УДК 517.2

А. Ф. Турбин (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Я. Д. Плоткин (Херсон. пед. ун-т)

G-ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ. I

We introduce a new class of special functions which generalize the Bessel classical functions and prove their principal properties.

Введено новий клас спеціальних функцій, що узагальнюють класичні функції Бесселя, та доведено їх основні властивості.

Введение. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — произвольные неотрицательные действительные числа, $n \geq 1$. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \frac{x^{(n+1)k}}{k!\Gamma(1+k+\nu_1)\ldots\Gamma(1+k+\nu_n)},$$

где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Ряд сходится для всех $x \geq 0$ и определяет некоторую вещественно-аналитическую функцию на $(0, \infty)$.

Определение 1. *Функцию*

$$Z_{\varepsilon,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \frac{x^{(n+1)k+\sum_{j=1}^n \nu_j}}{k!\Gamma(1+k+\nu_1)\ldots\Gamma(1+k+\nu_n)} \tag{1}$$

назовем G-функцией Бесселя (модифицированной, если $\varepsilon = -1$) первого рода мультииндекса $\langle \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n \rangle$. Если $n = 1$, $\varepsilon = 1$, то

$$Z_{1,\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+\nu}}{k!\Gamma(1+k+\nu)} = J_\nu(2x)$$

— функция Бесселя первого рода индекса ν. Если $n = 1$, $\varepsilon = -1$, то

$$Z_{-1,\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+\nu}}{k!\Gamma(1+k+\nu)} = I_\nu(2x)$$

— модифицированная функция Бесселя первого рода индекса ν (см., например, [1 – 4]).

Если $n \geq 2$ произвольно, ν_i, $i = \overline{1, n}$, неотрицательные и целые, $\bar{\nu} = \sum_{i=1}^n \nu_i$, то (см. [5], где $\varepsilon = -1$)

$$Z_{\varepsilon,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \frac{x^{(n+1)k+\bar{\nu}}}{k!\prod_{i=1}^n (k+\nu_i)!}, \tag{2}$$

откуда

$$Z_{-1,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle}(\omega_{2(n+1)}x) = \omega_{2(n+1)}^{\bar{\nu}} Z_{1,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle}(x), \tag{3}$$

где $\omega_{2(n+1)}$ — корень степени $2(n+1)$ из единицы. В частности, в [5] функция

$$Z_{-1,\langle 0,\ldots,0 \rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \frac{x^{(n+1)k}}{(k!)^{n+1}}$$

использована для решения однородного дифференциального уравнения в частных производных $(n+1)$-порядка специального вида.

Исследуемые функции могут быть получены из G-функций Мейера (см., например, [6]) при определенных значениях определяющих параметров. Введение G-функций было мотивировано желанием получить класс функций, содержащий в себе как можно более широкий аспект специальных функций. В рассматриваемом случае G-функции Бесселя появились как необходимый аналитический аппарат для решения определенных дифференциальных уравнений высокого порядка (обыкновенных и в частных производных) и ряда задач теории случайных процессов, что отразилось на приводимых доказательствах (см. также [7]).

В данной работе мы доказываем анонсированные в [8, 9] результаты, приводим ряд новых и, прежде всего, теоремы о термодинамическом пределе для $Z_{-1,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle}(x)$ при $n \to \infty$ (что разумеется, бессмысленно в классическом случае, когда $n = 1$).

1. Мультииндексы. При $n = 1$ известно, что

$$\begin{aligned} J_m(x) &= (-1)^m J_{-m}(x), \\ I_m(x) &= I_{-m}(x) \end{aligned} \tag{4}$$

(здесь индексы m — целые числа). Установим аналог (4) для $Z_{\varepsilon,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle}(x)$. Мультииндекс $\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle$ будем интерпретировать как точку (вектор) аффинно-евклидова пространства с базисом $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ [6] (ортогональность не требуется) и писать $\vec{\nu} = \sum_{i=1}^n \nu_i \vec{e}_i$ вместо $\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle$ и $Z_{\varepsilon,\vec{\nu}}(x)$ вместо $Z_{\varepsilon,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle}(x)$. Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi_{j_1} & \pi_{j_2} & \ldots & \pi_{j_n} \end{pmatrix} = \pi_j(\cdot), \qquad j = \overline{1, n!},$$

— некоторая перестановка чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\pi_{j_n}(\vec{\nu}) = \sum_{i=1}^n \pi_{ij}\vec{e}_i$. Тогда очевидно, что

$$Z_{\varepsilon,\vec{\nu}}(x) = Z_{\varepsilon,\pi_j(\vec{\nu})}(x). \tag{5}$$

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — произвольные действительные (не обязательно неотрицательные) числа. Обозначим $\bar{\nu} = \sum_{i=1}^n \nu_j$, $\nu_* = \min\{0, \min_j \nu_j\}$. Нетрудно убедиться, что

$$\nu_* \le 0, \quad \nu_j - \nu_* \ge 0, \quad \bar{\nu} - (n+1)\nu_* \ge 0. \tag{6}$$

Введем функцию, которую также будем называть G-функцией Бесселя:

$$Z_{\varepsilon,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle_*}(x) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \frac{x^{(n+1)k+\bar{\nu}-(n+1)\nu_*}}{\Gamma(1+k-\nu_*)\Gamma(1+k+\nu_1-\nu_*)\ldots\Gamma(1+k+\nu_{n-1}-\nu_*)}. \tag{7}$$

В силу (6) правая часть (7) корректно определена и совпадает с (1) для $\nu_i \ge 0$, $i = \overline{1, n}$, и, кроме того,

$$Z_{\varepsilon,\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle_*}(x) = Z_{\varepsilon,\langle \nu_{\pi_{j1}},\ldots,\nu_{\pi_{jn}} \rangle_*}(x). \tag{8}$$

Введем еще одно преобразование мультииндекса: $\langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle \xrightarrow{\varphi_i} \langle \nu_1 - \nu_i, \nu_2 - \nu_i, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i, -\nu_i, \nu_{i+1} - \nu_i, \ldots, \nu_n - \nu_i \rangle = \langle \nu_1,\ldots,\nu_n \rangle^i$.

