МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ЛІНІЙНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА

Дипломна робота

на здобуття рівня вищої освіти бакалавр

Виконала: студентка 4 курсу 421 групи_________

напряму підготовки 6.040201 Математика*_______

Асауленко В.С.________________________________

Керівник к. ф.-м. н., доц. Плоткін Я.Д.__________

Рецензент к.п.н., проф. Шерман М.І.____________

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Інтегральні рівняння є одним із розділів аналізу, що швидко набуває розвитку. Рівняння називається інтегральним, якщо невідома функція входить до рівняння під знаком інтегралу. Інтегральні рівняння – це функціональні рівняння спеціального типу, історія яких тісно пов’язана із задачами математичної фізики, зокрема, з проблемою коливань твердого тіла.

Теорія інтегральних рівнянь, тобто рівнянь, в яких шукана функція знаходиться під знаком інтегралу, складає значний розділ математичного аналізу та має велике теоретичне та прикладне значення. Хоча окремі інтегральні рівняння зустрічалися вже в першій половині XIX ст., але систематична їх теорія була закладена на рубежі XIX та XX ст. в роботах італійського математика Вольтерра [43], шведського математика Фредгольма, Д. Гільберта та інших математиків. Цей предмет має довгу історію та своїм виникненням зобов’язаний Д. Бернуллі.

На протязі багатьох століть зусилля математиків були спрямовані на розв'язання проблеми коливання середовища та пов’язаної з нею крайовою задачею теорії потенціалу. Так, Г. Шварц вперше довів існування власних коливань для двовимірного випадку та більш високих розмірностей; останні десятиріччя XIX ст. було відведено Пуанкаре на створення його теоретико-функціональних методів; В. Вольтерра вивчав той тип рівнянь, який зараз носить його ім’я, його найбільш відома робота була зроблена в інтегральних рівняннях. У 1900 р. Е. Фредгольм виклав основні властивості та теореми теорії інтегральних рівнянь, розробив загальні методи розв’язування деяких їх видів, надав оригінальний розв'язок одного класу таких рівнянь, який відкривав аналогію між інтегральними рівняннями та алгебраїчними лінійними рівняннями. В роботі Фредгольма була реалізована ідея перетворення системи лінійних рівнянь, яка описує дискретну систему мас, в інтегральні рівняння. Саме завдяки простоті цієї ідеї рівняння Фредгольма та пов'язані з ними твердження є зв'язком між класами інтегральних та диференціальних рівнянь, що обумовлює актуальність цих результатів.

Основна ***мета*** дослідження полягає у розгляді умов існування розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма та лінійних систем рівнянь такого типу.

Об'єктом дослідження виступає загальна теорія інтегральних рівнянь, а ***предметом*** дослідження – рівняння Фредгольма.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання*** дослідження, а саме:

- розгляд властивостей інтегральних рівнянь та безпосередньо теорем Фредгольма;
- дослідження умов існування розв'язку лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема, таких, що містять похідну під знаком інтеграла;
- визначення необхідних та достатніх умов існування розв'язків лінійних рівнянь загального виду при заданих початкових умовах.

Основні ***методи***, що використовувалися у дослідженні – це метод диференціювання, метод інтегрування частинами, а також метод Лагранжа варіації довільних сталих.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ містить теоретичні відомості стосовно властивостей інтегральних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, які безпосередньо використовуються у подальших розділах, а також формулювання теорем Фредгольма, які пов'язані із умовами існування розв'язків такого типу рівнянь.

Другий розділ присвячений застосуванню теорем Фредгольма до знаходження розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь з початковими умовами, а також знаходженню розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння загального виду.

Матеріал роботи може бути використаний викладачами та студентами фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Поняття про рівняння Фредгольма

Інтегральними рівняннями прийнято називати рівняння, у яких невідома функція входить під знак інтеграла.

Інтегральне рівняння називається *лінійним*, якщо у нього невідома функція входить лінійно:

$$\phi(t)=\lambda\int_a^b \kappa(t,s)\phi(s)\,ds+f(t) \qquad (1.1)$$

,

де $\phi(t)$ – шукана функція, $f(t),\ \kappa(t,s)$ – відомі функції, λ – параметр.

Функція $\kappa(t,s)$, $a\le t,s\le b$, називається *ядром* інтегрального рівняння (1.1).

Один з найважливіших класів лінійних інтегральних рівнянь – рівняння Фредгольма. Розрізняють інтегральні рівняння Фредгольма 1-го і 2-го роду. У найпростішому випадку лінійне інтегральне рівняння Фредгольма має вигляд:

$$\phi(t)=\lambda\int_a^b \kappa(t,s)\phi(s)\,ds+f(t) \qquad (1.2)$$

.

Тут $\phi(t)$ – невідома функція. Границі інтегрування a,b можуть бути як скінченими, так і нескінченими.

Інтегральні рівняння з виродженим ядром – частинний вигляд інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду, на прикладі яких чітко видно основні результати фредгольмової теорії таких рівнянь [32].

Ядро $\kappa(t,s)$ інтегрального рівняння називається *виродженим*, якщо його можна подати у вигляді скінченої суми добутків двох функцій, з яких одна залежить лише від t, а друга лише від s:

$$\kappa(t,s)=\sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s) \tag{1.3}$$

Функції $a_i(t)$, так само як і функції $b_i(s)$, між собою лінійно незалежні (у іншому випадку можна було б зменшити число доданків в сумі (1.3)).

Припустимо, що функції $a_i(t)$ і $b_i(s)$ неперервні на відрізку $[a,b]$ зміни їх аргументів; тоді ядро $\kappa(t,s)$ буде неперервним у прямокутнику $Q\ \{a \le t, s \le b\}$.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром $\kappa(t,s)$:

$$\phi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\int_a^b b_i(s)\phi(s)\,ds+f(t), \tag{1.4}$$

де $f(t)$ – неперервна на $[a,b]$ функція.

Нехай рівняння (1.4) має розв'язок

$$\phi=\phi(t).$$

Покладемо

$$c_i=\int_a^b \phi(s) b_i s ds, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{1.5}$$

Тоді з (1.4) отримуємо:

$$\phi(t)=f(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(t), \tag{1.6}$$

звідки видно, що розв'язок інтегрального рівняння з виродженим ядром зводиться до визначення постійних c_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Замінимо у рівності (1.6) індекс суми i на j, помножимо обидві частини цієї рівності на $b_i(t)$ і проінтегруємо по t у межах від a до b:

$$\int_a^b \phi(t) b_i(t) dt = \int_a^b f(t) b_i dt + \lambda \sum_{j=1}^{n} e_j \int_a^b a_j(t) b_i(t) dt, \quad (1.7)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Вводячи позначення

$$\int_a^b a_j(t) b_i(t) dt = k_{ij}, \quad \int_a^b f(t) b_i(t) dt = f_i, \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, якій повинні задовольняти коефіцієнти c_i :

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \quad (1.8)$$

Якщо ця система нерозв'язна, то, очевидно, що інтегральне рівняння (1.4) також нерозв'язне [6].

Нехай тепер система (1.8) має розв'язок $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Підставивши ці значення коефіцієнтів в формулу (1.6), отримаємо функцію $\phi(t)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (1.4), у чому можна переконатися безпосередньо перевіркою.

Таким чином, інтегральне рівняння (1.4) і система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.8) еквівалентні у тому сенсі, що розв'язність системи (1.8) тягне за собою розв'язність рівняння (1.4) і навпаки.

Визначник системи (1.8) $D(\lambda)$ дорівнює:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \ldots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \ldots & -\lambda k_{2n} \\ \ldots & \cdots \ldots & \cdots & \ldots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

$D(\lambda)$ є многочлен відносно λ степеня не вище n , відмінний від тотожного нуля, оскільки:

$$D(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=1 \quad (1.10)$$

Отже, $D(\lambda)$ має не більше n різних коренів. $D(\lambda)$ називають *визначником Фредгольма* для інтегрального рівняння (1.4), а його нулі, тобто корені рівняння

$$D(\lambda) = 0,$$

називають *характеристичними числами* ядра $K(t,s)$ або рівняння (1.4).

1.2. Формули Фредгольма

Повне дослідження питання про розв'язність рівняння

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds+f(t) \quad (1.11)$$

з неперервним ядром $K(t,s)$ і вільним членом $f(t)$ при усіх можливих значеннях параметра λ було проведено Фредгольмом в 1904 році [15].

Ідея Фредгольма, чудова за своєю простотою та плідністю, полягала в наступному. Задача розв'язання інтегрального рівняння (1.11) розглядалася як аналітичний аналог алгебраїчної проблеми розв'язання системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Саме інтеграл в рівнянні (1.11) замінюється інтегральною сумою, що відповідає розбиттю відрізка $[a,b]$ зміни змінної s на n різних частин довжини

$$\delta=\frac{b-a}{n}.$$

Точне рівняння (1.11) замінюється наближеним

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n} K(t,s_j)\varphi(s_j)\delta+f(t), \quad (1.12)$$

де в якості s_j можна взяти, наприклад, абсциси середини інтервалів розбиття.

Припускаючи в формулі (1.12) $t=s_1, s_2 \ldots, s_n$, отримаємо лінійну алгебраїчну систему відносно n невідомих $\varphi(s_j)$:

$$\varphi(s_i)=\lambda\sum_{i=1}^{n} K(s_i, s_j)\varphi(s_j)\delta+f(s_i), \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{1.13}$$

Будемо вважати, що $\varphi(s)$ і $f(s)$зберігають в i-му інтервалі постійні значення, що дорівнюють відповідно $\varphi(s_i)$ і $f(s_i)$, а ядро $K(t,s)$ зберігає в кожному частинному квадраті з індексами i та j постійне значення, що дорівнює $K(s_i, s_j)$.

