alpha, \alpha \neq 0$. В R існує елемент r, що $b = r\alpha$, тоді α – прямий дільник елемента b. Тоді $Rb \leq R\alpha$. Якщо $Rb = R\alpha$, b – правий дільник елемента α, $\alpha = r'b$ де r і r' є дільниками одиниці, $rr' = \varepsilon$ дільники нуля. Якщо $rr' = \varepsilon$ тоді $r'rr' = r'$.

Елемент α – лівий дільник елемента b, якщо b міститься в правосторонньому головному ідеалі αR. Елемент α – повний дільник елемента b, якщо він є правим і лівим дільником одночасно і якщо b міститься в $R\alpha \cap \alpha R$. Якщо в кільці R існують лівосторонні ідеали $R\alpha$ і Rb, тоді їх сума є головним ідеалом і в $R \in$ елемент c і $(R\alpha, Rb) = Rc$, де c –найбільший спільний правий дільник елемента α і b. В $R\ \forall\ r', r'', r_1, r_2$, що $\alpha = r'c,\ b = r''c,\ c = r_1\alpha + r_2 b$.

В кільці R неможливо знайти нескінченну зростаючу послідовність лівосторонніх ідеалів. Тобто в R дана нескінченна не спадна послідовність.

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq.$$

Для правосторонніх ідеалів справедлива наступна теорема.

Теорема 1.17. В кільці R неможна знайти нескінченну спадну послідовність лівосторонніх (правосторонніх) ідеалів, які містять деякий лівосторонній (правосторонній) ідеал A, відмінний від нульового.

Розглянемо довільну не зростаючу послідовність лівосторонніх ідеалів

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq B_n \supseteq \cdots$$

Якщо $A = R\alpha, \alpha \neq 0$ і $B_n = Rb_n,\ n = 1, 2, \dots,$ існують елементи $r_1, r_2, \dots, r'_1, r'_2$, що $\alpha = r_n b_n,\ b_{n+1} = r'_n b_n,\ n = 1, 2, \dots$

Звідси $\alpha = r_{n+1} b_{n+1} = (r_{n+1} r'_n) b_n = r_n b_n$, тобто $r_{n+1} r'_n = r_n$. Тоді правосторонній ідеал $r_1 R, r_2 R, \dots, r_n R, \dots$ складають не спадаючу послідовність. Має місце рівність $r_n R = r_{n+1} R = \cdots$ З $r_n R = r_{n+1} R$ існує елемент r', що $r_{n+1} = r_n r'$, тобто $r_{n+1} = r_{n+1}(r'_n r')$ звідки $r'_n r' = \varepsilon$. Елемент r'_n є дільником одиниці, тому $B_{n+1} = B_n$.

Елемент α з кільця R називається таким, що не розкладається і не є дільником одиниці, якщо з рівності $\alpha = bc$ слідує, що b або c є дільником одиниці. Якщо елемент α розкладний у вигляді добутку множників $\alpha = b_1 b_2 \dots b_n$, які не є дільниками одиниці відповідає ланцюг лівих ідеалів $R_\alpha \subset R(b_2 \dots b_k) \subset \cdots \subset Rb_k \subset R$, які різні між собою і знаходяться в межах R_α і R. Якщо між R_α і R дан скінченний ряд різних лівосторонніх ідеалів $R_\alpha \subset Rc_1 \subset Rc_2 \subset \cdots \subset Rc_l \subset R$, тоді існують такі елементи $b_1, \dots, b_l$, які не є дільниками одиниці, що $\alpha = b_1 c_1$, $c_1 = b_2 c_2, \dots, c_{l-1} = b_l c_l$, тому $\alpha = b_1 b_2 \dots b_l c_l$.

Якщо b — лівий або правий дільник елемента α, тоді будь-який розклад елемента b в добуток нерозкладних множників доповнюється розкладом для елемента α, тоді будь-який розклад елемента b в добуток нерозкладних множників доповнюється розкладом для елемента α, тоді $r(b) < r(a)$, $r(b) = r(a)$ якщо a −дільник для b.

Теорема 1.18 (для абелевої групи з оператором).

Якщо всі правосторонні і лівосторонні ідеали кільця R є головними, тоді у вільному модулі $U_n(R)$ і в його підгрупі V можна обрати такі бази $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}$ і $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_k}, k \leq n$, що $\overline{v_i} = \overline{u_i}\varepsilon_1, i = 1, 2, \dots, k$, де ε_i − повний дільник для ε_{i+1}[46].

Лема 1.1. Якщо в елементі $u = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots + u_n\alpha_n$ з модуля $U_n(R)$ коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ і якщо δ − правий найбільший спільний дільник елемента α_1 і α_2 в кільці R змінюється база модуля $U_n(R)$, що в записі елемента відносно нової бази δ є одним із коефіцієнтів[40].

Лема 1.2. Якщо підмодуль V модуля $U_n(R)$ містить елементи

$$v_1 = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots + u_n\alpha_n,$$

$$v_2 = u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + \cdots + u_n\beta_n$$

де α_1 і β_1 −коефіцієнти, $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$ і якщо δ − лівий найбільший спільний дільник елемента α_1 і β_1 в кільці R, тоді δ − коефіцієнт при u_1 для одного з елементів підмодуля V[40].

Будь-який модуль з скінченним числом твірних над кільцем операторів з головними правосторонніми і лівосторонніми ідеалами, розкладається в пряму суму скінченного числа доступних циклічних підгруп.

РОЗДІЛ 2

ПРИМАРНІ І ЗМІШАНІ ГРУПИ

2.1. Повна абелева група

Абелева група $G -$ називається повною , якщо для $\forall\ \alpha \in G$ і будь-якого натурального числа n рівняння $nx = a$ має в G хоча б один розв'язок, будь-який елемент a можна розділити на будь-яке натуральне число з групи G. Для повноти групи G достатньо подільності будь-якого її елемента на буль-яке просте число[21].

Будь-яка фактор-група повної групи є повною і пряма сума будь-якої множини повних груп є повною групою.

Теорема 2.1. Якщо $A -$ повна абелева група, яка міститься в повній абелевій групі G, тоді $A -$ прямий доданок для G[21].

Нехай $B -$ максимальна підгрупа групи G і $B \cap A = 0$. Підгрупа A і B утворюють в групі G пряму суму. Якщо в групі $G\ \exists\ g, g \notin A + B$, тоді $A + B \cap\ \{g\} \neq 0$, так як $A \cap B + \{g\} = 0$, що суперечить з вибором множини B.Тоді $g \in A + B$, тобто $pg = a + b, a \in A, b \in B$, число є $p -$ простим, якщо замінити елемент g його часткою, яка не входить в $A + B$, але його чстка міститься в $A + B$. В підгрупі $A \in \alpha'$, що $p\alpha' = a$. Тоді $p(g - \alpha') = b \in B$, $g - \alpha' \notin A + B$. Нехай $g' = g - \alpha'$, будь-який елемент з підгрупи $\{g', B\}$ має вигляд $kg' + b'$, де $0 \leq k \leq p - 1, b' \in B$. Якщо $A \cap \{g', B\} \neq 0$, тоді в $A \in \overline{\alpha}$, $\overline{\alpha} \neq 0$, що $\overline{\alpha} = kg' + b'$, де $k \neq 0$, так як $A \cap B = 0$ і $pg' \in B$, числа p і k взаємно прості і $g' \in A + B$, що суперечить умові. $A \cap \{g', B\} = 0$ суперечить вибору підгрупи B. Тоді $G = A + B$.

Теорема 2.2. Сума будь-якої множини повних підгруп деякої абелевої групи є повна підгрупа.

Якщо в абелевій групі G містяться повні підгрупи A_a, тоді будь-який елемент з суми цих підгруп мають вигляд $\alpha_{\alpha_1} + \alpha_{\alpha_2} + \cdots + \alpha_{\alpha_k}$, де $\alpha_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$. Якщо $\overline{\alpha}_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}, p\overline{\alpha}_{\alpha_i} = \alpha_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, то елемент $\overline{\alpha}_{\alpha_1} + \overline{\alpha}_{\alpha_2} + \cdots + \overline{\alpha}_{\alpha_k}$ лежить в сумі підгруп A_a і $p(\overline{\alpha}_{\alpha_1} + \overline{\alpha}_{\alpha_2} + \cdots + \overline{\alpha}_{\alpha_k}) = \alpha_{\alpha_1} + \alpha_{\alpha_2} + \cdots + \alpha_{\alpha_k}$.

Сума $\overline{A}$ всіх повних підгруп абелевої групи G є в G макстмально повною підгрупою, $G = \overline{A} + G'$, доданок G' не містить повних підгруп .

Редукована абелева група – група яка не має повних підгруп[8].

Повні доданки групи G співпадають і тому редуційовні доданки між собою ізоморфні. Будь-яка абелева група розкладається в пряму суму двох груп: повну або редуційовну. До повних абелевих груп належить група типу R, яка ізоморфна адитивній групі всіх раціональних чисел і група типу p^{∞}, де p − просте число.

