МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ДИСКРЕТНІ МАТРИЧНІ РЕГУЛЯРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Дипломна робота

на здобуття рівня вищої освіти бакалавр

Виконав: студент 4 курсу 421 групи_________

напряму підготовки 6.040201 Математика*_____

Заводянний В.В.______________________________

Керівник к. ф.-м. н., проф. Кузьмич В.І.________

Рецензент к. п.н., проф. Шерман М.І.___________

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Різні факти з області математичного аналізу, як, наприклад, розбіжність, добуток двох розбіжних рядів, звичайним чином висунули питання про можливість підсумовування розбіжних рядів в деякому новому смислі. До створення Коші строгої теорії границь (і пов’язаною з нею теорією рядів) розбіжні ряди досить часто зустрічалися в математичній практиці. Хоча при застосуванні їх під час доведення і виникали певні суперечності, проте іноді здійснювалися спроби надати їх навіть числовий зміст.

Сучасний аналіз ставить питання інакше. В основу покладено те чи інше точно сформульоване означення «узагальненої суми» ряду, яке не використовується лише для конкретного числового ряду, а застосовується до цілого ряду класів певних рядів. Означення «узагальненої суми» зазвичай підпорядковується двом вимогам.

По-перше, якщо ряду $\sum a_n$ приписується «узагальнена сума» A, а ряду $\sum b_n$ – «узагальнена сума» B, то ряд $\sum pa_n + qb_n$, де p, q – дві довільні сталі, повинен мати в якості «узагальненої суми» $pA + qB$. Метод підсумовування, що задовольняє цій вимозі, називається лінійним.

По-друге, нове означення повинно містити звичайне означення як частинний випадок. Точніше кажучи, ряд, який збігається у звичайному смислі до суми A, повинен мати «узагальнену суму», і причому яка також дорівнює A. Метод підсумовування, який має таку властивість, називають регулярним. Звісно, інтерес викликають лише такі регулярні методи, які дозволяють встановлювати «суму» в більш широкому класі випадків, ніж звичайний метод підсумовування.

Починаючи з кінця XIX ст. питаннями дослідження регулярності методів підсумовування розбіжних рядів займалося багато математиків. Деякі класичні методи підсумовування виявилися досить зручними для застосування узагальненого підсумовування, а тому і визначили основні регулярні методи теорії підсумовування розбіжних рядів. Першими такі методи запропонували Пуассон при знаходженні суми степеневого ряду та Чезаро [16], поклавши в основу використання так званих середніх арифметичних. Узагальненням цих методів стали інші класичні методи, такі, як метод Гельдера [8], метод Вороного-Ньорлунда [10], метод середніх логарифмічних Рісса [21], методи Ейлера-Кноппа та Хаусдорфа [35] та інші. Крім визначення умов регулярності методів, дослідниками було розв'язано і питання застосування узагальненого підсумовування для вирішення певних проблем теорії розбіжних числових рядів. Саме завдяки практичному прикладенню узагальненого підсумовування клас регулярних методів відіграє значну роль в теорії підсумовування рядів, а питання, пов'язані з властивостями цих методів, залишаються актуальними і в наш час.

Мета даної роботи полягає у розгляді питання побудови та властивостей дискретних матричних регулярних методів підсумовування рядів.

Об'єктом дослідження виступають методи підсумовування розбіжних рядів, а ***предметом*** дослідження – безпосередньо дискретні матричні регулярні методи підсумовування рядів.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання*** роботи:

1. Розглянути основні твердження та найважливіші теореми, що стосуються дискретних матричних регулярних методів підсумовування рядів.

2. Розглянути необхідні та достатні умови для того, щоб метод підсумовування мав узагальнену суму, тобто був регулярним.

3. Здійснити огляд основних видів умов тауберового типу для розбіжних рядів.

Основні ***методи***, що використовувалися в дослідженні – це загальні методи класичного та функціонального аналізу, теорії підсумовування розбіжних рядів та функцій, метод обернених матриць.

Робота складається з двох основних розділів.

В першому розділі наведено деякі теоретичні положення з теорії підсумовування. Зокрема, в ньому розглянуто клас регулярних методів, а також визначено алгоритм побудови таких методів. Крім того, в розділі розглянуто класичні регулярні методи підсумовування рядів, зокрема, методи Чезаро, Гельдера, Вороного-Ньорлунда, середніх логарифмічних Рісса. Твердження цього розділу є допоміжними при розв'язуванні основної задачі дослідження.

В другому розділі розглядаються твердження, що стосуються напівнеперевних методів підсумовування рядів, а також теореми тауберового типу для рядів. Зокрема, визначені тауберові умови методів Чезаро, для степеневих рядів.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ДИСКРЕТНИМИ МАТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

1.1. Поняття підсумовування числового ряду

Як відомо [16], заданому числовому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots (A)$$

в якості його суми приписують границю її частинної суми

$$A = \lim A_n$$

припускаючи, що ця границя існує і скінченна (або ж дорівнює нескінченності визначеного знаку).

Різни факти з області математичного аналізу, як, наприклад, розбіжність добутку двох збіжних рядів, висунули у другій половині минулого століття питання про можливість сумування розбіжних рядів в деякому новому сенсі, звісно, відмінному від звичайного. Деякі методи такого «підсумовуваня» виявилися особливо плідними.

Треба сказати, що до створення Коші строгої теорії границь (і пов’язаної з нею теорії рядів [9]) розбіжні ряди нерідко зустрічалися в математичній практиці. Хоча використання їх під час доведення і визначалося суперечностями, тим не менш іноді робилися спроби надати їм навіть числового змісту. Так, ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

ще з часів Лейбніца в якості «суми» приписувалося число $\frac{1}{2}$. Ейлер, наприклад, мотивував це тим, що з розкладу

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

(який насправді має місце лише для $|x| < 1$¿ при підстановці замість x одиниці отримується

$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1\ldots$

В цьому все містилося зерно істини, але постановці питання не вистачило чіткості, відсутність конкретності у виборі розкладу залишала відкритою можливість, скажімо, з іншого розкладу (де $n i m$ – будь-які, але $m<n$)

$$\frac{1+x+\ldots+x^{m-1}}{1+x+\ldots+x^{n-1}}=\frac{1-x^m}{1-x^n}=1-x^m+x^n-x^{n+m}+x^{2n}-\ldots$$

отримати одночасно

$$\frac{m}{n}=1-1+1-1+1-\ldots$$

1.2. Регулярні матричні перетворення

Якщо $A' \supset c$, тобто якщо метод підсумовування A підсумовує всі збіжні ряди (послідовності), то кажуть, що метод A зберігає збіжність або *консервативний*. Для методів, які зберігають збіжність, можуть бути дві можливості.

1. Метод A зберігає суму будь-якого збіжного ряду. Тоді метод A називають *регулярним*. Таким чином, метод називається регулярним, якщо він підсумовує всі збіжні ряди до їх звичайної суми.

Якщо регулярний метод A підсумовує до ∞ будь-який ряд $\sum u_n=\infty$, то метод A називається *повністю регулярним*.

2. Метод A не зберігає суми деякого збіжного ряду. Тоді метод A називається *нерегулярним*.

Відмітимо, що нерегулярний методи підсумовування також мають практичне значення. Наприклад, в застосуванні до наближених методів обчислення важливі також методи підсумовування, які можуть змінювати значення величини, яка розглядається, в межах заданої точності [5].

Якщо $A' \supset m$, тобто якщо метод підсумовування A підсумовує всі обмежені послідовності, то метод A називається методом, який *породжує збіжності*.

Важливою властивістю метода збіжності являється його лінійність, яку для будь-якого метода A визначають так.

Метод підсумовування A називають *лінійним*, якщо для будь-яких постійних λ та μ

$$A\left\{\sum\left(\lambda u_n+\mu v_n\right)\right\}=\lambda A\left\{\sum u_n\right\}+\mu A\left\{\sum v_n\right\},$$

до того ж існування правої частини тягне за собою існування лівої [19].

Розглянемо схему для побудови класу лінійних регулярних методів підсумовування.

Нехай в деякій області χ зміна параметру *x* задана послідовністю функцій

$$\phi_0(x)\phi_1(x)\phi_2(x),\ldots\phi_n(x),\ldots \tag{1.1}$$

Припустимо, що область χ має точку існування число ω, скінчену або ні. За даним числовим рядом утворюється ряд, який складається із функцій:

$$A_0\phi_0(x)+A_1\phi_1(x)+\ldots+A_n\phi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\phi_n(x)$$

(де $A_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$). Якщо даний ряд, принаймні для *x*, достатньо близьких до ω, збігається і його сума при $x\to\omega$ наближається до границі A, то дане число й приймається за «узагальнену суму» даного ряду [21].

Отримуємо деякий метод підсумовування рядів, пов'язаний з вибором послідовності (1.1) і граничною точкою ω. За побудовою методу зрозуміла його лінійність.

Припустимо тепер, що функції $\phi_n(x)$ задовольняють наступним трьом вимогам:

1) при будь-якій постійній *n* $\lim\limits_{x\to\omega}\phi_n(x)=0$;

2) при значеннях *x*, достатньо близьких до ω,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\phi_n(x)| \le K \quad (K = const);$$

3) остання $\lim_{x \to \omega} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) = 1$.

Тоді метод підсумовування виявляється регулярним.