Визначник системи (1.13)

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1,s_1)\delta & -\lambda K(s_1,s_2)\delta & \ldots & -\lambda K(s_1,s_n)\delta \\ -\lambda K(s_2,s_1)\delta & 1-\lambda K(s_2,s_2)\delta & \ldots & -\lambda K(s_2,s_n)\delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1-\lambda K(s_n,s_n)\delta \\ -\lambda K(s_n,s_1)\delta & -\lambda K(s_n,s_1)\delta & \ldots & \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

є многочлен відносно λ.

Якщо λ– відмінне від кореня многочлена $D_n(\lambda)$,то система (1.13) має єдиний розв'язок при будь-яких правих частинах, і цей розв'язок може бути знайдений через відомі формули Крамера [7]. Розв'язуючи її, ми знайдемо всі $\varphi(s_i)$ і, таким чином, отримаємо наближений вираз шуканої функції $\varphi(t)$ у вигляді кусочно-постійної функції $\varphi_n(t)$. Метод заміни інтегрального рівняння системою лінійних алгебраїчних рівнянь до сих пір широко використовується в практиці інженерних розрахунків.

Чим більше n, тим точніше $\varphi_n(t)$ апроксимує шукану функцію.

В границі при $n\to\infty$ лінійна система (1.13) переходить в інтегральне рівняння (1.11), а $\varphi_n(t)$ переходить в шуканий розв'язок $\varphi(t)$ інтегрального рівняння (1.11).

Зрозуміло, що ці міркування носять спрямовуючий характер і потребують обґрунтування.

Можна діяти дещо інакше. Розв’язавши систему (1.13) і підставивши отримане значення $\varphi(s_j)$ в формулу (1.12), отримаємо наближене аналітичне представлення розв’язання рівняння (1.11):

$$\varphi(t) \approx f(t) + \lambda \frac{Q(t, s_{1,} s_{2,} \ldots, s_n; \lambda)}{D_n(\lambda)}. \tag{1.15}$$

Можна показати, що якщо $K(t,s)$ і $f(t)$ неперервні, то чисельник і знаменник другого доданку в (1.15) при $\delta = \frac{b-a}{n} \to 0$ прямують відповідно до границь

$$\lambda \int_a^b D_n(t,s;\lambda) f(s) ds \, i \, D(\lambda),$$

де $D(\lambda)$ і $D(t,s;\lambda)$ – деякі цілі функції [14] від λ.

Вважаючи

$$R(t,s;\lambda) = \frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)} (\text{резольвента Фредгольма}),$$

отримаємо витончену формулу

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda) f(s) ds, \tag{1.16}$$

що визначає розв’язок рівняння (1.11) для всіх значень λ, при яких $D(\lambda) \neq 0$.

Фредгольм побудував функції $D(\lambda)$і $D(t,s;\lambda)$ у вигляді рядів за степенями λ, побудованих чисто формальним граничним переходом, і показав, що при $D(\lambda) \neq 0$ формула (1.16) визначає єдиний розв’язок рівняння (1.11).

Доведення того, що розв’язок системи (1.13) при $n \to \infty$ прямує до розв’язку рівняння (1.11), було наведено пізніше Гільбертом для випадку неперервного ядра [22].

Знайдемо вираз для $D(\lambda)$, використовуючи «правдоподібні міркування».

Візьмемо $n=3$. Тоді

$$D_3(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1,s_1)\delta & -\lambda K(s_1,s_2)\delta & -\lambda K(s_1,s_3)\delta \\ -\lambda K(s_2,s_1)\delta & 1-\lambda K(s_2,s_2)\delta & -\lambda K(s_2,s_3)\delta \\ -\lambda K(s_3,s_1)\delta & -\lambda K(s_3,s_2)\delta & 1-\lambda K(s_3,s_3)\delta \end{vmatrix}.$$

Припускаючи для скорочення запису

$$K(s_i,s_j)=K_{ij}(i,j=1,2,3),$$

будемо мати

$$D_3(\lambda)=(-\lambda\delta)^3\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22}+t & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix}, \tag{1.17}$$

де $t=-1/\lambda\delta$.

Покладемо

$$F(t)=\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22}+t & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix}. \tag{1.18}$$

Зрозуміло, що $F(t)$ є многочленом третього степеня відносно t. Представимо $F(t)$ за формулою Тейлора [21] за степенями t:

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\frac{F'''(0)}{3!}t^3. \tag{1.19}$$

З (1.18) випливає, що

$$F(0)=\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.20}$$

За правилом диференціювання визначника

$$F'(t)=\begin{vmatrix} 1 & K_{12} & K_{13} \\ 0 & K_{22}+t & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11}+t & 0 & K_{13} \\ K_{21} & 1 & K_{23} \\ K_{31} & 0 & K_{33}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22}+t & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.21}$$

так, що

$$F'(0)=\begin{vmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{31} & K_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.22}$$

Таким чином, величина $F'(0)$ дорівнює сумі визначників, які отримуються із визначника (1.20) викреслюванням i-го стовбця та i-го рядка. Неважко відмітити, що

$$F'(0)=\frac{1}{2!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 \end{vmatrix}. \tag{1.23}$$

Дійсно, при $\alpha_1 = \alpha_2$ визначники в правій частині (1.23) дорівнюють нулю, а визначники, які отримуються один з іншого перестановкою індексів α_1 і α_2, рівні між собою. Звідси випливає справедливість формули (1.23).

Аналогічно, величина $F(0)$ може бути подана у вигляді

$$F(0) = \frac{1}{3!} \sum_{\alpha_1=1}^{3} \sum_{\alpha_2=1}^{3} \sum_{\alpha_3=1}^{3} \begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & K\alpha_1\alpha_3 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & K\alpha_2\alpha_3 \\ K\alpha_3\alpha_1 & K\alpha_3\alpha_2 & K\alpha_3\alpha_3 \end{vmatrix}.$$

Диференціюючи (1.21) по t і припускаючи, потім, що $t=0$, знаходимо

$$F''(0) = K_{33} + K_{22} + K_{33} + K_{11} + K_{22} + K_{11},$$

тобто, $F''(0)$ дорівнює сумі «визначників» першого порядку, які отримуються з (1.20) викреслюванням двох рядків номерів i та j і двох стовбців з тими ж номерами:

$$F''(0) = 2 \sum_{\alpha_1=1}^{3} K\alpha_1\alpha_1.$$

Нарешті, $F'''(t) = 6$.

Таким чином,

$$F(t) = \frac{1}{3!} \sum_{\alpha_1=1}^{3} \sum_{\alpha_2=1}^{3} \sum_{\alpha_3=1}^{3} \begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & K\alpha_1\alpha_3 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & K\alpha_2\alpha_3 \\ K\alpha_3\alpha_1 & K\alpha_3\alpha_2 & K\alpha_3\alpha_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2!} \sum_{\alpha_1=1}^{3} \sum_{\alpha_2=1}^{3} \begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 \end{vmatrix} \frac{t}{1!} \quad (1.24)$$

Замінюючи в (1.24) t на $-1/\lambda\delta$, отримаємо

$$D_3(\lambda) = (-\lambda\delta)^3 F(t) = 1 - \frac{\lambda}{1!} \sum_{\alpha_1=1}^{3} K\alpha_1\alpha_1\delta + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{\alpha_1=1}^{3} \sum_{\alpha_2=1}^{3} \begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 \end{vmatrix} \delta^2 - \frac{\lambda^3}{3!} \sum_{\alpha_1=1}^{3} \sum_{\alpha_2=1}^{3} \sum_{\alpha_3=1}^{3} \begin{vmatrix} K\alpha \\ K\alpha \\ K\alpha \end{vmatrix}$$

Аналогічно отримуємо для будь-якого n:

$$D_n(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m \lambda^m}{m!} \sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \sum_{\alpha_m=1}^{n} \begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & \cdots & K\alpha_1\alpha_m \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & \cdots & K\alpha_2\alpha_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K\alpha_m\alpha_1 & K\alpha_m\alpha_2 & \cdots & K\alpha_m\alpha_m \end{vmatrix} \delta^m$$

Відмітимо, що сума

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n} K\alpha_1\alpha_1\delta = \sum_{j=1}^{n} K(s_j, s_j)\delta$$

в границі при $\delta \to 0$ переходить до інтегралу $\int_a^b K(s,s)\,ds$, так званий *слід ядра* $K(t,s)$.

Так само при $\delta \to 0$ сума

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \sum_{\alpha_m=1}^{n} \begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & \cdots & K\alpha_1\alpha_m \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & \cdots & K\alpha_2\alpha_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K\alpha_m\alpha_1 & K\alpha_m\alpha_2 & \cdots & K\alpha_m\alpha_m \end{vmatrix} \delta^m$$

переходить до інтегралу

$$C_m = \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(\alpha_1,\alpha_1) & K(\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ K(\alpha_2,\alpha_1) & K(\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & K(\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(\alpha_m,\alpha_1) & K(\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & K(\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m. \tag{1.25}$$

Позначаючи через $D(\lambda)$ границю $D_n(\lambda)$ при $n \to \infty$, будемо мати

$$D(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m, \tag{1.26}$$

де C_m визначаються за формулами (1.25), причому $C_0 = 1$.

Покажемо, що ряд (1.26) збігається всюди, тобто $D(\lambda)$ є цілою функцією λ. Скористаємося нерівністю Адамара [23]: якщо Δ – визначник n – го порядку,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то

$$|\Delta| \le \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n, \tag{1.27}$$

де σ_i^2 є сума квадратів елементів i –го рядка визначника

$$\sigma_i^2 = a^2{}_{i1} + a^2{}_{i2} + \ldots + a^2{}_{¿}\,(i = 1, 2, \ldots, n).$$

У випадку $n = 3$ ця нерівність має простий геометричний зміст. Дійсно, вважаючи a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} координатами вектора $a_i (i = 1, 2, 3)$, знаходимо, що Δ є мішаним добутком векторів a_1, a_2, a_3 , який за абсолютною величиною дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах a_1, a_2, a_3. Величини $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ визначають довжини цих векторів, довжини ребер паралелепіпеда. Нерівність (1.27) Адамара виражає в цьому випадку очевидний геометричний факт: об’єм паралелепіпеда не може бути більшим за добуток довжин його ребер. Нерівність перетворюється в рівність тільки в тому випадку, коли паралелепіпед прямокутний, тобто коли вектори a_1, a_2, a_3 попарно ортогональні.