Теорема 2.3. Будь-яка повна абелева группа розкладається в пряму суму множини групи типу R і груп типу p^{∞}, де p − просте число.

Періодична частина F повної абелевої групи G є повною, так як будь-який розв’язок x рівняння $nx = a$ має разом з a скінченний порядок, $G = F + H$, де H − група без кручення і ізоморфна фактор-групі повної групи і є повною[8]. Підгрупа H розкладається в пряму суму примарних груп F_p , де p − просте число. Група F_p повна, якщо $a \in F_p$, тоді розв’язок рівняння $px = a$ має порядковий степінь p, $p \subset F_p$. Рівняння $qx = a$, де $(q, p) = 1$ і має розв’язок в підгрупі $\{\alpha\}$.

Для повної групи без кручення і повної групи примарної по p, якщо G − повна група без кручення і a − елемент даної групи $(\alpha \neq 0)$, тоді елементи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, де $\alpha_1 = \alpha$, $n\alpha_n = \alpha_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$. Ці елементи породжують в G підгрупу типу R. Тоді позначимо через M максимальну лінійну незалежну систему групи G. Елементи цією системи включаються в підгрупу типу R. З лінійної незалежності системи M слідує, що сума підгруп G'є прямою їх сумою і співпадає з групою G. Тобто, будь-який елемент $b \in G$ лінійно залежить від M і виконується рівність $nb = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$, де $n \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in M$. Існує елемент c в підгрупі G', який лінійно залежить від M, тому $n(b - c) = 0$ і $b = c$ відповідно $G' = G$.

Якщо група примарна по p, тоді будь-який елемент повної примарної групи міститься в підгрупі типу p^∞. Нехай в повній групі міститься елемент α порядку p^k, тоді $\alpha_1 = p^{k-1}\alpha$, $\alpha_2 = p^{k-2}\alpha, \ldots$, $\alpha_{k-1} = p\alpha$, $\alpha_k = \alpha$.

Елемент α_n, де $n \geq k$, елемент α_{n+1} один з розв'язків рівняння $px = \alpha_n$. Елементи α_1, $\alpha_2, \ldots$, $\alpha_n, \ldots$ породжують підгрупу типу p^∞.

В повній примарній групі G трансфінітним процесом вибирається множина підгруп типу p^∞, що сума G' – пряма сума. Слідує показати, що G'співпадає з G. Якщо група G містить елемент α, $\alpha \notin G'$і $G' \cap \{\alpha\} = 0$, тоді включаючи елемент α в підгрупу типу p^∞ слідує заперечення визначення підгрупи G'. Якщо $p^k\alpha \in G'$, але $p^{k-1}\alpha \notin G'$, тоді згідно з визначенням повноти групи G' в ній існує α', що $p^k\alpha' = p^k\alpha$. Елемент $\alpha - \alpha' \neq 0$, перетин його циклічних підгруп з G' рівне нулю. Тому група G є прямою сумою груп типу p^∞.

Теорема 2.4. Будь-який прямий розклад повної абелевої групи можна продовжити до розкладу в пряму суму груп типу R і типу p^∞.Будь-які два розклади повної групи в пряму суму груп типу R і типу p^∞ ізоморфні між собою[10].

Теорема 2.5. Над полем раціональних чисел, будь-яка повна абелева група без кручення G є векторним простором .

Теорема 2.6. Будь-яка абелева група є підгрупою деякої повної абелевої групи.

Теорема 2.7. Абелева група G є повною, якщо виділяється прямим доданком з будь-якої абелевої групи і є її підгрупою.

Теорема 2.8. В будь-якій повній абелевій групі , яка містить групу G, знайдеться хоча б одна мінімальна підгрупа, яка містить групу G. Між двома мінімальними повними групами, які містять G існує ендоморфізм, що продовжує тотожній автоморфізм групи G.

2.2. Прямі суми циклічних груп. Сервантні підгрупи

Для примарних груп існують критерії розкладу абелевої групи в пряму суму циклічних груп. Якщо група G примарна за простим числом p, тоді множина G_1 всіх елементів порядку p є підгрупою і називається нижнім шаром групи G. Тоді елемент $\alpha \in G$, де $G -$ примарна група, називається елементом нескінченної висоти, якщо $\alpha \neq 0$ і k будь-яке число, тоді рівняння $p^k x = \alpha$ має в G хоча б один розв'язок. Якщо рівняння має розв'язок лише при $k \leq n$, тоді $\alpha -$ має скінченну висоту (тобто висоту n)[41].

Якщо елементи α_1 и α_2 мають в групі G висоти h_1 и h_2, тоді при $h_1 < h_2$ висота елемента $\alpha_1 + \alpha_2$ рівна h_1 , при $h_1 = h_2 = h$ висота елемента $\alpha_1 + \alpha_2 \geq h$. Якщо елемент α має висоту h , тоді висота елемента $p\alpha \geq h + 1$. Якщо елементи α і b породжують одну і ту ж циклічну підгрупу, тоді їх висоти співпадають в групі G. Якщо група G розкладається в пряму суму, тоді елемент, який міститься в деякому прямому доданку, має в ньому таку ж висоту, як і в групі G. Висота довільного елемента прямої суми рівна найменшій з висот його компонента.

В повних примарних групах будь-який елемент має нескінченну висоту. Якщо будь-який елемент нижчого шару примарної групи G має в G нескінченну висоту, тоді група G є повною. Нехай всі елементи групи G, які мають порядок p^n мають нескінченну висоту. Якщо $\alpha -$ будь-який з цих елементів і $b_1, b_2 -$ розв'язки рівняння $px = a$, тоді елемент $b_1 - b_2$ має порядок p і тому має нескінченну висоту.

Для циклічних груп виконується критерій Кулікова, а саме: що примарна абелева група G тоді і тільки тоді розкладається в пряму циклічних груп, якщо вона є об'єднанням зростаючої послідовності

$$A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq A^{(n)} \subseteq \cdots$$

підгруп в яких висоти елементів в групі G скінченні і обмежені в сукупності[41].

Будь-який елемент z порядку p з групи G, який міститься в $G_1 \subset F$ в підгрупі F, має в підгрупі F таку ж висоту, як в групі G. Тоді елемент z подається у вигляді

$$z = x_{\alpha_1}{}' + x_{\alpha_2}{}' + \cdots + x_{\alpha_n}{}',$$

де елемент $x_{\alpha_i}{}', i = 1, 2, \dots, n$, є відмінним від нуля кратним елемента x_{α_1} і має висоту h_{α_i} в групі G і підгрупі F. Висота h елемента z в підгрупі F буде рівна розкладу

$$F = \sum_{\alpha < y} \{y_a\},$$

де h_{α_i}, $i = 1, 2, \dots, n$ найменше число. Висота цього елемента в групі G не може бути менше або більше h. Нехай індекс k такий, що $h_{\alpha_k} = h$, але $h_{\alpha_i} > h$ при $i > k$. Тоді в сумі

$$z = (x_{\alpha_1}{}' + \dots + x_{\alpha_k}{}') + (x_{\alpha_{k+1}}{}' + \dots + x_{\alpha_n}{}')$$

другий доданок або відсутній (при $k = n$), або його висота в $G > h$. Перший доданок не міститься в підгрупі C_{α_k} і його висота в G не більша висоти елемента x_{α_k}, тобто не більша $h_{\alpha_k} = h$. Висота в G елемента z, який утворюється в результаті додавання двох елементів з різними висотами, рівна меншій із цих висот і не більша h. Елемент z має в G і F однакову висоту. Якщо G відміна від F , тоді g один з елементів найменшого порядку з групи G, $g \notin F$ і має порядок p^s, $s \geq 2$. Елемент $p^{s-1}g$ має порядок p і міститься в F, має в F і G однакову висоту. Тоді $\exists f \in F$, що $p^{s-1}f = p^{s-1}g$. Порядок елемента $g - f$ не більше p^{s-1}, тобто $g - f$ міститься в F, тоді елемент g повинен належати F. Звідси слідує, що $G = F$.

Справедливі наступні теореми Прюфера:

Теорема 2.9 (перша теорема Прюфера для теорії примарних абелевих груп). Будь-яка примарна група з обмеженими в сукупності порядками елементів розкладається в пряму суму циклічних груп[40].

Теорема 2.10 (друга теорема Прюфера для теорії примарних абелевих груп). Будь-яка зчисленна примарна група, яка не містить елементів нескінченної висоти, розкладається в пряму суму циклічних груп[40].

Як наслідок з критерію Кулікова слідує, що будь-яка підгрупа $H \in G$, розкладається в пряму суму циклічних груп, де $G -$ група яка розкладається в пряму суму циклічних груп.

Тобто, будь-яка підгрупа H абелевої групи G яка розкладається в пряму суму циклічних груп, сама розкладається в пряму суму циклічних груп. Якщо абелева група G розкладається в пряму суму циклічних груп, тоді будь-який прямий розклад цієї групи можна продовжити до розкладу з циклічними прямими доданками. Якщо абелева група G розкладається в пряму суму циклічних груп, тоді будь-які два її прямі розклади з циклічними доданками з нескінченними і скінченними примарними, ізоморфні між собою.

