НАЦІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ НАУК
УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Киев

1996

Национальная Академия наук Украины
Институт математики

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сборник научных трудов

Киев
Институт математики НАН Украины
1996

УДК 519.6.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. Сб. науч. тр. /НАН Украины. Ин-т математики; Редкол.: Самойленко А.М. (отв.ред.), Березовский А.А. (отв.ред.) и др.-Киев, 1996.- с.

Тематический сборник содержит изложение основных подходов к построению математических моделей в задачах современного естествознания, экономики, техники, управления, экологии и т.п. В представленных работах теоретические аспекты математического моделирования сочетаются с конкретными приложениями. Механика деформируемого твердого тела, электродинамика, неклассические задачи линейного программирования, финансовая стратегия предприятия, системы интеллектуальной поддержки управления, экосистемы, геометрическое моделирование - Вот основные темы, представляющие практический интерес.

Сборник может быть полезен для широкого круга специалистов, развивающих и применяющих методы математического моделирования в областях, определяющих научно-технический прогресс.

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

УДК 539.219.3

Абрамов Г.С. (Херс. инд. ин-т)

МЕХАНИЗМ РОСТА ЧАСТИЦ НОВОЙ ФАЗЫ НА ПОВЕРХНОСТИ БИНАРНОГО СПЛАВА.

Рассмотрим бинарный сплав $A-B$, который в исходном состоянии представляет твердый раствор $A(B)$. Пусть при контакте этого сплава с насыщающей средой в поверхностном слое образуются частицы химического соединения $A_m B_n$. Скорость бокового роста дискообразной частицы $A_m B_n$ пропорциональна отклонению от равновесного значения локальной свободной энергии на границе:

$$v_R = \frac{dR}{dt} = K_1\left[m\left(\mu_A(R) - \mu_A^2\right) + n\left(\mu_B(R) - \mu_B^2\right)\right] \qquad (1)$$

где $\mu_i(R)$ и μ_i^R $(i = A, B)$ -соответственно текущее и равновесное значения химического потенциала i-го компонента в слое на границе с частицей радиуса R; K_1-кинетический коэффициент.

Кроме того,скорость бокового роста определяется величиной диффузионного потока компонента B к границе растущей частицы:

$$v_R = \frac{D_\Pi}{C_\phi} \nabla C\big|_R \qquad (2)$$

где D_Π-коэффициент поверхностной диффузии; C_ϕ-концентрация компонента B в частице.

Если учесть, что при небольших отклонениях от равновесия

$$m\left(\mu_A(R) - \mu_A^2\right) + n\left(\mu_B(R) - \mu_B^2\right) \approx \left(C_R - C_p - \frac{\alpha}{R}\right) kT \left(\frac{m}{C_p} - \frac{n}{1-C_p}\right)$$

где C_R и C_p -соответственно граничное и равновесное

решающих функций из числа не заданных в условиях (2). Тогда граничные условия можно представить в виде

$$\bar{g}_1 * (\bar{X}(s_0)) = 0, \quad \bar{g}_2 * (\bar{X}(s_N)) = 0 \qquad (6)$$

Краевые задачи (1), (2) и (5), (6) являются эквивалентными, но решение последней позволяет за счет равноправности компонент вектора $\bar{Y}$ легко изменять расчетную схему в разных областях пространства параметров нагружения и строить равновесные формы упругой системы как в докритической, так и закритической области деформирования, включая предельные точки. Изменение расчетной схемы проводится путем изменения соответствующих компонент векторов $\bar{g}_1$ или $\bar{g}_2$ в зависимости от особенностей процесса деформирования. Это позволяет избежать трудностей вычислительного характера, которые связаны с неоднозначностью зависимостей факторов напряженно-деформированного состояния от параметров нагружения и свойств упругого основания. Предложенный подход позволяет моделировать процесс деформирования упругих систем из анизотропных оболочек вращения и анализировать явления их потери устойчивости хлопком.

УДК 517.512

В.И. Кузьмич (Херсон. пед. ин-т)

СХОДИМОСТЬ ВОЗЛЕ ТОЧКИ.

Теоремы, устанавливающие необходимые и достаточные условия сохранения функцией, являющейся предельной для функциональной последовательности (ряда), предельных свойств элементов этой последовательности (членов ряда), таких как существование предела в точке, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость, принято называть теоремами типа Арцела-Асколи. Наиболее значительными результатами в этой области являются результаты Ч. Арцела, который ввел в рассмотрение

понятия "квазиравномерной сходимости" [1, с. 259] и "квазиравномерной сходимости вообще" [2]. Эти виды сходимости функционального ряда являются необходимыми и достаточными условиями, соответственно, непрерывности и интегрируемости по Риману суммы ряда.

Следует отметить, что квазиравномерная сходимость определяется на отрезке и применить ее к исследованию предельной функции на непрерывность в отдельной точке не представляется возможным. Ранее рассматривалась также "равномерная сходимость в точке с точностью до ε " [3, с. 437], являющаяся необходимым и достаточным условием непрерывности функции, являющейся суммой ряда непрерывных функций. Но и этот вид сходимости имеет указанный выше недостаток. Более того, по принципиальным соображениям оба вида сходимости нельзя применить к получению условий сохранения предела и дифференцируемости предельной функции в отдельной точке.

В работе [4] было введено понятие "сходимости возле точки", благодаря которому получены теоремы типа Арцела-Асколи, дающие необходимые и достаточные условия сохранения предельной функцией свойств существования предела в точке, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости по Риману. Все эти свойства рассматриваются с единой точки зрения - сходимости возле точки.