Доведення нерівності Адамара можна знайти, наприклад, в [15].

Нехай $|K(t,s)| \le M$ для всіх $t, s, a \le t, s \le b$. Тоді для C_m отримуємо наступну оцінку:

$$|C_m| \le \int_a^b \ldots \int_a^b M^m m^{m/2} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m = M^m m^{m/2} (b-a)^m.$$

Отже, ряд (1.26) допускає мажоранту

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{m/2}}{m!} [M(b-a)]^m \lambda^m. \tag{1.28}$$

Радіус збіжності ряду (1.30)

$$R = \lim_{m\to\infty} \frac{M^m (b-a)^m m^{m/2} (m+1)!}{m!\, M^{m+1} (b-a)^{m+1} (m+1)^{m+1/2}} = \frac{1}{M(b-a)} \frac{\lim\limits_{m\to\infty} m+1}{\sqrt{m+1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/2}} = \infty.$$

Це означає, що ряд (1.26) також збігається при всіх значеннях λ і визначає цілу функцію $D(\lambda)$, яка називається *визначником Фредгольма*.

Аналогічно можна встановити, що функція $D(t,s;\lambda)$ визначається рядом Фредгольма

$$D(t,s;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} B_m(t,s), \tag{1.29}$$

де

$$B_m(t,s) = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,s) & K(t,\alpha_1) & \cdots & K(t,\alpha_m) \\ K(\alpha_1,s) & K(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(\alpha_m,s) & K(\alpha_m,\alpha_1) & \cdots & K(\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m, \tag{1.30}$$

причому $B_0(t,s) = K(t,s)$. Відмітимо, що

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(t,t)\,dt, n>0 \left(C_0 = 1\right).$$

Ряд (1.29) збігається при всіх значеннях λ і, отже, $D(t,s;\lambda)$ є ціла аналітична функція від λ. Її називають *мінором* визначника Фредгольма.

Таким чином, резольвента Фредгольма

$$R(t,s;\lambda)=\frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)}$$

не залежить від $f(t)$ і являє собою частку двох цілих аналітичних функцій, тобто, є мероморфною функцією [12] від λ.

В будь-якій скінченній частині λ-площини вона може мати в якості особливих точок тільки полюси в скінченному числі. Полюсами резольвенти можуть бути тільки нулі $D(\lambda)$. Справедливе і обернене: нулі $D(\lambda)$ є полюсами резольвенти [29].

Формули Фредгольма (1.26) і (1.29) дозволяють побудувати розв'язне ядро $R(t,s;\lambda)$ інтегрального рівняння (1.11).

Незручність користування цими формулами в тому, що ряди (1.26), (1.29), як правило, складні для числових розрахунків через кратні інтеграли, які визначають коефіцієнти рядів.

Значення λ, для яких існує резольвента рівняння Фредгольма, будемо називати *регулярними*, а значення λ, для яких резольвента не існує, – *характеристичними*. Характеристичні числа співпадають з полюсами резольвенти або, що теж, з нулями $D(\lambda)$.

Фундаментальний результат Фредгольма ми можемо тепер сформулювати так: якщо значення λ регулярне, то інтегральне рівняння

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds+f(t)$$

з неперервним ядром $K(t,s)$ і правою частиною $f(t)$ має єдиний неперервний розв'язок, який задається формулою

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,s;\lambda)f(s)ds.$$

Як наслідок отримуємо: якщо λ регулярне, то однорідне рівняння

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

має тільки тривіальний розв'язок $\varphi(t)\equiv 0$.

Тому, якщо однорідне рівняння має нетривіальний розв'язок, то це можливо тільки тоді, коли значення λ характеристичне. Нетривіальні розв'язки однорідного інтегрального рівняння називаються *власними* або *фундаментальними* функціями ядра $K(t,s)$, які відповідають даному характеристичному числу.

1.3. Теореми Фредгольма

Перша теорема Фредгольма. Якщо λ не співпадає з жодним нулем $D(\lambda)$, тобто $D(\lambda)\neq 0$, то система лінійних рівнянь (1.8), однозначно розв'язна при будь-яких правих частинах $f(i)$ $(i=1, \dots, n)$.

Отже, якщо λ не є характеристичним числом, то інтегральне рівняння (1.4) має єдиний розв'язок $\phi(t)$, що визначається формулою (1.6), при будь-якому вільному члені $f(t)$.

У випадку $D(\lambda)\neq 0$ відповідне однорідне інтегральне рівняння

$$\phi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\int_a^b b_i(s)\phi(s)\,ds \qquad (1.31)$$

,

що відповідає випадку $f(t)\equiv 0$ на $[a,b]$, має лише тривіальний розв'язок

$$\phi(t)\equiv 0 .$$

Дійсно, якщо

$$f(t)\equiv 0$$

на $[a,b]$, то всі $f(i)$ $(i=1, \dots, n)$ дорівнюють нулю і система (1.8) буде системою однорідних лінійних рівнянь з визначником, відмінним від нуля. Така система має лише нульовий розв'язок

$$c_1=c_2=\ldots=c_n=0 .$$

Тому першу теорему Фредгольма іноді формулюють наступним чином: для того щоб рівняння (1.4) мало єдиний розв'язок при будь-якій функції $f(t)$, необхідно і достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння мало лише тривіальний розв'язок

$$\phi(t)\equiv 0 .$$

Приклад 1.1.

Розв'язати інтегральне рівняння

$$\phi(t)=1+\lambda\int_0^1 (t-s)\phi(s)ds .$$

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\phi(t)=1+\lambda\, t\int_0^1 \phi(s)ds+\lambda\int_0^1 (-s)\phi(s)ds .$$

Тут

$$b_1(s)\equiv 1 , \quad b_2(s)\equiv -s .$$

Покладемо

$$c_1=\int_0^1 \phi(s)ds , \quad c_2=\int_0^1 (-s)\phi(s)ds .$$

Тоді

$$\phi(t)=1+\lambda c_1 t+\lambda\, c_2 . \tag{1.32}$$

Помножимо обидві частини (1.32) послідовно на $b_1(t)$ і $b_2(t)$, проінтегруємо по t від 0 до 1. Отримаємо:

$$\int_0^1 \phi(t)dt=\int_0^1 dt+\lambda\, c_1\int_0^1 t\,dt+\lambda\, c_2\int_0^1 dt ,$$

$$\int_0^1 (-t)\phi(t)dt=\int_0^1 (-t)dt+\lambda\, c_1\int_0^1 \left(-t^2\right)dt+\lambda c_2\int_0^1 (-t)\,dt ,$$

або

$$\begin{cases} c_1\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-\lambda\ c_2=1 \\ c_1\ \frac{\lambda}{3}+\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)c_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{3} & 1+\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{12}$$

відмінний від нуля при будь-яких дійсних λ .

За формулами Крамера [21] знаходимо:

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)}=\frac{12}{12+\lambda^2}, \qquad c_2=\frac{\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & 1 \\ \frac{\lambda}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)}=-\frac{6+\lambda}{12+\lambda^2}.$$

В силу (1.32) маємо:

$$\phi(t)=1+\frac{12\lambda t}{12+\lambda^2}-\frac{6\lambda+\lambda^2}{12+\lambda^2}=\frac{6(2+2\lambda t-\lambda)}{12+\lambda^2}$$

(якщо $\lambda\neq\pm 2i\sqrt{3}$).

Якщо розв'язувати систему (1.7) за формулами Крамера, а потім визначники, що стоять у чисельнику, розкласти за елементами стовпця вільних членів, то отримається вираз виду

$$c_i=\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda)f_k, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

де $D_{ik}(\lambda)$ – деякі многочлени від λ степеня не вище $n-1$.

Підставляючи ці вирази для c_i у формулу (1.6), будемо мати

$$\phi(t)=f(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda)\, a_i(t)\int_a^b f(s)b_k(s)ds,$$

або

$$\phi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,s;\lambda)f(s)ds, \tag{1.33}$$

де

$$R(t,s;\lambda)=\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}D_{ik}(\lambda)a_i(t)b_k(s). \tag{1.34}$$

Функція $R(t,s;\lambda)$ є резольвентою [5] (розв'язне ядро) інтегрального рівняння (1.4). При фіксованих t,s вона являє собою дробово-раціональну функцію комплексної змінної λ, і при будь-якому значенні λ, відмінному від характеристичного, $R(t,s;\lambda)$ є неперервною функцією t,s.

Нехай тепер λ співпадає з одним з нулів визначника Фредгольма $D(\lambda)$, тобто є характеристичним числом ядра $\kappa(t,s)$. Тоді визначник системи (1.8) буде рівним нулю. Відповідна однорідна система

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ij}c_j=0 \tag{1.35}$$

має при цьому деяке число p $(1\le p\le n)$ лінійно незалежних ненульових векторів-розв'язків:

$$\left\{c_1^{(l)},c_2^{(l)},\ldots,c_n^{(l)}\right\},\quad (l=1,2,\ldots,p).$$

Функції

$$\phi_l(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i^{(l)}a_i(t),\quad (l=1,2,\ldots,p) \tag{1.36}$$

будуть нетривіальними розв'язками відповідного однорідного інтегрального рівняння

$$\phi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\int_a^b b_i(s)\phi(s)ds \tag{1.37}$$

і називаються *власними* або *фундаментальними функціями* цього рівняння, що відповідають даному характеристичному числу. Число лінійно незалежних функцій, що відповідають даному характеристичному числу, називається його *рангом* або *кратністю*.

Власні функції $\phi_e(t)$, що відповідають даному характеристичному числу λ, утворюють лінійний простір, розмірність якого дорівнює p. Тобто, якщо $\phi_1(t)$ і $\phi_2(t)$ – власні функції, що відповідають одному і тому ж характеристичному числу λ, то їх сума $\phi_1(t)+\phi_2(t)$ буде також власною функцією, що відповідає цьому ж числу λ; якщо $\phi(t)$ – власна функція, то $\alpha\phi(t)$, де α – будь-яка постійна, буде власною функцією.