Якщо *x* є натуральним параметром *m* (так що $\omega = +\infty$), то послідовність функцій (1.1) замінюється нескінченою прямокутною матрицею:

$$\begin{matrix} t_{00} & t_{01} & t_{02}\dots & t_{0m}\dots \\ t_{10} & t_{11} & t_{12}\dots & t_{1m}\dots \\ . & . & . & . \\ t_{n0} & t_{n1} & t_{n2}\dots & t_{nm}\dots \end{matrix}$$

За «узагальнену суму» ряду приймається границя при $m \to \infty$ варіанти

$$T_m = A_{0_{tm_0}} + A_{1_{tm_1}} + \dots + A_{n_{tm_n}} + \dots,$$

якщо припустити, що даний ряд збігається, принаймні для достатньо великих значень *m*.

Умови регулярності перетворюються для даного випадку наступним чином:

1) при будь-якій постійній *n* $\lim_{m \to \omega} t_{nm} = 0$,

2) при достатньо великих *m* $\sum_{n=0}^{\infty} |t_{nm}| \le K$ $(K = const)$,

3) останнє $\lim_{m \to \omega} \sum_{n=0}^{\infty} t_{nm} = 1$.

Всі вищезазначені ідеї належать Тьопліцу [32], у якого матриця повинна була бути трикутною.

Нехай ά $= (a_{nk})$ – нескінченна матриця ($n, k = 0, 1, \dots$). Для даної послідовності (u_n) утворює нульову послідовність (u'_n) з

$$u'_n = \sum_k a_{nk} U_k \qquad \text{(A)}$$

Якщо u'_n існує при будь-якому $n = 0, 1, \ldots$ та $\lim u'_n = u'$, то послідовність (u_n), яка підсумовується методом ά до суми u' .

Перетворення (A) називається *матричним* перетворенням послідовності в послідовність.

Поряд з перетворенням (A) використовується й наступні перетворення: перетворення

$$u'_n = \sum_k \alpha_{nk} u_k \qquad \text{(B)}$$

ряду в послідовність; перетворення

$$u'_n = \sum_k \bar{\alpha}_{nk} u_k \qquad \text{(C)}$$

ряду в ряд; перетворення

$$u'_n = \sum_k \bar{a}_{nk} U_k \qquad \text{(D)}$$

послідовність в ряд.

Матричне перетворення називається таким, що *зберігає збіжність*, якщо воно переводить всі збіжні послідовності або ряди в збіжні послідовності, тобто якщо із збіжності послідовності (u_k) або ряд $\sum u_n$ завжди випливає збіжність послідовності (u'_n). Якщо при цьому $\lim u'_n = \lim u_k$, то матричне перетворення називається *регулярним*.

В теорії підсумовування головну роль відіграє

Теорема 1.1. Для того, щоб перетворення (A) існувало та зберігало збіжність, необхідно і достатньо виконання умов:

1° існує $\lim\limits_n a_{nk} = a_k$,

2° існує $\lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = a$,

3° $\sum\limits_k |a_{nk}| = O(1)$.

При цьому, якщо $\lim u_k = u$, то

$$\lim u'_n = au + \sum a_k (u_k - u) = \left(a - \sum a_k\right) u + \sum a_k u_k .$$

Теорема 1.2. Для того, щоб перетворення (А) було регулярним, необхідно і достатньо виконання умови 1° - 3°теореми 1.1 *з* $a_k = 0$ і $a = 1$.

Теорема 1. 3. Для того, щоб перетворення (В) існувало і зберігало збіжність, необхідно і достатньо виконання умов

1° існує $\lim_n \alpha_{nk} = \alpha_k$,

2° $\sum_k |\Delta\alpha_{nk}| = 0(1)$.

При цьому, якщо $\sum u_k = u$, то

$$\lim u'_n = \alpha_0 u + \sum (\Delta\alpha_k)(u_k - u) = \left(\alpha_0 - \sum \Delta\alpha_k\right) u + \sum (\Delta\alpha_k) u_k .$$

Теорема 1.4. Для того, щоб перетворення (А) існувало і переводило всі обмежені послідовності (u_k) в збіжні послідовності (u'_n), необхідно і достатньо виконання умов:

1° існує $\lim_n a_{nk} = a_k$,

2° $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$,

3° $\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| = 0$.

При цьому $\lim u'_n = \sum a_k u_k$.

Теорема 1.5. Для того, щоб перетворення (А) існувало і переводило всі збіжні до нуля (або всі обмежені) послідовності (u_k) в збіжні послідовності (u'_n), необхідно і достатньо виконання умови $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$.

1.3. Класичні дискретні методи підсумовування рядів

Послідовність називається сумовною *методом арифметичних середніх* до числа U' , якщо послідовність

$$H_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U_k \ , \tag{1.1}$$

збігається до U' . Метод арифметичних середніх позначається через *H*, або H^1 , або (*H*, 1).

До методу знаходження суми Чезаро підходимо наступним чином. Створюємо чезаровські суми порядку α ряду (0.1), поклавши

$$S_n^0 = U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ ,$$

і при $\alpha \geq 1$

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1} \ .$$

Разом із чезарівськими сумами S_n^α у визначенні методу Чезаро важливі і біноміальні коефіцієнти – числа Чезаро – $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$, що є коефіцієнтами біноміального ряду [17]

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum A_n^\alpha x^n . \tag{1.2}$$

Чезарівське середнє, скорочено C^α– середнє , визначаємо відношенням

$$\sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha} . \tag{1.3}$$

Якщо існує скінченна границя $\lim \sigma_n^\alpha = U'$, то кажуть, що ряд (0.1) *підсумовується методом Чезаро* порядкуα до числа U'.

Метод Чезаро порядку αпозначається через C^α або (C, α). Отже,

$$C^\alpha \left\{ \sum u_n \right\} = \lim_n \sigma_n^\alpha .$$

Відмітимо, що $(C, 0)$ – це метод збіжності , так як $A_n^0 = 1$ і

$$\sigma_n^0 = \frac{S_n^0}{A_n^0} = U_n ;$$

метод ¿) – це метод арифметичних середніх, так як $A_n^1 = (n+1)$ і з цього випливає,

$$\sigma_n^1 = \frac{S_n^1}{A_n^1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k. \tag{1.4}$$

Тепер покажемо, що середнє (1.3) можна привести до вигляду (А), тобто до вигляду

$$\sigma_n^0 = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} U_k.$$

Для цього утворюємо формальний добуток рядів

$$\frac{1}{1-x}\sum U_n x^n = \sum x^n \cdot \sum U_n x^n = \sum_n \square \left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right) x^n = \sum S_n^1 x^n.$$

Далі, припустивши, що

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}}\sum U_n x^n = \sum \square S_n^{\alpha-1} x^n,$$

для будь-якого $\alpha = 1, 2, \ldots.$ отримаємо

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum U_n x^n = ¿ \frac{1}{1-x}\sum S_n^{\alpha-1} x^n = \sum x^n \cdot \sum S_n^{\alpha-1} x^n = \sum_n ¿¿¿¿¿¿$$

Отже, методом математичної індукції [6] нами доведена формула

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum U_n x^n = \sum S_n^{\alpha} x^n. \tag{1.5}$$

Звідси і з (1.2) виводимо

$$\sum_n ¿¿$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x, знаходимо

$$S_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} U_k, \tag{1.6}$$

і після ділення на A_n^{α} для (1.4) отримаємо

$$\sigma_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} U_k. \tag{1.7}$$

До цих пір передбачалось, що $\alpha = 1, 2, \ldots.$. Проте, за допомогою співвідношення (1.7) можемо середнє σ_n^{α} визначити і для нецілого α, навіть для уявного α. Для цього необхідно визначити значення величини S_n^{α} так, щоб вони мали сенс для комплексного α. Тому для визначення величин S_n^{α} будемо вважати формулу (1.6). Тоді із (1.7) робимо висновок, що метод Чезаро C^{α} визначається для будь-якого комплексного $\alpha Re\alpha > -1$

у вигляді трикутного матричного перетворення (A) послідовності в послідовність [23] з матрицею

$$a_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}. \tag{1.8}$$

Якщо в доведенні співвідношення (1.5) величини U_n замінити на u_n, то замість (1.5) і (1.6) отримаємо відповідно

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\sum u_n x^n=\sum S_n^{\alpha} x^n, \tag{1.9}$$

$$S_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} u_k. \tag{1.10}$$

Отже, метод Чезаро C^{α} у вигляді перетворення (B) ряду в послідовність визначається матрицею

$$\alpha_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}. \tag{1.11}$$

Визначення методу C^{α} при $\alpha=1,2,\ldots$ наведено Чезаро [34], а для будь-яких $\alpha>-1$ дано незалежно один від одного Кноппом [11] та Чепменом [16]. Практично більше розглядають метод C^{α} при $\alpha>-1$, так як тоді $\alpha_{nk}>0$. Означення методів C^{α} і $C_0^{\alpha\square}$ при $\alpha=-1,-2,\ldots$ і детальне дослідження їх властивостей наведено в статті Люрі [15].

Нагадаємо, що для будь-якого комплексного α виконується формула (1.6) і, отже, діє співвідношення (1.5).

