ФІЗИКА та АСТРОНОМІЯ В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 6 (101) ВЕРЕСЕНЬ 2012

Виходить вісім разів на рік

Передплатний індекс **74637**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО
ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»
ТОВ «РЕКЛАМНЕ АГЕНТСТВО "ОСВІТА УКРАЇНИ"»

Заснований у 1995 р., видається з 1996 р.
До лютого 2012 р. журнал виходив у світ
під назвою «Фізика та астрономія в школі»
Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу
масової інформації серія КВ № 18241-7041ПР від 30.09.2011 р.
Схвалено вченою радою НПУ ім. М. П. Драгоманова
(протокол від .2012 р. № 1)

ЗМІСТ

УДК 378: 52

ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ АСТРОНОМІЇ

Сергій КУЗЬМЕНКОВ, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Херсонського державного університету

Анотація. У статті обґрунтовується доцільність ширшого застосування закону збереження моменту імпульсу під час навчання фізики та астрономії. Наводяться приклади розв'язування деяких астрофізичних задач за допомогою цього закону.

Ключові слова: момент імпульсу, закон збереження моменту імпульсу, фізична та астрономічна освіта, астрофізичні задачі.

Сергей Кузьменков

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ПРИ ОБУЧЕНИИ АСТРОНОМИИ

Аннотация. В статье обосновывается целесообразность более широкого применения закона сохранения момента импульса при обучении физике и астрономии. Приводятся примеры решения некоторых астрофизических задач с помощью этого закона.

Ключевые слова: момент импульса, закон сохранения момента импульса, физическое и астрономическое образование, астрофизические задачи.

Sergey Kuzmenkov

APPLICATION OF THE LAW OF CONSERVATION OF ANGULAR MOMENTUM IN ASTRONOMY EDUCATION

Summary. The author proves the feasibility of wider application of the law of conservation of angular momentum in teaching physics and astronomy. The examples of solution of some astrophysical problems using this law are considered in the article.

Keywords: angular momentum, law of conservation of angular momentum, physical and astronomical education, astrophysical problems.

Закон збереження моменту імпульсу належить до трьох фундаментальних законів збереження в механіці (це закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії). Більше того, цей закон вправно «працює» у квантовій механіці, фізиці атомного ядра і елементарних частинок. Його можна вважати одним з універсальних законів природи, оскільки він виконується для найрізноманітніших фізичних об'єктів. Проте його впровадження в шкільний курс фізики чомусь довгий час стримувалося. Тільки з появою профільного рівня навчання закон збереження моменту імпульсу посів належне місце у середній фізичній освіті [1].

До фундаментальних властивостей простору відносять його тривимірність, однорідність та ізотропність. Під ізотропністю розуміють фізичну нерозрізненість усяких можливих напрямків у просторі. З цією симетрією простору і пов'язаний закон збереження моменту імпульсу.

Відомо, що закони Кеплера є наслідком фундаментальних властивостей простору й часу [3, 4]. Усі три закони Кеплера зумовлені ізотропністю простору (для першого і третього законів необхідними умовами є також однорідність часу і тривимірність простору), а отже, існуванням закону збереження моменту імпульсу.

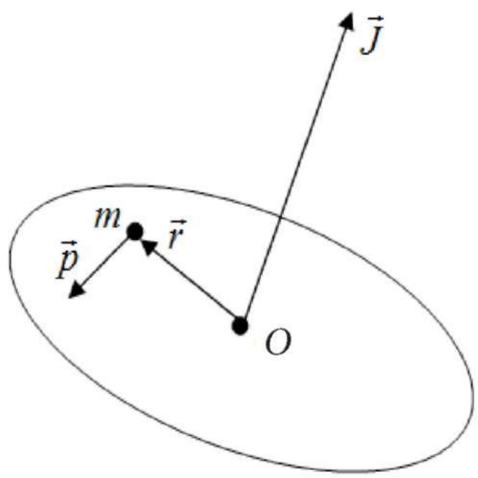
Момент імпульсу $\vec{J}$, наприклад, для матеріальної точки визначають як векторний добуток її радіуса-вектора $\vec{r}$ та імпульсу $\vec{p}$, тобто

$$\vec{J} = [\vec{r}\vec{p}]. \quad (1)$$

При цьому

$$|\vec{J}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\alpha, \quad (2)$$