Загальним розв'язком однорідного рівняння (1.37), що відповідає даному характеристичному числу, буде функція

$$\phi(t)=\sum_{l=1}^{p}\alpha_l\phi_l(t), \tag{1.38}$$

де α_l – довільна стала.

Нехай маємо інтегральне рівняння Фредгольма

$$\phi(t)=\lambda\int_a^b \kappa(t,s)\phi(s)\,ds+f(t). \tag{1.39}$$

Ядро $\kappa^{¿}(t,s)$, що одержується з ядра $\kappa(t,s)$ заміною t на s і навпаки, називається *спряженим* з ядром $\kappa(t,s)$:

$$\kappa^{¿}(t,s)=\kappa(s,t). \tag{1.40}$$

Рівняння

$$\psi(t)=\lambda\int_a^b \kappa^{¿}(t,s)\psi(s)\,ds+g(t) \tag{1.41}$$

називається *спряженим* з рівнянням (1.39).

Для інтегрального рівняння (1.4) з виродженим ядром спряжене з ним рівняння має вигляд:

$$\psi(t)=\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{n}a_i(s)b_i(t)\psi(s)\,ds+g(t). \tag{1.42}$$

Для нього

$$\psi(t)=g(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i^{¿}b_i(t), \tag{1.43}$$

де

$$c_i^{¿}=\int_a^b \psi(s)a_i(s)ds, \quad (i=1,2,\dots,n). \tag{1.44}$$

Якщо $g(t)\equiv 0$, тобто рівняння (1.42) однорідне, то для визначення $c_i^{¿}$ отримуємо однорідну систему

$$c_i^{¿}-\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ji}c_j^{¿}=0 \tag{1.45}$$

спряжену з системою (1.35).

Системи (1.35) і (1.45) мають однакове число p лінійно незалежних векторів-розв’язків [35].

Якщо $\{c_1^{(l)},c_2^{(l)},\dots,c_n^{(l)}\}$, $(l=1,2,\dots,p)$ ненульові вектор-розв’язки системи (1.45), то функції

$$\psi_l(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i^{¿(l)}b_i(t), \quad (l=1,2,\dots,p)$$

будуть власними функціями однорідного рівняння

$$\psi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}b_i(t)\int_a^b a_i(s)\psi(s)ds, \tag{1.46}$$

спряженого з рівнянням (1.11).

Друга теорема Фредгольма. Якщо λ є характеристичне число ядра $K(t,s)$, то однорідне інтегральне рівняння (1.37) і спряжене з ним рівняння (1.46) мають одне й те саме скінчене число лінійно незалежних власних функцій.

Розглянемо неоднорідне рівняння (1.4) у випадку, коли λ – характеристичне число. Його розв’язність еквівалентна розв’язності неоднорідної системи (1.8) лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ij}c_j=f_i \quad , \quad (i=1,2,\ldots,n) \quad .$$

Ця система буде розв’язною тоді і тільки тоді, коли вектор $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ буде ортогональним [5] кожному з векторів

$$\left\{c_1^{(l)},c_2^{(l)},\ldots,c_n^{(l)}\right\} \quad , \quad (l=1,2,\ldots,p) \quad ,$$

тобто, коли

$$\sum_{i=1}^{n}f_i c_i^{¿(l)}=0 \quad , \quad (l=1,2,\ldots,p) \quad . \tag{1.47}$$

Але $f_i=\int_a^b f(t)b_i(t)\,dt$, і, отже, умову (1.47) можна записати так:

$$\int_a^b f(t)\sum_{i=1}^{n}c_i^{¿(l)}b_i(t)\,dt=\int_a^b f(t)\psi_l(t)\,dt=0 \quad , \quad (l=1,2,\ldots,p) \quad . \tag{1.48}$$

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Третя теорема Фредгольма. Неоднорідне інтегральне рівняння (1.4) з виродженим ядром при характеристичному значенні λ буде розв’язним тоді і тільки тоді, коли вільний член $f(t)$ буде ортогональним до всіх розв’язків спряженого однорідного інтегрального рівняння (1.46).

Питання про розв’язність рівняння (1.4) потребує перевірки скінченого числа p умов:

$$\int_a^b f(t)\psi_l(t)\,dt=0 \quad , \quad (l=1,2,\ldots,p) \quad .$$

Якщо ці умови виконані, то рівняння (1.4) має нескінчену множину розв’язків. Всі вони описуються формулою:

$$\phi(t)=\phi_0(t)+\phi_4(t) \quad ,$$

де $\phi_4(t)$ – будь-який розв’язок неоднорідного рівняння (1.4), $\phi_0(t)$ – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння.

Умови (1.48) будуть виконуватися, якщо виконуються умови:

$$\int_a^b f(t) b_i(t)\,dt = 0 \quad , \quad (i=1, 2, \ldots, n) \quad .$$

Наслідками трьох теорем Фредгольма є наступне твердження.

Теорема про альтернативу. Якщо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром має лише тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння завжди має один і лише один розв'язок. Якщо ж однорідне рівняння має нетривіальний розв'язок, то неоднорідне інтегральне рівняння в залежності від вільного члена $f(t)$ або зовсім не має розв'язку, або має нескінчене число розв'язків.

Зауваження: результати залишаються у відомому сенсі справедливими і для випадку, коли $a_i(t)$, $b_i(t)$ і $f(t)$ аналітично залежать від параметра λ , тобто для рівняння виду:

$$\phi(t) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(t,\lambda) b_i(s,\lambda) \phi(s)\,ds + f(t,\lambda) \quad .$$

У цьому випадку k_{ij} і f_i стають аналітичними функціями від λ [31], а визначник $D(\lambda)$ буде уже не многочленом відносно λ , а аналітичною функцією λ більш загальної природи. Тому може виявитись, що характеристичних чисел зовсім не існує, так як неалгебраїчна аналітична функція може не мати нулів.

Нехай тепер маємо інтегральне рівняння

$$\phi(t) = \lambda \int_a^b \kappa(t,s) \phi(s)\,ds + f(t) \qquad (1.49)$$

з деяким неперервним ядром $\kappa(t,s)$ і неперервною $f(t)$.

Для розв'язування такого рівняння будують достатньо близьке до ядра $\kappa(t,s)$ вироджене ядро $H(t,s)$. Розв'язавши рівняння з виродженим ядром $H(t,s)$, отримаємо розв'язок, близький до розв'язку рівняння з ядром $\kappa(t,s)$ при тій самій правій частині.

Якщо побудувати послідовність $\{H_n(t)\}$ вироджених ядер, яка рівномірно збігається до ядра $\kappa(t,s)$ [11], то послідовність $\{Z_n(t)\}$ розв'язків рівнянь з ядрами $H_n(t,s)$ буде рівномірно збігатися до розв'язку $\phi(t)$ рівняння (1.29) з ядром $\kappa(t,s)$.

Ядро $\kappa(t,s)$ можна наближати частинними сумами степеневого або подвійного тригонометричного ряду [42], якщо ядро $\kappa(t,s)$ розкладається у рівномірно збіжний у прямокутнику $Q\,\{a \le t, s \le b\}$ степеневий або тригонометричний ряд.

РОЗДІЛ 2
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ФРЕДГОЛЬМА ДО ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Розв'язування рівнянь, які не містять похідної під знаком інтегралу

Будемо досліджувати питання про існування розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь виду:

$$L\left[y(x)\right]+\lambda_0\int\limits_0^1 P\left[x,y(t)\right]dt=f(x) \qquad (2.1)$$

при початкових умовах

$$y^3(0)=D_{S+1}\ , \quad \left(S=0,1,\ldots,\max(n-1,m-1)\right)\ . \qquad (2.2)$$

Тут $L\left[y(x)\right]$, $P\left[x,y(t)\right]$ – лінійні диференціальні оператори виду

$$L\left[y(x)\right]\equiv y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n}a_{n-r}(x)y^{n-t}(x), \qquad (2.3)$$

$$P\left[x,y(t)\right]\equiv\sum_{j=0}^{m}K_j(x,t)y^{(j)}(t), \qquad (2.4)$$

де $a_{n-r}(x), f(x), K_j(x,t)$ задані функції відповідно в областях: $R:0\le x,t\le 1$. Дослідження існування і побудова розв'язку задачі (2.1), (2.2) буде проведено для наступних трьох випадків:

а) $n\in Z, m=0$;

б) $n,m\in Z, n\ge m$;

в) $n,m\in Z, m\succ n$.

Для всіх цих випадків питання про існування розв'язку для інтегро-диференціального рівняння буде зведене до питання про існування розв'язку відповідного лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, розв'язок якого знаходиться методом Фредгольма (використовуючи його три фундаментальні теореми) [26].

Будемо досліджувати задачу (2.1),(2.2) у випадку, коли $m=0, n\geq 1,$ тобто задачу

$$L\left[y\right]+\lambda_0 K\left[x,t\right]y\left(t\right)dt=f\left(x\right), \tag{2.5}$$

$$y^{(1)}(0)=D_{s+1}, \quad (s=0,1,...,n-1) \tag{2.6}$$

Припустимо, що відома фундаментальна система розв'язків [12] $y_1(x),...,y_n(x)$ однорідного рівняння $L\left[y\right]=0$. Побудуємо функцію $y(x)=\varphi(x,\eta),$ яка є розв'язком задачі:

$$L\left[y\right]=0, y^{(b)}(\eta)=0, (b=0,1,...n-2), y^{(n-1)}\left(\eta\right)=1, \tag{2.7}$$

де η – довільна фіксована точка на інтервалі неперервності коефіцієнтів $a_r(x)$ рівняння $L[y]=0$, тобто $\eta\in]0,1[$.