Кількість нескінченних циклічних доданків в будь-якому прямому розкладі рівна рангу групи G і не залежить від вибору розкладу. Прямі доданки одного з розкладів, які мають порядок, що є степенем простого числа p, породжують примарну підгрупу, яка залежить від вибору розкладу.

Нехай в групі G виберемо розклад групи в пряму суму циклічних груп, де $\mathrm{A}^{(\mathrm{n})}$ – сума прямих доданків з розкладу, порядок яких рівний p^{n}, якщо таких доданків немає, тоді $\mathrm{A}^{(\mathrm{n})} = 0$. Тоді $\mathrm{G} = \mathrm{A}^{(1)} + \mathrm{A}^{(2)} + \cdots + \mathrm{A}^{(\mathrm{n})} + \cdots$ Нижній шар групи G розкладається в пряму суму нижніх шарів групи $\mathrm{A}^{(\mathrm{n})}$,

$$\mathrm{G}_1 = \mathrm{A}_1{}^{(1)} + \mathrm{A}_1{}^{(2)} + \cdots + \mathrm{A}_1{}^{(\mathrm{n})} + \cdots$$

Нехай $\mathrm{B}^{(\mathrm{n})} = \mathrm{A}_1{}^{(\mathrm{n})} + \mathrm{A}_1{}^{(\mathrm{n}+1)} + \cdots$, тоді $\mathrm{B}^{(\mathrm{n})} = \mathrm{A}_1{}^{(\mathrm{n})} + \mathrm{B}^{(\mathrm{n}+1)}$, звідки $\mathrm{A}_1{}^{(\mathrm{n})} \simeq \mathrm{B}^{(\mathrm{n})}/\mathrm{B}^{(\mathrm{n}+1)}$, $\mathrm{n} = 1, 2, \dots$ Підгрупа $\mathrm{B}^{(\mathrm{n})}, \mathrm{n} = 1, 2, \dots$, визначається незалежно від прямого розкладу групи G, ця підгрупа містить всі ті і тільки ті елементи порядку p з G, висота яких в $\mathrm{G} \geq \mathrm{n} - 1$. Підгрупа $\mathrm{A}^{(\mathrm{n})}$ визначається самою групою G з точністю до ізоморфізму. Ізоморфізм двох будь-яких розкладів групи G в пряму суму доводиться, якщо група $\mathrm{A}^{(\mathrm{n})}$ – пряма сума циклічних груп одного і того ж порядку p^{n} і визначається нижнім шаром і числом n.

Теорема 2.11. Будь-яка абелева група є об’єднанням зчисленої зростаючої послідовності прямих сум циклічних груп[58].

Для груп типу R і груп типу p^{∞} є об’єднанням зростаючих послідовностей циклічних груп. Довільна абелева група G міститься в деякій повній групі $\overline{G}$ і є об’єднанням перетинів з тими прямими сумами циклічних груп, об’єднанням зростаючих послідовностей, які співпадають з $\overline{G}$. Перетини також будуть прямими сумами циклічних груп.

Підгрупа C абелевої групи G називається сервантною, якщо для будь-якого елемента c з C і будь-якого натурального числа n з розширення в групі G рівняння $nx = c$ слідує його розв’язок в підгрупі C[40].

Приклади сервантних підгруп: група G, нульова підгрупа, прямі доданки даної групи і її періодична частина.

Якщо підгрупа C сервантна в групі G, підгрупа C' сервантна в C, тоді C' сервантна в G, тобто об’єднання зростаючої послідовності сервантних підгруп є сервантним.

Теорема 2.12. Якщо підгрупа C сервантна в групі G, тоді при взаємно однозначній відповідності , яка існує між підгрупами групи G/C і підгрупами групи G, $C \subset G$, сервантні підгрупи відповідають одна одній[40].

Для примарних груп введемо наступне визначення сервантної підгрупи.

Визначення Підгрупа C примарної по p групи G тоді і тільки тоді сервантна в G, якщо будь-який елемент з C має в C таку ж висоту що і в групі G.

Якщо сервантна підгрупа C, $C \in G$, де $G-$ примарна група, мыстить нижній шар групи G, тоді C співпадає з G. Тобто, якщо група Gвідмінна від C і $p^n (n > 1)$ —найменший порядок елемента α з G який не належить C. Елемент $p\alpha \in C$, в зв'язку з сервантністю C ,в $C \exists c$ і виконується рівність $pc = p\alpha$. Елемент $\alpha - c \in$ підгрупі C і має порядок p, відповідно тоді і елемент $\alpha \in C$.

Теорема 2.13. Будь-яка примарна група G, містить сервантну підгрупу, яка не є прямим доданком для G та розкладається в пряму суму циклічних груп з необмеженими в сукупності порядками[30].

Наступні теореми обґрунтовують умови, при яких сервантна підгрупа буде прямим доданком.

Теорема 2.14. Підгрупа C є прямим доданком для групи G, якщо підгрупа C сервантна в абелевій групі G і фактор-група $\overline{G} = G/C$ розкладається в пряму суму циклічних груп[30].

Теорема 2.15. Підгрупа C є прямим доданком для групи G, якщо сервантна підгрупа C абелевої групи G періодична і порядки її елементів в сукупності обмежені[30].

Лема 2.1. Елемент α міститься в циклічному прямому доданку порядка p^{n+1} групи G, якщо елемент α примарної по p групи G має порядок p і скінченну висоту n.

З леми слідує, що будь-яка нерозкладна примарна група є або циклічною, або групою типу p^{∞}.

Слідує наступний висновок, що примарна група не може розкладатись в пряму суму нерозкладних груп, якщо вона вона не є прямою сумою циклічних груп і груп типу p^{∞}.

2.3. Примарні групи

Примарна абелева група розкладається в пряму суму циклічних груп не містить елементів нескінченної висоти тому, що висота елемента прямої суми рівна найменшій висоті його компонента, але висота будь-якого елемента циклічної групи є скінченною[13]. Згідно з другою теоремою Прюфера в зліченному випадку прямими сумами циклічних груп відкидаються всі примарні групи без елементів нескінченної висоти.

Нехай дано елемент α, $\alpha \in K_n$ і $\alpha \notin K_{n-1}$, який має порядок p^n. Елемент $p^{n-1}\alpha \in K_1$, але перші $n-1$ місця в записі будуть нулями і мають вигляд $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$. Тому можемо зробити висновок, що в підгрупі K_1, що є нижнім шаром групи K, немає елементів які в групі Kмають нескінченну висоту. Тобто твердження про те, що група K не містить елементів нескінченної висоти є істинним.

Припустимо, що група K розкладається в пряму суму циклічних груп. Нехай H^k – пряма сума всіх циклічних прямих доданків порядку p^k. Якщо H_1^k – нижній шар підгрупи H^k, тоді підгрупа K_1 –пряма сума всіх підгруп H_1^k. Група K_1 має міцність континуум, тоді хоча б одна з підгруп H_1^k, $(k = 1, 2, \dots)$ нескінченна[13]. Тобто якщо

$$F_n = \sum_{k=n}^{\infty} H_1^k ,$$

тоді для елемента n підгрупа F_{n+1} повинна мати в підгрупі F_n нескінченний індекс. Підгрупа F_n складається з елементів підгрупи K_1, висота яких в групі $K \geq n-1$. Перші елементи в записі $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ мають бути нулями. Слідує, що при будь-якому n індекс підгрупи F_{n+1} в підгрупі F_n скінченний і рівний p. Звідси слідує, що група K не може розкладатись в пряму суму циклічних груп.

Згідно з теорією Кулікова, для будь-якої незліченної міцності m існує примарна група цієї ж міцності, яка не містить елементів нескінченної висоти і не допускає прямих розкладів, тому міцність всіх прямих доданків не більша ніж в m'.

Базисна підгрупа – це підгрупа B примарної абелевої групи G, яка є сервантною в G і розкладається в пряму суму циклічних груп, а фактор-група G/B – повна група[40]. В будь-якій повній примарній групі єдиною базисною підгрупою є нульова підгрупа. Коли порядки елементів групи обмежені в сукупності, тоді будь-яка пряма сума примарних циклічних груп є власною базисною підгрупою.

Теорема 2.16. Будь-яка примарна абелева група G містить базисні підгрупи.

Група G містить сервантні підгрупи з обмеженими в сукупності порядками елементів. З даного твердження і з того, що об'єднанням зростаючої послідовності сервантних підгруп є сервантна підгрупа слідує, що в групі G знайдеться зростаюча послідовність підгруп

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots,$$

які володіють наступними властивостями:

- будь-яка підгрупа $B_n, n = 1, 2, \ldots$, сервантна в G;
- порядки елементів з B_n не перевищують числа p^n;
- підгрупа B_n не включається в велику підгрупу з двома попередніми властивостями.

Теорема 2.17. Всі базисні підгрупи примарної абелевої групи G ізоморфні між собою.