де α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{p}$. Напрямок вектора $\vec{J}$ утворює з напрямками векторів $\vec{r}$ і $\vec{p}$ так звану праву трійку, тобто після суміщення векторів $\vec{r}$ і $\vec{p}$ у спільний початок його можна знайти за правилом свердлика (мал. 1).



Мал. 1. Момент імпульсу матеріальної точки масою m відносно точки O

Якщо кут між $\vec{r}$ і $\vec{p}$ дорівнює $\pi/2$ (наприклад, під час руху коловою орбітою), то матимемо:

$$J = rp = rm\upsilon. \quad (3)$$

Якщо використати зв'язок між лінійною υ і кутовою ω швидкостями $\upsilon = \omega r$, то вираз (3) для моменту імпульсу набуде вигляду:

$$J = mr^2\omega = I\omega, \quad (4)$$

де величину I називають моментом інерції матеріальної точки (тіла) відносно центра обертання.

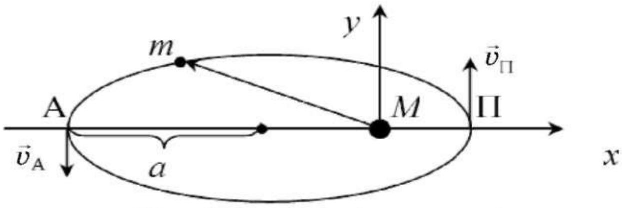
Момент імпульсу замкненої системи (зовнішніх сил немає) відносно будь-якої нерухомої точки зберігається. Так само момент імпульсу зберігається під час руху тіла в центрально-симетричному полі (відносно центра поля). Це й становить суть закону збереження моменту імпульсу.

Закон збереження моменту імпульсу належить до тих фундаментальних законів, що широко застосовуються в астрономії. На жаль, під час традиційного викладання астрономії як у середній школі (на профільному рівні), так і майбутнім учителям у вищій школі йому зазвичай не приділяється достатньої уваги. Проте цей закон дає змогу ефективно й елегантно розв'язувати широкий спектр різноманітних задач, що важливо з методологічного погляду. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 1. ***Зв'язок фізики з геометрією*** [5]. Нехай невелике тіло масою m рухається еліптичною орбітою, в одному з фокусів якої розташоване масивне космічне тіло масою M. Велика піввісь орбіти дорівнює a, ексцентриситет – e. Виразимо повну механічну енергію першого тіла через параметри орбіти.

Оскільки під час руху тіла m його повна механічна енергія W зберігається, то її можна обчислити для таких положень тіла m, за яких його радіус-вектор і швидкість найпростіше виражаються через параметри еліпса, наприклад для апоцентра (т. А) і перицентра (т. П) (мал. 2). Для цих положень повна енергія тіла масою m становитиме:

$$W_А = \frac{m\upsilon_А^2}{2} - \frac{GMm}{r_А}, \quad W_П = \frac{m\upsilon_П^2}{2} - \frac{GMm}{r_П}. \quad (5)$$



Мал. 2. Графічна інтерпретація другого закону Кеплера

Із *закону збереження моменту імпульсу* (наслідком якого є другий закон Кеплера) випливає:

$$\upsilon_А r_А = \upsilon_П r_П. \quad (6)$$

Прирівнюючи $W_А = W_П$, враховуючи (6) і відомі співвідношення: $r_А = a(1+e)$ та $r_П = a(1-e)$, отримуємо:

$$W = -\frac{GMm}{2a}. \quad (7)$$

Звертаємо увагу на те, що результат не залежить від ексцентриситету. Водночас велика піввісь орбіти залежить тільки від енергії і не залежить від моменту імпульсу тіла, що рухається.