Якщо відома фундаментальна система розв'язків рівняння $L[y]=0$, тоді функцію $\phi(x,\eta)$ завжди можна побудувати (наприклад, використовуючи метод Коші [23]). Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. Нехай

1) $a_r\left(x\right)\in C\left(I\right), f\left(x\right)\in C\left(I\right)$ і $k\left(n,1\right)\in C_{n,1}\left[R\right]$;

2) $y_1\left(x\right), y_2\left(x\right),..., y_n\left(x\right),$ – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння $L[y]=0$;

3) визначник Фредгольма $D\left(\lambda_0\right)\neq 0$ для ядра $N\left(x,t\right)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.5), (2.6), який можна подати у вигляді

$$y\left(x\right)=\sum_{n=1}^{n}C_n y_n\left(x\right)+\int_0^x\varphi\left(x,\eta\right)F\left(\eta\right)d\eta \tag{2.8}$$

де C_n – відомі сталі, $F\left(\eta\right)$ – розв'язок інтегрального рівняння (1.13).

Доведення.

Згідно з методом А.І.Некрасова [35], запишемо інтегро-диференціальне рівняння (2.5) у вигляді:

$$L[y]=F(x) \quad , \tag{2.9}$$

де

$$F(x)=f(x)-\lambda_0\int_0^1 K(x,t)y(t)\,dt \quad . \tag{2.10}$$

Припустивши, що $F(x)$ – відома функція, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (2.9), відповідно до методу Коші, можна записати у вигляді (2.8).

Для визначення сталих C_k k = (1, .., n) використовуємо початкові умови (2.6). Підставляємо (2.8) в (2.6) та, взявши до уваги властивості функції $\varphi(x,\eta)$, отримаємо систему:

$$\begin{array}{l} c_1 y_1(0)+...+c_n y_n(0)=D_1 \\ c_1 y_1'(0)+...+c_n y_n'(0)=D_1 \\ .... \\ c_1 y^{(n-1)}{}_1(0)+...+c_n y^{(n-1)}{}_n(0)=D_n \end{array} \tag{2.11}$$

Визначник цієї системи є визначником Вронського [7], який не дорівнює нулю, тоді з системи (2.11) можна однозначно визначити сталі C_k k = (1, .., n), причому ці сталі будуть визначаться лише через D_{s+1} і

$$y_k^{(e)}(0)(s=0,1,...,n-1,k=1,2,...,n,l=0,1,2,...,n-1) \quad .$$

Зауваження: якби ми частинний розв'язок рівняння (2.9), записаний за методом Лагранжа (метод варіації сталих) [11], тоді права частина системи (2.11) містила б значення функції $F(x)$ та її похідних в точці x = 0, що значно ускладнило б дослідження задачі (2.5), (2.6). Таким чином, будемо припускати, що постійні C_k вже визначені з системи (2.11).

До цього часу ми припускали, що функція $F(x)$ відома. Для її визначення підставимо (2.7) в (2.9). Маємо

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\left[\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)+\int_0^t \varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta\right]dt = f(x) \qquad (2.12)$$

Рівняння (2.12) перепишемо у вигляді:

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1\int_0^e K(x,t)\varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta dt = h(x) \qquad (2.13)$$

де

$$h(x)\equiv f(x)-\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)dt \qquad (2.14)$$

Рівняння (2.13) називається *інтегральним рівнянням Некрасова*. Для його розв’язання (аналогічно теоремі Фредгольма) вводиться відповідно визначник і перший мінор Фредгольма [7], або доводиться існування розв'язку даного рівняння методом послідовних наближень [34].

Змінюючи порядок інтегрування в рівнянні (2.13), ми зведемо інтегральне рівняння Некрасова (2.13) до лінійного інтегрального рівняння Фредгольма, для розв’язання якого використовуємо одну з трьох теорем Фредгольма. Має місце перетворення

$$\int_0^1\int_0^t K(x,t)\varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta dt \equiv \int_0^1\left\{\int_\eta^1 K(x,t)\varphi(t,\eta)dt\right\}F(\eta)d\eta \equiv \int_0^1 N(x,\eta)F(\eta)d\eta \qquad (2.15)$$

Тут введено позначення

$$N(x,\eta)\equiv\int_\eta^1 K(x,t)\varphi(t,\eta)dt \qquad (2.16)$$

Враховуючи перетворення (2.15), інтегральне рівняння Некрасова (2.13) запишемо у вигляді

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 N(x,\eta)F(\eta)dn = h(x) \qquad (2.17)$$

Оскільки за умовою теореми $D(\lambda_0)\neq 0$ для $N(x,\alpha)$, то згідно з першою теоремою Фредгольма існує єдиний неперервний розв'язок рівняння (2.17), який має вигляд:

$$F(x) = h(x) + \lambda_0 \int_0^1 \frac{D(x,t;\lambda_0)}{D(\lambda_0)} h(t)\,dt \tag{2.18}$$

Тут $D(x,t;\lambda_0)$ – перший мінор Фредгольма для ядра $N(x,\eta)$. Підставивши знайдений розв'язок рівняння (2.17) у формулу (2.7), отримаємо розв'язок задачі (2.5), (2.6).

Покажемо, що розв'язок задачі (2.5), (2.6) єдиний. Нехай існує два розв'язки $\tilde{y}(x)$ і $\tilde{\tilde{y}}(x)$ задачі (2.5), (2.6). Розглянемо функцію

$$\upsilon(x) = \tilde{\tilde{y}}(x) - \tilde{y}(x).$$

Очевидно, функція $\upsilon(x)$ буде розв’язком однорідного інтегро-диференціального рівняння (2.5) при однорідних початкових умовах (2.6): $f(x) \equiv D_{s+1} \equiv 0, s = 0,1,2,...,n-1),$ тобто $\upsilon(x)$ задовольняє задачі

$$L[\upsilon] + \lambda_0 \int_0^1 K(x,t)\upsilon(t)\,dt = 0, \upsilon^{(s)}(0) = 0, (s = 0,...,n-1) \tag{2.19}$$

Для знаходження розв'язків задачі (2.19) застосуємо розроблену методику для задачі (2.5), (2.6). Маємо:

$$\upsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} c_n y_n(x) + \int_0^x \varphi(x,\eta) F(\eta)\,d\eta \tag{2.20}$$

Застосувавши початкову умову (2.19) для визначення C_k k = (1, .., n), отримаємо $C_k = 0$ k = (1, .., n). Для визначення функції $F(x)$ отримаємо однорідне інтегральне рівняння $(h(x) \equiv 0)$:

$$F(x) + \lambda_0 \int_0^1 N(x,\eta) F(\eta)\,d\eta = 0 \tag{2.21}$$

Оскільки $D(\lambda_0) \neq 0$ для ядра $N(x,\eta)$, то єдиним неперервним розв’язком однорідного рівняння (2.21) буде функція $F(x) \equiv 0$. Тоді згідно з формулою (2.20), маємо $\upsilon(x) \equiv 0$, звідки $\tilde{y}(x) \equiv \tilde{\tilde{y}}(x)$.

Теорему доведено.

Лема 2.1. Якщо $K(x,t)$ – вироджене ядро, то $N(x,\eta)$ також буде виродженим ядром.

Доведення цього твердження випливає з формули (2.16). У даному випадку для знаходження розв'язку інтегрального рівняння (2.17) можна застосувати відому теорію для інтегральних рівнянь з виродженим ядрами [22]. Використовуючи результати попереднього пункту, неважко довести аналог другої фундаментальної теореми Фредгольма для однорідної задачі (2.5), (2.6).

Теорема 2.2. Нехай:

а) виконуються умови 1)–2) теореми 2.1;

б) параметр $\lambda=\lambda_0$ є коренем рівняння $D(\lambda_0)=0$ рангу q. Тоді однорідна задача (2.5), (2.6) ($f(x)\equiv D_{s+1}\equiv 0, s=0,1,2,...,n-1),$) має q-параметричний розв'язок виду:

$$y(x)=\sum_{\alpha=1}^{q} J_\alpha Q_\alpha(x), \qquad (2.22)$$

де J_α – довільні постійні, $Q_\alpha(x)$ – відомі функції.

Доведення.

Оскільки виконуються умови 1)-2) теореми 2.1, то ми маємо право користуватися результатом попереднього пункту, тобто розв'язок однорідної задачі (2.5), (2.6) запишеться у вигляді

$$y(x)=\int_0^x \varphi(x_1,\eta)F(\eta)\,d\eta, \quad (c_i=0), \qquad (2.23)$$

де $F(\eta)$ – розв'язок інтегрального рівняння

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 N(x,\eta)F(\eta)\,d\eta=0,(h(x))\equiv 0. \qquad (2.24)$$

Параметр $\lambda=\lambda_0$ є коренем рівняння $D(\lambda)=0$ порядку q (за умовою теореми). Тоді згідно з другою фундаментальною теоремою Фредгольма

[41] існує q-параметричний розв'язок рівняння (2.23) виду

$$F(x)=\sum_{\alpha=1}^{q} J_\alpha E_\alpha(x), \qquad (2.25)$$

де $E_\alpha(x)$ – відомі функції, J_α – довільні сталі. Явний вигляд функції $E_\alpha(x)$ можна знайти в багатьох посібниках з інтегральних рівнянь [16].

Теорему доведено.

Підставивши (2.26) в (2.23), отримаємо розв'язок однорідної задачі (2.5), (2.6) виду (2.22), де

$$Q_\alpha(x)=\int_0^x \varphi(x,\eta)E_\alpha(\eta)\,d\eta, \quad (\alpha=1,..,q). \qquad (2.26)$$

Розглянемо спряжене до (1.24) однорідне інтегральне рівняння виду

$$\tilde{F}(x)+\lambda_0\int_0^1 N(\eta,x)\tilde{F}(\eta)\,d\eta \equiv 0. \qquad (2.27)$$

Нехай $\overline{E}_\alpha(x)\ \ (\alpha=1,..,q)$ – повна система власних функцій рівняння (1.27) [31]. Має місце наступний аналог третьої фундаментальної теореми Фредгольма для задачі (2.5), (2.6).

