SWorld – 11-18 October 2016
http://www.sworld.education/conference/year-conference-sw/the-content-of-conferences/archives-of-individual-conferences/oct-2016
SCIENTIFIC RESEARCHES AND THEIR PRACTICAL APPLICATION. MODERN STATE AND WAYS OF DEVELOPMENT '2016
Фізика і математика – Математика

УДК 511.72

Котова О. В.

ДОСЛІДЖЕННЯ РІЗНИХ ТИПІВ МНОЖИН АНОРМАЛЬНИХ ТА АНТИНОРМАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Херсонський державний університет,
Херсон, Університетська, 27, 73000

Kotova O.V.

THE STUDY OF DIFFERENT TYPES OF SETS OF ABNORMAL AND ANTINORMAL NUMBERS

Kherson State University,
Kherson, University street 27, 73033

Анотація. Дослідження присвячене вивченню сімей дійсних чисел, s-адичне зображення яких має певні асимтотичні або квазіперіодичні властивості, а саме: вивченню тополого-метричних і фрактальних властивостей множин розв'язків рівнянь: $v_i^s(x)=kx+b$, де $v_i^s(x)$ - асимтотична частота цифри «і» в s-адичному зображенні числа x. При b=0, вказано алгоритм побудови розв'язку рівняння, доведено континуальність множини розв'язків, її всюди щільність і всюди розривність, нуль-мірність (в розумінні міри Лебега), дано нижню оцінку фрактальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Обчислено розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини коренів рівняння $v_1^s(x)=x$ (s>2), які знаходяться за вказаним алгоритмом.

Ключові слова: s-адичне зображення, функція частоти символа «і» в s-адичному зображенні числа x, нормальне число, міра Лебега, розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

Abstract. In this study we examine families of real numbers such that their -adic representations have some asymptotic or quasiperiodic properties. Let $v_i^s(x)$ be an asymptotic frequency of digit «i» in s-adic representation of. These functions are *functions with complex local structure, and almost all their levels are fractal sets. We study topological, metric and fractal properties of the sets of solutions of equations $v_i^s(x)=kx+b$ and $f(x)=x$. We give the algorithm of construction of the solution, prove that the set of solutions is a continuum everywhere dense and totally disconnected set of zero Lebesgue measure. The lower bound for fractal Hausdorff-Besicovitch dimension is obtained. It calculated the dimension of Hausdorff-Besicovitch sets of solutions $v_i^s(x)=x$ $(s>2)$.*

Key words: s-adic representation of number, function of frequency of digit, normal number, Lebesgue measure, Hausdorff-Besicovitch dimension.

Вступ

Метрична теорія чисел, як розділ сучасної теорії чисел, має справу з дійсними числами і в останні десятиліття бурхливо розвивається. Центральною задачею цієї області математики є аналіз на «масивність» континуальних множин чисел, які володіють певною властивістю, засобами теорії міри та метричних розмірностей, зокрема фрактальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича. Метрична теорія чисел ігнорує зліченними множинами, тому для неї основною (суттєвою) є лише дробова частина дійсного числа. Саме тому далі ми будемо говорити лише про дійсні числа з відрізка [0,1]. Для побудови теорії дійсних чисел, слідуючи Кантору Г., використовуються різні системи подання та зображення чисел (системи числення).