Приклад 2. ***Проблема моменту*** [5]. Оцінимо момент імпульсу Сонячної системи, для чого оцінимо й порівняємо внески від його складових. При цьому для спрощення вважатимемо, що всі планети і Сонце обертаються як однорідні тверді тіла з кутовою швидкістю, яка спостерігається на їхніх екваторах.

Наведемо результати у вигляді табл. 1.

Оскільки власний обертальний момент наймасивнішої та найбільшої планети і такої, що швидше від усіх обертається навколо власної осі (Юпітера), дорівнює лише $6{,}7 \cdot 10^{38}$ кг · м²/с, то зрозуміло, що власними обертальними моментами планет можна знехтувати порівняно з їх орбітальними моментами.

Припускаючи, що Сонце обертається як однорідне тверде тіло з кутовою швидкістю, що спостерігається на екваторі, його обертальний момент дорівнює $1{,}1 \cdot 10^{42}$ кг · м²/с, що становить лише 3 % від моменту імпульсу Сонячної системи. Той факт, що момент імпульсу наймасивнішого центрального тіла Сонячної системи (його маса приблизно у 1000 разів більша від маси усіх інших тіл) дорівнює лише кільком відсоткам від моменту імпульсу всієї системи, становить нерозв'язану

Таблиця 1

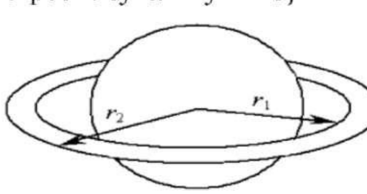
Орбітальні моменти імпульсу класичних планет і Плутона

Планета	$J_{орб} \cdot 10^{39} \, \frac{кг \cdot м^2}{с}$
Меркурій	0,9
Венера	18,5
Земля	26,7
Марс	3,6
Юпітер	19372,4
Сатурн	7858,6
Уран	1698,4
Нептун	2520,8
Плутон	0,3

до кінця проблему в теорії походження Сонячної системи. Вважається, що під час утворення планетної системи момент імпульсу певним чином був переданий від Сонця планетам.

Приклад 3. *Як утворювалися супутники планет* [5]**?**

За сучасними уявленнями, супутники планет могли утворитися із речовини, що була первісно сконцентрована в кільцевих структурах, які оберталися навколо планет (мал. 3). Нехай пилове кільце у вигляді тонкого диска (зовнішній радіус r_2, внутрішній – r_1) з однорідним розподілом густини трансформується в невеликий супутник, власним обертанням якого можна знехтувати. Покажемо, як, використовуючи *закон збереження моменту імпульсу*, можна знайти радіус r_0 орбіти супутника (оскільки в процесі розв'язування цієї задачі не обійтися без інтегрування, хоча й зовсім нескладного, то, мабуть, її доцільніше розв'язувати у ВНЗ).



Мал. 3. Планета з пиловим кільцем у вигляді тонкого диска

Визначимо момент імпульсу кільця через його момент інерції:

$$J_к = \int r^2 \omega\, dm = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \left(\frac{GM}{r^3}\right)^{\frac{1}{2}} 2\pi r \rho\, dr. \qquad (8)$$

Перехід від ω до r здійснений за допомогою третього закону Кеплера, який запишемо не через період, а через частоту обертання $\omega = 2\pi/T$:

$$\omega^2 r^3 = GM, \qquad (9)$$

де M – маса планети (масою кільця порівняно з масою планети можна знехтувати). Орбітальний момент імпульсу супутника дорівнює:

$$J_{сп} = \int r_0^2 \omega_0\, dm = \sqrt{GMr_0} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \rho\, dr. \qquad (10)$$

Оскільки момент імпульсу зберігається, то $J_к = J_{сп}$. Інтегруючи, отримаємо:

$$r_0 = \frac{16}{25}\left(\frac{r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}}}{r_2^2 - r_1^2}\right)^2. \qquad (11)$$

Приклад 4. *Нова орбіта Землі* [5]**.** Визначимо параметри нової орбіти Землі, яка з'явиться в неї у далекому майбутньому, коли Сонце перетвориться на білий карлик масою $M_{WD} = 0{,}6M_\odot$, де $M_\odot$ – маса Сонця.