Теорема 2.3. Нехай:

а) виконуються умови а)–б) теореми 2.2;

б) $$\int_0^1 \overline{E}_\alpha(x)h(x)\,dx=0, \quad (\alpha=1,..,q), \qquad (2.28)$$

то неоднорідна задача (2.5), (2.6) має q-параметричний розв'язок, який визначається за формулою:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} c_n y_n(x)+\int_0^x \varphi(x,\eta)\left[h(\eta)+\int_0^1 H(\eta,t)h(t)\,dt\right]d\eta+\sum_{k=1}^{q} J_\alpha Q_\alpha(x) \qquad (2.29)$$

Тут C_k – відомі постійні, що визначаються за формулами (2.26) $H(\eta,t)$ – відома функція.

Доведення цієї теореми очевидне.

2.2. Розв’язування рівнянь, які містять похідну під знаком інтегралу

Досліджуємо існування розв'язків задачі Коші для інтегро-диференціального рівняння (2.1) у випадку, коли $n \geq m(n, m \in Z)$. Рівняння (2.1) в цьому випадку має вигляд:

$$y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n} a_r(x)\, y^{(n-r)}(x)+\lambda_0 \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} K_j(x,t) y^{(j)}(t)\, dt = f(x) \qquad (2.30)$$

Задамо початкові умови для рівняння (2.30):

$$y^{(s)}(0) = D_{s+1}, \quad (s = 0,1,\ldots,n-1) \qquad (2.31)$$

Дослідження задачі (2.30), (2.31) можна проводити декількома способами. Ми обмежимося двома способами розв'язання задачі (2.30), (2.31) і покажемо перевагу і недоліки цих способів у порівнянні один з іншим.

Перший спосіб.

Ідея цього способу полягає в тому, що спочатку інтегро-диференціальне рівняння (2.30) зводиться до інтегро-диференціального рівняння, під знаком інтеграла якого не містяться похідні від невідомої функції. З цією метою проінтегруємо по частинах підінтегральний вираз рівняння (2.30). Отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 K_1(x,t) y'(t)\, dt = K_1(x,t)\, y(t) - \int_0^1 \frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t} y(t)\, dt,\\
&\int_0^1 K_2(x,t) y'(t)\, dt = K_2(x,t)\, y'(t) - \frac{\partial K_2(x,t)}{\partial t} y(t) + \int_0^1 \frac{\partial^2 K_2(x,t)}{\partial t^2} y(t)\, dt,\\
&\int_0^1 K_j(x,t) y^{(j)}(t)\, dt = \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^r \frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s} y^{(j-s-1)}(t) + (-1)^j \int_0^1 \frac{\partial^j K_j(x,t)}{\partial t^s} y(t)\, dt,
\end{aligned} \qquad (2.32)$$

$$(j = 1,2,\ldots,m).$$

Підставивши (2.32) в рівняння (2.30) отримаємо інтегро-диференціальне рівняння виду

$$y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n}a_r(x)y^{(n-r)}(x)+\lambda_0\int_0^1 K(x,t)y(t)dt=f(x)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s\frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s}y^{(j-s-1)} \tag{2.33}$$

де

$$K(x,t)\equiv\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{\partial^j K_j(x,t)}{\partial t^j} \tag{2.34}$$

Таким чином, інтегро-диференціальне рівняння (2.30) зводиться до інтегро-диференціального рівняння (2.33), в якому під інтегралом не містяться похідні від невідомої функції. Проте, інтегро-диференціальне рівняння (2.33) містить навантаження невідомої функції та її похідні

$$y^{(s)}(x)(s=0,1,...,m-1)$$

в точці $x = 1$ (невідому функцію $y(x)$ і її похідну в точці $x = 0$ замінюють початковими умовами [17]).

Запишемо інтегро-диференціальне рівняння (2.33) у вигляді

$$L[y]=F(x), \tag{2.35}$$

де

$$F(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s\frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s}\left[y^{(j-s-1)}(1)-\frac{\partial^s K_j(x,0)}{\partial t^s}D_{j-1}\right]-\lambda_0\int_0^1 K(x,t)y(t)dt. \tag{2.36}$$

Тоді розв'язок неоднорідної задачі (2.35), (2.36) запишеться у вигляді:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_n y_n(x)+\int_0^x\varphi(x,\eta)F(\eta)d\eta, \tag{2.37}$$

де C_k – відомі сталі, $\varphi(x,\eta)$ – відома функція. Для визначення функції $F(x)$ підставимо (2.37) в (2.36). Отримаємо наступне:

$$F(x)+\lambda_0\int_0^1 K(x,t)\left[\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(t)+\int_0^t\varphi(t,\eta)F(\eta)d\eta\right]dt=$$
$$f(x)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s\left\{\frac{\partial^s K_j(x,1)}{\partial t^s}\left[\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{\alpha^{j-s-1}y_k(1)}{dx^{j-s-1}}+\int_0^1\frac{d^{j-s-1}\varphi(1,\eta)}{dx^{j-s-1}}F(\eta)d\eta\right]-\frac{\partial^s K_j(x,0)}{\partial t^s}D_{j-s}\right\} \tag{2.38}$$

Введемо позначення:

$$N^*(x,\eta)\equiv\int_\alpha^1 K(x,t)\varphi(t,\eta)dt+\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=0}^{j-1}(-1)^s\frac{\partial^s K_j(x,t)}{\partial t^s}\times\frac{\alpha^{j-s-1}\varphi(1,\eta)}{dx^{j-s-1}},$$

(2.39)

$$h^*\left(x\right) \equiv f\left(x\right) - \lambda_0 \int_0^1 K\left(x,t\right) \sum_{k=1}^{n} c_k y_k\left(t\right) dt - \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=0}^{j-1} \left(-1\right)^s \frac{\partial^s K_j\left(x,t\right)}{\partial t^s} \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\alpha^{j-s-1} y_k\left(1\right)}{dx^{j-s-1}} - \frac{\partial^s K_j\left(x,0\right)}{\partial t^s} D_{j-s}$$

(2.40)

Тоді інтегральне рівняння (2.38) запишеться у вигляді

$$F\left(x\right) + \lambda_0 \int_0^1 N^n\left(x,\eta\right) F\left(\eta\right) d\eta = h^*\left(x\right) \quad (2.41)$$

.

У залежності від того, яка з фундаментальних теорем Фредгольма застосовна до розв'язування інтегрального рівняння (2.41), ми отримаємо відповідні аналоги фундаментальних теорем Фредгольма для задачі (2.30), (2.31).

Теорема 2.4. Нехай:

1) $a_r(x), f(x) \in c\left[I\right], K_j\left(x,t\right) \in c_z\left[R\right], K_j\left(x,t\right) \in c_t^{m-1}\left[R\right];$

2) $y_1(x),.., y_n\left(x\right)$ – фундаментальна система розв’язків рівняння $L[y]=0$;

3) визначник Фредгольма $D\left(\lambda_0\right) \neq 0$ для ядра $N''\left(x,\alpha\right)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.30), (2.31), який можна подати у вигляді (2.37), де $F\left(x\right)$ – розв'язок інтегрального рівняння (2.41).

Єдиність розв'язку даної задачі доводиться аналогічно доведенню єдиності розв'язку задачі (2.5), (2.6).

Зауваження: нехай у рівнянні (2.30) $m = 0$, тобто

$$K_j\left(x,t\right) = 0 \ \left(j = 1,...,m\right), K_0\left(x,t\right) = K\left(x,t\right).$$

Тоді

$$N''\left(x,\alpha\right) = N\left(x,\alpha\right), \ h^*\left(x\right) = h(x)$$

Таким чином, рівняння (2.41) в даному випадку співпадає з рівнянням (1.17), тобто даний випадок включає в себе попередній випадок, коли $m = 0$.

Другий спосіб.

Для дослідження розв'язання задачі (2.30), (2.31) запишемо інтегро-диференціальне рівняння (2.30) у вигляді

$$L[y] = F(x), \tag{2.42}$$

де

$$F(x) = f(x) - \lambda_0 \sum_{j=0}^{m} \int_0^1 K_j(x,t) y^{(j)}(t)\,dt. \tag{2.43}$$

Тоді розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.42) при початкових умовах (2.31) запишемо у відомому нам вигляді:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + \int_0^x \varphi(x,\eta) F(\eta)\,d\eta. \tag{2.44}$$

Продиференціюємо розв'язок $y(x)$, заданий за формулою (2.44). Маємо:

$$y^{(p)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y^{(p)}{}_k(x) + \int_0^z \frac{\alpha^p \varphi(x,n)}{dx^p} F(\eta)\,d\eta, (p = 1,...,m). \tag{2.45}$$

Тут прийняті до уваги властивості функції $\varphi(x,n)$, тобто

$$\varphi^{(j)}(x,x) = 0, j = 0,1,....,n-2, \varphi^{(n-1)}(x,x) = 1$$

Для визначення функції $F(x)$ яку до цього часу ми вважали відомою, підставимо (2.44), (2.45) у (2.43). Маємо:

$$F(x) + \lambda_0 \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} K_j(x,t) \left[\sum_{k=1}^{n} C_k y^{(j)}{}_k(t) + \int_0^t \frac{d^j \varphi(t,\eta)}{dt^j} F(\eta)\,d\eta \right] dt + \lambda_0 \int_0^1 K_n(x,t) F(t)\,dt = f(x). \tag{2.46}$$

Вже відомим нам способом рівняння (2.46) зводиться до рівняння

$$F(x) + \lambda_0 \int_0^1 \bar{N}(x,\eta) F(\eta)\,d\eta = \bar{h}(x), \tag{2.47}$$

де

$$\bar{N}(x,\eta) = \int_\eta^1 \sum_{j=1}^{m} K_j(x,t) \frac{d^j \varphi(t,\eta)}{dt^j} dt + K_n(x,t), \tag{2.48}$$

$$\bar{h}(x) = f(x) - \lambda_0 \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} K_j(x,t) \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(j)}(t)\,dt. \tag{2.49}$$

Якщо $m \prec n$, то у виразах (2.46) і (2.48) $K_n(x,t) \equiv 0$. Таким чином, питання про існування та єдиність розв'язку задачі (2.30), (2.31) зводиться до розв'язування лінійного інтегрального рівняння (2.47). Знайшовши розв'язок рівняння (2.47) і підставивши його в (2.44). отримаємо розв'язок задачі (2.30), (2.31).