Перепишемо (1.2) у вигляді

$$\frac{1}{(1-x)^{\sigma+1}}=\sum A_n^{\sigma} x^n. \tag{1.2$_1$}$$

Помножив обидві частини рівностей (1.5) і (1.2$_1$) між собою отримаємо

$$\frac{1}{(1-x)^{\sigma+\alpha+1}}\sum U_n x^n=\sum S_n^{\alpha+\sigma+1} x^n=\sum_n ¿¿$$

звідси

$$S_n^{\alpha+\sigma+1}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\sigma} S_k^{\alpha}. \tag{1.12}$$

Якщо перемножити між собою рівності (1.2) і (1.2$_1$), то також отримаємо

$$\frac{1}{(1-x)^{\sigma+\alpha+2}}=\sum A_n^{\alpha+\sigma+1} x^n=\sum_n\left(\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} A_{n-k}^{\sigma}\right)x^n,$$

звідси

$$A_n^{\alpha+\sigma+1}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\sigma} A_k^{\alpha}. \qquad (1.13)$$

Порівнюючи (1.12) і (1.13), ми бачимо, що (1.13) випливає з (1.12) при

$$S_k^{\alpha}=A_k^{\alpha}.$$

Враховуючи (1.6), отримаємо, що (1.12) переходить в (1.13) при $U_n=1$, тобто при $u_n=\sigma_{n0}$. Тому і має місце така аналогія між величинами S_k^{α} і A_k^{α}.

Формулу (1.13) часто застосовується у вигляді

$$\sum_{k=\gamma}^{n} A_{n-k}^{\sigma} A_{k-\gamma}^{\alpha}=A_{n-\gamma}^{\alpha+\sigma+1}. \qquad (1.14)$$

Якщо в формулах (1.12) і (1.13) покласти $\sigma=0$, то отримаємо, що

$$S_n^{\alpha+1}=\sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n} S_{n-k}^{\alpha}, \qquad (1.15)$$

$$A_n^{\alpha+1}=\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha}. \qquad (1.16)$$

Звідси безпосередньо виводимо

$S_n^{\alpha}-S_{n-1}^{\alpha}=S_n^{\alpha-1}, A_n^{\alpha}-A_{n-1}^{\alpha}=A_n^{\alpha-1}$

За допомогою (1.15) із (1.8) і (1.6) робимо висновок

$$\alpha_{nk}=\sum_{\gamma=k}^{k}\frac{A_{n-\gamma}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{\gamma=0}^{n-k} A_{n-k-\gamma}^{\alpha-1}=\frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}},$$

тобто отримуємо формулу (1.11).

Теорема 1.6. Метод (C,α) регулярний, якщо $Re\alpha>0$ або $\alpha=0$.

Доведення випливає з теореми Тьопліца [7], формул (1.16) та (1.18) і нерівностей, розглянутих вище. Дійсно, позначивши $Re\alpha=1$, знаходимо, що умови теореми виконані, так як

$$a_k=\lim_n a_{nk}=\lim_n \frac{(n-k)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha}}=\lim_n \varphi(1)\frac{(n-k)^{\delta-1}}{n^{\delta}}=0$$

при $\delta>0$, а при $\alpha=0$ маємо

$$a_{nk}=\delta_{nk}\to 0 \text{ при } n\to\infty;$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}=\frac{1}{A_n^{\alpha}} A_n^{\alpha}=1$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\le\frac{M_1}{M_2(n+1)^{\delta}}\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)^{\delta-1}=¿\frac{\varphi(1)}{(n+1)^{\delta}}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1}=\frac{\varphi(A_n^{\alpha})}{(n+1)^{\delta}}=\varphi(1)¿$$

при $\delta>0$, а при $\alpha=0$ (навіть при будь-якому $\alpha\ge 0$) умова теореми випливає із $A_{n-k}^{\delta-1}$при $\alpha\ge 0$.

Так як метод Чезаро трикутний [17], то він абсолютно сумовний (коротко $|C^{\alpha}|$, або $|C,\alpha|$). Можна сказати, що ряд (0.1) називається C^{α}-сумовний, якщо збігається ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tau_n^{\alpha}$

Ряд (0.1) називається $|C^{\alpha}|$-сумовним , якщо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\tau_n^{\alpha}|<\infty$.При цьому

$C^{\alpha}\{\sum u_n\}=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tau_n^{\alpha}$.

Означення методу $|C^{\alpha}|$ при $\alpha=-1,-2\ldots$ і детальне дослідження його властивостей дані в статті Люрі [21].

Одним із методів узагальненого підсумовування рядів є метод, запропонований Гельдером [11]. Він показав, що ряд можна підсумовувати введеним ним методом H^2 арифметичних середніх другого порядку, що визначаються через межу послідовності

$$H_n^2=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}H_k\ .$$

Можна розглядати арифметичне середнє послідовності (0.2) будь-якого натурального порядку, визначивши

$H_n^0=U_n$

$$H_n^{\alpha}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}H_k^{\alpha-1}.$$

Таким чином, підходимо до методу Гельдера порядку α, введеного Гельдером в 1882 році. Його позначають через H^{α} або (H,α). За означенням

$$H^{\alpha}\{\sum u_n\}=\lim_{n} H_n^{\alpha}.$$

При $\alpha=0$ метод H^{α} є методом збіжності:

$$H^0=E.$$

Теорема 1.7. Метод H^{α} регулярний.

Дійсно, якщо ряд (0.1) збігається до числа U, то, в силу регулярності метода H також $H_n\rightarrow U$. Якщо припустити, що

$H_n^{\alpha-1} \to U$ при $\alpha \geq 1$, то знову, застосовуючи регулярність методу арифметичних середніх, отримуємо $H_n^{\alpha} \to U$.

Теорема 1.8. Якщо $\beta > \alpha$, то $H^{\beta} \supset H^{\alpha}$, і кожен з цих методів сумісні.

Дійсно, позначимо $\beta = \alpha + \gamma$. Тоді, якщо

$$H^{\alpha}\left\{\sum u_n\right\} = U',$$

то, зважаючи на регулярність методу H, послідовно отримуємо

$$H^{\alpha+1}\left\{\sum u_n\right\} = U'$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H^{\alpha+\gamma}\left\{\sum u_n\right\} = U'$$

що і треба було довести.

Гельдер ввів цей метод для того, щоб узагальнити другу теорему Абеля [22]. Гельдер фактично отримав наступний результат.

Теорема 1.8. Якщо степеневий ряд

$\sum a_n z^n$

H^{α} – сумовний в точці $z = z_0$ кола, що збігається, то маємо наступну рівність

$$\lim_{z \to z_0} \sum a_n z^n = H^{\alpha}\left\{\sum a_n z_0^n\right\},$$

де границя послідовності береться по дотичній до кола.

При $\alpha = 0$ теорема 1.9 є теоремою Абеля. Випадок $\alpha = 1$ теореми розглянув Фробеніус [37]. Ця теорема Фронебіуса вважається першим значним результатом з теорії розбіжних рядів, після якого теорія підсумовування почала швидко розвиватися.

Метод H^{α} має і ряд інших корисних властивостей, але доводити їх досить складно, так як складно подати H_n^{α} у вигляді перетворення (А). Наприклад, при піднесенні до квадрату матриці методу арифметичних середніх для методу H^{α} отримуємо

$$a_{nk} = \frac{1}{n+1} \sum_{\gamma=k}^{n} \frac{1}{\gamma+1}.$$

Очевидно, чим більше α, тим складніший вид матриці методу H^{α}. Тому практично застосовують інший метод, рівносильний методу H^{α}, матриця якого дуже проста. Таким методом є метод Чезаро.

Відмітимо, що метод H^{α} можна визначити и для будь-якого комплексного α, якщо метод H^{α} розглядається як частковий випадок метода Хаусдорфа [38].

Метод Вороного-Ньорлунда можна розглядати як узагальнений метод Чезаро. Вперше цей метод розглянув Вороний [6] в 1902 році. Стаття Вороного являла собою коротку замітку в рідкісному виданні. Тому вона не розповсюджувалась серед математиків і залишилась забутою. Метод став відомим завдяки Ньорлунду, який ввів його незалежно від Вороного, і опублікував свою роботу в 1919 році. Робота Вороного стала відомою завдяки її англійському перекладу у 1932 році Тамаркіним з примітками перекладача.

Методом Вороного-Ньорлунда називають трикутний матричний метод, визначений послідовністю комплексних чисел ρ_n, у вигляді перетворення (А) матрицею із чисел

$$a_{nk}=\frac{p_{n-k}}{P_n}, \tag{1.17}$$

де

$$P_n=\sum_{k=0}^{n} p_k, P_n \neq 0$$

Метод Вороного-Ньорлунда позначається через (WN, p_n). Зокрема, метод C^{α} є методом (WN, p_n) з $p_n=A_n^{\alpha-1}$. Метод $(WN, \frac{1}{n+1})$, за Ріссом [14] називають *методом гармонійних середніх.*

Метод (WN, p_n) з $p_n=1$ при $n\leq\beta$і $p_n=0$ при $n\geq\beta$називають *методом* Z_p *Сільвермана-Саса*. Зрозуміло, що $Z_1=E_0$.

В силу (1.17) виводимо

$$\alpha_{nk}=\frac{1}{P_n}\sum_{v=k}^{n} p_{n-v}=\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n-k} p_{n-k-v}=\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n-k} p_v$$

а отже, у вигляді перетворення (В) метод (WN, p_n) визначається матрицею чисел (ними визначає цей метод Вороний)

$$\alpha_{nk} = \frac{p_{n-k}}{p_n}. \tag{1.18}$$

Тому замість (WN, p_n) іноді пишуть (WN, P_n)або просто P.