Примарні групи без елементів нескінченної висоти можна розкласти на класи які перетинаються, розмістивши до одного класу групи, базисні підгрупи яких ізоморфні. Будь-яка примарна група розкладається в пряму суму циклічних груп і визначає певний клас підгруп[46].

Розглянемо клас примарних груп без елементів нескінченної висоти. Нехай B базисна підгрупа групи G, яка розкладається в пряму суму циклічних груп і $B^{(n)}$ – пряма сума доданків порядку p^n, де $n = 1,2, \ldots$, якшо нема доданків цього порядку, тоді $B^{(n)} = 0$. Повна пряма сума всіх груп $B^{(n)}$ і періодична частина цієї суми називається замиканням групи B і позначається $\overline{B}$. Група $\overline{B}$ складається з елементів які послідовно взяті по одному з кожної групи $B^{(n)}$, порядки цих елементів обмежені в сукупності і додавання послідовностей виконується по компонентам. Група $\overline{B}$ однозначно визначається групою B, як наслідок ізоморфізму всіх розкладів групи B в пряму суму циклічних груп. Група B – підгрупа групи $\overline{B}$ і складається з усіх послідовностей, які містять скінчену кількість нульових елементів. Тобто група B співпадає зі своїм замиканням $\overline{B}$ тільки тоді, коли порядки елементів в B обмежені в сукупності. Це означає, що група B –базисна підгрупа замикання $\overline{B}$.

Теорема 2.18. Існують примарні групи без елементів нескінченної висоти, які не розкладаються в пряму суму циклічних груп[40].

Нехай B – примарна група, яка розкладається в пряму суму циклічних груп і є зчисленною, і мітить елементи великих порядків. Замикання $\overline{B}$ має міцність континуум, а сама група $\overline{B}$ не може розкладатись в пряму суму циклічних груп, так як в ній не можуть одночасно бути дві не ізоморфні базисні підгрупи, а саме сама група $\overline{B}$ і група B . Це твердженнч суперечить теоремі про ізоморфізм всіх базисних підгруп даної примарної групи.

Теорема 2.19. Всі примарні абелеві групи без елементів нескінченної висоти в яких базисні підгрупи ізоморфні групі B , виключаються підгрупами групи $\overline{B}$ — замикання групи B, які містять B і образи яких в фактор-групі $\overline{B}/B$ — повні підгрупи.

Примарних груп без елементів нескінченної висоти, можна розкласти на класи що перетинаються. В один клас відносять ті групи, в яких базисні підгрупи ізоморфні. Будь-яка примарна група розкладається в пряму суму циклічних груп і при цьому визначає певний клас,так як є базисною підгрупою для самої себе[11]. В кожному класі що розглядається міститься така група. Опис всіх примарних груп без елементів нескінченної висоти,зводиться до розгляду груп з базисною підгрупою B.

Теорема 2.20. Якщо порядки елементів в B обмежені в сукупності, тільки тоді група B співпадає зі своїм замиканням $\overline{B}$.Група B буде базисною підгрупою замикання $\overline{B}$[13].

Теорема 2.21. Всі примарні абелеві групи без елементів нескінченної висоти в яких базисні підгрупи ізоморфні групі B , виключаються підгрупами групи $\overline{B}$,де $\overline{B}$ — замикання групи B , які містять B і образи яких в фактор групі $\overline{B}/B$ є повними підгрупами[13].

2.4. Теорема Ульма

Примарні абелеві групи, які володіють елементами нескінченної висоти містять повні підгрупи, якщо елемент α примарної групи G має нескінченну висоту, тоді елементи $b_n, n = 1, 2, \dots$, які задовольняють рівність $p^n b_n = \alpha$ можуть не належати одній підгрупі типу p^∞. Теорема існування ульмовських факторів показує, що структура редукованих примарних груп більш складна ніж структура примарних груп без елементів нескінченної висоти. Множина всіх елементів нескінченної висоти (з нулем) є підгрупою групи G, якщо сума і різниця двох елементів нескінченної висоти з примарної групи G мають в G нескінченну висоту. Множину даних елементів позначимо G^1. G^2 – підгрупа, яка складається з всіх елементів підгрупи G^1, яка має в G^1 нескінченну висоту. Якщо в групі G визначенні підгрупи G^α для всіх порядкових чисел α, де $\alpha < \beta$ і утворюють спадну послідовність, тоді в якості G^β вибираємо підгрупу (при необмеженому β), яка складається з всіх елементів підгрупи $G^{\beta-1}$, які мають в $G^{\beta-1}$ нескінченну висоту, а при граничному β – перетин всіх підгруп $G^\alpha, \alpha < \beta$. Отримуємо спадну послідовність підгруп групи G, $G = G^0 \supset G^1 \supset \cdots \supset G^\alpha \supset \cdots$, яка відображається на деякому γ, де γ – порядкове число, потужність якого не перевищує потужність групи G, що $G^\gamma = G^{\gamma+1}$, тому $G^\gamma = G^\delta$ для всіх $\delta > \gamma$. Рівність $G^\gamma = G^{\gamma+1}$ показує, що всі елементи підгрупи G^γ мають в G^γ нескінченну висоту (G^γ – повна підгрупа). Якщо група G рецуційовна, тоді підгрупа $G^\gamma = 0$.

Нехай τ – перше порядкове число, для якого $G^\gamma = 0$. Число τ називають типом редукованаъ групи G. Групи, які не містять елементів нескінченної висоти, мають тип 1. Якщо G – редукована примарна група типу τ, тоді для всіх α, $\alpha < \tau$ фактор група $\overline{G^\alpha} = G^\alpha / G^{\alpha+1}$.

Послідовність груп $\overline{G^0}, \overline{G^1}, \dots, \overline{G^\alpha}, \dots \alpha < \tau$, називають *послідовність ульмовських факторів* групи G. З послідовності слідує , що вона одночасно визначається самою групою G, для підгрупи $G^\alpha, \alpha < \tau$, послідовністю ульмовських факторів є послідовність

$$\overline{G^\alpha}, \overline{G^{\alpha+1}}, \dots, \overline{G^\beta}, \dots, \alpha \le \beta < \tau.$$

Нехай примарна група G гомоморфно відображається в примарну групу H. Підгрупа A групи G переходить в нуль групи H, якщо всі елементи підгрупи A мають в G нескінченну висоту.

Образом будь-якого елемента нескінченної висоти в G (який не належать A) є елемент нескінченної висоти в H. Зворотне твердження, будь-який прообраз елемента нескінченної висоти в H є елементом нескінченної висоти в G. Перше твердження слідує з визначення гомоморфного відображення. Для доведення другого твердження введемо наступні позначення. Нехай $h -$ елемент нескінченної висоти в H і g, де $g -$ один з прообразів елемента h в G. Якщо $p^n h' = h, h' \in H$, якщо g' один з прообразів елемента h' в G, тоді $p^n g' = g + \alpha, \alpha \in A$.Тоді в групі G існує елемент b такий, що виконується рівність $p^n(g' - b) = g$, відповідно тоді елемент g має нескінченну висоту в групі G.

Теорема 2.22. Всі ульмовські фактори примарної групи G є групами без елементів нескінченної висоти[40] .

Теорема 2.23. Група $F = G/G^\sigma, \sigma \leq \tau$ є примарною групою типу σ і її послідовність ульмовських факторів $\overline{G^0}, \overline{G^1}, \ldots, \overline{G^\alpha}, \ldots, \alpha < \sigma$.

Розглянемо гомоморфне відображення групи G на групу F. При даному гомоморфізмі підгрупа G^1 відображається на підгрупу F^1, так як $G^1 \supseteq G^\sigma$, тоді фактор-група $G/G^1 = \overline{G^0}$ і $F/F^1 = \overline{F^0}$ ізоморфні (як наслідок з теореми про відповідність між підгрупами при гомоморфному відображенні).

Теорема 2.24. Якщо примарна група G $-$ примарна сума груп H_v,

$$G = \sum_{v} H_v,$$

тоді при будь-якому α, яке менше за тип групи G, буде

$$\overline{G^{\alpha}} \simeq \sum_{v} \overline{H_v{}^{\alpha}},$$

де $\overline{H_v{}^{\alpha}} = 0$, якщо α більше або рівне типу групи H_v.

Порядки елементів у всіх ульмовських факторах $\overline{G^{\alpha}}$, окрім фактора $\overline{G^{\tau-1}}$, якщо існує число $\tau - 1$, не обмежені в сукупності. Якщо $\alpha < \tau - 1$, тоді $G^{\alpha+1} \neq 0$ і в підгрупі можна знайти елемент, який має скінченну висоту, яка в підгрупі G^{α} нескінченна.

Теорема 2.25. Дано порядкове число τ, яке не більше потужності і для будь-якого $\alpha, 0 \leq \alpha < \tau$ існує зчисленна примарна група A_{α} без елементів нескінченної висоти при всіх можливих значеннях α, окрім $\alpha = \tau - 1$ (якщо число τ не є граничним), група A_{α} містить елементи великих порядків. Існує зчисленна редукована примарна група, яка має тип τ і послідовність $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{\alpha}, \dots, \alpha < \tau$, є послідовністю ульмовських факторів.