Зауваження: порівнюючи перший і другий способи розв'язання задачі (2.30), (2.31), можна відмітити наступне:

а) якщо в першому випадку на ядра $K_n(x,t)$ накладається умова

$$K_j(x,t) \in C_x[R], K_j(x,t) \in C_t^{m-1}[R]$$

то другий випадок вимагає тільки, щоб $K_j(x,t)$ були неперервні по *x* і *t* ;

б) ядра $N(x,\eta)$ і $\overline{h}^*(x,\eta)$ мають більш простий вигляд у порівнянні з $N^*(x,\eta)$ и $\overline{h}^*(x,\eta)$.

2.3. Задача Коші для рівнянь загального виду

Лінійним інтегро-диференціальним рівняння *загального вигляду* будемо називати рівняння

$$y^{(n)}(x) + \sum_{r=1}^{n} Q_{n-r}(x) y^{n-r}(x) + \lambda_0 \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} K_j(x,t) y^{(j)}(t) dt = f(x). \qquad (2.50)$$

Досліджуємо інтегро-диференціальне рівняння (2.50) у випадку, коли $m \succ n$. Випадок $m < n$ було розглянуто вище.

Нехай $m = n + p$, де $n, p \in N$. Розглянемо питання про існування розв'язку рівняння (2.50), який задовольняє умовам:

$$y^{(2)}(0) = D_{s+1}, \ (S = 0, 1, .., m - 1). \qquad (2.51)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.5. Нехай:

1) $a_S(x), f(x) \in C^p[x]), s = 0, 1, \ldots, n-1, K_j(x,t) \in C_x^p[R]$ і неперервні по *t*;

2) $y_1(x),..,y_n(x)$ – фундаментальна система розв’язків рівняння

$$L[y]=y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n}a_n(x)\,y^{(n-r)}(x)=0 \qquad (2.52)$$

;

3) визначник Фредгольма $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N''(x,\alpha)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.50), (2.51), який можна подати у вигляді (2.58), де $F(x)$ – розв'язок інтегрального рівняння (2.60), $\varphi(x,\eta)$ – розв'язок задачі (3.57).

Доведення.

Продиференціюємо інтегро-диференціальне рівняння (2.50) p разів. Маємо:

$$\frac{d^p}{dx^p}L[y]+\lambda_0\int_0^1\sum_{j+0}^{m}\frac{d^pK_j(x,i)}{dx^p}\,y^{(j)}{}_{(t)}dt=\frac{d^pf(x)}{dx^p}\equiv f_1(x). \qquad (2.53)$$

Оскільки вираз $\frac{d^p}{dx^p}L[y]$ має порядок $n+p=m$, то до даного рівняння можна застосувати результати попереднього параграфа. Для знаходження розв'язку рівняння (2.53) застосуємо другий спосіб з розглянутих вище. З цією метою запишемо рівняння (2.53) у вигляді

$$\frac{d^p}{dx^p}L[y]=F(x), \qquad (2.54)$$

де

$$F(x)=f_1(x)-\lambda_0\int_0^1\sum_{j=0}^{m}\frac{d^pK_j(x,1)}{dx^p}\,y^{(j)}(t)dt \qquad (2.55)$$

Нехай $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ – фундаментальна система розв’язків рівняння $L[y]=0$. Тоді легко перевірити, що функції $u_1(x)$, ., $u_m(x)$ – фундаментальна система розв’язків рівняння

$$\frac{d^p}{dx^p}L[y]=0,$$

де

$$u_i(x)=\int_0^x(x-t)^{p-i}\,y_i(t)dt,\ (i=1,2,\ldots,n),$$
$$u_{n-k}(x)=x^{k-1},\ (k=1,2,\ldots,p) \qquad (2.56)$$

Нехай функція $y = \varphi(x, \eta)$ – розв'язок задачі

$$\frac{d^p}{dx^p} L[y] = 0 \quad y^{(b)}(\eta) = 0, y^{(m-1)}(\eta) = 1 \left(b = 0,1,...,m-2\right). \tag{2.57}$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.54) має вигляд

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x) + \int_0^x \varphi(x,\eta) F(\eta) d\eta \tag{2.58}$$

Використовуючи початкову умову (3.2), ми однозначно визначимо постійні c_i $\left(i = 1, 2, ..., m\right)$ із системи:

$$\begin{aligned} &c_1 u_1(0) + ... + c_2 u_2(0) + ... + c_m u_m(0) = D_1 \\ &c_1 u_1'(0) + ... + c_2 u_2'(0) + ... + c_m u_m'(0) = D_2 \\ &c_1 u_1^{(m-1)}(0) + ... + c_2 u_2^{(m-1)}(0) + ... + c_m u_m^{(m-1)}(0) = D_m \end{aligned} \tag{2.59}$$

оскільки визначник даної системи $W[u] \neq 0$ відмінний від 0.

Таким чином, у формулі (2.58) постійні c_i $\left(i = 1, 2, ..., m\right)$ будемо вважати однозначно визначеними із системи (2.59). Диференціюючи формулу (2.58) отримаємо:

$$\begin{gathered} y^s(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i^s(x) + \int_0^x \frac{d^s \varphi(x,\eta)}{dx^s} F(\eta) d\eta (s = 0,...,m-1), \\ y^s(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i^m(x) + \int_0^x \frac{d^m \varphi(x,\eta)}{dx^m} F(\eta) d\eta + F(x) \end{gathered} \tag{2.60}$$

Для визначення $F(x)$ підставляємо (2.58) і (2.60) у вираз (2.59). Маємо:

$$\begin{gathered} F(x) + \lambda_0 \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial^p K_i(x,t)}{\partial \times P} \left[\sum_{i=1}^{m} c_i u_i^j(t) + \int_0^t \frac{d^j \varphi(t,\eta)}{dx^j} F(\eta) d\eta \right] dt \\ + \lambda_0 \int_0^1 \frac{\partial^p K_m(x,t)}{\partial x^p} F(\eta) d\eta = f_1(x) \end{gathered} \tag{2.61}$$

Рівняння (2.61) зведемо до лінійного інтегрального рівняння Фредгольма

$$F(x) + \lambda_0 \int_0^1 N(x,\eta) F(\eta) d\eta = h(x) \tag{2.62}$$

Тут

$$N(x,\eta) = \lambda_0 \int\limits_{\eta}^{1} \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial^p K_i(x,t)}{\partial x^p} \frac{\partial^j \varphi(t,\eta)}{\partial t^j} dt + \frac{\partial^p K_m(x,\eta)}{\partial x^p} \quad (2.63)$$

$$h(x) =$$

$$\frac{\alpha^p f(x)}{dx^p} - \lambda_0 \int\limits_0^1 \sum_{j=0}^{m} \frac{\partial^p K_j(x,t)}{\partial x^p} \sum_{i=1}^{m} C_i U_i^{(j)}(t)\, dt \quad (2.64)$$

Оскільки $D(\lambda_0) \neq 0$ для ядра $N(x,\eta)$, то, згідно з першою фундаментальною теоремою Фредгольма [36], існує єдиний розв’язок рівняння (2.62). Підставивши знайдений розв’язок $F(x)$ в формулу (2.58), отримаємо розв’язок задачі (2.50), (2.51).

Покажемо, що розв’язок задачі (2.50), (2.50), поданий за формулою (2.62), єдиний. Дійсно, нехай крім даного розв’язку $Z(x)$ існує ще один розв’язок $y(x)$ задачі (2.50), (2.51).

Розглянемо функцію

$$V(x) = y(x) - z(x). \quad (2.65)$$

Функція $V(x)$ задовольняє однорідній задачі

$$L[V] + \lambda_0 \int\limits_0^1 \sum_{j=0}^{m} K_j(x,t) V^{(j)}(t)\, dt = 0, \quad (2.66)$$

$$V^{(s)}(0) = 0, \quad (s=0,1,\ldots,m-1).$$

Загальний розв’язок рівняння (2.66) запишеться у вигляді

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i U_i(x) + \int\limits_0^x \phi(x,\eta) F(\eta)\, d\eta \quad (2.67)$$

Тут постійні C_i визначаються із однорідної системи (2.59), тобто

$$C_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

функція $F(x)$ визначається із рівняння

$$F(x) + \lambda_0 \int\limits_0^1 N(x,\eta) F(\eta)\, d\eta = 0 \quad (2.68)$$

оскільки $h(x) \equiv 0$.

Так як $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N(x,\eta)$, то єдиним неперервним розв'язком інтегрального рівняння (2.68) буде функція $F(x)\equiv 0$. Тоді з (2.67) отримуємо, що $V(x)\equiv 0$, звідки випливає: $y(x)\equiv z(x)$.

Теорему доведено.

Зауваження: для знаходження розв'язку задачі (2.67) можна було б використати перший спосіб попереднього пункту. В цьому випадку ми знову отримали б, що $V(x)\equiv 0$.

Узагальнимо результати на випадок загальних початкових умов, що містять інтегральні члени:

$$\sum_{s=0}^{q-1}\left[\alpha_{p1}y^{(s)}(0)+\int_0^1\beta_{p1}(x)y^{(s)}(x)dx\right]=D_{p+1}, \tag{2.69}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

де α_{p1} і β_{p2} – відомі постійні.