Подивимося, при яких умова метод (WN, p_n) зберігає збіжність. Застосовуючи теорему 1.1 Кожима-Шура, отримаємо умови

$1^0 \lim_n a_{nk} = \lim_n \frac{p_{n-k}}{P_n} = a_k.$

$2^0 \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} = \frac{1}{P_n} \cdot P_n = 1.$

$3^0 \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| = \frac{1}{|P_n|} \sum_{k=0}^{n} |p_{n-k}| = \varphi(1).$

Виявляється, що умову 1^0можна спростити, а саме, умова 1^0 випливає з існування границі $a_0 = \lim \frac{p_n}{P_n}.$ Дійсно, із представлення

$\frac{p_{n-k}}{P_n} = \frac{p_{n-k}}{P_{n-k}} \frac{p_{n-k}}{P_{n-k+1}} \cdots \frac{p_{n-2}}{P_{n-1}} \frac{p_{n-1}}{P_n}$

робимо висновок, що існує a_k і

$a_k = a_0 (1 - a_0)^k$

$$\lim_n \frac{p_{n-k}}{P_{n-k}} ¿ a_0 \lim_n \frac{p_{n-k}}{P_{n-k+1}} = \lim_n \left(1 - ¿ \frac{p_{n-k+1}}{P_{n-k+1}}\right) = 1 - a_0 ¿.$$

Отже, доведена

Теорема 1.10. Метод (WN, p_n) зберігає збіжність тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$1^0 \lim_n \frac{p_n}{P_n} = a_0.$

$2^0 \sum_{k=0}^{n} |p_k| = \varphi(P_n).$

Зрозуміло, що умова 2^0 теореми 1.10 відпадає, якщо $p_k \geq 0$. Відмітимо, що з умови 2^0 теореми 1.10 випливає необхідна умова

$$P_m = \varphi(P_n) \text{при всіх } 0 \leq m \leq n$$

Із теореми 1.10 і теореми Тьопліца випливає

Наслідок 1.1. Метод (WN, p_n), що зберігає збіжність, буде регулярним тоді і тільки тоді, якщо $a_0=0$.

Ньорлунд [34] розглянув випадок, коли $a_0=0$. У Вороного [8] величини $P_n>0$ такі, що ряд

$$\sum P_n=\infty\, i\, P_0+\ldots+P_n=\varphi(n^\lambda)$$

при деякому λ.

Метод зважених середніх Рісса можна розглядати як узагальнення методу арифметичних середніх. Тому його часто називають методом *зважених середніх арифметичних*.

Методом зважених середніх Рісса називають трикутний матричний метод, визначений послідовністю комплексних чисел p_n у вигляді перетворення (A) марицею чисел

$$a_{nk}=\frac{p_k}{P_n}, \tag{1.19}$$

де $P_n=\sum_{k}^{n} p_k$, $P_n\neq 0$.

Метод зважених середніх Рісса позначають (R, p_n). Зокрема, метод $(R,1)$ є методом середніх арифметичних.

Метод $\left(R, \frac{1}{n+1}\right)$, за Ріссом [29] зазвичай називають методом *логарифмічних середніх* і позначають через l□або (l□¿.

Метод (R, p_n) при $p_n=(n+1)^\alpha-n^\alpha$, тобто при $P_n=(n+1)^\alpha$, зазвичай називають *методом Зігмунда* порядку α і позначають через (Z,α), так як Зігмунд [8] вивчав швидкість наближення $h\le\alpha$ раз диференційованих функцій (Z,α)-середніми їх ряду Фур'є при $\alpha=1,2\ldots\ldots$ Зокрема, $(Z,1)=(Z,2)$, а $(Z,0)=E_0$.

Із (2.34) при $k\geq 1$отримуємо

$$\sum_{v=k}^{n} a_{nv}=\frac{1}{P_n}\sum_{v=k}^{n} p_v=\frac{1}{P_n}\left(\sum_{v=0}^{0} p_v-\sum_{v=0}^{k-1} p_v\right)=\frac{P_n-P_{k-1}}{P_n}$$

звідки, вважаючи, $P_{-1}=0$, метод (R, p_n) у вигляді перетворення (B) визначається матрицею чисел

$$\alpha_{nk}=1-\frac{P_{k-1}}{P_n}. \qquad (1.20)$$

Матрицею (1.20) визначив свій метод сам Рісс. Тому замість (R, p_n) іноді пишуть (R, P_n) або просто P.

Із (2.35) при $n \geq 1$ знаходимо

$$\acute{\Delta}\alpha_{nk}=-P_{k-1}\left(\frac{1}{P_n}-\frac{1}{P_{n-1}}\right)=\frac{P_{k-1}(P_n-P_{n-1})}{P_n P_{n-1}}$$

звідки, вважаючи $\frac{0}{0}=1$, метод (R, p_n) у вигляді перетворення (С) визначається матрицею чисел

$$\acute{\alpha}_{nk}=\frac{P_{k-1}p_n}{P_n P_{n-1}}. \qquad (1.21)$$

Через (1.21), враховуючи визначення абсолютного знаходження суми [5] і те, що метод (R, p_n) трикутний, ряд (0.1) називають $|R, p_n|$-сумовним, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}u_k\right|<\infty$$

причому

$$(R, p_n)\left\{\sum u_k\right\}=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}u_k.$$

Застосовуючи до (1.21) і (1.20) відповідно теореми Кожима-Шура, Тепліца і Кноппа-Лоренца [46], безпосередньо отримуємо наступні теореми

Теорема 1.11. Метод (R, p_n) зберігає свою збіжність тоді і тільки тоді, якщо виконуються умови

1^0 $\text{існує} \lim_{\square} P_n (\text{скінченний або ні}).$

$2^0 \sum_{k=0}^{n} p_k=\varphi(P_n).$

Метод (R, p_n) регулярний тоді і тільки тоді, коли виконується умова 2^0 і $\lim_{\square}|P_n|=+\infty$

Теорема 1.12. Метод (R, p_n) зберігає абсолютну збіжність тоді і тільки тоді, коли

$$P_{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\right|=\varphi(1)(k=1,2,\ldots\ldots)$$

або те ж саме, якщо

$$P_k\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\right|=\varphi(1)$$

Ясно, що умови теореми 1.11 виконуються, коли $p_n>0$. Покажемо, що тоді виконується і умова теореми 1.12. Дійсно, з умови 1 теореми 1.11 випливає

$$P_k\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}=P_k\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{P_{n-1}}-\frac{1}{P_n}\right)=1-\lim_{n}\frac{P_k}{P_n}=\varphi(1)$$

так як P_n монотонно зростає. З цього випливає, що має місце

Наслідок 1.2. Якщо $p_n>0$, то метод (R,p_n) зберігає свою збіжність і абсолютну збіжність; цей метод регулярний, якщо $\sum p_n=+\infty$.

Зокрема, із теорем 1.12 і 1.10 випливає:

1) метод логарифмічних середніх регулярний і зберігає абсолютну збіжність;

2) метод (Z,α) регулярний і зберігає свою збіжність тоді і тільки тоді, коли $Re\alpha>0$;

3) метод (R,p_n) з $\alpha\neq 0\, i\, \alpha\neq 1$ зберігає збіжність і абсолютну збіжність тоді, коли $|\alpha|\neq 1$, а регулярний тоді і тільки тоді, коли $|\alpha|>1$.

РОЗДІЛ 2
НАПІВНЕПЕРЕРВНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

2.1. Класичні напівнеперервні методи підсумовування рядів

Нехай ряд $\sum a_n x^{n+1}$ збігається для малих x до *f(x), q* > 0 і

$$x=\frac{y}{1-qy}\ ,\quad y=\frac{x}{1+qx}\,, \tag{2.1}$$

так що $y=\frac{1}{1+q}$ при $x=1$. Тоді для малих x і y

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty} a_n\left(\frac{y}{1-qy}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}q^{m-n}y^{m+1}=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}\sum_{m=0}^{\infty} y^{m+1}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}q^{m-n}a_n=\sum_{0}^{\infty} a_m^{(q)}\{(q+1)y\}^{m+1}, \tag{2.2}$$

де

$$a_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}q^{m-n}a_n. \tag{2.3}$$

Якщо

$$\sum a_m^{(q)}=A, \tag{2.4}$$

то будемо говорити, що ряд $\sum a_n$ *сумовний* (*E, q*) до суми A. При $q=1$ це означення зводиться до означення Ейлера [16], а при $q=0$ – до означення звичайної збіжності.

Якщо $a_n=z^n$, то

$$a_m^{(q)}=\frac{(q+z)^m}{(q+1)^{m+1}}$$

і

$$\sum a_m^{(q)}=\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{q+z}{q+1}}=\frac{1}{1-z}$$

тоді і тільки тоді, коли $|q+z|<q+1$. Таким чином, ряд $\sum z^n$ сумовний (*E, q*) в колі с центром – q і радіусом $q+1$. При зростанні q це коло збільшується і при $q\to\infty$ прямує до півплощини $z<1$. Це є область B- або B'- сумовності даного ряду [24].

Рівняння (2.3) можна записати у формі

$$(q+1)^{m+1}a_m^{(q)}=(q+\grave{E})^m a_0.$$

Далі,

$$\frac{1}{q+1}+\frac{q+x}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{(q+x)^m}{(q+1)^{m+1}}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\frac{(q+1)^{m+1}-(q+x)^{m+1}}{1-x}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\sum_{n=1}^{m+1}\binom{m+1}{n}q^{m+1-n}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right).$$

Тому, замінюючи x на E і помічаючи, що

$$\left(1+E+\cdots+E^{n-1}\right)a_0=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=A_{n-1},$$

одержуємо

$$A_m^{(q)}=\sum_{n=0}^{m}a_n^{(q)}=\left\{\frac{1}{q+1}+\frac{q+E}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{(q+E)^m}{(q+1)^{m+1}}\right\}a_0=\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1}q^m A_0+\binom{m+1}{2}q^{m-1}A_1+\cdots+A_m\right\}.$$

Ми будемо називати ряд $A^{(q)}=\sum a_n^{(q)}$ *q-й ейлеровою трансформацією* ряду $A=\sum a_n$. Формальний зв‘язок між обома рядами встановлюється формулами

$$\sum a_n x^{n+1}=\sum a_n^{(q)}\{(q+q)\,y\}^{n+1}=\sum a_n^{(q)}z^{n+1},$$

$$x=\frac{z}{1+q-qz}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.1. (E*,* q) -метод регулярний.