Розглянемо випадок дуже повільної втрати маси Сонцем на стадії червоного гіганта.

Оскільки під час такої втрати маси Сонцем жодні сили, крім центральних, на Землю не діятимуть, її *момент імпульсу збережеться*, а орбіта залишиться коловою.

Звідси матимемо:

$$a_\oplus \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_\oplus}} = a'_\oplus \sqrt{\frac{GM_{WD}}{a'_\oplus}}. \qquad (12)$$

Отже, нова велика піввісь дорівнюватиме:

$$a'_\oplus = a_\oplus\left(\frac{M_\oplus}{M_{WD}}\right) = \frac{a_\oplus}{0{,}6} \approx 1{,}67 \text{ (а. о.)} \qquad (13)$$

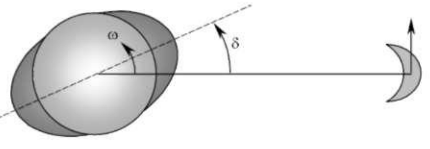
Земля опиниться за сучасною орбітою Марса з відповідними наслідками для клімату.

За третім законом Кеплера новий період становитиме:

$$T'_\oplus = T_\oplus \sqrt{\frac{M_\oplus}{M_{WD}}\left(\frac{a'_\oplus}{a_\oplus}\right)^3} = T_\oplus\left(\frac{M_\oplus}{M_{WD}}\right)^2 =$$

$$= \frac{T_\oplus}{(0{,}6)^2} \approx 2{,}78 \text{ (сучасного року).} \qquad (14)$$

Приклад 5. *Парадокс системи Земля – Місяць* [5]**.** У системі Земля – Місяць відбувається парадоксальне явище: внаслідок припливного тертя зменшується кутова швидкість осьового обертання й Землі, й Місяця, а також орбітальна кутова швидкість Місяця. Припливне тертя призводить до того, що максимуми припливної деформації (припливні горби) перебувають не на прямій, що з'єднує центри Землі та Місяця, а виносяться осьовим обертанням планети вперед (мал. 4). За сучасними оцінками, кут запізнення становить $\delta \approx 2°$. Це явище виникає внаслідок відхилення земних надр від ідеальної пружності та тертя морських припливних хвиль об дно в неглибоких морях (особливо в морях Північного Льодовитого океану та Охотському). Місяць, притягуючи найближчий горб, створює момент сили, який сповільнює обертання Землі. Однаковий за значенням та протилежний за напрямком момент сили, зумовлений дією горба на Місяць, збільшує енергію й момент імпульсу Місяця так, що він віддаляється від Землі, а його орбітальна швидкість зменшується. Як це узгоджується із законом збереження моменту імпульсу і законом збереження енергії в системі Земля – Місяць?



Мал. 4. Припливна дія Місяця на Землю

Унаслідок зменшення кутових швидкостей осьового обертання Землі та Місяця їх осьові моменти імпульсу зменшуються. Орбітальний же момент імпульсу Місяця дорівнює:

$$J_{☾\text{орб}} = M_☾ r^2_{\oplus☾} \omega_☾, \qquad (15)$$

де $r_{\oplus☾}$ – відстань між Землею та Місяцем.