Определение 1. Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходятся возле точки x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N(\varepsilon) > 0$, что для каждого номера $n > N(\varepsilon)$ существует проколотая $\delta_n(\varepsilon)$ - окрестность точки x_0, в каждой точке которой выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Отметим, что это определение является естественным обобщением определений предела числовой последовательности и предела функции в точке. Это определение учитывает поведение элементов функциональной последовательности в как угодно малой окрестности точки, исключая саму эту точку, что весьма важно при изучении дифференциальных свойств предельной функции.

Приведем основные полученные результаты. Для случая сохранения предела функции в точке справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Пусть, кроме того выполняются два условия:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$ $(n = 1,2,\dots)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке x_0 предел равный A, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле этой точки.

Для случая непрерывности, распространяя предыдущую теорему на промежуток, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть последовательность непрерывных на промежутке $< a; b >$ функций $f_n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ сходится на этом промежутке к функции $f(x)$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на промежутке $< a; b >$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ сходились возле каждой точки этого промежутка.

Для изучения дифференциальных свойств предельной функции рассмотрим один частный случай сходимости возле точки.

Определение 2. Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ определены в некоторой окрестности точки x_0.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ дифференциально сходятся возле точки x_0, если возле этой точки сходятся последовательность $\left\{\dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right\}$ и функция $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Это определение является обобщением определения производной функции. С его помощью получены необходимые и достаточные условия дифференцируемости предельной функции.

Теорема 3. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ дифференцируемых на промежутке $< a; b >$ функций сходится на этом промежутке к функции $f(x)$.

Для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой на промежутке $< a; b >$ и последовательность $\{f_n'(x)\}$ сходилась на этом промежутке к функции $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ дифференциально сходились возле каждой точки промежутка $< a; b >$.

В случае интегрируемости по Риману рассмотрим другую модификацию сходимости возле точки. Разбиение отрезка $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ обозначим через T, а для двух функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных на $[a; b]$, через $m(T; \varepsilon; f; g)$, где $\varepsilon > 0$ - произвольное число, обозначим сумму длин тех отрезков $[x_k; x_{k+1}]$ разбиения T, на каждом из которых выполняется неравенство $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для любых точек этого отрезка.

Определение 3. Пусть функции $f(x)$ и $f_n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ определены на отрезке $[a; b]$.

Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ плотно сходятся возле точки x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для произвольного числа $\alpha > 0$ существует такое число $N(\alpha) > 0$, что для каждого номера $n > N(\alpha)$ на отрезке $[x_0 - \delta(\varepsilon);\ x_0 + \delta(\varepsilon)]$ выполняется неравенство $\sup\{m(T; \varepsilon; f_n; f)\} > \delta - \alpha$.

С использованием этого определения получена следующая теорема.

Теорема 4. Пусть последовательность интегрируемых по Риману на отрезке $[a; b]$ функций $f_n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ сходится на этом отрезке к ограниченной функции $f(x)$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой по Риману на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ плотно сходились возле каждой точки этого отрезка.

1. Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного. - М.: Учпедгиз, 1948. - 318 с.
2. Arzela C. Sulla integrabilita li una seril di funzioni // Rend. Acc. dei Lincei. - 1855. - 1, № 4. - p. 321-326.
3. Шарль-Жан де ла Валле-Пуссен. Курс анализа бесконечно малых. - Л.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. - Т. 1. - 464 с.
4. Кузьмич В.И. Сходимость возле точки и теоремы типа Арцела-Асколи //Укр. мат. журн. - 1983. - 45, № 8. - с. 1090-1095.

УДК 517.944:519.46

Лагно В.І., (Ін-т математики НАН України, Київ)

$\tilde{P}(1,3)$-ІНВАРІАНТНА РЕДУКЦІЯ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ЯНГА-МІЛЛСА

We have obtained a ansatzes for the vector-potential of the Yang-Mills field invariant under 3-parameter subgroups of the extended Poincare group. Using these, we carry out a reduction of the Yang-Mills equations tu system of ordinary differential equations.

Для вектор-потенціалу поля Янга-Міллса побудовано анзаци, інваріантні відносно 3-параметричних підгруп розширеної групи Пуанкаре. З їх використанням проведено редукцію рівнянь Янга-Міллса до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Класичні $SU(2)$ - інваріантні рівняння Янга-Міллса складають систему дванадцяти нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку в просторі Мінковського $R(1,3)$:

$$\partial_\nu \partial^\nu \vec{A}_\mu - \partial^\mu \partial_\nu \vec{A}_\nu + e\Big[\big(\partial_\nu \vec{A}_\mu\big) \times \vec{A}_\mu - 2\big(\partial_\nu \vec{A}_\mu\big) \times \vec{A}_\nu + \big(\partial^\mu \vec{A}_\nu\big) \times \vec{A}^\nu\Big] + e^2 \vec{A}_\nu \times \big(\vec{A}^\nu \times \vec{A}_\mu\big) = 0 \quad \mu, \nu = 0,1,2,3. \qquad (1)$$

Відомі точні розв'язки рівняння Янга-Міллса (див., напр., огляд [1] та цитовану там літературу) були отримані без використання високої симетрії системи (1). Відомо [2], що максимальною групою симетрії системи (1) є група $C(1,3) \otimes SU(2)$, що містить як підгрупу розширену групу Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, з базисними генераторами

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu + A^{m\mu} \partial_{A^m_\nu} - A^{m\nu} \partial_{A^m_\mu},$$
$$D = x_\mu \partial_\mu - A^m_\mu \partial_{A^m_\mu}, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu, \nu = \overline{1,3}. \qquad (2)$$

Редукцію системи (1) до систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), яка відповідала тривимірним