Нехай $A=\{0,1,...,s-1\}$, $i\in A$, $\gamma_k\in A$, $k=1,2,\ldots$, $\Delta^s_{\gamma_1(x)\ldots\gamma_k(x)}\equiv\frac{\gamma_1}{s}+\ldots+\frac{\gamma_k}{s^k}+\ldots$ –*s*-адичне зображення числа $x\in[0,1]$, $N_i(x,n)=\#\{k:\gamma_k(x)=i, k\le n\}$ – кількість цифр «*i*» в зображенні числа *x* серед перших *n* цифр. *Частотою цифри* «*i*» в *s*-адичному зображенні числа *x* називається границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_i(x,n)}{n}\equiv v_i^s(x)$, якщо вона існує [14]. Оскільки *s*-адично раціональні числа мають два зображення, то використовуватимемо те зображення, що має період (0). Число $x\in[0;1]$ називається *нормальним за основою s* (*слабо нормальним*), якщо для кожного $i\in\{0,1,...,s-1\}$ частота існує і рівна $v_i(x)=s^{-1}$. Число $x\in[0;1]$, яке є нормальним за кожною натуральною основою $s \geq 2$, називається *нормальним*, тобто $x-$нормальне $\Leftrightarrow$ $\forall s: \ v_i(x) = s^{-1}, \ i = \overline{0, s-1}$. Число $x \in [0;1]$ називається *анормальним за основою s*, якщо воно не має частоти принаймні однієї s-адичної цифри. Число $x \in [0;1]$ називається *антинормальним за основою s*, якщо частоти у нього існують, але не рівні між собою. α*-Мірною мірою Хаусдорфа* обмеженої множини E простору R^n називається число $H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{d(E_j) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) : \bigcup_j E_j \supset E \right\} \right]$, де $d(E_j) = \sup\left\{ \rho(x, y), x \in E_j, y \in E_j \right\}$. *Розмірністю Хаусдорфа-Безиковича* множини E називається число $\alpha_0(E) = \sup\left\{ \alpha : H_\alpha(E) \neq 0 \right\} = \inf\left\{ \alpha : H_\alpha(E) = 0 \right\}$.

Огляд літератури

В роботі [1] E. Borel вводить поняття слабо нормального та абсолютно нормального числа та на основі теорії міри встановлює існування абсолютно нормальних чисел. Однак, йому не вдалося побудувати жодного прикладу нормального числа. Вперше це зробили у 1917 році W. Sierpinski [8] та H.Lebesgue [7]. У 1949 році D. D. Wall [13] вперше встановив, що дійсне число x є нормальним за основою $s \geq 2$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $s^n x (n = 1, 2...)$ рівномірно розподіленою за $\mathrm{mod} 1$. Розглянемо результати досліджень різних типів множин нормальних, анормальних та антинормальних чисел.

1. Задано частоту цифр. Нехай $M = M(v_0, v_1, ..., v_{s-1})$ – множина таких x, що $\lim_{n \to \infty} \frac{N_i(x, n)}{n} = v_i$. Тоді, як довів в 1949 році H.G.Eggleston [3], $\dim M = -\frac{1}{\log s} \sum_{j=0}^{s-1} v_j \log v_j$, де $0 \log 0 = 1$. Позначимо функцію в цьому рівнянні: $d(v_0, v_1, ..., v_{s-1}) = d(v)$. Незалежно один від одного, V. Knichal [6] 1933 і A.S.Besicovitch [2] у 1934 році знайшли $\dim M$ для часткового випадку при $s = 2$.

2. Заборони на вживання цифр або їх комбінацій. Множина Кантора C, може інтерпретуватися як множина всіх $x \in (0,1]$, s-адичний розклад яких за основою $s = 3$ можна подати без вживання 1. У 1918 році F. Hausdorff [5] показав, що $\dim C = \dfrac{\log 2}{\log 3}$. V.Volkmann [9] у 1953 році отримав наступні результати. Нехай $2 \le s$ – фіксоване натуральне число і $F = f_1 f_2 ... f_i$ – довільний блок (не обов'язково конкретний) s-адичних цифр. Крім того, нехай K_F – множина всіх $x \in (0,1]$ у s-адичному розкладі яких жодний блок з i послідовних цифр не дорівнює F. Тоді, якщо через $P(F)$ позначити множину всіх цілих чисел p, для яких блок перших p цифр і блок останніх p цифр F є рівним, і $\gamma(F)$ – найбільший додатній корінь i-го степеня рівняння $\sum\limits_{p \in p(F)} (z^p - sz^{p-1}) + 1 = 0,$ то $\dim K_F = \dfrac{\log_\gamma (F)}{\log s}$. У більш пізній роботі [11] було вивчено випадок, коли скінченна множина $F = \{F_1, ..., F_n\}$ з таких блоків заборонена.

