International scientific conference

«Algebraic and geometric methods of analysis»

Book of abstracts

May 31 - June 5, 2017
Odessa
Ukraine

http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

Organizers

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(Kyiv, Ukraine)
Balan V.
(Bucharest, Romania)
Banakh T.
(Lviv, Ukraine)
Fedchenko Yu.
(Odesa, Ukraine)
Fomenko A.
(Moscow, Russia)
Fomenko V.
(Taganrog, Russia)
Glushkov A.
(Odesa, Ukraine)
Haddad M.
(Wadi al-Nasara, Syria)
Herega A.
(Odesa, Ukraine)
Khruslov E.
(Kharkiv, Ukraine)
Kirichenko V.
(Moscow, Russia)
Kirillov V.
(Odesa, Ukraine)
Konovenko N.
(Odesa, Ukraine)
Maksymenko S.
(Kyiv, Ukraine)
Matsumoto K.
(Yamagata, Japan)
Mashkov O.
(Kyiv, Ukraine)
Mykytyuk I.
(Lviv, Ukraine)
Milka A.
(Kharkiv, Ukraine)
Mikesh J.
(Olomouc, Czech Republic)
Mormul P.
(Warsaw, Poland)
Moskaliuk S.
(Wien, Austri)
Panzhenskiy V.
(Penza, Russia)
Pastur L.
(Kharkiv, Ukraine)
Plachta L.
(Krakov, Poland)
Pokas S.
(Odesa, Ukraine)
Polulyakh E.
(Kyiv, Ukraine)
Rahula M.
(Tartu, Estonia)
Sabitov I.
(Moscow, Russia)
Savchenko A.
(Kherson, Ukraine)
Sergeeva A.
(Odesa, Ukraine)
Strikha M.
(Kyiv, Ukraine)
Shvets V.
(Odesa, Ukraine)
Shelekhov A.
(Tver, Russia)
Shurygin V.
(Kazan, Russia)
Vlasenko I.
(Kyiv, Ukraine)
Zadorozhnyj V.
(Odesa, Ukraine)
Zarichnyi M.
(Lviv, Ukraine)
Zelinskiy Y.
(Kyiv, Ukraine)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Volkov V., Director of the Educational Research Institute of Mechanics, Automation and Computer Systems named after P. M. Platonov;
- Bukaros A., Dean of the Faculty of automation, mechatronics and robotics

Organizing commitee

Kirillov V.	Hladysh B.	Maksymenko S.
Konovenko N.	Nuzhnaya N.	Khudenko N.
Fedchenko Yu.	Osadchuk E.	Cherevko E.

Кутова характеристика у метричному просторі

Кузьмич Валерій Іванович
(Херсонський державний університет, м. Херсон, Україна)
E-mail: kuzmich@ksu.ks.ua

У роботі В. Ф. Кагана [1, розділ XIX] детально вивчається поняття "прямолінійної розміщеності", або "прямолінійного образу" точок довільного метричного простору [2, с. 527]. У продовження цих досліджень пропонується ввести поняття "плоскої розміщеності" множини точок метричного простору, як аналога площини у геометрії Евкліда. У аксіоматиці Д. Гільберта три різні точки визначають єдину площину [3 с. 3]. Для того щоб уникнути необхідності введення аксіом у метричному просторі, за ознаку плоскої розміщеності чотирьох різних точок простору можна вибрати умову рівності нолю об'єму тетраедра, вершинами якого є ці точки. При цьому логічно використати відому формулу Юнгіуса об'єму тетраедра за довжиною усіх його ребер [4, с. 99, 100]. Однак, використання цієї формули повязане зі значними аналітичними перетвореннями. У роботі [5] отримано аналог формули Юнгіуса, у якому для знаходження об'єму тетраедра використовуються кути при одній із його вершин. Із цього аналога можна отримати достатньо просту аналітичну умову плоскої розміщеності точок. У разі потреби перевірити існування тетраедра із заданими довжинами ребер, можна використати спеціальний калькулятор, розміщений за адресою `http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645`

Для реалізації вказаного вище підходу потрібно ввести поняття кута у довільному метричному просторі, як упорядкованої трійки елементів цього простору.