Дана теорема показує, що в зчисленному випадку редуковані примарні групи можуть бути різними. Будь-яке порядкове число зчисленної потужності є типом даної групи і будь-яка послідовність зчисленних примарних груп без елементів нескінченної висоти може бути послідовністю ульмовських факторів.

Теорема 2.26. (Теорема Ульма) Якщо зчислені редуковані примарні групи A і B маєть однаковий тип τ і для будь-якого $\alpha < \tau$ ільмовські фактори $\overline{A^{\alpha}}$ і $\overline{B^{\alpha}}$ ізоморфні, тоді групи A і B ізоморфні між собою[40].

Лема 2.2. Нехай в групі A і B задані скінченні підгрупи X і Y, які ізоморфні між собою і $\varphi -$ даний ізоморфізм підгруп X і Y. Даний ізоморфізм зберігає типи. Нехай елемент α групи A не міститься в X. Тоді в A можна знайти скінченну досконалу підгрупу $\overline{X}$, яка містить X і

α. В В знайдеться скінченна досконала підгрупа $\overline{Y}$, яка містить Y. Тоді $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ ізоморфні, а $\overline{\varphi}$ – їх ізоморфізм, який зберігає типи і продовжує ізоморфізм φ.

Теорема 2.27. Якщо G – зчисленна редукована примарна група, тоді будь-які два прямі розклади цієї групи тоді і тільки тоді володіють ізоморфними продовженнями, якщо її тип рівний одиниці[40].

Теорема Ульма також застосовується для незліченних випадків. Розглянемо приклад Кулікова. Нехай Z_i, $i = 1, 2, \ldots$, циклічна група порядку p^i , A – замикання прямої суми всіх циклічних груп, група послідовних елементів, які взяті по одному з кожної групи типу Z_i. Порядки всіх елементів кожної послідовності обмежені в сукупності. Нехай B – підгрупа, яка складаєься з елементів порядку p групи A, які мають скінченне число ненульових компонентів. C – підгрупа, яка складається з всіх елементів порядку p, які мають скінченне число ненульових компонентів з непарними індексами i, на компоненти з парними індексами обмежень не накладається. Тобто $B \subset C \subset A_1$, де A_1 – нижній шар групи A[23].

Теорема 2.28. Групи $H = A/B$ і $G = A/C$ не ізоморфні редукованій примарні групи типу 2 з ізоморфними ульмовськими факторами.

Нехай $H^* = A_1/B$, покажемо що H^* складається з елементів, які мають в групі H нескінченну висоту. Довільний елемент $h^* \in H^*$ має вид $h^* = \alpha + B$, де α – елемент порядку $p \in A$, компонент який має порядок i в елементі α позначимо через z_i. Якщо число n фіксоване, тоді для будь-якого $i > n$ в групі Z_i має елемент z'_i, що $p^n z'_i = z_i$. Нехай $z'_i = 0$ при $i \leq n$. Тоді $z' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_i, \ldots)$ елемент порядку p^{n+1} групи A, при чому $p^n z' - \alpha \in B$ і $p^n(z' + B) = h^*$. Тобто елемент h^* має в групі H нескінченну висоту, $H^* \subseteq H^1$, де H^1 – підгрупа елементів нескінченної висоти групи H. З $H = A/B$, $H^* = A_1/B$ слідує ізоморфізм $H/H^* \simeq A/A_1$.

Але $A/A_{\mathbf{1}} \simeq pA$ **,** так як відображення $\alpha \to p\alpha, \alpha \in A$ є гомоморфізмом групи A на підгрупу pA з ядром A_1. Тому $H/H^* \simeq pA$. Так як група pA, як і сама група A не містить елементів нескінченної висоти, тоді слідує, що $H^1 = H^*, H/H^1 \simeq pA$. Таким чином можна переконатись,що група $H -$ редуційовна група типу 2.

Знайдемо ульмовські фактори групи G. Нехай $D = \frac{C}{B}$, тоді $G = \frac{A}{C}, H = \frac{A}{B}$ і $G \simeq \frac{H}{D}$. З $D \subset H^*$ і $H^1 = H^*$ слідує, що $D \subset H^1$, тому з $G \simeq \frac{H}{D}$ слідує, що $G^1 \simeq \frac{H^1}{D}$, де $G^1 -$ підгрупа елементів нескінченної висоти групи G(якщо елемент $h + D$ має в групі $\frac{H}{D}$ нескінченну висоту), тоді для будь-якого n існують елементи $h_n \in H, d_n \in D$, що $p^n h_n = h + d_n$. В групі H елемент d_n має нескінченну висоту і тому висота елемента h нескінченна. З $G \simeq H/D$ і $G^1 \simeq H^1/D$ слідує $G/G^1 \simeq H/H^1$. Група H^1 має в $H^1 = H^*$ потужність континуум і складається з елементів порядку p[29]. Це твердження вірне і для групи G^1. З $G^1 \simeq H^1/D$ і $H^1 = H^*$ слідує визначення груп H^* і D, так що $G^1 \simeq A_1/C$. Фактор-група A_1/C складається з елементів порядку p і має потужність континуум. Використавши першу теорему Прюфера отримуємо ізоморфізм $G^1 \simeq H^1$.

З наведених вище тверджень можна зробити висновок, що ульмовські фактори групи G ізоморфні відповідним ульмовським факторам групи H і група $G -$ редукована група типу 2.

Знайдемо ульмовські фактори групи G, якщо позначити $D = C/B$, тоді $G = A/C$, $H = A/B$ і $G \simeq H/D$. З $D \subset H^*$і $H^1 = H^*$слідує $D \subset H^1$, з формули $G \simeq H/D$ слідує $G^1 \simeq H^1/D$, де $G^1 -$ підгрупа елементів нескінченної висоти групи G , якщо елемент $h + D$ в групі H/D нескінченну висоту, для $\forall\, n \,\exists\, h_n \in H$ і $d_n \in D$, що $p^n h_n = h + d_n$ і елемент d_n має в групі H нескінченну висоту і тому висота елемента $h -$ нескінчена.

З $G \simeq H/D$ і $G^1 \simeq H^1/D$ слідує $G/G^1 \simeq H/H^1$. Група H^1 має в $H^1 = H^*$ міцність континуум і складається з елементів порядку p. Для групи G^1 це твердження також істинне і з $G^1 \simeq H^1/D$, $H^1 = H^*$ і визначення групи H^* і D слідує, що $G^1 \simeq A_1/C$, а фактор-група A_1/C складається з елементів порядку p і має міцність континуум. З теорема Прюфера слідує ізоморфізм $G^1 \simeq H^1$. Тому можемо з даного твердження зробити висновок, що група G −редуційна група типу 2 і її ульмовські фактори ізоморфні відповідним ульмовським факторам групи H.[8]

Покажемо, що групи H і G не будуть ізоморфні. Розглянемо включення $H^1 \subset H_1, G^1 \subset G_1$, де H_1 і G_1 нижні шари груп H і G. Для цього достатньо довести, що фактор-групи H_1/H^1 і G_1/G^1 мають різні міцності.

З $H^1 = H^*$ слідує, що $H^1 = A_1/B$ і $H_1 = L/B$, де L − підгрупа групи A, яка складається з всіх елементів порядку p і елементів порядку p^2, які мають скінченну кількість відмінних від нуля компонентів порядку p^2. Тому слідує $H_1/H^1 \simeq L/A_1$. Фактор-група G_1/G^1 − злічення і $G^1 = A_1/C$. Так, як $D \subset H^1$ при гомоморфізмі групи H на групу $G \simeq H/D$ повним прообразом підгрупи G^1 є підгрупа H^1. З $H^1 = H^*$ слідує, що A_1 − повний прообраз підгрупи H^1 при гомоморфізмі групи A на групу $H = A/B$. При гомоморфізмі групи A на групу $G = A/C$ підгрупа G^1 в підгрупі A_1 є повним прообразом. Або $G_1 = K/C$, де K − підгрупа групи A, яка складається з всіх елементів порядку p і p^2, які мають скінченне число компонентів порядку p^2 з непарними індексами. Компонентів порядку p^2 з парними індексами може бути нескінчена кількість. Тому з $G_1 = A_1/C$ слідує, що $G_1/G^1 \simeq K/A_1$. Фактор-група K/A_1 має міцність континуум. Слідує, що групи Hі G не є ізоморфними.

2.5. Змішані абелеві групи

Змішана абелева група G є роздільною, якщо вона розкладається в пряму суму періодичної групи і груп без кручення[12]. При цьому, періодичний доданок співпадає з періодичною частиною F групи G. Доданок без кручення ізоморфний фактор-групі G/F. До роздільних груп відносяться всі прямі суми циклічних груп, всі повні групи, всі абелеві групи з скінченною кількістю утворюючих.

