Кошеварова А.О.
Херсонський державний університет

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЯДИ, ЇХ ЗБІЖНІСТЬ ТА ПІДСУМОВУВАНІСТЬ МАТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

Теорія рядів почала розвиватися в кінці XVII ст. але була створена лише в XIX ст. на основі поняття границі в роботах Гаусса, Коші. Багато математиків минулого працювали над проблемою знаходження суми ряду. Ейлер в статті «Про розбіжні ряди» (1754-1755 р.) називає ряд збіжним, якщо його члени прямують до нуля, і розбіжним в іншому випадку. Надаючи кожному ряду числове значення, яке Ейлер називає сумою ряду, він підкреслює, що частинні суми не завжди мають точне значення, рівне сумі [1, с. 394-395]. У сучасному математичному аналізі під сумою S числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ розуміють границю послідовності $\{s_n\}$частинних сум цього ряду $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ [1, с. 257-258]:

$$S = lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

У сучасній математиці розглядають не лише числові ряди, а і ряди, членами яких є функції, зокрема тригонометричні функції. Ці ряди займають особливе місце у дослідженнях, оскільки за допомогою тригонометричних рядів можливо отримувати наближені значення багатьох елементарних функцій, особливо періодичних. Серед тригонометричних рядів вирізняються ряди Фур'є. Ці ряди будуються наступним чином. Для інтегрованої на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ знаходять коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx \; (n = 1,2,\dots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin\,nxdx \; (n = 1,2,\dots).$$

За цими коефіцієнтами складають тригонометричний ряд:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\,nx + b_n sinnx).$$

Цей ряд називають рядом Фур'є функції $f(x)$ і записують:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\,nx + b_n sinnx).$$

Такий запис свідчить про те, що ряд Фур'є функції $f(x)$ не завжди збігається до цієї функції. Одним із головних питань теорії тригонометричних рядів є питання про їх збіжність до функції, за допомогою якої вони побудовані [2, с. 414-419]. Як і для звичайних числових рядів, для рядів Фур'є існують достатні ознаки їх збіжності. Наведемо одну з них.

Теорема 1 (ознака Ліпшиця). *Ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається у точці x_0, де вона неперервна, до суми $f(x_0)$, якщо для достатньо малих значень t виконується нерівність $|f(x_0 \mp t) - f(x_0)| \leq Lt^{\alpha}$, де L і α – додатні константи ($\alpha \leq 1$).*

Ця ознака вказує на те, що в точках диференційованості функції її ряд Фур'є збігається, і саме до значення функції у цій точці. Таким чином, фактично для усіх елементарних функцій їх ряди Фур'є збігаються до цих функцій.

Поряд зі збіжністю вивчається підсумовування тригонометричних рядів різноманітними методами. Найбільш відомим з таких методів є метод середніх арифметичних. При цьому підсумовуванні ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ з частинними сумами $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ утворюють послідовність середніх арифметичних частинних сум ряду: $t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$. Якщо виконується рівність: $lim_{n\to\infty} t_n = S$, то кажуть, що цей ряд підсумовується до суми S методом середніх арифметичних. Може виявитись, що цей ряд розбігається, однак він підсумовується методом середніх арифметичних до деякої суми S. З іншого боку, якщо ряд збігається до суми S, то він обов'язково буде підсумовуватись методом середніх арифметичних до цієї ж суми S. Ця властивість називається регулярністю (правильністю) методу середніх арифметичних.

Якщо розглянути середні арифметичні частинних сум ряду Фур'є функції $f(x)$, то їх можна представити у вигляді інтегралу Діріхле [2, с. 428]:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x_0}{2}}{2sin\frac{u-x_0}{2}}du.$$

Одним із найважливіших застосувань узагальнених методів підсумовування тригонометричних рядів є теорема про єдиність розкладу функції у її ряд Фур'є, при доведенні якої використовуються методи Рімана узагальненого підсумовування тригонометричних рядів [с. 613-623].

Поряд з методами Рімана використовують також інші методи узагальненого підсумовування тригонометричних рядів. Досить зручними при цьому є методи, перетворення (середні) яких використовують тригонометричні функції. Зокрема це методи Рогозинського [3, с. 185-189], Рогозинського-Бернштейна [4, с. 483-485; 5, с. 479-489], Фавара [6]. За допомогою цих методів досліджується не лише збіжність але і абсолютна збіжність рядів [6-7].

Дана робота присвячена вивченню питань збіжності та підсумовування тригонометричних рядів як класичними, так і загальними матричними регулярними методами підсумовування рядів. Зокрема, вивчається питання абсолютної ефективності таких методів.

Література

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. М.: Наука, 1970, 800 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III. М.: Наука, 1966, 656 с.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, том I. М.: Мир, 1965, 615 с.
4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961, 936 с.
5. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Изд. иностр. л-ры, 1951, 504 с.
6. Кузьмич В. И. О методе Фавара суммирования рядов. Укр. матем. журн., том 35, № 2, 1983. – С. 225-227.
7. Кузьмич В. И. Об абсолютном суммировании рядов методом Рогозинского-Бернштейна. Укр. матем. журн., том 33, № 3, 1981. – С. 398-406.

Рекомендує до друку
науковий керівник **доцент Валерій Кузьмич**