Лемма 1. *Для любого* $i = \overline{1, n}$ *справедливо равенство*

$$Z_{\varepsilon, \langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle_*}(x) = Z_{\varepsilon, \langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle_*^i}(x). \tag{9}$$

Доказательство следует из того, что найдется перестановка $\pi_j(\cdot)$ такая, что $\langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle_* = \pi_j\left(\langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle_*^i\right)$, и можно воспользоваться (8). (В частности, если $\nu_i = 0$, то перестановка оказывается тождественной). Множество концов векторов $\bar{\nu} = \sum_{j=1}^n \nu_j, \bar{e}_j$, для которых $\nu_j \geq 0$ и $\sum \nu_j = \bar{\nu} = \text{const}$, образует симплекс в R^n. Зафиксируем $\bar{\nu}$ из этого симплекса и рассмотрим в R^n множество векторов $S_{\bar{\nu}} = \left\{ \bar{\nu}, \pi_j(\bar{\nu}),\ j = \overline{0, n!-1}, \varphi_i\left(\pi_j(\bar{\nu})\right), i = \overline{1, n} \right\}$. Если все величины ν_i различны, то мощность $S_{\bar{\nu}}$ в R^n равна $(n+1)!$. Объединяя полученные результаты, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. 1. *Если* $\bar{\mu} \in S_{\bar{\nu}}$, *то*

$$Z_{-1, \bar{\mu}}(x) = Z_{-1, \bar{\nu}}(x). \tag{10}$$

2. *Если* $\bar{\mu} = \pi_j(\bar{\nu})$, *то*

$$Z_{1, \bar{\mu}}(x) = Z_{1, \bar{\nu}}(x). \tag{11}$$

3. *Если* $\bar{\mu} = \varphi_i(\bar{\nu})$, ν_i *— целое положительное, то*

$$Z_{1, \bar{\mu}}(x) = (-1)^{\nu_i} Z_{1, \bar{\nu}}(x). \tag{12}$$

Следствие. *Если* $\bar{\mu} \in S_{\bar{\nu}}$ *и* ν_i *целочисленны, то*

$$\left| Z_{\varepsilon, \bar{\mu}}(x) \right| = \left| Z_{\varepsilon, \bar{\nu}}(x) \right|. \tag{13}$$

Определение 2. *Неотрицательное число* $\gamma(\bar{\nu}) = \bar{\nu} - (n+1)\nu_*$ *назовем* γ-*модулем мультииндекса. Свойства* γ-*модуля* (см. также [10]):

a) $\gamma(\bar{\nu}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\nu_i = 0$, $i = \overline{1, n}$;

b) *если* $\langle \nu_1', \ldots, \nu_n' \rangle$ *и* $\langle \nu_1'', \ldots, \nu_n'' \rangle$ *— два мультииндекса, то* $\gamma(\bar{\nu}' + \bar{\nu}'') \leq$ $\leq \gamma(\bar{\nu}') + \gamma(\bar{\nu}'')$;

c) $\gamma(\alpha\bar{\nu}) = \begin{cases} \alpha\gamma(\bar{\nu}), & \alpha \geq 0, \\ -\alpha\gamma(\bar{\nu}), & \alpha < 0. \end{cases}$

Утверждение a) очевидно.

„Неравенство треугольника” следует из числового неравенства $\min\left\{ 0, \min_i\left(\nu_i' + \nu_i''\right) \right\} \geq \min\{ 0, \min_i \nu_i' \} + \min\left\{ 0, \min_i \nu_i'' \right\}$.

Равенство в c) проверяется непосредственно.

Пусть $\langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle$ — мультиииндекс и $G_{\langle \nu \rangle}$ — подгруппа группы S_n (возможно и вся группа), транзитивно действующая на множестве $\{ \nu_1, \ldots, \nu_n \}$. Тогда множество точек в R^n (мультииндексов), для которых выполняется (13), имеет мощность $\left| G_{\langle \nu \rangle} \right| (n+1)$.

Примеры **.1.** Пусть $n = 1$ и $\langle \nu_1 \rangle = \nu$. Тогда $\nu - 2\nu_* = |\nu|$,

$$Z_{\varepsilon, \langle \nu \rangle_*}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \frac{x^{2k+|\nu|}}{\Gamma(1+k-\nu_*)\Gamma(1+k+\nu-\nu_*)}.$$

2. Пусть $\langle \nu_1, \nu_2, \nu_3 \rangle = \langle 5, 5, 7 \rangle$. Тогда $S_{\langle 5, 5, 7 \rangle} = \{ \langle 5, 5, 7 \rangle, \langle 5, 7, 5 \rangle,$ $\langle 7, 5, 5 \rangle, \langle -5, 0, 2 \rangle, \langle -5, 2, 0 \rangle, \langle -7, -2, -2 \rangle, \langle 0, -5, 2 \rangle, \langle -2, -7, -2 \rangle,$ $\langle 2, -5, 0 \rangle, \langle -2, -2, -7 \rangle, \langle 0, 2, -5 \rangle, \langle 2, 0, -5 \rangle \}$,

$$\left|S_{\langle 5,5,7\rangle}\right| = |C_3|\cdot 4 = 3\cdot 4 = 12.$$

Здесь C_3 — циклическая группа 3-го порядка.