Нехай потрібно побудувати розв'язок інтегрально-диференціального рівняння (2.5) при початкових умовах (2.69). В даному випадку $q = n = k$. Застосуємо отримані вище результати. Для визначення сталих C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) підставимо розв'язок $y(x)$, поданий у вигляді (2.9), у початкові умови (2.69). Маємо:

$$\sum_{s=0}^{n-1}\left[\alpha_{ps}\sum_{m=1}^{n}c_m y_{k^{(s)}}(0)+\int_0^1\beta_{ps}(x)\sum_{m=1}^{n}c_m y_{k^{(s)}}(x)dx\right]=D_{p+1}, \tag{2.70}$$

$$(p = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

Вираз (2.70) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{s=0}^{n-1}\left[\alpha_{ps}y_k^{(s)}(0)+\int_0^1\beta_{ps}^{(s)}y_k^{(s)}(x)dx\right]=D_{p+1}. \tag{2.71}$$

Введемо позначення:

$$A_{pk}\equiv\sum_{s=0}^{n-1}\left[\alpha_{ps}y_k^{(s)}(0)+\int_0^1\beta_{ps}(x)y^{(s)}(x)dx\right], \tag{2.72}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ p= 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тоді система (2.70) запишеться у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{pk} c_k = D_{p+1}, \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.73}$$

Для однозначного визначення сталих c_k (k = 1, 2, ..., n) будемо вимагати, щоб визначник $\Delta = |A_{pk}|$ системи (2.70) не дорівнював нулю. Тоді з цієї системи ми можемо однозначно визначити сталі c_k (k = 1,..., n). Таким чином, для задачі (2.5), (2.70) має місце наступне твердження.

Теорема 2.6. Нехай:

1) виконані умови теореми 2.5;

2) визначник $\Delta = |A_{pk}| \neq 0$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2.5), (2.70), який можна подати у вигляді:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + \int_0^x \phi(x, \eta) F(\eta) d\eta. \tag{2.74}$$

Тут c_k – відомі сталі, що визначаються з системи (2.73), $F(\eta)$ – розв'язок інтегрального рівняння (2.17).

Таким чином, зміна початкових умов вплинула тільки на визначення сталих c_k в розв'язанні, що в свою чергу призвело до змін правої частини $h(x)$ інтегрального рівняння (2.17). Ядро $N(x, \eta)$ інтегрального рівняння (2.17) не залежить від типу початкових умов.

ВИСНОВКИ

В результаті виконаного дослідження було розглянуто властивості інтегральних рівнянь та безпосередньо теореми Фредгольма; досліджено умови існування розв'язку лінійних інтегро-диференціальних рівнянь, зокрема, таких, що містять похідну під знаком інтеграла, а також визначено необхідні та достатні умови існування розв’язків лінійних рівнянь загального виду при заданих початкових умовах. Одержані наступні важливі твердження, що стосуються результатів дослідження:

1. Якщо λ не співпадає з жодним нулем $D(\lambda)$, тобто $D(\lambda)\neq 0$, то система лінійних рівнянь $c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ij}c_j=f_i$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, однозначно розв’язна при будь-яких правих частинах $f(i)$ $(i=1, \ldots, n)$.

2. Якщо λ є характеристичне число ядра $\kappa(t,s)$, то однорідне інтегральне рівняння $\phi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\int_a^b b_i(s)\phi(s)ds$ і спряжене з ним рівняння $\psi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}b_i(t)\int_a^b a_i(s)\psi(s)ds$ мають одне й те саме скінчене число лінійно незалежних власних функцій.

3. Неоднорідне інтегральне рівняння $\phi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\int_a^b b_i(s)\phi(s)ds+f(t)$ з виродженим ядром при характеристичному значенні λ буде розв’язним тоді і тільки тоді, коли

вільний член $f(t)$ буде ортогональним до всіх розв'язків спряженого однорідного інтегрального рівняння $\psi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\int_a^b a_i(s)\psi(s)ds$.

4. Нехай

1) $a_r(x)\in C(I), f(x)\in C(I)$ і $k(n,1)\in C_{n,1}[R]$;

2) $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x),$ – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння $L[y]=0$;

3) визначник Фредгольма $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N(x,t)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі

$$L[y]+\lambda_0 K[x,t]y(t)dt = f(x),$$

$$y^{(1)}(0) = D_{s+1}, \quad (s = 0,1,...,n-1)$$

який можна подати у вигляді

$$y(x) = \sum_{n=1}^{n} C_n y_n(x) + \int_0^x \varphi(x,\eta)F(\eta)d\eta$$

де C_n – відомі сталі, $F(\eta)$ – розв'язок інтегрального рівняння.

5. Нехай:

1) $a_r(x), f(x)\in c[I], K_j(x,t)\in c_z[R], K_j(x,t)\in c_t^{m-1}[R]$;

2) $y_1(x),.., y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння $L[y]=0$;

3) визначник Фредгольма $D(\lambda_0)\neq 0$ для ядра $N''(x,\alpha)$.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі

$$y^{(n)}(x)+\sum_{r=1}^{n} a_r(x)y^{(n-r)}(x)+\lambda_0\int_0^1\sum_{j=1}^{m} K_j(x,t)y^{(j)}(t)dt = f(x).$$

$$y^{(s)}(0) = D_{s+1}, \quad (s = 0,1,...,n-1).$$

який можна подати у вигляді $y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_n y_n(x) + \int_0^x \varphi(x,\eta)F(\eta)d\eta$, де $F(x)$ – розв'язок інтегрального рівняння.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бобик О. І. Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними / О. І. Бобик, П. І. Бондарчук, Б. Й. Пташник, В. Я. Скоробогатько. – К. : Наукова думка, 1972. – 324 с.
2. Быков Я. В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений / Я. В. Быков. – Фрунзе : Изд-во Киргизского ун-та, 1957. – 89 с.
3. Быков Я. В. О некоторых методах построений решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / Я. В. Быков. – Фрунзе : Изд-во АН Киргизской СССР, 1961. – 106 с.
4. Валеев К. Г. Бесконечные системы дифференциальных уравнений / К. Г. Валеев, О. А. Жаутиков. – Алма-Ата : Изд-во «Наука» Казахской ССР, 1974. – 74 с.
5. Васильев В. В. К вопросу об интегрировании систем линейных интегро-дифференциальных уравнений / В. В. Васильев // Ученые записки Иркутского государственного педагогического ин-та. – 1976. – № 9. – С.13-19.
6. Васильев В. В. К решению линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и вырожденным ядром / В. В. Васильев. – ПММ. – 1969. – Т.XIII. – С. 24-30.
7. Васильев В. В. Решение линейных обобщенных интегро-дифференциальных уравнений / В. В. Васильев. – ПММ. – 1971. – Т.XI. – С. 21-27.
8. Васильев В. В. К вопросу о решении систем линейных однородных обобщенных интегро-дифференциальных уравнений / В. В. Васильев // Труды Иркутского государственного педагогического ин-та. – 1973. – № 1. – С.23-29.
9. Васильев В. В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений / В. В. Васильев // ДАН

СССР. – 1975. – №. 5. – С.32-28.

10. Виграненко Т. И. О решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений / Т. И. Виграненко // Труды ИММ АН Узбекской ССР. – 1983. – Ч.2. – В.10. – С.14-18.
11. Виграненко Т. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / Т. И. Виграненко // Записки Ленинградского горного ин-та. – 1974. – № 3. – С.46-52.
12. Виграненко Т. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений / Т. И. Виграненко // Записки Ленинградского горного ин-та. – 1976. – № 3. – С.36-39.
13. Вірченко Н. О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики / Н. О. Вірченко. — К. : Вид-во КПІ, 1997. — 370 с.
14. Владимиров В. С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении / В. С. Владимиров // Известия АН СССР. – 1977. – № 1. – С.12-18.
15. Владимиров В. С. Сборник задач по математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1974. – 272 с.
16. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1971. – 512 с.
17. Гагаев Б. В. Теоремы существований решений интегро-дифференциальных уравнений / Б. В. Гагаев // ДАН СССР. – 1976. – № 3. – С.34-40.
18. Гончаренко В. М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними / В. М. Гончаренко. – К. : Вища школа, 1996. – 214 с.
19. Жэнхен О. О. О существовании и единственности решений интегро-дифференциальных уравнений / О. О. Жэнхен // ДАН СССР. – 1972. – № 2. – С.24-30.
20. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : ГИФМЛ, 1958. – 168 с.

21. Иманалиев М. И. Развитие и современное состояние интегро-дифференциальных уравнений / М. И. Иманалиев, Л. Е. Кривошеин // Труды XIII Международного конгресса по истории науки. – 1975. – С.12-19.
22. Интегро-дифференциальные уравнения и их приложения. – Фрунзе : Изд-во Киргизского ун-та, 1978. – 122 с.
23. Кокарева Т. А. Некоторые теоремы существования аналитических решений для интегро-дифференциальных уравнений / Т. А. Кокарева // ДАН СССР. – 1971. – № 1. – С.56-59.
24. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 148 с.
25. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1968. – 204 с.
26. Ловит И. Линейные интегральные уравнения / И. Ловит. – М. : Гостехиздат, 1978. – 198 с.
27. Манжиров А. В. Методы решения интегральных уравнений : Справочник / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. – М. : Факториал, 1999. – 246 с.
28. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям : Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. – М. : Факториал, 2000. – 314 с.
29. Матвеев М. Н. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / М. Н. Матвеев. – Мн. : Освета, 1974. – 214 с.
30. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – М. : Высш. шк., 1977. – 432 с.
31. Назаров Н. Н. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений / Н. Н. Назаров // Труды ЦАГИ, 1974. – С.14-18.
32. Некрасов А. И. Об одном классе линейных интегро-

дифференциальных уравнений / А. И. Некрасов // ДАН СССР. – 1967. – № 5. – С. 15-26.

33. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К. : Либідь, 2002. – 336 с.
34. Привалов Н. И. Интегральные уравнения / Н. И. Привалов. – М.-Л. : ОНТИ, 1973. – 144 с.
35. Соболев С. Л. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений с несколькими независимыми переменными / С. Л, Соболев // Известия АН СССР. – 1978. – № 1. – С.34-42.
36. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды / Я. Д. Тамаркин. – Л., 1971. – 308 с.
37. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 724 с.
38. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков и др. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.
39. Buscham W. Die Zeruckfuhrung von spezielien integro-differentialgleichungen auf gewohnliche Integralgleichungen, Zeitschrift f.angew. Math. Mech., Bd. 32, 1952.
40. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations, London, 1930.