3. Дано середнє арифметичне цифр. Для кожного $x \in (0,1]$ визначимо $S(x,n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$ і розглянемо для даного $\xi \in [0, s-1]$ множину $M(\xi)$ всіх тих x, що задовольняють рівності $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} S(x,n) = \xi$. У 1951 році H. G. Eggleston [4] показав, що $\dim M(\xi) = \dfrac{\log(1 + \mathrm{r} + ... + r^{\mathrm{s}\text{-}1}) - \xi \log r}{\log s}$, де r – найбільший додатний корінь рівняння $\sum\limits_{j=0}^{s-1} (j - \xi) x^j = 0$. Цю теорему узагальнив V. Volkmann [10] для випадку, коли множина {0,1…,s-1} розбита на множини $A_1, A_2, ..., A_m$, що попарно не перетинаються і зважено середні значення $S_\mu(x,n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{{}_{i \in A_\mu}} \lambda_{\gamma i}$ (μ=1,…,m) з даними невід'ємними масами $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{s-1}$. Тоді розмірність множини $M(\xi_1, ..., \xi_m)$ всіх $x \in (0,1]$ обчислюється, якщо границі $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} S_\mu(x,n)(\mu = 1,...m)$ існують і відомі $\xi_1, ... \xi_m$.

4. Частоти цифр, що коливаються. Щоб вивчати дійсні числа x, для яких деякі, або навіть всі, частоти коливаються, B.Volkmann [12] використав наступний метод. Для кожного індекса n нехай $p_n(x)$ є точкою симплекса

$$H_s = \left\{ 0 \le \xi_j \le 1,\ j = \overline{0, s-1}, \sum_{j=0}^{s-1} \xi_j = 1 \right\}, \text{що має координати} \left(\frac{N_0(x,n)}{n}, ..., \frac{N_{s-1}(x,n)}{n} \right).$$

Крім того, нехай $V_s(x)$ – множина граничних точок послідовності $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots$. Очевидно, $V_s(x)$ може містити єдину точку, і це відбувається, зокрема кожного разу, коли x – нормальне. Але у 1958 році було показано, що для довільного континууму $C \subseteq \mathrm{H}_s$, існує непорожня множина $G(C)$ чисел $x \in (0,1]$ для яких $V_s(x) = C$. Крім того, $\dim G(C) = \min_{\xi \in C} d(\zeta)$.

Дані дослідження

Теорема 1. Для довільної нескінченної послідовності нулів та одиниць $\{\varepsilon_n\}$ існують такі $\gamma_{(k-1)s+1}$, $\gamma_{(k-1)s+2}, \ldots$, γ_{ks-1}, $k = 1, 2, ..., s > 2$, що число $x = \Delta^s_{\gamma_1 \ldots \gamma_{s-1} \varepsilon_1 \gamma_{s+1} \ldots \gamma_{2s-1} \varepsilon_2 \ldots \gamma_{(k-1)s+1} \ldots \gamma_{ks-1} \varepsilon_k \ldots}$, є розв'язком рівняння $\nu_1^s(x) = x$.

Доведення. Нехай $\{\varepsilon_n\}$ – довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць. $s_1 = 1$, $x_1 = \frac{\gamma_1}{s}$, $\gamma_1 = \left[\frac{s}{2} \right]$. β_{ln}, s_{n+1}, e_n визначаються рівностями:

$$\beta_{ln} = \left[(s_n + l) x_n \right] - \left[(s_n + l - 1) x_n \right],\ x_n = \frac{\gamma_1}{s} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{lj}}{s^{s_j + l}},\ s_n = s^{s_n - 1},\ e_n = s_{n+1} - s_n,\ n = 1, 2, ...$$