2. Обобщенные уравнения Бесселя. Пусть $a_1,\ldots,a_n, b$ — произвольные действительные числа. Обобщенным уравнением Бесселя называют дифференциальное уравнение $(n+1)$-го порядка

$$\left(x\frac{d}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_j\right)\prod_{j=1}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + a_j\right)f(x) = bx^{n+1}f(x).$$

Рассмотрим уравнение Бесселя в следующем виде:

$$\left(x\frac{d}{dx} - \overline{\nu}\right)\prod_{j=1}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \overline{\nu}\right)f(x) + \varepsilon(n+1)^{n+1}x^{n+1}f = 0. \qquad (14)$$

Теорема 2. *Пусть* $\nu_1,\ldots,\nu_n$ *таковы, что* $\Gamma(1+k+\nu_i)$, $\Gamma\big(1+k\pm(\nu_i-\nu_j)\big)$ *определены для всех* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *среди* ν_i, $\pm(\nu_i-\nu_j)$ *нет одинаковых и целых. Тогда любая из* $n+1$ G*-функций Бесселя*

$$Z_{\varepsilon,\langle\nu_1,\ldots,\nu_n\rangle}(x), Z_{\varepsilon,\langle\nu_1,\ldots,\nu_n\rangle^1}(x),\ldots, Z_{\varepsilon,\langle\nu_1,\ldots,\nu_n\rangle^n}(x)$$

является решением уравнения Бесселя (14) *и функции линейно независимы.*

Доказательство. Полагая в (14) $\nu_0 = 0$, имеем

$$\prod_{j=0}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \overline{\nu}\right)Z_{\varepsilon,\langle\nu_1,\ldots,\nu_n\rangle}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^k\prod_{j=0}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \overline{\nu}\right)\times$$

$$\times\frac{x^{(n+1)k+\overline{\nu}}}{\prod_{j=0}^{n}\Gamma(1+k+\nu_j)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^k\prod_{j=1}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \overline{\nu}\right)\frac{(n+1)kx^{(n+1)k+\overline{\nu}}}{\prod_{j=0}^{n}\Gamma(1+k+\nu_j)} =$$

$$= (n+1)\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^k\prod_{j=1}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \overline{\nu}\right)\times$$

$$\times\frac{x^{(n+1)k+\overline{\nu}}}{\Gamma(k)\prod_{j=0}^{n}\Gamma(1+k+\nu_j)} = (n+1)\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^k\prod_{j=2}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \overline{\nu}\right)\times$$

$$\times\frac{\big((n+1)k+(n+1)\nu_j\big)x^{(n+1)k+\overline{\nu}}}{(k+\nu_1)\Gamma(k)\Gamma(k+\nu_1)\prod_{j=2}^{n}\Gamma(1+k+\nu_j)} =$$

$$= (n+1)^2\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^k\prod_{j=2}^{n}\left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \overline{\nu}\right)\times$$

$$\times\frac{x^{(n+1)k+\overline{\nu}}}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu_1)\prod_{j=2}^{n}\Gamma(1+k+\nu_j)} = \ldots$$

$$\ldots = (n+1)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon)^k\frac{x^{(n+1)k+\overline{\nu}}}{\prod_{j=0}^{n}\Gamma(k+\nu_j)} =$$

$$= (n+1)^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} (-\varepsilon)^{i+1} \frac{x^{(n+1)i+n+1+\bar{\nu}}}{\prod_{j=0}^{n} \Gamma(1+k+\nu_j)} =$$

$$= (-\varepsilon)(n+1)^{n+1} x^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} (-\varepsilon)^{i} \frac{x^{(n+1)i+\bar{\nu}}}{\prod_{j=0}^{n} \Gamma(1+i+\nu_j)} =$$

$$= -\varepsilon(n+1)^{n+1} x^{n+1} Z_{\varepsilon, \langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle}.$$

Докажем, что $Z_{\varepsilon, \langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle^1}(x)$ также является решением (14):

$$\prod_{j=0}^{n} \left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \bar{\nu} \right) Z_{\varepsilon, \langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle^1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \prod_{j=0}^{n} \left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \bar{\nu} \right) \frac{x^{(n+1)k-(n+1)\nu_1+\bar{\nu}}}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+k+\nu_j)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \prod_{j \neq 1} \left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \bar{\nu} \right) \left(\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_1 - \bar{\nu} \right) \times$$

$$\times \frac{x^{(n+1)k-(n+1)\nu_1+\bar{\nu}}}{\Gamma(1+k)\prod_{j\neq 1}\Gamma(1+k+\nu_1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-\varepsilon)^k \prod_{j \neq 1} \left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \bar{\nu} \right) \times$$

$$\times \frac{(n+1)kx^{1+k+\nu_1-\bar{\nu}}}{\Gamma(1+k)\prod_{j\neq 1}\Gamma(1+k+\nu_j-\nu_1)} =$$