Дійсно,

$$c_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{(q+1)^{m+1}}\dbinom{m+1}{n+1}q^{m-n}>0\,при\,n\le m,\\ 0\,при\,n>m,\end{cases}$$

$$c_{m,n}\to 0\,u\sum c_{m,n}=1-\frac{q^{m+1}}{(q+1)^{m+1}}\to 1\,при\,m\to\infty.$$

Теорема 2.1 міститься як частинний випадок $q'=0$ в наступній теоремі.

Теорема 2.2. Якщо ряд сумовний (E,q'), то він сумовний *(E, q)* до цієї ж суми для кожного $q\text{¿}q'$.

Теорема 2.3. *(E, q)*-метод володіє наступними властивостями:

$$\sum a_n^{(q)} = A$$

і

$$\sum b_n^{(q)} = A - a_0,$$

де $b_n = a_{n+1}$.

Дійсно, ми можемо вважати $a_0 = 0$, так що $B_n = A_{n+1}$. Тоді одержуємо, що

$$B_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \left\{ \binom{m+1}{1} q^m A_1 + \binom{m+1}{2} q^{m-1} A_2 + \cdots + A_{m+1} \right\},$$

звідки

$$B_m^{(q)} - A_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \left\{ \binom{m+1}{1} q^m a_1 + \cdots + a_{m+1} \right\} = (q+1)\, a_{m+1}^{(q)}. \qquad (2.5)$$

(I) Якщо справедливо (2.3), то $a_{m+1}^{(q)} \to 0$, і попередня рівність випливає з (2.5).

(II) Рівняння (2.5) можна записати в формі

$$B_m^{(q)} = (q+1)\, A_{m+1}^{(q)} - q\, A_m^{(q)},$$

звідки, беручи до уваги, що $A_0^{(q)} = 0$, випливає, що

$$(q+1)\, A_{m+1}^{(q)} = B_m^{(q)} + \frac{q}{q+1} B_{m-1}^{(q)} + \cdots + \left(\frac{q}{q+1} \right)^m B_0^{(q)}.$$

Це – перетворення

$$A_{m+1}^{(q)} = \sum c_{m,n} B_n^{(q)}$$

з

$$c_{m,n} = \begin{cases} q^{m-n} (q+1)^{-m+n-1} \, npu \, n \le m, \\ 0 \, npu \, n > m, \end{cases}$$

і виконання умов теореми тут одразу перевіряється [7]. Тому з (2.5) випливає $A_{m+1}^{(q)} \to A$, тобто (2.2).

З теореми 2.3 випливає, що співвідношення $A_n \to A$ *(E, q)* рівносильне співвідношенню $A_{n+1} \to A$ *(E, q)* і тим самим співвідношенню

$$\frac{1}{(q+1)^{m+1}} \left\{ q^{m+1} A_0 + \binom{m+1}{1} q^m A_1 + \cdots + A_{m+1} \right\} \to A.$$

Тому підставляючи тут m замість $m+1$, ми можемо замінити $A_m^{(q)} \to A$ на

$$A_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^m}\left\{q^m A_0 + \binom{m}{1} q^{m-1} A_1 + \dots + A_m\right\} \to A.$$

Зазвичай зручніше всього і визначати «ейлерове середнє» для A_n таким способом, тобто ми можемо говорити, що $A_n \to A$ (*E, q*), якщо

$$A_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^m}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n} q^{m-n} A_n = ¿\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^m A_0 \to A.¿$$

Підставляючи тоді s_n і t_n замість A_n і $A_n^{(q)}$, одержуємо

$$\Delta^m t_0 = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n \binom{m}{n} t_n = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n \binom{m}{n}\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^n s_0 = ¿¿$$

$$¿\left(1 - \frac{q+E}{q+1}\right)^m s_0 = \left(\frac{1-E}{q+1}\right)^m s_0 = \frac{1}{(q+1)^m}\Delta^m s_0.$$

Теорема 2.4. Якщо ряд $\sum a_n$ сумовний *(E, q*), то $a_n = 0\{(2q+1)^n\}$.

З (1.13) випливає, що

$$(q+1)\,a_m^{(q)} = 0(1);$$

таким чином, в силу (1.16)

$$(q+E)^m a_0 = 0\{(q+1)^m\}.$$

Але

$$a_n = E^n a_0 = (E+q-q)^n a_0.$$

Отже,

$$a_n = 0\left\{(q+1)^n + \binom{n}{1} q (q+1)^{n-1} + \dots + q^n\right\} = 0\{(c)^n\}.$$

Приклад ряду $\sum z^n$[6], сумовного (*E, q*) для $-2q-1 < z < 1$, показує, що $2q+1$ не можна замінити ніяким меншим числом.

Область (*E, q*)-сумовності ряду $\sum z^n$ при $q \to \infty$ прямує до області його сумовності за Борелем. Це наштовхує на думку, що метод Бореля можна розглядать як граничний випадок методів Ейлера [21].

Дійсно, підставляючи в (1.19) $\frac{m}{x}$ замість q, отримуємо

$$A_m^{(q)} = \frac{1}{\left(1+\frac{m}{x}\right)^m}\left\{\left(\frac{m}{x}\right)^m A_0 + \binom{m}{1}\left(\frac{m}{x}\right)^{m-1} A_1 + \binom{m}{2}\left(\frac{m}{x}\right)^{m-2} A_2 + \dots + A_m\right\} = ¿$$

$$¿\frac{1}{\left(1+\frac{x}{m}\right)^m}\left\{A_0+xA_1+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2!}A_2+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!}A_3+\cdots+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}\right.$$

Звідси

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{x\to\infty}\varphi(m,x)=¿\lim_{m\to\infty}A_{m,}¿$$

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{m\to\infty}\varphi(m,x)=\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sum\frac{x^n}{n!}A_n.$$

Перший спосіб переходу до границі призводить до звичайної збіжності [5], і другий – до експоненціальному методу підсумовування Бореля [3]. Різні методи Ейлера відповідають граничному переходу $m=qx\to\infty$.

Якщо інтеграл Бореля абсолютно збігається, то кажуть, що ряд $\sum a_n$ *абсолютно сумовний*. Якщо ряд $a_p+a_{p+1}+\ldots$ абсолютно сумовний для кожного p, тобто якщо

$$\int e^{-x}\left|a^{(p)}(x)\right|dx<\infty$$

для кожного p, то кажуть, що ряд $\sum a_n$ *регулярно сумовний*. Таким чином, Борель називав абсолютним підсумовуванням те, що називають регулярним [2].

Експоненціальний та інтегральний методи Бореля визначені в [18]. Якщо

$$e^{-x}\sum A_n\frac{x^n}{n!}\to A,$$

то ми пишемо $A_n\to A(B)$, якщо

$$\int_0^\infty e^{-x}\sum_0^\infty a_n\frac{x^n}{n!}dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-x}\sum_0^\infty a_n\frac{x^n}{n!}dx=A,$$

то ми пишемо $A_n\to A(B')$. Ці методи належать до абсолютно різних типів: перший є J-метод з

$$J(x)=e^x,$$

а другий – «моментний метод» [5] з

$$\mu_n=n!,\ \chi(x)=1-e^{-x}.$$

Проте спеціальні властивості показникової функції роблять їх майже рівносильними. Зазначимо, спершу, що має місце

Теорема 2.5. B- і B'- методи регулярні.

Теорема 2.6. B- і B'- методи рівносильні тоді і тільки тоді, коли $e^{-x}a(x)\to 0$.

Проте можна піти далі. Із рівняння (2.4), вважаючи

$$\int_0^x e^{-t}a(t)dt=\varphi(x),$$

маємо

$$e^{-x}A(x)=\varphi(x)+\varphi'(x).$$

Але якщо $\varphi+\varphi'\to A$,то, за теоремою 2.2, $\varphi'\to 0$ і $\varphi\to A$. Звідси випливає

Теорема 2.7. Ряд сумовний (B), сумовний (B') до тієї ж суми.

Протилежне твердження не вірне. Якщо

$$a_n=\sum\frac{(-1)^p(2p+2)^n}{(2p+1)!},$$

то

$$a(x)=\sum\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}e^{(2p+2)x}=e^x\sin e^x,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}a(x)dx=\int_0^\infty \sin e^x dx=\int_1^\infty\frac{\sin u}{u}du,$$

але $e^{-x}a(x)$ не прямує до нуля, так що ряд $\sum a_n$ не сумовний (B). Таким чином, має місце

Теорема 2.8. Існують ряди, сумовні (B'), але не сумовні (B).

Відмітимо наступні твердження.

Теорема 2.9. Твердження

$$a_0+a_1+a_2+\cdots=A(B),$$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=A-a_0(B')$$

рівносильні.

Теорема 2.10. Якщо ряд $\sum a_n$ сумовний *(E, q)*, то він сумовний (B) і (B') до тієї ж суми.