Теорема 2.29. Будь-яка абелева група тільки тоді є роздільною, якщо її періодична частина ізоморфна періодичній групі F, де F – розкладається в пряму суму повної групи і групи з обмеженою сукупністю елементів.

Лема 2.3. Якщо періодична група F розкладається в пряму суму двох груп, $F = F' + F''$ і якщо існує не роздільна група G, для якої F'' – періодична частина, тоді група $H = F' + G$ в якій періодична частина співпадає з F, також є не роздільною. Тобто якщо існує роздільність $H = F + H_0 = F' + F'' + H_0$, де H_0 – група без кручення, тоді фактор-група H/F' ізоморфна групі G і є роздільною[12].

З даної леми слідує, що група F примарна. Дана група F – редуційна примарна по p, де p – просте число і містить елементи великих порядків.

Нехай дана абелева група G, її система утворюючих складається з елементів групи F і зліченної множини елементів $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots$, всі відношення комутативні і існують між елементами групи F. Відношення

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(pv_{i+1} - v_i - a_i) = 0,$$

де $n \geq 1, k_i$ – цілі числа і $k_n \neq 0$. Елемент v_{n+1} має коефіцієнт який не дорівнює нулю, тому з відношення $pv_{i+1} = v_i + a_i, i = 1, 2, \ldots$ слідує, що будь-який елемент з F не може дорівнювати нулю. Група F – підгрупа групи G. З $pv_{i+1} = v_i + a_i, i = 1, 2, \ldots$ не слідує $kv_1 = a$, де $k \neq 0, a \in F$ порядое елемента v_1, який є нескінченним. Фактор-група G/F група без кручення і F максимально періодична підгрупа групи G.

Припустимо, що F є прямий додаток для G, тобто $G = F + H$. Тоді $v_i = f_i + h_i$, $f_i \in F, h_i \in H, i = 1, 2, \ldots$ З відношень $pv_{i+1} = v_i + a_i, i = 1, 2, \ldots$ слідує $a_i \in F$, $pf_{i+1} = f_1 + a_i$. Тоді $pf_2 = f_1 + a_1 = f_1 + b_1$. Нехай доведено, що

$$p^{i-1}f_1 = f_1 + b_{i-1}.$$

$$\text{Тоді } p^i f_{i+1} = p^{i-1}f_i + p^{i-a}a_i = f_1 + b_{i-1} + p^{i-1}a_i = f_1 + b_1,$$

так, як $p^i f_{i+1} \in F_i$, отримуємо що при $i = 1, 2, \ldots$ компоненти - f_1 та b_i лежать в одному суміжному класі підгрупи F_i [9]. Звідси слідує визначення елементів b_i і порядок елементів f_1 не менший, ніж порядок b_i, але тоді в виду збільшення порядків елементів b_i с і слідує протиріччя з скінченністю порядку елемента f_1. Доведено, що F не є прямою складовою для G.

З попередніх прикладів видно, що група F є прямою сумою нескінчености безкінечних примарних груп, які відносяться до різних простих чисел $p_1, p_2, \ldots p_i \ldots$,

$$F = \sum_i F_{p_i}.$$

В кожній підгрупі F_{pi} обираємо відмінний від нуля елемент a_i висоти 0 і в наступним видом будуємо абелеву групу G: її утворюючим є елементи групи F, і елементи $v_0, \ldots v_1, \ldots, v_i \ldots, a$. Визначальним є відношення комутативності, всі відношення які існують між елементами групи F, і відношенням $p_i v_i = v_0 + a_i, i = 1, 2, \ldots.$

Нехай F є прямим додатком для G, тобто $G = F + H$. Тоді

$v_i = f_i + h_i,\ f_i \in F, h_i \in H,\ i = 0, 1, 2, \ldots$. Слідує, що $a_i \in F$

$p_i f_i = f_0 + a_i, i = 1, 2, \ldots$

Елемент f_0 є сума кінцевого числа компонент, отриманих додатків розкладання $F = \sum_i F_{p_i.}$, тому можна найти такий номер j, компонента елемента f_0 в F_{pj} рівний нулю. Якщо компонент елемента f_j в прямому додатку F_{pj} буде позначена через f_j , тоді рівняння $p_i f_i = f_0 + a_i$, $i = 1, 2, \ldots$ приводить при $i = j$ до рівняння

$$p_i f_i = a_j$$

що, суперечить, тому, що елемент a_j має в групі F_{pj} нульову висоту. Теорема доведена.

Умови розщеплення змішаної групи G можна шукати також у вигляді зав'язків між значеннями її періодичної частини F і фактор-групи G/F. Це питання розглядав Бер[54]. Він накладає на групу без кручення G/F деякі обмеження,які завідома виконуються.

Розщеплення змішаної групи визначається з змішаних абелевих груп. Будь-яка змішана абелева група G розкладається в пряму суму.

Якщо періодична частина F групи G повна, то F служить для G прямим додатком. Якщо ж F неповна група, тоді використовуючи результати леми слідує, що F циклічно прямий доданок A. Підгрупа A міститься в F і в групі G, так як ця підгрупа скінченна, тобто порядки її елементів обмежені в сукупності G.

РОЗДІЛ 3

АБЕЛЕВІ ГРУПИ БЕЗ КРУЧЕННЯ

3.1. Типи елементів групи без кручення

В абелевій групі без кручення рівняння $nx = a, n > 0$,може мати лише один розв'язок, тому що різниця двох розв'язків є елементом скінченного порядку. З даного твердження слідують наступні теореми.

Теорема 3.1. Підгрупа C абелевої групи G, яка не має кручення, буде серватною в G , якщо фактор-група G/C є групою без кручення.

Теорема 3.2. Перетин будь-якої множини сервантних підгруп абелевої групи без кручення G є також сервантним в даній групі.

Теорема 3.3. Сервантна підгрупа групи без кручення G , що породжена множиною M, складається з всіх елементів групи G, які лінійно залежать від множини M.

Будь-яка група без кручення складається з повної абелевої групи без кручення, тобто в прямій сумі деякої множини груп з типом R[12].

Теорема 3.4. Будь-яка абелева група без кручення G скінченного рангу n міститься в повній абелевій групі без кручення рангу n, тобто в прямій сумі n груп типу R.

Група без кручення рангу 1 ізоморфна підгрупі адитивної групи раціональних чисел R[9].

Нехай задана характеристична послідовність

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots),$$

де $\alpha_n = 0$ або $\alpha_n \in N$або $\alpha_n = \infty$. Характеристики α і β

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)$$

еквівалентні якщо $\alpha_n = \beta_n$ для всіх n окрім скінченного числа для яких $\alpha_n, \beta_n \neq \infty$.

Введемо α і b, такі що $\alpha \leq b$. Характеристика α має тип α, характеристика β має тип b і для всіх b виконується нерівність $\alpha_n \leq \beta_n$, при цьому слід зазначити, що ∞ завжди більше за будь-яке натуральне число ($\infty > N$).

Справедливі наступні твердження:

1) $\alpha \leq \alpha$;
2) якщо $\alpha \leq b, b \leq c$, тоді $\alpha \leq c$;
3) якщо $\alpha \leq b, b \leq \alpha$, тоді $\alpha = b$[9].

Найменший тип має характеристику $(\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$ і називають типом R. Тип який має характеристику $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ також є найменшим і його називають нульовим.

Відомі типи α і b, в яких обрані характеристики α і β. Введене позначення $\gamma_n = \min(\alpha_n, \beta_n)$, $n = 1, 2, \dots$, тип c має характеристику $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$ і не залежить від вибору характеристики α і β і типу α і b. Тип c утворився внаслідок добутку типів α і b, $c = \alpha b$.

Для абелевих груп без кручення рангу 1 справедлива наступна теорема.

Теорема 3.5. Для будь-якої абелевої групи без кручення рангу 1 однозначно відповідає деякий визначений тип. Не ізоморфні групи відповідають різним типам.

Теорема 3.6. Для будь-якого типу α знайдеться підгрупа групи R, яка відповідає даному типу.

Взаємно однозначна відповідність утворюється між всіма типами і всіма не ізоморфними групами без кручення рангу 1[12]. Групі R відповідає тип R, нескінченній циклічній групі відповідає нульовий тип, адитивній групі – раціональні числа знаменники яких є степенями простого числа p_n. Адитивній групі раціональні числа знаменники яких не діляться на квадрати чисел простого числа відповідає тип з характеристикою $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Група типу α - група без кручення G рангу 1 з типом α.

Теорема 3.7. Група G ізоморфна підгрупі групи H, якщо $\alpha \leq b$, де α і b типи відповідних груп без кручення G і H з рангом 1. Якщо групи G і H ізоморфні підгрупі іншої групи, тоді вони ізоморфні між собою[10].

Властивості типів елементів абелевої групи без кручення G:

1) Два елементи які лінійно залежать один від одного, мають однаковий тип, оскільки елементи породжують одну і ту ж сервантну підгрупу;
2) Якщо елементи α і b мають відповідні типи α і b, тоді тип суми $\alpha + b, (\alpha + b \neq 0)$ і $\alpha + b \geq \alpha b$.
3) Якщо $G = A + B, \alpha \in A, b \in B$ і типи елементів α і b відповідно α і b, тоді тип елемента $\alpha + b = \alpha b$.