$$= (n+1) \sum_{k=1}^{\infty} (-\varepsilon)^k \prod_{j \neq 1} \left(x\frac{d}{dx} + (n+1)\nu_j - \bar{\nu} \right) \times$$

$$\times \frac{x^{(n+1)k-(n+1)\nu_1+\bar{\nu}}}{\Gamma(k)\Gamma(1+k-\nu_1)\Gamma(1+k+\nu_2-\nu_1)} = \ldots = -\varepsilon(n+1)^{n+1}x^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (-\varepsilon)^m \times$$

$$\times \frac{x^{(n+1)m-(n+1)\nu_1+\bar{\nu}}}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+m-\nu_1)\prod_{j=2}^{n}\Gamma(1+m+\nu_j-\nu_1)} = -\varepsilon(n+1)^{n+1}x^{n+1} Z_{\varepsilon, \langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle^1}.$$

Для остальных G-функций Бесселя рассуждения аналогичны.

Поскольку среди ν_i и $\pm(\nu_i - \nu_j)$ нет целых, замена переменной суммирования единственна. А поскольку нет и одинаковых, то все степени $x^{(n+1)k-(n+1)\nu_j+\bar{\nu}}$ различны при $j = \overline{0, n}$ и, следовательно, G-функции Бесселя в условиях теоремы линейно независимы.

***Пример* 3.** Пусть $\nu_1 = 0,6$, $\nu_2 = 1,5$, $\nu_3 = 2,4$. При таких ν_i, $i = \overline{1,3}$, обобщенное уравнение Бесселя (14) имеет вид

$$x^4 f^{(IV)}(x) + 0,9x^3 f'''(x) - 4,1x^2 f''(x) -$$
$$- 22,715xf'(x) + 72,2995f(x) + \varepsilon 256x^4 f(x) = 0. \qquad (15)$$

Четыре G-функции Бесселя, образующие фундаментальную систему решений (15), имеют вид

$$Z_{\varepsilon,\langle 0.6;\,1.5;\,2.4\rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^k \frac{x^{4k+4,5}}{k!\,\Gamma(1,6+k)\Gamma(2,5+k)\Gamma(3,4+k)},$$

$$Z_{\varepsilon,\langle -0.6;\,0.9;\,1.8\rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^k \frac{x^{4k+2,1}}{k!\,\Gamma(0,4+k)\Gamma(1,9+k)\Gamma(2,8+k)},$$

$$Z_{\varepsilon,\langle -0.9;\,-1.5;\,0.9\rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^k \frac{x^{4k-1,5}}{k!\,\Gamma(0,1+k)\Gamma(-0,5+k)\Gamma(1,9+k)},$$

$$Z_{\varepsilon,\langle -1.8;\,-0.9;\,-2.4\rangle}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon)^k \frac{x^{4k-5,1}}{k!\,\Gamma(-0,8+k)\Gamma(0,1+k)\Gamma(-1,4+k)}.$$

Нарушение условий теоремы приводит к появлению линейно зависимых решений и требует введения G-функций Бесселя второго рода. Соответствующие результаты будут представлены в следующей работе. Однако в любом случае верен следующий результат.

Теорема 3. *Если* $\nu_i \geq 0$, *то* $Z_{\varepsilon,\langle \nu_1,\dots,\nu_n\rangle}(x)$ — *решение уравнения* (14).

3. Непрерывные случайные блуждания на решетках в R^n и G-функции Бесселя. Зафиксируем основное вероятностное пространство (Ω, F, P) и рассмотрим $n+1$ взаимно независимых пуассоновских процессов $\xi_0(t)$, $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ с параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответственно. Как известно (см., например, [11]),

$$P\left\{\xi_j(t)=k\right\} = \frac{(\lambda_j t)^k}{k!}e^{-\lambda_j t}, \quad j=\overline{0,n}, \quad k=0,1,2,\dots. \tag{16}$$

В аффинно-евклидовом пространстве R^n рассмотрим $n+1$ векторов $\vec{\tau}_j$, $j = = \overline{0,n}$, удовлетворяющих двум условиям:

1) $\sum_{j=0}^{n}\vec{\tau}_j = 0$, т. е. $\vec{\tau}_0 = -\sum_{j=1}^{n}\vec{\tau}_j$;

2) любые n из $n+1$ векторов $\vec{\tau}_j$ линейно независимы.

Счетное множество точек в R^n вида $\Re(n,\vec{\tau}) = \left\{\sum_{j=0}^{n} m_j\vec{\tau}_j,\ m_j\in Z\right\}$, $Z = 0, \pm1, \pm2, \dots$ (кольцо целых чисел) будем называть решеткой в R^n.

Определим случайный процесс $\vec{\xi}(t) = \sum_{j=0}^{n}\xi_j(t)\vec{\tau}_j$ со значениями в $\Re(n,\vec{\tau})$. Если процесс $\vec{\xi}(t)$ в какой-либо момент времени t попадет в точку $\vec{r} = \sum_{j=0}^{n} m_j\vec{\tau}_j$, то независимо от предыстории он проводит в этой точке время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\overline{\lambda} = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j$ и затем с вероятностью λ_k/λ переходит в точку $\vec{r}+\vec{\tau}_k$. Таким образом, $\vec{\xi}(t)$ — непрерывное (во времени) случайное блуждание на $\Re(n,\vec{\tau})$. Для определенности будем считать, что $P\left\{\vec{\xi}(0)=\vec{0}\right\}=1$. Зафиксируем какие-нибудь n векторов из $\vec{\tau}_j$, $j=\overline{0,n}$, например $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \dots, \vec{\tau}_n$. Согласно условию 2 они линейно независимы и образуют базис решетки $\Re(n,\vec{\tau})$ в том смысле, что если $\vec{r}_1 = \sum_{j=1}^{n} m_j\vec{\tau}_j$ и $\vec{r}_2 = \sum_{j=1}^{n} n_j\vec{\tau}_j$, то $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2$ тогда и только тогда, когда $m_j = n_j$, $j=\overline{1,n}$. Обозначим

$$P(t; m_1, m_2, \dots, m_n) = P\left\{ \bar{\xi}(t) = \sum_{j=1}^{n} m_j \bar{\tau}_j \right\}, \quad m_j \in Z, \quad j = \overline{1, n}.$$