Означення 1. Нехай a, b і c - довільні точки метричного простору (X, ρ). Упорядковану трійку (a, b, c) цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці b, і позначати: $\angle(a, b, c)$. Пари точок (a, b) і (b, c), при цьому, будемо називати сторонами кута.

У якості числової характеристики кута можна вибрати значення його косинуса у геометрії Евкліда, як це пропонував О. Д. Александров [6, с. 36].

Означення 2. Нехай a, b і c - довільні точки метричного простору (X, ρ). Характеристикою кута $\angle(a, b, c)$, або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число $\varphi(a, b, c)$, що знаходиться за формулою:

$$\varphi(a,b,c) = \frac{\rho^2(a,b) + \rho^2(b,c) - \rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)\rho(b,c)}. \tag{1}$$

Метричний простір (X, ρ), у якому введено поняття кута за означенням 1, і його характеристику за формулою (1), будемо позначати Π.

Із означення 2 легко отримати означення прямолінійної розміщеності трьох точок простору Π.

Будемо казати, що точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, якщо $\varphi(a, b, c) = \pm 1$. При $\varphi(a, b, c) = 1$ кут $\angle(a, b, c)$ будемо називати нульовим, а при $\varphi(a, b, c) = -1$ - розгорнутим. Якщо ж виконується рівність $\varphi(a, b, c) = 0$, то кут $\angle(a, b, c)$ природно назвати прямим.

Для розгорнутого кута $\angle(a, b, c)$ можна ввести поняття суміжних кутів.

Означення 3. Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим, а точка d цього простору така, що виконується рівність $\varphi(a, b, d) = -\varphi(c, b, d)$. Тоді кути $\angle(a, b, d)$ і $\angle(c, b, d)$ будемо називати суміжними.

Використовуючи згадану вище формулу, отриману у роботі [5], можна дати наступне означення плоскої розміщеності чотирьох точок простору Π.

Означення 4. Будемо казати, що точки a, b, c, d простору Π плоско розміщені, якщо виконується рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Для довільної множини точок метричного простору природно дати наступне означення її плоскої розміщеності.

Означення 5. Будемо казати, що множина A точок простору Π плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені.

Із означення 4 можна отримати наступний критерій плоскої розміщеності точок.

Теорема 6. *Для того щоб точки a, b, c, d простору Π були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a,b,c) = \varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d))(1-\varphi^2(c,b,d))}. \tag{3}$$

У геометрії Евкліда рівність (3) має просте геометричне тлумачення: одна із вершина тетраедра знаходиться у площині основи, що утворена трьома іншими його вершинами. У цьому легко впевнитись помітивши, що рівність (3) є аналогом формул косинуса суми або різниці двох кутів.

Із означення 4 отримується наступна теорема, за допомогою якої зручно будувати у просторі Π плоско розміщені множини точок.

Теорема 7. *Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим.*

Для того, щоб точки a, b, c, d цього простору були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ були суміжними.

Із означення 4 отримується також наступна теорема, за допомогою якої можна у довільному метричному просторі встановити систему координат по відношенню до трьох фіксованих точок цього простору.

Теорема 8. *Нехай у метричному просторі Π кут $\angle(a,b,c)$ є прямим. Для того щоб точки a, b, c, d були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) = 1$.*

Такий підхід допускає окремі елементи неевклідової геометрії у просторі Π, що підтверджується конкретними прикладами.

У подальшому роботу слід продовжити у напрямі вивчення властивості паралельного розміщення множин точок довільного метричного простору, та встановлення співвідношень між поняттями перпендикулярності і паралельності множин точок простору, аналогічних класичним співвідношенням.

Література

[1] В. Ф. Каган. *Основания геометрии. Часть 2.* М.-Л.: Гостехиздат, 1956.
[2] В. Ф. Каган. *Очерки по геометрии.* Издательство Московского университета, 1963.
[3] Давид Гильберт. *Основания геометрии.* Петроград: Сеятель, 1923.
[4] Я. П. Понарин. *Элементарная геометрия. Часть 2.* Москва: МЦНМО, 2006.
[5] В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич. Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*, 36(249):55-64, 2012.
[6] А. Д. Александров. *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* М.-Л.: Гостехиздат, 1948.