Покажемо, що в кожній серії $\beta_{11}\beta_{21} \cdots \beta_{e_1 1}, \ldots, \beta_{1k}\beta_{2k} \cdots \beta_{e_k k}$ є принаймні один нуль та одна одиниця. $\sum_{l=1}^{e_1} \beta_{l1} = \gamma_1$, $\quad 0 < \sum_{l=1}^{e_1} \beta_{l1} < s - 1.$ Отже, в серії $\beta_{11}\beta_{21} \cdots \beta_{e_1 1}$ є принаймні один нуль та одна одиниця.

Якщо $\varepsilon_1 = \beta_{e_1 1}$, то покладемо $x = \Delta^s_{\gamma_1 \beta_{11} \beta_{21} \ldots \beta_{e_1 1}}$. Якщо $\varepsilon_1 \ne \beta_{e_1 1}$, то покладемо $x = \Delta^s_{\gamma_1 \beta_{11} \beta_{21} \ldots (1-\beta_{\eta 1}) \ldots (1-\beta_{e_1 1})}$, де $\beta_{\eta 1} \ne \beta_{e_1 1}$, $\beta_{(\eta + j)1} = \beta_{e_1 1}$, $j = \overline{1, e_1 - \eta - 1}$. Таким чином, знайдено

$\gamma_1,...,\gamma_s$ і $x_2 = \Delta^s_{\gamma_1...\gamma_s}$. Кількість одиниць серед $\gamma_1,...,\gamma_s$ дорівнює $N_1(x_2) = N_1(x_1) + \sum_{l=1}^{e_1} \beta_{l1}$. Аналогічно, знаходимо $0 < \sum_{l=e_k-s+1}^{e_k} \beta_{l1} < s-1.$ І в серії $\beta_{1k}\beta_{2k}...\beta_{e_k k}$ є принаймні один нуль та одна одиниця. Відповідно до попередніх міркувань, знаходимо $\gamma_{s_k+1},...,\gamma_{s_{k+1}}$ і $x_{k+1} = \Delta^s_{\gamma_1...\gamma_{s_{k+1}}}$. $N_1(x_{k+1}) = N_1(x_k) + \sum_{l=1}^{e_k} \beta_{lk}$.

Число $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ є розв’язком рівняння $\nu_1^s(x) = x$. Існування відповідних границь доводиться аналогічно до [14].

Теорема 2. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини K_s всіх розв'язків рівняння $\nu_1^s(x) = x$ (s>2) є не меншою, ніж $\frac{\log_s 2}{s}$.

Доведення. При визначені розмірності Хаусдорфа-Безиковича можна обходитись циліндрами рангу s. Розглянемо покриття множини розв’язків рівняння $\nu_1^s(x) = x$, отриманих в доведені попередньої теореми (множина K_s'), циліндрами однакового рангу m. α-Об’єм такого покриття

$$L_m^\alpha = \begin{cases} 2^{k-1}(s^{-(sk-j)})^\alpha, \text{ при } m = sk-j, j \in \{s-1,...,1\}, \\ 2^k(s^{-(sk)})^\alpha, \text{ при } m = sk, k \in N. \end{cases}$$

Очевидно, що $L_{sk-1} < L_{sk-j}$, при $j \in \{2,...,s\}$. Тому розглядатимемо α-покриття множини K_s' циліндрами рангу $n = sk-1$. Тоді $\hat{H}_\alpha(K_s') = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{2^{k-1}}{s^{(sk-1)\alpha}} = \frac{s^\alpha}{2} \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{2^k}{s^{s_k\alpha}}$.

$$\hat{H}_\alpha(K_s') = \begin{cases} 0, & \alpha > \frac{1}{s}\log_s 2, \\ \infty, & \alpha < \frac{1}{s}\log_s 2. \end{cases}$$