Следующая теорема является ключевой для вывода многих свойств G-функций Бесселя.

Теорема 4. *Для любых* $m_j \in Z$ *справедливо равенство*

$$P(t; m_1, m_2, \dots, m_n) = e^{-\bar{\lambda} t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 t)^{k - m_*} (\lambda_1 t)^{k - m_* + m_1} (\lambda_n t)^{k - m_* + m_n}}{(k - m_*)!(k - m_* + m_1)! \dots (k - m_* + m_n)!}, \qquad (17)$$

где $m_* = \min\left\{ 0, \min_{1 \le j \le n} m_j \right\}$, *и если* $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$, *то*

$$P(t; m_1, m_2, \dots, m_n) = e^{-(n+1)\lambda t} Z_{-1, \langle m_1, \dots, m_n \rangle_*}(\lambda t). \qquad (18)$$

Доказательство. Вычисляем вероятность $P(t; m_1, m_2, \dots, m_n)$ последовательно, используя (16) и независимость процессов $\xi_j(t)$, $j = \overline{0, n}$:

$$P(t; m_1, \dots, m_n) = e^{-\lambda_n t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^{k_n}}{k_n!} P\left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j(t) \bar{\tau}_j = \sum_{j=1}^{n-1} m_j \bar{\tau}_j + (m_n - k_n) \bar{\tau}_n \right\} =$$

$$= e^{-(\lambda_{n-1} + \lambda_n) t} \sum_{k_n=0}^{\infty} \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{n-1} t)^{k_{n-1}} (\lambda_n t)^{k_n}}{k_{n-1}! k_n!} \times$$

$$\times P\left\{ \sum_{j=0}^{n-2} \xi_j(t) \bar{\tau}_j = \sum_{j=1}^{n-2} m_j \bar{\tau}_j + (m_{n-1} - k_{n-1}) \bar{\tau}_{n-1} + (m_n - k_n) \bar{\tau}_n \right\} = \dots$$

$$\dots = e^{-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j t} \sum_{k_n=0}^{\infty} \dots \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^{k_1} \dots (\lambda_n t)^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} P\left\{ \xi_0(t) \bar{\tau}_0 = \sum_{j=1}^{n} (m_j - k_j) \bar{\tau}_j \right\}.$$

Поскольку $\bar{\tau}_0 = -\sum_{j=1}^{n} \bar{\tau}_j$, то

$$P\left\{ \xi_0(t) \bar{\tau}_0 = \sum_{j=1}^{n} (m_j - k_j) \bar{\tau}_j \right\} = P\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(m_j - k_j + \xi_0(t) \right) \bar{\tau}_j = 0 \right\}.$$

В силу условия 2 последнее означает, что $P\{ m_1 - k_1 + \xi_0(t) = m_2 - k_2 + \xi_0(t) = \dots = m_n - k_n + \xi_0(t) = 0 \} = 1$. Таким образом, одновременно должны выполняться равенства

$$k_1 - m_1 = k_0, \quad k_2 - m_2 = k_0, \dots, k_n - m_n = k_0, \quad k_0 = 0, 1, \dots .$$

Отсюда $k_i = k_0 + m_i \ge 0$ и, значит, $k_0 \ge -m_*$. С учетом полученных соотношений

$$P(t; m_1, m_2, \dots, m_n) = e^{-(n+1)\lambda t} \sum_{k_0 = -m_*}^{\infty} \frac{(\lambda_0 t)^{k_0} \dots (\lambda_n t)^{k_0 + m_n}}{k_0! \dots (k_0 + m_n)!}.$$

Меняя индекс суммирования на $k = k_0 + m_*$, получаем (17). Полагая в (17) $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ с учетом (1), приходим к (18). В качестве прямых следствий теоремы получаем следующие результаты.

Теорема 5. *Справедливы равенства*

$$\sum_{m_1 \in Z} \dots \sum_{m_n \in Z} Z_{-1, \langle m_1, \dots, m_n \rangle_*}(x) = e^{(n+1)x},$$

$$\sum_{m_1\in Z}\cdots\sum_{m_n\in Z}\omega_{2(n+1)}^{\overline{m}-(n+1)m_*}Z_{-1,\langle m_1,\ldots,m_n\rangle_*}(x) = e^{(n+1)\omega_{2(n+1)}x}.$$

Первое тождество следует из того, что $\sum_{m_1}\ldots\sum_{m_n}\mathrm{P}(t;m_1,\ldots,m_n)=1$, и из формулы (18). Второе — из (3).