За допомогою третього закону Кеплера, записаного через частоту обертання

$$\omega^2_☾ r^3_{\oplus☾} = G\left(M_\oplus + M_☾\right), \qquad (16)$$

орбітальний момент можна записати у вигляді:

$$J_{☾орб} = \frac{M_☾\left(G\left(M_\oplus + M_☾\right)\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(\omega_☾\right)^{\frac{1}{3}}}. \qquad (17)$$

Звідси випливає, що зі зменшенням $\omega_☾$ (осьова і орбітальна кутові швидкості Місяця, як відомо, однакові) $J_{☾орб}$ збільшується. Саме збільшення орбітального моменту Місяця компенсує зменшення осьового моменту Землі (осьовий момент Місяця дуже малий порівняно з $J_\oplus$ і $J_{☾орб}$). При цьому їх сума, тобто загальний момент системи Земля – Місяць, зберігається (що й має бути, якщо вважати цю систему ізольованою).

А ось механічна енергія в цій системі не зберігається: зменшення енергії осьового обертального руху Землі не компенсується збільшенням енергії Місяця, оскільки частина її дисипує в Землі (переходить у теплоту) внаслідок припливного тертя.

Приклад 6. *Синхронізація в системі Земля – Місяць* [5]. З мал. 4 видно, що припливні горби Землі «тягнуть» за собою Місяць. Унаслідок цієї дії Місяць повільно віддаляється від Землі. Враховуючи, що через припливне тертя період обертання Землі навколо осі збільшується за рік на $\Delta T_\oplus = 1,8 \cdot 10^{-5}$ с, знайдемо спочатку, як змінюється при цьому за рік велика піввісь місячної орбіти.

Для спрощення вважатимемо, що земна вісь перпендикулярна до площини місячної орбіти.

Якщо вважати систему Земля – Місяць ізольованою, то рівняння *передачі моменту імпульсу* матиме вигляд (осьовим моментом Місяця можна знехтувати порівняно з орбітальним):

$$\frac{d}{dt}\left(I_\oplus \omega_\oplus\right) = -\frac{d}{dt}\left(M_☾ a_☾^2 \omega_☾\right), \qquad (18)$$

де $I_\oplus$ – момент інерції Землі відносно полярної осі; $a_☾$ – велика піввісь місячної орбіти; $\omega_☾$ – орбітальна кутова швидкість Місяця.

Використовуючи третій закон Кеплера і нехтуючи масою Місяця порівняно з масою Землі, дістанемо:

$$\omega_☾ = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_☾^3}}. \qquad (19)$$

Підставляючи (19) у (18), отримаємо:

$$I_\oplus \frac{d\omega_\oplus}{dt} = -\frac{M_☾}{2}\sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_☾}}\frac{da_☾}{dt}. \qquad (20)$$

Оскільки

$$\frac{d\omega_\oplus}{dt} = -\frac{2\pi}{T_\oplus^2}\frac{dT_\oplus}{dt}, \qquad (21)$$

то остаточно матимемо:

$$\Delta a_☾ = \frac{2I_\oplus}{M_☾ a_☾}\frac{T_☾}{T_\oplus^2}\Delta T_\oplus = 3,25 \text{ (см)}. \qquad (22)$$

Отже, з кожним роком Місяць віддаляється від Землі на 3,25 см.

На підставі вивчення океанських припливів з використанням супутникових даних знайдено усереднене вікове сповільнення орбітального руху Місяця $\dot{\omega}_☾ = -25,2'' / (100 \text{ років})^2$ (крапка над символом означає, як завжди, похідну за часом). Це сповільнення триватиме, доки кутова швидкість орбітального руху Місяця навколо Землі не дорівнюватиме кутовій швидкості осьового обертання Землі, тобто обертання планети та її супутника повністю синхронізуються, і Земля буде завжди повернута до Місяця одним своїм боком (так, як нині Місяць). Визначимо тепер:

а) яким стане загальний період обертання системи Земля – Місяць;

б) через скільки років система Земля – Місяць повністю синхронізується;

в) середню відстань між Землею і Місяцем у разі повної синхронізації;

г) тривалість сонячної доби на Землі в цьому випадку.