Отже, $\alpha = \frac{1}{s}\log_s 2.$ Покажемо, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини K_s' дорівнює $\frac{\log_s 2}{s}$. Розглянемо довільне скінченне покриття множини

K_s' циліндрами рангу s $\{u_j\}, j=\overline{0,l}$. Покажемо, що при $\alpha=\frac{1}{s}\log_s 2$ попереднє рангове покриття не покращується. Нехай u_j – один з циліндрів покриття. Тоді $|u_j|=s^{-n}$ для деякого $n\in N$. Нехай $n=sp-r, r\in\{0,...,s-1\}$, тоді

$$L^{\alpha}_{sp-r+m}\left(K_s'\cap\Delta_j\right)=\begin{cases}2^{k-1}(s^{-(sp-r+sk-j)})^{\alpha}, \text{ при } m=sk+r-j, j\in\{s-1,...,1\},\\ 2^{k}(s^{-(sp-r+sk)})^{\alpha}, \text{ при } m=sk+r, k\in N.\end{cases}$$

Очевидно, що $L_{s(p+k)-1}<L_{s(p+k)-j}$, при $j\in\{2,...,s\}$. Тому розглядатимемо α-покриття множини $K_s'\cap\Delta_j$ циліндрами рангу $n=s(p+k)-1$. Його α- об'єм дорівнює $2^{k-1}\left(s^{-(sp+sk-1)}\right)^{\alpha}$. Оскільки, $\frac{2^k}{s^{sk\alpha}}=1$ і $\frac{s^{(1-r)^{\alpha}}}{2}<1$, то при $\alpha=\frac{1}{s}\log_s 2$ $2^{k-1}(s^{-(sp-r+sk-j)})^{\alpha}\le\left(s^{-(sp-r)}\right)^{\alpha}$. Отже, $\hat{H}_{\alpha}(K_s')=H_{\alpha}(K_s')$.

Заключення і висновки

В роботі було обчислено розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини K_s' коренів рівняння $\nu_1^s(x)=x$, які знаходяться за вказаним алгоритмом. Вона є не меншою, ніж $\frac{\log_s 2}{s}$. Відкритим залишається питання про точну розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини K_s коренів рівняння $\nu_1^s(x)=x$.

Література:

1. Borel E. Lecon sur la teorie des fonctions,Paris, 1914.
2. Besicovitch A.S. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic number system. // Math. Ann. Soc. - 1934. - 110, P. 321-330.
3. Eggleston H. G. The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. Soc. - 1949. - 20, P. 31-36.
4. Eggleston H. G. Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. - 1951. - 54, P. 42-93.
5. Hausdorff F. Dimension und äusseres Mass. Math. Ann. - 1918, 79,-P. 157
6. Knichal V. Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass. Mem. Soc. Roy. Sd. Boheme, CI. des Sciences, 1933, Nr. 14, 1 - 18.

7. Lehesgue H. Sur certaines demonstrationd'existence. Bui. de la Société mathématique de France. - 1917, 45 P. 132 -144.

8. Sierpinski W.Demonstration elementaire du theoreme de E.Borel sur les nombres absolument normaux et determination effective d'un tel nombre. Bul. de la Société mathématique de France. - 1917, 45. -P. 127 -132.

9. Volkmann B. Uber Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. III. Math. Z. - 1953, 59. -P. 279-290.

10. Volkmann B. Uber Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. IV. Math. Z. -1954, 59. P. 425-433.

11. Volkmann B. Uber Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. V. Math. Z. -1956, 65.P. 389-413.

12. Volkmann B. Uber Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. VI. Math. Z. -1958, 68.P. 439-440.

13. Wall D.D. Normal numbers.Ph. D. Thesis, 1949, University of California, Berkeley, California.

14. Котова О. В. Континуальність множини розв'язків одного класу рівнянь, які містять функцію частоти трійкових цифр числа / О. В. Котова// Укр. мат. журн. – 2008. –60. – № 10. – С. 1414–1421.

Стаття відправлена: 30.09.2016 р.