Теорема 6 (производящая функция). *Пусть* $u_i\in(0,1]$, $i=\overline{1,n}$. *Тогда*

$$e^{x(1/u_1u_2\ldots u_n+u_1+u_2+\ldots+u_n)} = \sum_{m_1}\ldots\sum_{m_n}u_1^{m_1}u_2^{m_2}\ldots u_n^{m_n}Z_{-1,\langle m_1,\ldots,m_n\rangle_*}(x). \qquad (19)$$

Положим в правой части (16) $\lambda_0=(u_1\ldots u_n)^{-1}$, $\lambda_i=u_i$, $i=\overline{1,n}$. Суммируя по всем возможным $m_j\in Z$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m_1}\ldots\sum_{m_n}\frac{t^{(n+1)k+\overline{m}-(n+1)m_*}\left(u_1^{m_1+k-m_*}\ldots u_n^{m_n+k-m_*}\Big/\left(u_1^{k-m_*}\ldots u_n^{k-m_*}\right)\right)}{(k-m_*)!(k+m_1-m_*)!\ldots(k+m_n-m_*)!} =$$

$$= \sum_{m_1}\ldots\sum_{m_n}u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}Z_{-1,\langle m_1,\ldots,m_n\rangle_*}(t).$$

При $n=1$ формула (19) переходит в формулу Шлемильха для модифицированных функций Бесселя [2, 12].

Теорема 7 (формула сложения). *Справедливо равенство*

$$Z_{-1,\langle m_1,\ldots,m_n\rangle_*}(x_1+x_2) = \sum_{k_1}\ldots\sum_{k_n}Z_{-1,\langle m_1-k_1,\ldots,m_n-k_n\rangle_*}(x_1)Z_{-1,\langle k_1,\ldots,k_n\rangle_*}(x_2).$$

Случайный процесс $\vec{\xi}(t)$ с значениями в $\mathfrak{R}(n,\vec{\tau})$ является при $\lambda_0=$ $=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=\lambda$ однородной по времени и пространству цепью Маркова. По формуле Колмогорова – Чэпмена

$$\mathrm{P}(t_1+t_2;m_1,\ldots,m_n) = \sum_{k_1}\ldots\sum_{k_n}\mathrm{P}(t_1;m_1-k_1,\ldots,m_n-k_n)\mathrm{P}(t_2;k_1,\ldots,k_n).$$

Осталось воспользоваться равенством (17). В частности (формула удвоения),

$$Z_{-1,\langle m_1,\ldots,m_n\rangle_*}(2x) = \sum_{k_1}\ldots\sum_{k_n}Z_{-1,\langle m_1-k_1,\ldots,m_n-k_n\rangle_*}(x)Z_{-1,\langle k_1,\ldots,k_n\rangle_*}(x),$$

$$Z_{-1,\langle 0,\ldots,0\rangle_*}(2x) = \sum_{k_1}\ldots\sum_{k_n}Z_{-1,\langle -k_1,\ldots,-k_n\rangle_*}(x)Z_{-1,\langle k_1,\ldots,k_n\rangle_*}(x).$$

4. Термодинамические пределы *G*-функций Бесселя. В определении 1 n — произвольное положительное число. Естественно поставить следующий вопрос. Пусть в правой части (7) $n\to\infty$. Можно ли указать некоторые дополнительные условия на $\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}$ так, чтобы при $n\to\infty$ (и $\nu_i\to\infty$ в определенном смысле) соответствующий предел для $Z_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(x)$ был нетривиальным? Ответ оказывается положительным и в известном смысле конструктивным. В частности, он дает новое, теоретико-вероятностное решение уравнений гиперпараболического типа (см., например, [13]). Заметим, что прямое использование вероятностного подхода, позволившего получить содержательные результаты для $Z_{\varepsilon,\nu_1,\ldots,\nu_n}(x)$ в предыдущих пунктах, неприемлемо, поскольку пришлось бы совершать предельный переход по размерности пространства R^n. Мы поступаем иначе. Пусть $n=2$. Наделим R^2 структурой алгебры (поля) комплексных чисел. Пусть $\vec{e}_0=(0,1)$, $\vec{e}_1=(0,1)$ — ортонормированный базис в R^2. Операцию умножения векторов $\vec{x}=x_0\vec{e}_1+x_1\vec{e}_1$, $x_i\in R$, определим с помощью таблицы умножения

$$\begin{array}{c|cc} & \bar{e}_0 & \bar{e}_1 \\ \hline \bar{e}_0 & \bar{e}_0 & \bar{e}_1 \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_1 & -\bar{e}_0 \end{array}.$$

Тогда если $\bar{x},\ \bar{y} \in R^2$, то по определению

$$\bar{x}\,\bar{y} = (x_0 y_0 - x_1 y_1)\bar{e}_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0)\bar{e}_1.$$

Теперь $\{R^2, +, \cdot\}$ — двумерная алгебра, изоморфная полю комплексных чисел C. Обозначим через $\bar{\omega}_n^j \in \{R^2, +, \cdot\}$ корень n-й степени из вектора $\bar{e}_0$:

$$\bar{\omega}_n^j = \cos\frac{2\pi}{n} j\bar{e}_0 + \sin\frac{2\pi}{n} j\bar{e}_1, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{20}$$

Лемма 2. *Если $n = p$ — произвольное простое число ($p \geq 3$), то векторы $\bar{\omega}_p^j$, $j = = \overline{0, p-1}$, в (20) линейно независимы в R^2 над полем рациональных чисел. (Напомним, что любые три вектора в R^2 линейно зависимы над R.)*