Момент імпульсу системи Земля-Місяць становить

$$J = I_\oplus \omega_\oplus + I_☾ \omega_☾, \qquad (23)$$

де $I_☾ = M_☾ a_☾^2$ – момент інерції Місяця відносно осі обертання Землі (осьовий момент інерції Місяця порівняно дуже малий, тому ним можна знехтувати).

Оскільки *момент імпульсу зберігається*, то за повної синхронізації отримаємо:

$$J = \left(I_\oplus + I'_☾\right)\omega, \qquad (24)$$

де $I'_☾ = M_☾ a'^2_☾$, $a'_☾$ – велика піввісь місячної орбіти, що встановиться за повної синхронізації.

Згідно з третім законом Кеплера (зазвичай нехтуючи масою Місяця):

$$\omega^2 a'^3_☾ = GM_\oplus. \qquad (25)$$

Із рівнянь (24) і (25) можна знайти ω. Нехтуючи $I_\oplus$ порівняно з $I'_☾$, оскільки навіть нині осьовий момент інерції Землі набагато менший за орбітальний момент інерції Місяця, а в майбутньому ця нерівність тільки посилиться, можна визначити а):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\left(GM_\oplus\right)^2}\left(\frac{I_\oplus\omega_\oplus}{M_☾} + a_☾^2\omega_☾\right)^3 \approx 48 \text{ (діб)}. \qquad (26)$$

б) У припущенні сталості величини $\dot{\omega}_☾$ повна синхронізація системи Земля – Місяць настане через час, що становить:

$$t = \frac{\omega - \omega_☾}{\dot{\omega}_☾} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ (років)}. \qquad (27)$$

в) Використовуючи розв'язок та результат пункту а), для великої півосі нової орбіти Місяця дістаємо:

$$a'_☾ = \left(\frac{GM_\oplus}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{GM_\oplus}\left(\frac{I_\oplus\omega_\oplus}{M_☾} + a_☾^2\omega_☾\right)^2 = 559\,300 \text{ (км)}. \qquad (28)$$

Нагадаємо, що нині вона становить 384 400 км.

г) Тривалість сонячної доби на Землі знаходимо із рівняння

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\oplus орб}}, \qquad (29)$$

де T – загальний період обертання системи Земля – Місяць; $T_{\oplus орб}$ – орбітальний період Землі.

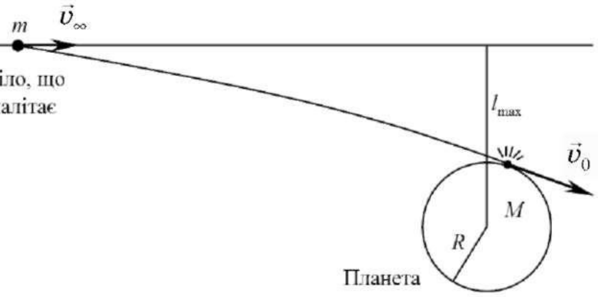
Отже, $T_S = \dfrac{TT_{\oplus орб}}{T_{\oplus орб} - T} = 55{,}3$ (діб). (30)

Календарний рік на Землі міститиме всього 6,6 нових сонячних діб!

Приклад 7. *Ефективний переріз зіткнення планети з космічними тілами* [5]. Ефективний переріз зіткнень планети з будь-якими космічними тілами можна визначити за формулою:

$$\sigma = \pi l_{\max}^2, \qquad (31)$$

де $l_{\max}$ – найбільше допустиме значення прицільного параметра (прицільним параметром називають висоту перпендикуляра, проведеного з центра планети на початковий напрямок дотичної до траєкторії тіла, коли воно перебувало на нескінченності) (мал. 5). Умова зіткнення полягає в нерівності $r_{\min} \le R$, де $r_{\min}$ – відстань від центра планети радіуса R до найближчої точки траєкторії тіла. Величина $l_{\max}$ визначається із умови $r_{\min} = R$. Визначимо ефективний переріз σ зіткнення космічного тіла масою m з поверхнею планети маси M і радіуса R.