3.2. Абсолютно розкладні групи

Абелеві групи без кручення, розкладені до прямої суми групи рангу 1 називаються розкладеними.

Теорема 3.8. Якщо абелева група без кручення G цілком розкладається, то всі розкладання цієї групи до прямої суми груп рангу 1 ізоморфні між собою[39].

$$G = \sum_a A_a$$

Розглянемо групи, розкладені до прямої суми ізоморфних груп рангу 1.

Теорема 3.9. Якщо абелева група без кручення G є прямим розкладом

$$G = \sum_a A_a$$

всі додатки A_a якого мають ранг 1, однаковий тип a, якщо підгрупа Внадходить в G, то B сама розкладається до прямої суми груп рангу 1 та типу a.

Теорема 3.10. Якщо група G розкладається до прямої суми груп рангу 1, який має один і той же тип a,тоді будь-який прямий додаток цієї групи розкладається до прямої суми груп рангу 1 та типу a[40].

Доведемо загальну теорему.

Нехай група G розкладена, безліч типів додатків в її розкладанні

$$G = \sum_a A_a$$

зводяться до прямої суми груп рангу 1. Тоді будь-який доданок групи G розкладний.

Для доведення визначимо через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ різні типи доданків, які входять в розклад

$$G = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$$

Нехай тип a_1 буде одним з максимальних серед типів. Тоді компонент підгрупи D_1 в прямому доданку B_β другого розкладу співпадає з перетином

$$C_\beta = D_1 \cap B_\beta$$

Компонент підгрупи не може бути більше цього перетину, так як будь-яке відображення на свою компоненту виду a_1 і на будь який елемент підгрупи D_1 не може переходити в елемент групи G.

$$G = \sum_\beta C_\beta$$

отримаємо

$$G = \sum_\beta C_\beta + D_2 + \ldots + D_n$$

Підгрупа B_β має прямий доданок C_β групи G, тому для β розклад

$$B_\beta = C_\beta + C'_\beta.$$

Розклад показує, що підгрупи

$$D_2 + \cdots D_n, \sum_\beta C'_\beta$$

ізоморфні між собою, тому на основі припущеня для розкладу $D_2 + \cdots D_n, \sum_\beta C'_\beta$ існують ізоморфні продовження[10].

Теорема 3.11. Будь-який прямий додаток цілком розкладної групи кінцевого рангу є цілком розкладним.

3.3. Поле p-адичних чисел

Теорема 3.12. Виберемо просте число p, яке визначимо в полі раціональних чисел, $\Re p$ – адична норма. Якщо a є раціональне число, $a \neq 0$, то можна записати

$$a = a' p^n$$

де a' є нескорочений дріб, чисельник і знаменник якого взаємно прості числа, с p, а n більші, рівні або менші нуля, p – адична норма числа а , яка називається числомp^{-n},

$$||a|| = p^{-n}$$

Якщо покласти $||0|| = 0$, тоді будь-якому раціональному числу а, буде поставлено до відповідності деяке не від’ємне число, відмінне від нуля при $a \neq 0$

$$||ab|| = ||a|| \cdot ||b||,$$

$$||a + b|| \leq \max(||b||, ||b||).$$

Знак $<$ в останньому відношенні може виконуватись лише при $||a|| = ||b||$. Далі, $||-a|| = ||a||$ тому

$$||a - b|| \leq \max(||b||, ||b||).$$

Послідовність раціональних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, не обов’язково різних, сходиться, якщо для будь-якого додатнього числа є натуральне число m, що

$$||a_i - a_j|| < \varepsilon \text{ при } i > m, j > m$$

Раціональне число b називається (p - адичне) межею послідовності, раціональних чисел $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ є таке число m, що

$$||b_i - b_j|| < \varepsilon \text{ при } i > m.$$

Така послідовність має границю та буде збіжною послідовністю.

$$1, 1 + p, 1 + p, \qquad p^2, 1 + p + p^2 + p^2, \dots$$

$$\dots, 1 + p + p^2 + \dots p^2 + \dots + p^{2(n-1)} + p^{2n}, \dots$$

Послідовність,яка має граничне число 0, міститься в колі $\mathfrak{R}$, у всіх збіжних послідовностей$\mathfrak{R}$. Фактор-кільце $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ є полем[20].

Поле $\mathfrak{R}$ називається поле p -адичних чисел, його елемент p -адичне число.

Визначимо в полі $\mathfrak{R}$ норму, p - адична норма поля $\mathfrak{R}$,тобто вона співпадає в полі $\mathfrak{R}$ з його вихідною p - адичною нормою. Нехай p -адичне число a, відмінне від нуля, визначається збіжною послідовністю $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$,

$$||a_i - a_j|| < \varepsilon \text{ при } i > m, j > m$$

тоді при $||a_i|| \neq ||a_j||$ з

$$||a_i = a_j|| = \max(||a_i||, ||a_j||)$$

Отже для будь-якого n існують такі $i > n$ і $j > n$, що $||a_i|| \neq ||a_j||$.

Теорема 3.13. В полі $\mathfrak{R}$ будь-яка збіжна послідовність маю межу[40].

Нехай дана збіжна послідовністьp - адичних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ Для будь-якого n можна знайти таке раціональне число a_n, що

$$||a_n - a_n|| < \frac{1}{n}$$

Звідси

$$||a_i - a_j|| = ||\left(a_i - a_j\right) + \left(a_i - a_j\right) + \left(a_j - a_j\right)|| \leq \max(\frac{1}{i}, ||a_i - a_j||, \frac{1}{j})$$

Тобто при доволі великих i та j ця форма буде довільно малою.

$$||\beta - a_n|| = ||(\beta - a_n) + (a_n - a_n)|| \leq \max(||\beta - a_n||, \frac{1}{n})$$

слідує, що β є границею послідовності (a_n).

Теорема 3.14. Поле служить замиканням для кільця $p-$ічних дробів $\mathfrak{R}_p$[40].

Так як будь-яке p - адичне число є межею послідовності раціональних чисел. Потрібно довести, що будь-яке раціональне число є p - адичною межею послідовності чисел з кільця $\mathfrak{R}_p$.

$$||n_o v \equiv (\mathrm{mod} p^{s+k})||$$

Теорема 3.15. Перетином кола $\mathfrak{J}$ з полем раціональних чисел $\mathfrak{R}$ служить кільце $\mathfrak{R}^{(p)}$ тих раціональних чисел, знаменник яких взаємно прості з p[11].

Теорема 3.16. Перетином кільця $\mathfrak{J}$ з кільцем p - адичних дробів $\mathfrak{R}_p$є кільце цілих раціональних чисел $\mathfrak{C}$.

Теорема 3.17. Кільце $\mathfrak{J}$ є замиканням кільця $\mathfrak{C}$[40].

Якщо ціле p - адичне число не рівне нулю тоді границею збіжної послідовності p - адичних чисел є $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Теорема 3.18. Кільце $\mathfrak{J}$ замкнене в полі $\mathcal{B}$.

Зі збіжності послідовності (a_n) слідує, що всі числа $a_n^{(k)}$, крім кінцевого числа, рівні між собою, тобто рівні числу $a^{(k)}$.

Теорема 3.19. Кільце $\mathfrak{J}$ має потужність континуум.

Теорема 3.20. Кільце $\mathfrak{J}$ компактне.

Нехай дана парна послідовність цілих чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Так як коефіцієнт при p^0 в канонічних записах цих чисел $0,1,\dots,p-1$, тоді в F обираємо нескінченну послідовність

$$a_i^1, a_2^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}, \dots,$$

яка складається з канонічних чисел які мають один і той же коефіцієнт при p^0.

Теорема 3.21. Якщо збіжна послідовність p - адичних чисел $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ має границю нуль, тому ідеал $p^n\mathfrak{J}$ має всі числа цієї послідовності, крім кінцевого числа.

Будь-яке p - адичне число може бути цілим числом, яке помножили на деяку додатню степінь числа p.

ВИСНОВКИ

В даній роботі ми переслідували ціль вивчення абелевих груп. Для досягнення бажаного результату були опрацьовані наукові роботи таких науковців: Курош А. Г., Беккер І.Х., Фукс Л., Завало С. Т., П. Кроулі. Таким чином, аналіз літератури відбувався на основі підручників, наукових статей з теми дослідження, наукових посібників.

Основними результатами роботи є виконання поставлених завдань:

1) Проведене дослідження науково-методичної літературу з теми дослідження.
2) Наведені визначення та опис основних понять теорії абелевих груп.
3) Систематизували теоретичний матеріал з теми дослідження.
4) Розглянуті наступні теореми: «теорема Тейхмюллера», «Існування ульмовських факторів», «теорема Ульма», «Абелева група з оператором», «Теорема про підгрупи абелевої групи з скінченною кількістю твірних», «Абелеві групи з оператором».
5) Розглянуті способи доведення теорем: «теорема Тейхмюллера», «Існування ульмовських факторів», «теорема Ульма», «Абелева група з оператором», «Теорема про підгрупи абелевої групи з скінченною кількістю твірних», «Абелеві групи з оператором».