Доказательство. Требуется показать, что если

$$r_1\bar{\omega}_p^1 + r_2\bar{\omega}_p^2 + \ldots + r_{p-1}\bar{\omega}_p^{p-1} = \bar{0} \in R^2 \tag{21}$$

и $r_j \in Q = \{r/q,\ r \in Z,\ q = 1, 2, \ldots\}$, НОД$\{|r|, q\} = 1$, то обязательно $r_1 = \ldots$ $\ldots = r_{p-1} = 0$. Поскольку в (21) r_j рациональны, то, умножая на НОК знаменателей, задачу сводим к проверке того, что из $m_1\bar{\omega}_p^1 + \ldots + m_{p-1}\bar{\omega}_p^{p-1} = \bar{0}$ следует $m_1 = \ldots = m_{p-1} = 0$. Известно, что если p — простое число, то из равенства $m_0\bar{\omega}_p^0 + m_1\bar{\omega}_p^1 + \ldots + m_{p-1}\bar{\omega}_p^{p-1} = \bar{0}$ вытекает $m_0 = m_1 = m_2 = \ldots = m_{p-1}$. Но в (21) $m_0 = 0$, следовательно, $m_j = 0$, $j = \overline{0, p-1}$. (Можно воспользоваться также простотой циклической группы C_p.) Множество точек в R^2 вида $\mathfrak{R}_2(p, \bar{\omega}) = \left\{\sum_{j=0}^{p-1} m_j\bar{\omega}_p^j,\ m_j \in Z\right\}$ будем также называть (алгебраической) решеткой. В метрической топологии $\mathfrak{R}_2(p, \bar{\omega})$ при $p \geq 5$ всюду плотно в R^2. Пусть $\xi_0(t), \ldots, \xi_{p-1}(t)$ — взаимно независимые пуассоновские процессы и $\lambda_0 = = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = \lambda$. Пусть $\bar{\zeta}_p(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \xi_j(t)\bar{\omega}_p^j \in \mathfrak{R}_2(p, \bar{\omega})$ — непрерывное случайное блуждание на $\mathfrak{R}_2(p, \bar{\omega})$, $\mathrm{P}(t; m_1, \ldots, m_{p-1}) = \mathrm{P}\{\bar{\zeta}_p(t) = m_1\bar{\omega}_p^1 + \ldots$ $\ldots + m_{p-1}\bar{\omega}_p^{p-1}\}$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4, и учитывая лемму 2, получаем $\mathrm{P}(t; m_1, \ldots, m_{p-1}) = e^{-\lambda p t} Z_{\langle m_1, \ldots, m_{p-1}\rangle_*}(\lambda t)$. (Индекс $\varepsilon = -1$ опущен.) Упорядочим простые числа по возрастанию: $3 = p_1 < \ldots \ldots < p_k$ $< \ldots$. Тогда получаем $\mathrm{P}(t; m_1, \ldots, m_{p_n - 1}) = e^{-\lambda p_n t} Z_{\langle m_1, \ldots, m_{p_n - 1}\rangle_*}(\lambda t)$. Для пуассоновского процесса $\xi_j(t)$ с параметром λ имеем $\mathrm{M}\,\xi_j(t) = \lambda t$, откуда $\mathrm{M}\bar{\zeta}_{p_n}(t) = \mathrm{M}\sum \xi_j(t)\bar{\omega}_{p_n}^j = \sum \mathrm{M}\xi_j(t)\bar{\omega}_{p_n}^j = \lambda t \sum_{j=0}^{p} \bar{\omega}_{p_n}^j = \bar{0}$ в силу (20). Ковариационная матрица процесса $\bar{\zeta}_{p_n}(t)$ равна $p_n \lambda t I$, I — единичная (2×2)-мерная матрица. Отсюда $\operatorname{cov}\bar{\zeta}_{p_n}(t) / \sqrt{p_n} = \lambda t I$. Теперь имеем

$$\mathrm{P}\left\{\frac{\bar{\zeta}_{p_n}(t)}{\sqrt{p_n}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{p_n}}\left(m_1\bar{\omega}_{p_n}^1 + \ldots + m_{p-1}\bar{\omega}_{p_n}^{p_n - 1}\right) = e^{-p\lambda t} Z_{\langle m_1, \ldots, m_{p-1}\rangle_*}(\lambda t).$$

Используя (18) и (20), находим

$$P\left\{ \frac{\vec{\zeta}_{p_n}(t)}{\sqrt{p_n}} = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \left[\sum_{j=1}^{p_n-1} m_j \cos\frac{2\pi}{p_n} j\vec{e}_0 + \sin\frac{2\pi}{n} j\vec{e}_1 \right] \right\} = e^{-p_n\lambda t} Z_{\langle m_1,\ldots,m_{p_n-1}\rangle_*}(\lambda t). \tag{22}$$

При фиксированном t $\vec{\zeta}_p(t) / \sqrt{p} = \sum_{j=0}^{p-1} \xi_j(t)\vec{\omega}_p^j / \sqrt{p}$ — сумма взаимно независимых случайных векторов, $M\vec{\zeta}_p(t) / \sqrt{p} = 0$ и ковариация не зависит от p. Поэтому к $\vec{\zeta}_p(t) / \sqrt{p}$ применима (двумерная) локальная центральная предельная теорема [11]. Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть $p_n \to \infty$, а индексы $m_j \in Z_j = 1, p_n - 1$ меняются таким образом, что*

$$\lim_{p_n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_{j=1}^{p_n-1} m_j \cos\frac{2\pi}{p_n} j = x \in R,$$
$$\lim_{p_n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_{j=1}^{p_n-1} m_j \sin\frac{2\pi}{p_n} j = y \in R. \tag{23}$$