Дійсно,

$$e^{qx}\sum A_n\frac{x^n}{n!}=\sum\frac{(qx)^n}{n!}\sum A_n\frac{x^n}{n!}=\sum c_n\frac{x^n}{n!},$$

де

$$\frac{c_n}{n!}=\frac{A_n}{n!}+\frac{qA_{n-1}}{(n-1)!1!}+\frac{q^2A_{n-2}}{(n-2)!2!}+\cdots+\frac{q^nA_0}{n!}.$$

2.2. Теореми Тауберового типу для напівнеперервних методів підсумовування рядів

Для кожного методу підсумовування повинна існувати своя «обмежуюча теорема», оскільки не один із застосованих методів не підсумовує достатньо швидко розбіжні ряди [22].

Ефективність цих та інших методів, які себе зарекомендували, має й інше, менш очевидне обмеження. Жоден метод не в силах підсумовувати занадто швидко розбіжні ряди. Але він не в силах підсумовувати і занадто повільно розбіжні ряди. Теореми, в яких використовується цей принцип, називають «теоремами тауберового типа». Вони стверджують, що якщо ряд сумовний (P) і задовольняє деякій допоміжній умові K_P (що змінюється з методом P, але завжди обмежує швидкість можливої розбіжності), то він збігається. Для методів Чезаро найбільш типовою формою умови K_P (що допускає різні узагальнення) є $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Розглянемо наступні дві теореми.

Теорема 2.11. Якщо $\sum a_n=A(C,k)$ для деякого k і

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (2.6)$$

то ряд $\sum a_n$ збігається і навіть сумовний $(C,-1+\delta)$ для будь-якого невід‘ємного δ.

Теорема 2.12. Якщо a_n дійсні, $\sum a_n=A(C,k)$ для деякого k і

$$na_n>-H, \qquad (2.7)$$

то ряд $\sum a_n$ збігається.

Для спрощення наступних міркувань зробимо декілька попередніх зауважень. Можемо вважати k цілим, замінюючи в противному випадку k на $k'=[k]+1$.Далі, доведення потребує тільки збіжність ряду, оскільки збіжний ряд, що задовольняє умові (2.7) сумовний $(C,-1+\delta)$ [18]. Нарешті, ми можемо вважати a_n дійсними, розглядаючи в противному випадку дійсну і уявну частини окремо. Таким чином, достатньо довести теорему 2.12 з цілим k.

Покладемо $b_n=na_n$ і будемо позначати через $B_n, B_n^1, \ldots$ суми, утворені з b_n, а через $A_n, A_n^1, \ldots$ – з a_n. Розглянемо наступні допоміжні твердження.

Теорема 2.13. Якщо ряд $\sum a_n$ сумовний $(C, r+1)$, де $r>-1$, то для його сумовності (C, r) необхідно і достатньо, щоб $B_n^r=o(n^{r+1})$.

Теорема 2.14. Для того щоб ряд $\sum a_n$ був сумовним $(C, r+1)$, де $r+1>-1$, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд

$$\sum \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{n} = \sum \frac{(n-1)!}{(r+2)(r+3)\ldots(n+r+1)} B_n^r (2.8)$$

або, що те ж саме, щоб збігався ряд $\sum \frac{B_n^r}{n^{r+2}}$.

Як легко перевірити,

$$(n+r+1)\binom{v+r}{r} - (r+1)\binom{v+r+1}{r+1} = (n-v)\binom{v+r}{r},$$

$$n\binom{v+r+1}{r+1} - (n+r+1)\binom{v+r}{r+1} = (n-v)\binom{v+r}{r},$$

Звідки (порівнюючи коефіцієнти при a_{n-v}) маємо:

$$(n+r+1)A_n^r - (r+1)A_n^{r+1} = B_n^r, (2.9)$$

$$nA_n^{r+1} - (n+r+1)A_{n-1}^{r+1} = B_n^r. (2.10)$$

З (2.9) і (2.10) випливає, що

$$\frac{1}{\binom{n+r}{r}} A_n^r - \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} A_n^{r+1} = \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{r+1},$$

$$\frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} A_n^{r+1} - \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} A_{n-1}^{r+1} = \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{n}. (2.11)$$

Покладаючи в останньому рівнянні $n=1,2,\ldots,N$ і додаючи, отримаємо:

$$\frac{1}{\binom{N+r+1}{r+1}} A_N^{r+1} = a_0 + \sum_1^N \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{n}. \quad (2.12)$$

Теорема 2.13 є наслідком формули (2.11), а теорема 2.14 – формули (2.12). Обидві форми теореми 2.14 рівносильні за теоремою Стірлінга [31]. При цілому r ряд (2.8) може бути записаний в іншій формі:

$$\sum \frac{(r+1)!}{n(n+1)\dots(n+r+1)} B_n^r.$$

Тепер ми можемо переконатися у справедливості теореми 2.12; при цьому ми можемо вважати k цілим, $k=r+1$, і $H=1$. Якщо $B_n^r \neq o\left(n^{r+1}\right)$, то існує таке невід‘ємне C, що одне з рівнянь

$$B_n^r > C_n^{r+1} \quad (2.13)$$

або

$$B_n^r \leftarrow C_n^{r+1} \quad (2.14)$$

виконується для нескінченної множини значень n. Нехай, наприклад, (2.13) має місце для нескінченної множини значень N номера n. Якщо $\eta > 1$ i $N \le n \le \eta N$, то

$$B_n^r - B_N^r = \sum_{v=1}^N \left\{ \binom{n-v+r}{r} - \binom{N-v+r}{r} \right\} b_v + \sum_{v=N+1}^n \binom{n-v+r}{r} b_v. \quad (2.15)$$

Так як всі коефіцієнти невід‘ємні і $b_v > -1$, то звідси випливає, що

$$B_n^r - B_N^r > -\sum_{v=1}^N \left\{ \binom{n-v+r}{r} - \binom{N-v+r}{r} \right\} - \sum_{v=N+1}^n \binom{n-v+r}{r}.$$

Вираз, який стоїть тут в правій частині, одержується з правої частини рівняння (2.15), коли $b_0=0$ і $b_v=-1$ для всіх $v>0$. Але в цьому випадку

$$\sum B_n^r x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \sum b_n x^n = \frac{x}{(1-x)^{r+2}}, B_n^r = -\binom{n+r}{r+1},$$

і тому

$$B_n^r - B_N^r > -\binom{n+r}{r+1} + \binom{N+r}{r+1}.$$

Так як

$$\binom{n+r}{r+1} \quad \frac{n^{r+1}}{(r+1)!}, \binom{N+r}{r+1} \quad \frac{N^{r+1}}{(r+1)!},$$

то робимо висновок, що

$B_n^r - B_N^r > \frac{-1}{(r+1)!}\{(1+\varepsilon)\eta^{r+1} - (1-\varepsilon)\} N^{r+1}$

для будь-якого невід‘ємного ε і $\eta > 1$, $N \le n \le \eta N$ і достатньо великих N. Тоді ε і η можна обрати так, щоб

$$B_n^r - B_N^r > \frac{-1}{2} C N^{r+1}.$$

Тоді, беручи до уваги (2.8) з $n = N$, отримуємо що

$$B_n^r > \frac{1}{2} C N^{r+1}$$

для $N \le n \le \eta N$, і, отже,

$$\sum_N^{\eta N} \frac{B_n^r}{n^{r+2}} > \frac{1}{2} C N^{r+1} \sum_N^{\eta N} \frac{1}{n^{r+2}} > \frac{1}{2} C N^{r+1} \frac{(\eta-1)N}{(\eta N)^{r++2}} = \frac{C(\eta-1)}{2\eta^{r+2}}$$

для достатньо великих N. Але якщо це має місце для нескінченої множини значень N, то ряд (2.8) розбіжний і, отже, ряд $\sum a_n$ не сумовний $(C, r+1)$.

Таким чином, рівняння (2.13) не може виконуватись для нескінченної множини значень n, і аналогічне міркування показує, що те саме вірно і для рівняння (2.14). Тому

$$B_n^r = o(n^{r+1}),$$

і в силу теореми 2.11 ряд $\sum a_n$ сумовний $(C, r+1)$. Повторюючи це міркування $r+1$ раз, бачимо, що ряд $\sum a_n$ збігається.

Помітимо, що теорема 2.11 іде дещо далі теореми 2.12, стверджуючи сумовність ряду для від‘ємних k. Аналогічне узагальнення теореми 2.13 неможливо, оскільки її умови виконані для будь-якого ряду з невід‘ємними членами, а такий ряд $\sum a_n$ не може бути сумовним $(C, -l)$, якщо не виконана умова $a_n = o\left(\frac{1}{n^l}\right)$ [7].

Розглянуті теореми допускають узагальнення на середні Рісса [17]. З цих узагальнень розглянемо одне, яке пізніше знадобиться, а саме, узагальнення випадку $k=1$ теореми 2.11.

Теорема 2.15. Якщо $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \lambda_n \to \infty$,

$a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)(n>0)(2.16)$

і

$\frac{1}{x}\int_0^\infty A(u)\,du = \frac{1}{x}\int_0^\infty \left(\sum_{\lambda_n \le u} a_n\right) du \to s*¿¿,(2.17)$

то ряд $\sum a_n$ збігається до s.