Мал. 5. Явище гравітаційного захоплення планетою малих космічних тіл

Згідно із *законом збереження моменту імпульсу* матимемо:

$$J = mv_\infty l_{\max} = mv_0 R, \qquad (32)$$

де v_∞ – швидкість космічного тіла, що налітає, на великій відстані від планети; v_0 – швидкість тіла в момент зіткнення.

Водночас згідно із законом збереження енергії:

$$W = \frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}. \qquad (33)$$

З цих двох рівнянь отримаємо:

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \left(\frac{v_{II}}{v_\infty}\right)^2\right), \qquad (34)$$

де v_{II} – друга космічна швидкість для планети. За таких умов захоплення ефективний переріз зіткнень буде тим більшим, чим v_{II} буде більшою за v_∞. За $v_\infty = 0$ $\sigma \to \infty$, тобто зіткнення буде невідворотним.

Приклад 8. *Перевірка метеоритної гіпотези Майєра щодо джерел енергії Сонця* [2]. Р. Ю. Майєр, один із творців закону збереження енергії в сучасній формі, у 1848 р. припустив, що випромінювання Сонця підтримується випаданням на нього метеорної речовини із Сонячної системи. Нескладно знайти, як при цьому має збільшуватися маса Сонця [2]. Виявляється, що кількість речовини, яка має падати на Сонце, щоб підтримувати його спостережуваний світність, становить $2 \cdot 10^{15}$ кг/с $\approx 0{,}01\ M_\oplus$/рік, тобто вона надзвичайно мала порівняно з масою Сонця. Тому зареєструвати її безпосередньо за часів Р. Майєра було неможливо. Але існує достатньо очевидний тест: період обертання Землі $T_\oplus$ навколо Сонця, що згідно з третім законом Кеплера визначається також його масою. З'ясуємо, як має зменшуватися період обертання Землі у зв'язку з таким приростом маси Сонця.

Нехтуючи масою Землі порівняно з масою Сонця, запишемо третій закон Кеплера для системи Сонце – Земля:

$$\frac{M_\odot T_\oplus^2}{a_\oplus^3} = \frac{4\pi^2}{G}. \qquad (35)$$

Диференціюємо це співвідношення, враховуючи, що змінюються і маса, і період, і велика піввісь орбіти:

$$\frac{(T_\oplus^2 dM_\odot + 2M_\odot T_\oplus dT_\oplus)a_\oplus^3 - 3M_\odot T_\oplus^2 a_\oplus^2 da_\oplus}{a_\oplus^6} = 0. \qquad (36)$$

Виконуючи очевидні скорочення, дістаємо:

$$(T_\oplus dM_\odot + 2M_\odot dT_\oplus)a_\oplus - 3M_\odot T_\oplus da_\oplus = 0. \qquad (37)$$

Щоб розв'язати це рівняння, скористаємося *законом збереження моменту імпульсу* Землі:

$$M_\oplus a_\oplus \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} = \text{const}, \qquad (38)$$

де використано колову швидкість руху Землі орбітою. Диференціюючи це співвідношення, отримаємо:

$$\frac{da_\oplus}{a_\oplus} = -\frac{dM_\odot}{M_\odot}. \qquad (39)$$

Підставляючи (39) у рівняння (37), остаточно знаходимо:

$$\frac{dT_\oplus}{T_\oplus} = -2\frac{dM_\odot}{M_\odot}. \qquad (40)$$

Ураховуючи дані, наведені в умові задачі, дістаємо зменшення періоду на 2 с за рік. Таку зміну періоду обертання Землі навколо Сонця цілком можна було виявити навіть за часів Р. Майєра.