Тогда

$$\lim_{p_n\to\infty} e^{-p_n\lambda t} Z_{\langle m_1,\ldots,m_{p_n}\rangle_*}(\lambda t) = \frac{1}{2\pi\lambda t} e^{-(x^2+y^2)/(2\lambda t)}.$$

Определим векторы

$$\vec{\omega}_{1,n}^j = \cos\frac{2\pi}{n} j\vec{e}_0 + \sin\frac{2\pi}{n} j\vec{e}_1,$$
$$\vec{\omega}_{2,n}^j = \cos\frac{2\pi}{n} j\vec{e}_2 + \sin\frac{2\pi}{n} j\vec{e}_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{\omega}_{k,n}^j = \cos\frac{2\pi}{n} j\vec{e}_{2k-1} + \sin\frac{2\pi}{n} j\vec{e}_{2k-1}.$$

Их общее число равно kn.

Лемма 3. *Векторы в R^{2k} при $k = p$ — простом*

$$\vec{\omega}_{1,p}^j,\ j = \overline{0, p-1},\quad \vec{\omega}_{2,p}^j,\ j = \overline{0, p-1}, \ldots, \vec{\omega}_{k,p}^j,\quad j = \overline{0, p-1}$$

(их число равно $k(p-1)$) линейно независимы в R^{2k} над полем рациональных чисел при любом простом $p \geq 3$.

Доказательство основано на том, что R^{2k} представляется в виде прямой суммы двумерных пространств, каждое из которых наделяется структурой алгебры комплексных чисел [14]. Пусть $\xi_{rj}(t)$, $r = \overline{1, k}$, $j = \overline{0, p-1}$, — pk взаимно независимых пуассоновских процессов с одинаковым параметром λ. В этом случае

$$P\left\{ \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=0}^{p-1} \xi_{rj}\vec{\omega}_{r,p}^j = \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=0}^{p-1} m_{rj}\vec{\omega}_{r,p}^j \right\} =$$
$$= e^{-\lambda k(p+1)t} Z_{\langle m_{11},\ldots,m_{1p-1},m_{21},\ldots,m_{2p-1},\ldots,m_{k1},\ldots,m_{kp-1}\rangle_*}(\lambda t). \tag{24}$$

Теорема 9. *Пусть при $p_n \to \infty$ m_{rj} таковы, что*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{kp_n}} m_{1j} \cos\frac{2\pi}{p_n} j \to x_1, \\
&\frac{1}{\sqrt{kp_n}} m_{1j} \sin\frac{2\pi}{p_n} j \to y_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{1}{\sqrt{kp_n}} m_{kj} \cos\frac{2\pi}{p_n} j \to x_k, \\
&\frac{1}{\sqrt{kp_n}} m_{kj} \sin\frac{2\pi}{p_n} j \to y_k.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Тогда из (24) *в силу многомерной локальной центральной предельной теоремы*

$$
\lim_{p_n \to \infty} e^{-(p_n+1)k\lambda t} Z_{\langle m_{11}, \ldots, m_{kp_n-1} \rangle_*}(\lambda t) = \frac{1}{(2\pi\lambda t)^k} e^{-\sum_{i=1}^{k} (x_i^2 + y_i^2)/(2\lambda t)} \tag{26}
$$

— *плотность винеровского процесса в* R^{2k}.

Авторы выражают признательность рецензенту за тщательный анализ работы и ценные замечания.

1. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций: В 2-х ч. – М.: Мир, 1949. – Ч. 1. – 799 с.
2. *Уиттекер Е., Ватсон Г.* Курс современного анализа. Трансцендентные функции. – М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 2. – 515 с.
3. *Грэй Э., Мэтьюз Г.*. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 371 с.
4. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. – М.: Высш. шк., 1965. – 272 с.
5. *Турбин А. Ф., Плоткин Д. Я.* Уравнения и функции Бесселя высокого порядка // Асимптотические методы в задачах теории случайных эволюций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 118 – 122.
6. *Берже М.* Геометрия: В 2-х т. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 560 с.
7. *Галіцин А. С.* Поліпараболічні рівняння математичної фізики // Допов. НАН України. – 1998. – № 1. – С. 15 – 17.
8. *Турбин А. Ф., Плоткин Д. Я.* Функции Бесселя – Галицина // Международная конференция по математическому моделированию. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, Херсон. техн. ун-т, 1998. – С. 120 – 125.
9. *Турбин А. Ф.* Одномерный процесс броуновского движения — альтернатива модели А. Эйнштейна – Н. Винера – П. Леви // Фрактал. аналіз та суміжні питання. – Київ: Ін-т математики НАН України, НПУ ім. Н. П. Драгоманова, 1998. – № 2. – С. 47 – 60.
10. *Турбин А. Ф.* Матрицы, реализующие транзитивное действие группы S_{n+1} на границе ромбоэдра в R^n // Наукові зап. НПУ ім. Н. П. Драгоманова. – 1999. – № 1. – С. 234 – 243.
11. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Киев: Наук. думка, 1978. – 540 с.
12. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
13. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
14. *Turbin A. F.* Hypercomplex analysis in Ljush's algebra // Вопр. аналит. механики и ее применений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – Т. 26. – С. 387 – 406.

Получено 27.04.2001