Будемо позначати ряд та інтеграл

$$\sum a_n, \quad \int a(t)\,dt \qquad (2.18)$$

через S і J, а їх значення у випадку збіжності через s і j (так, що, наприклад, $S = s$ буде означати, що ряд $\sum a_n$ збігається до s). Будемо писати

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad j(t) = \int_0^t a(u)\,du,$$

а також

$$S(y) = \sum a_n e^{-ny}, \quad J(y) = \int a(t) e^{-yt}\,dt,$$

коли ряд та інтеграл збігаються для $y>0$.Запис $S = s\ (A)$ або $J = j\ (A)$ буде означати, що $S(y) \to s$ або $J(y) \to j$ при $y \to 0$, а запис $S = s\ (C)$ або $J = j\ (C)$ – що ряд або інтеграл (2.13) сумовний $(C, 1)$ до s або j; сумовність за Чезаро якогось іншого порядку нам не зустрінеться.

Припущення

$$S = s,\ J=j,\ S = s\ (A),\ J=j\ (A),\ S = s\ (C),\ S = s\ (C)$$

будуть позначатися символами коротко

$K, K', K_A, K_A', K_C, K_C'$ відповідно.

Теоремою „абелевого" типу є теорема, яка стверджує, що з правильної поведінки послідовності функцій випливає правильна поведінка деяких середніх від членів цієї послідовності. Так, теоремою абелевого типу є твердження: „якщо $s_n \to s$, то

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \longrightarrow s$$

або „K спричиняє K_C", так само як і їх інтегральний аналог „з K' випливає K_C '". Теорема Абеля [4] про неперервність степеневого ряду є також теоремою абелевого типу (звідси і пішло це найменування). Дійсно,

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=\frac{s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots}{1+x+x^2+\ldots},$$

якщо $0 < x < 1$ і ряди збігаються; права частина являє собою певне середнє від s_n; теорема Абеля стверджує, що якщо s_n прямує до s, то і це середнє прагне до s, коли $x \to 1$. Більш узагальнено, будь-яка теорема, що встановлює регулярність [16] деякого методу підсумовування, є теоремою абелевого типу.

Пряме формулювання теореми абелевого типу зазвичай виявляється невірним. Так, наприклад, зрозуміло, що якщо теорема регулярності для будь-якого методу підсумовування зворотна, то цей метод є тривіальним, в тому сенсі, що він підсумовує лише збіжні ряди. Однак існує багато важливих теорем, які можна було б назвати виправленими формулюваннями теорем абелевого типу. Так, невірна теорема „з $\sigma_n \to s$ випливає $s_n \to s$" або „ з *Kc* випливає *K*" стає вірною, якщо підпорядкувати s_n додатковому критерію, як, наприклад, $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ [18]. Такі теореми називають *теоремами „тауберового" типу*, або „тауберовими", на ім’я А. Таубера, що вперше довів одну з найпростіших таких теорем [36]; а додаткову умову називають „тауберовою умовою".

Найбільш важливими з тауберових умов, з якими ми будемо мати справу, є

$$(o)\quad a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(O)\quad a_n=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(O_L)\quad a_n>\frac{-H}{n},$$

$$(O_R)\quad a_n<\frac{H}{n}$$

та їх інтегральні аналоги

$$(o') \quad a(t)=o(\frac{1}{t}),$$

$$(O') \quad a(t)=O(\frac{1}{t}),$$

$$(O_L') \quad a(t)>\frac{-H}{n},$$

$$(O_R') \quad a(t)<\frac{H}{n},$$

Тут *H* – додатна постійна, а умови, які накладаються на *a(t),* передбачаються виконаними для досить великих значень *t*. Поведінка функції *a(t)* для малих *t* несуттєва; ми будемо зазвичай припускати лише, що вона інтегрується на скінчених інтервалах *(0,T).*

Ми будемо також користуватися двома узагальненнями умов *(o)* і *(o'),* а саме

$$(\omega) a_1+2a_2+\ldots+na_n=o(n)$$

і

$$(\omega') \int_0^t ua(u)du=o(t).$$

Першою теоремою Таубера є наступне твердження.

Теорема 2.16. Якщо

$$\sum a_n=¿s \qquad (A)$$

і $a_n=o(\frac{1}{n})$, то ряд $\sum a_n$ збігається до *s*, або „$з K_A$ і (о) випливає К".

Інтегральним аналогом цього твердження є “$з K_A'$ і *(o')* випливає К'”. Розглянемо доведення цього твердження, а теорему 2.6 виведемо як його наслідок.

Очевидно, *(o')* тягне абсолютну збіжність інтегралу *J (y)* для *y >0.* Далі,

$$j\left(\frac{1}{y}\right)-J(y)=\int_0^{\frac{1}{y}} a(t)dt-\int_0^{\infty} e^{-yt}a(t)\,dt ¿ \int_0^{\frac{1}{y}} \left(1-e^{-yt}a(t)dt\right)-\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yt}a(i)\,dt=P-Q$$

Оскільки $0\le 1-e^{-yt}\le yt$, то

$$P=\int_1^{\frac{1}{y}} O(yt)\,o\left(\frac{1}{t}\right)dt=y\int_0^{\frac{1}{y}} o(1)dt=o(1)$$

З іншого боку,

$$Q=\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yt}o\left(\frac{1}{t}\right)dt=o\left(y\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yt}dt\right)=o\left(\int_1^{\infty} e^{-u}du\right)=o(1)$$

Тому

$$j\left(\frac{1}{y}\right)=J(y)+o(1)\to j \quad \text{при } y\to 0,$$

тобто $j(t)\to j$ при $t\to\infty$.

Щоб вивести звідси теорему 2.6, покладемо $a(t)=a_n$ для $n \le t < n+1$. Тоді

$$J(y)=\sum a_n\int_n^{n+1} e^{-yt}dt=\frac{1}{x}\sum a_n\left\{e^{-ny}-e^{-(n+1)}y\right\}=¿\,\frac{1-e^{-y}}{y}\sum a_n e^{-ny}=\frac{1-e^{-y}}{y}S(y),$$

так що з $S(y)\to s$ випливає $J(y)\to s$. Але з $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ випливає

$a_n(t)=o\left(\frac{1}{t}\right)$, тим самим теорема 2.5 є наслідком теореми 2.6.

У другій теоремі Таубера припущення *(o)* замінено на (ω). Це змінює характер теореми, оскільки із збіжності ряду *S* випливає (ω) [9], так що (ω) є необхідною умовою для К.

Теорема 2.17. Якщо ряд $\sum a_n$ сумовний *(*А*)* до *s*, то (ω) є необхідною і достатньою умовою збіжності його до *s*.

Інтегральний аналог свідчить: „Якщо вірне $K_A{}'$, то (ω') необхідно і достатньо для К' “. Тут, як і в подальшому, буде зручно доводити основну теорему та її інтегральний аналог одночасно, як частинні випадки відповідної теореми про інтеграл Стілтьєса [29]. Ми будемо вважати відомими визначення та елементарні властивості “інтеграла

Рімана-Стілтьєса”

$\int_a^T f(t)\,d\alpha(t)$із скінченим інтервалом інтегрування *(a, T)*. Зокрема, ми будемо спиратися на те, що цей інтеграл існує, коли одна з функцій *f(t)* або *α(t)* неперервна, а інша має обмежену змінну, і що

$$\int_a^T f(t)\,d\alpha(t)=f(T)\alpha(T)-f(a)\alpha(a)-\int_a^T \alpha(t)\,df(t).(2.19)$$

Надалі будемо припускати, що α*(t)* – функція з обмеженою змінною, причому α(0) = 0. Ми будемо також користуватися рівністю

$$\int_a^T f(t)\,d\alpha(t)=\int_a^t \frac{f(t)}{g(t)}\,d\beta(t), \qquad (2.20)$$

де

$$\beta(t)=\int_a^T g(u)\,d\alpha(u),$$

ƒ і *g* неперервні і *g* > 0. Інтеграл Стілтьєса від *a* до ∞ визначається формулою

$$\int_a^\infty f(t)\,d\alpha(t)=\lim_{x\to\infty}\int_a^T f(t)\,d\alpha(t)$$

Ми будемо мати справу з інтегралами виду

$$I(y)=\int_0^\infty e^{-yt}\,d\alpha(t).(2.21)$$

Всюди будемо припускати, що *I(y)* збігається для всіх додатних *y*; в цьому випадку

$$\alpha(t)=o(e^{-yt})$$

для будь-якого *y* > 0. Якщо α(t) абсолютно неперервна і α′(t) = *a (t),* то *I (y)* зводиться до *J (y).* Якщо α*(t)* – ступінчаста функція із стрибками [5] a_n в точках *t = n,* то *I(y)* зводиться до *S(y).* Отже, кожна теорема абелевого або тауберового типу, що відноситься до *I(y),* буде містити відповідні теореми для *J(y)* і *S(y).*

Теорема 2.18. Якщо α*(t)→l* при *t →∞* , то *I(y)* збігається для *y* > 0 і

$I(y) \to l$ при $y \to 0$.

Дійсно,

$$I(y) = \lim_{T\to\infty}\left\{\int_0^T e^{-yt}\,d\alpha(t)\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{e^{-yT}\alpha(T) + y\int_0^T e^{-yt}\alpha(t)\,dt\right\} = \text{¿¿}$$

$$\text{¿}\, y\int_0^\infty e^{-yt}\alpha(t)\,dt,$$

так що

$$I(y) \to \lim_{y\to 0} ly\int_0^\infty e^{-yt}\,dt = l.$$

Розглянемо твердження, що містить теореми 2.5 і 2.6.