Приклад 9. *Чому пульсари мають такі короткі періоди?* Відомо, що пульсари – це нейтронні зорі, що швидко обертаються навколо своєї осі й мають потужне магнітне поле. Знайдемо початковий період осьового обертання нейтронної зорі, що народилася в результаті гравітаційного колапсу (спалаху наднової). Нехай радіус ядра надгіганта до колапсу становив $R_0 = 10^5$ км, період його обертання – $T_0 = 25^{\text{d}}$. Радіус нейтронної зорі покладемо таким, що дорівнює 10 км.

За центральносиметричного колапсу момент імпульсу ядра зорі зберігається. До того ж колапс відбувається так швидко, що момент імпульсу не встигає розподілитися між ядром і оболонкою зорі.

Тоді, враховуючи (4), матимемо:

$$M_0\omega_0 R_0^2 = M_n\omega_n R_n^2, \qquad (41)$$

де ω_0 і ω_n – частоти обертання ядра надгіганта і нейтронної зорі відповідно. Оскільки $\omega = 2\pi/T$ і $M_0 = M_n$, то з рівності (41) дістаємо:

$$T_n = T_0 \left(\frac{R_n}{R_0} \right)^2 = 22 \text{ (мс)}.$$

Нагадаємо, що період обертання відомого пульсара в Крабоподібній туманності становить 33 мс.

Принагідно зазначимо, що саме формула (4) і *закон збереження моменту імпульсу* дають змогу зрозуміти таке явище, як збільшення частоти обертання (кутової швидкості) системи в процесі її стискання. Як інакше, не застосовуючи цей закон, пояснити учневі, чому фігурист розкручується швидше, притискаючи руки до тіла, і зупиняє обертання, витягуючи максимально руки в боки?

Наведені приклади свідчать, на нашу думку, про те, що закон збереження моменту імпульсу є справді базовим законом у фізичній та астрономічній освіті, що її надає профільна школа. Тому йому потрібно віддати належне під час підготовки вчителів фізики і астрономії.

Широке застосування закону збереження моменту імпульсу (як і інших законів збереження) в астрономічній освіті, по-перше, проілюструє глибинний зв'язок астрономії з фізикою, по-друге, навчить учня (студента) застосовувати відомі фізичні закони в космічних умовах. З одного боку, це допоможе глибше усвідомити вже відому йому фізику, сприятиме розширенню горизонту його фізичного мислення. З іншого боку, демонстрація цього зв'язку з фізикою підкреслить фундаментальність астрономії як науки.

Використання фундаментальних ідей фізики – ідеї симетрії та ідеї збереження під час навчання астрономії – має методологічні та світоглядні аспекти. Учень (студент) має відчути єдність природи, гармонію Всесвіту, яка зосереджена в фундаментальних законах фізики й математики, його довершеність – в абстрактних законах симетрії. Усвідомлення цього сприятиме формуванню єдиної наукової картини світу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Збірник програм з профільного навчання для загальноосвітніх навчальних закладів: Фізика та астрономія, 10–12 кл. – Харків: Основа, 2010. – 112 с.

2. Кузьменков С. Г. Зорі: Астрофізичні задачі з розв'язаннями: навч. посіб. / С. Г. Кузьменков. – К.: Освіта України, 2010. – 206 с.

3. Кузьменков С. Г. Історичні, методологічні та світоглядні аспекти вивчення законів Кеплера в університетському курсі астрономії / С. Г. Кузьменков // Зб. наук. праць БДПУ (Пед. науки). – № 3. – Бердянськ: БДПУ, 2009. – С. 181–190.

4. Кузьменков С. Йоганн Кеплер і революція в астрономії / Сергій Кузьменков // Фізика та астрономія в шк. – 2009. – № 3. – С. 3–6.

5. Кузьменков С. Г. Сонячна система: зб. задач: навч. посіб. / С. Г. Кузьменков, І. В. Сокол. – К.: Вища шк., 2007. – 168 с.