Розглянувши всі перераховані в завданнях теореми, сдідують наступні узагальнення. Згідно з основною теоремою абелевих груп, будь-яка абелева група з скінченною кількістю твірних, розкладається в пряму суму циклічних груп. Слідує, що будь-яка абелева група з скінченною кількістю твірних, яка розкладається в пряму суму скінченної кількості циклічних підгруп є частиною скінченних примарних або частиною нескінченних підгруп. Щодо операцій додавання і множення в абелевих групах, множина всіх ендоморфізмів в абелевій групі утворює асоціативне кільце. Будь-яка абелева група є підгрупою повною абелевої групи. В свою чергу абелева група є повною, якщо виділяється прямим доданком з абелевої групи і одночасно є її підгрупою. Згідно з теорією Тейхмюллера, всі лівосторонні і правосторонні ідеали кільця операторів з скінченною кількістю твірних є головними. Згідно з теоремою Ульма, побудова зчисленної примарної групи визначається декою повною групою і послідовністю зчисленних примарних груп, які не містять елементів нескінченної висоти.

Розгляд теорії абелевих груп не втрачає актуальності, адже сучасні погляди стосовно даної теми опубліковані в роботах Б. Голдсміта, С. Охогейна , Г.С.Монка і С. Валлутіса.

СПИСОК ВИКОРИСТАННИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і теорія чисел. Практикум: В 2-х ч. / Завало С. Т., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1983. – Ч. 1. – 232 с.
2. Алгебра та геометрія : навч. посіб. / Д. М. Білонога, П. І. Каленюк ; М-во освіти і науки України, Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2014. — 380 с. : іл. — Бібліогр.: с. 373 (14 назв). — ISBN 978-617-607-581-3.
3. Алгебра // Українська радянська енциклопедія : у 12 т. / гол. ред. М. П. Бажан ; редкол.: О. К. Антонов та ін. — 2-ге вид. — К. : Головна редакція УРЕ, 1974–1985.
4. Андрійчук В.І., Забавський, Б.В. Лінійна алгебра. — Львів : Львівський національний університет імені Івана Франка, 2008. — ISBN 9789666136230.
5. Архангельская В. М. Элементарная теория чисел. – С.: Саратовский ун-т, 1963. – 253 с.
6. Бевз Г. П. Теорія чисел і теоретична арифметика. – К.: Радянська школа, 1963. – 210 с.
7. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп // Сиб. матем. журнал. 1964. Т. 5. No. 6. С. 1228- 1238.
8. Беккер И.Х. О голоморфах нередуцированных абелевых групп // Изв. вузов. Математика. 1968. № 8. С. 3-8.
9. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика.1974. Ш. 3. С. 3-13.
10. Беккер И.Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. вузов. Математика.1975. 3. С. 97-99.

11. Беккер И.Х. Абелевы голоморфные группы. // Междунар. конф. «Всесибирские чтения по матем. и мех». Избранные доклады. Т. 1. Математика. 1997. С. 43-47.

12. Беккер И.Х., Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. 1994. С. 3-52.

13. Беккер И.Х., Гриншпон С.Я. Почти голоморфно изоморфные примарные абелевы группы // Группы и модули: межвуз. тематич. сб. науч. трудов. 1976. С. 90-103.
14. Богопольский О.В. Введение в теорию групп / О.В. Богопольский. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 148 с.
15. Белоногов В.А. Задачник по теории групп / В.А. Белоногов. – Мо- сква: Наука, 2000. – 239 с.
16. Бородін О. І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. – 274 с.
17. Бухштаб А. А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.
18. Бухштаб, А.А. Теория чисел [Текст]: учебник / А.А. Бухштаб. - Издание второе, исправленное,- М.: Просвещение, 1966.- 384 с. 3. Малафіїк І. В. Дидактика: Навчальний посібник. – К.: Кондор,2009. – 398 с., Саранцев Г.И. Методология и методика обучения математике. – Саранск, 2001. – 144 с

19. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Б.Л. ван дер Варден. – Москва: Наука, 1976. – 648 с. 4. Гаврилків В.М. Елементи теорії груп та теорії кілець: навчальний посібник / В.М. Гаврилків. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 148 с. 21
20. Вейль А. Основы теории чисел. – М.: Мир, 1972. – 410 с.
21. Виноградов, И.М. Основы теории чисел [Текст]: учебник / И.М. Виноградов. - Москва-Ижевск: НИЦ «регулярная и хаотическая динамика», 2003. - 176 с.

22. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — 3-е изд. — Москва : Факториал Пресс, 2002. — 544 с. — ISBN 5-88688-060-7.(рос.)

23. Ганюшкін О.Г. Завдання до практичних занять з алгебри і теорії чи- сел (теорія груп) / О.Г. Ганюшкін, О.О. Безущак. – Київ: Видавничо- поліграфічний центр «Київський університет», 2007. – 103 с.

24. Гаврилків В.М. Елементи теорії груп та теорії кілець: навчальний посібник / В.М. Гаврилків. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 148 с.

25. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. – М.: АН СССР,1959. – 979с.

26. Голод Е. С. Курс лекций по алгебре. – М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2004. – 112 с.

27. Гребенча М. К. Теория чисел. – М.: Учпедгиз, 1949. – 457 с.

28. Грибанов В. У., Титов П. И. Сборник упражнений по теории чисел. – М.: Просвещение, 1964. – 145 с.

29. Гриншпон С.Я. Почти голоморфно изоморфные абелевы группы // Труды ТГУ. 1975. Т. 220. Вопросы математики. Вып. 3. С. 78-84.

30. Гриншпон И.Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и приклад. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 9-16.

31. Завало С. Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.

32. Завало С. Т., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел. Практикум : у 2 ч. — Київ : Вища школа, 1983.

33. Завало С. Т. Елементарна математика. Алгебра. — К. : Вища школа, 1971. — 356 с.

34.Іванченко В. В. Задачник з теорії чисел. – К.: Радянська школа, 1958. – 345 с.

35.Кон П. Универсальная алгебра. — М. : Мир, 1969. — 351 с.

36.Костарчук В. М., Хацет Б. І. Курс вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1969. – 540 с.

37. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

38.Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2000. – 368 с.

39.Курош А. Г. Курс высшей алгебры: Учебник. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

40.Курош А. Г. Теория групп. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1967. — 648 с. — ISBN 5-8114-0616-9.(рос.)

41.Лінійна алгебра. Алгебра і теорія чисел : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / І. А. Сверчевська ; Житомирський держ. ун-т ім. І. Франка. — Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. — 171 с.

42.Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – 402 с.

43.Математическая энциклопедия. В пяти томах. Том 1./ Под ред. И. М. Виноградова. М.: Советская энциклопедия, 1984

44.Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.:Высшая школа,1967.– 321с.

45.Окунев Л. Я. Краткий курс теории чисел. – М., Учпедгиз, 1956. – 285 с.

46. Постников М. М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1978. – 242 с.

47. Пилипів В.М. Класичні основи теорії чисел: навчально-методичний посібник / В.М. Пилипів, Р.А. Заторський, І.І.

Ліщинський. – Івано- Франківськ: Плай, 2014. – 68 с.
48. Пилипів В.М. Кільце поліномів: навчально-методичний посібник / В.М. Пилипів, Р.А. Заторський, І.І. Ліщинський. – Івано-Франківськ: Плай, 2014. – 100 с.
49. Сборник задач по высшей алгебре / Под ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Физматлит, 2001. – 464 с.
50. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И. В. – 9-е издание. – М.: БИНОМ. Ла- боратория знаний, 2005. – 383 с. 12. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре: Учебное пособие. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
51. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. – К.: 2000. – 512 с.
52. Слугинов С. П. Основы теории чисел. – Казань, 1913. – 457 с.
53. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики**.** – М.: Наука, 1984. – 236 с.
54. Стройк Д. Коротка історія математики : пер. з англ. — К.: Радянська школа, 1960. — 305 с.
55. Требенко Д. Я. Алгебра і теорія чисел : навч. посіб. для студ. математичних спец. вищих педагогічних навч. закладів : у 2 ч. / Д. Я. Требенко, О. О. Требенко. — К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. — Ч. 1. — 400 с. — Бібліогр.: с. 393—395.
56. Сушкевич А.К. Теория чисел. Элементарный курс. – Х.: ХГУ, 1954. – 205 с.
57. Туманов С. И. Элементарная алгебра: пособие для самообразования. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Просвещение, 1970. — 864 с.

58. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1984. – 416 с.

59. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335с.

60. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977. 416с.

61. Хрестоматия по истории математики: Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Под ред. А. П. Юшкевича. — М. : Просвещение, 1976. — 318 с.

ДОДАТКИ

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Слюсарчук Світлана Федорівна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:
- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:
- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

05.11.2020  Слюсарчук Світлана Федорівна