Теорема 2.19. Якщо $I(y)$ збігається для $y > 0$ і $I(y) \to l$ при $y \to 0$, то для того, щоб $\int d\alpha(t) = l$, тобто щоб $\alpha(t) \to l$ при $t \to \infty$, необхідно і достатньо, щоб

$$\beta(t) = \int_0^t u\,d\alpha(u) = o(t), \text{ при } t \to \infty. \qquad (2.22)$$

Насамперед, умова необхідна, оскільки

$$\beta(t) = t\alpha(t) - \int_0^t \alpha(u)\,du,$$

і тому

$$\frac{\beta(t)}{t} = \alpha(t) - \frac{1}{t}\int_0^t \alpha(u)\,du \to l - l = 0,$$

коли $\alpha(t) \to l$.

З іншого боку, якщо умова (2.22) виконана, то, беручи до уваги формулу (2.20), маємо:

$$\alpha(t) - \alpha(1) = \int_1^t d\alpha(u) = \int_1^t \frac{d\beta(u)}{u} = \frac{\beta(t)}{t} - \beta(1) + \int_1^t \frac{\beta(u)}{u^2}\,du = \text{¿}$$

$$\text{¿}\, o(1) + O(1) + o\left(\int_1^t \frac{du}{u}\right) = o(\log t) = o(t),$$

так що

$$\gamma(t) = \int_0^t (u+1)\,d\alpha(u) = \beta(t) + \alpha(t) = o(t).$$

Далі,

$$\int e^{-yt} d\alpha(t) = \int \frac{e^{-yt}}{t+1} d\gamma(t) = y \int \frac{\gamma(t)}{t+1} e^{-yt} dt + \int \frac{\gamma(t)}{(t+1)^2} e^{-yt} dt ,$$

і так як перший член праворуч є

$$o\left(y \int e^{-yt} dt\right) = o(1),$$

то

$$\int \delta(t) e^{-yt} dt = \int \frac{\gamma(t)}{(t+1)^2} e^{-yt} dt \to l$$

Але $\delta(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ і тому в силу теореми 2.6 $\int \delta(t) dt$збігається до l. Нарешті,

$$\int d\alpha(t) = \int \frac{d\gamma(t)}{t+1} = \int \frac{\gamma(t)}{(t+1)^2} dt = \int \delta(t) dt = l.$$

Тим самим умова (2.22) не тільки необхідна, але і достатня. Обираючи α*(t),* як зазначено вище, отримуємо теореми 2.20 і 2.21.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто основні твердження та найважливіші теореми, що стосуються дискретних матричних регулярних методів підсумовування рядів, необхідні та достатні умови для того, щоб метод підсумовування мав узагальнену суму, тобто був регулярним, а також здійснено огляд основних видів умов тауберового типу для розбіжних рядів. Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні твердження:

1) для того, щоб перетворення $u'_n = \sum_k a_{nk} U_k$ було регулярних, необхідно і достатньо виконання умов:

1° існує $\lim_n a_{nk} = a_k$,

2° існує $\lim_n \sum_k a_{nk} = a$,

3° $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$

з $a_k = 0$ і $a = 1$;

2) стосовно класичних дискретних методів справедливі твердження:

а) метод (C, α) регулярний, якщо $Re\alpha > 0$ або $\alpha = 0$;

б) метод H^{α} регулярний;

в) метод (WN, p_n) зберігає збіжність тоді і тільки тоді, коли виконуються умови $\lim_n \frac{p_n}{P_n} = a_0 ma \sum_{k=0}^{n} |p_k| = \varphi(P_n)$,при цьому метод (WN, p_n), що зберігає збіжність, буде регулярним тоді і тільки тоді, коли $a_0 = 0$;

г) метод (WN, p_n), що зберігає збіжність, є регулярним;

д) метод (R, p_n) регулярний тоді і тільки тоді, якщо виконуються умови $\sum_{k=0}^{n} p_k = \varphi(P_n) ma \lim_{\square} |P_n| = +\infty$;

2) для кожного методу підсумовування повинна існувати своя «обмежуюча теорема», оскільки не один із застосованих методів не підсумовує достатньо швидко розбіжні ряди. Теореми такого плану називають «теоремами тауберового типа». Вони стверджують, що якщо ряд сумовний (P) і задовольняє деякій допоміжній умові K_P (що змінюється з методом P, але завжди обмежує швидкість можливої розбіжності), то він збігається. Зокрема, справедливі наступні твердженя:

а) якщо $\sum a_n = A(C, k)$ для деякого k і

$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$,

то ряд $\sum a_n$ збігається і навіть сумовний $(C, -1+\delta)$ для будь-якого невід‘ємного δ;

б) якщо a_n дійсні, $\sum a_n = A(C, k)$ для деякого k і

$n a_n > -H$,

то ряд $\sum a_n$ збігається.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андриенко В. А. О скорости приближения функций (С,1)-средними их ортогональных разложений / В. А. Андриенко // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1967. – № 8. – С. 3-15.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Наука, 1961. – 326 с.
3. Барон С. Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости / С. Барон // Изв. АН ЭстССр. Сер. техн. и физ.-матем. наук. – 1960. – № 1. – С. 47-68.
4. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов / С. Барон. – М. : Учпедгиз, 1965. – 128 с.
5. Барон С. Теория о множествах суммируемости для методов A^{α} . // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1970. – С. 165-178.
6. Барон С. О множителях суммируемости для метода Чезаро отрицательного порядка / С. Барон, Т. Таммай // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем и техн. н. – 1962. – 11, № 1. – С. 33-36.
7. Вихманн Ф. О консервативности матриц относительно сходимости по мере / Ф. О. Вихманн // Изв. АН ЭстССР. физ., матем. – 1971, 20. – № 3. – С. 275-278.
8. Волков И. И. Некоторые вопросы линейных матричных преобразований / И. И. Волков // Матем. сб. – 1958, 11. – № 1. – С. 85-112.
9. Волков И. И. К вопросу суммирования расходящихся рядов методом (С, α). / И. И. Волков / Тр. Моск. ин-та механиз. и электрифик. с. х. – 1959, 4. – № 1. – С. 137-146.
10. Давыдов Н. А. Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах

последовательностей / Н. А. Давывов // Украинский математический журнал. – 1978, 30. – № 6. – С. 723-730.

11. Давыдов Н. А. Неэффективные регулярные линейные интегральные преобразования / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1968. – № 3. – С. 189-200.
12. Давыдов Н. А. О включении и разности методов Кожима суммируемости рядов / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1967, 19. – № 4. – С. 29-47.
13. Давыдов Н. А. Об одном свойстве включения методов суммирования, определяемых нормальными матрицами / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1969. – № 2. – С. 685-690.
14. Давыдов Н. А. О включении и разности методов Теплица суммируемости рядов / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1968. – № 4. – С. 460-471.
15. Давыдов Н. А. Равносильность (С, α) и (А) / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1972. – № 5. – С. 221-222.
16. Давидов М. А. Включення методів Чезаро методу в нижню трикутну матрицю Тьопліца. Нормальні методи Тьопліца, рівносильні методам Чезаро / М. А. Давидов // Украинский математический журнал. – 1973. – № 8. – С. 464-468.
17. Евграфов М. А. Об обращении теоремы Абеля для рядов, имеющих пропуски / М. А. Евграфов // Изв. АН СССР. – Т. 16. – 1952. – С. 521-524.
18. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М. : Наука, 1965. – 312 с.
19. Кангро Г. О. суммировании бесконечных рядов при помощи матричних методов / Г. О. Кангро // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1955. – № 37. – С. 150-190.

20. Кангро Г. О. некоторых исследованиях по теории суммируемости / Г. О. Кангро // Изв. АН ЭстССР. физ., матем. – 1967, 16. – № 3. – С. 255-266.

21. Кангро Г. О. Теория суммируемости последовательностей и рядов / Г. О. Кангро // Итоги науки и техн. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С. 5-70.

22. Кангро Г. О. Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса / Г. О. Кангро, М. Тыннов // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1961. – № 102. – С. 249-262.

23. Кауфман Б. Л. Сравнение по силе некоторых методов суммирования расходящихся рядов с методами чезаровских средних / Б. Л. Кауфман // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1959. – № 5. – С. 131-145.

24. Коханівський О. П. Умова рівносильності логарифмічних методів підсумовування / О. П. Коханівський // Украинский математический журнал. – 1974. – № 6. – С. 229-234.

25. Кузьмич В. И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов / В. И. Кузьмич. – [В кн: Приближенные методы математического анализа]. – К. : Изд-во Киев. пед. ин-та, 1979. – С. 18-26.

26. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. – М. : Мир, 1960. – 358 с.

27. Кулль И. Г. Умножение суммируемых двойных рядов / И. Г. Кулль // Уч. зап. Тартукс. ун-та. – 1958. – № 62. – С. 3-59.

28. Ламп Ю. Матричне преобразования обобщенных последовательностей / Ю. Ламп / Тр. Таллинск. политехн. ин-та. – 1971. – В. А313. – С. 73-80.

29. Огиевецкий И. И. О включениях между регулярними методами / И. И. Огиевский // Уч. зап. Казанск. ун-та. – 1964, 124. – № 6. – С. 241-265.

30. Папласкаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега / А. Б. Папласкаускас. – М. : Наука, 1966. – 214 с.
31. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сеге. – М.- Л. : Гостехиздат. – 1950. – 234 с.
32. Реймерс Э. Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов / Э. Реймерс // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1961. – № 102. – С. 29-42.
33. Реймерс Э. Новые общие методы суммирования / Э. Реймерс // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 119-154.
34. Реймерс Э. Континуальные методы суммирования / Э. Реймерс // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1967. – № 206. – С. 50-89.
35. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Наука, 1975. – 416 с.
36. Слепенчук К. М. Абсолютная суммируемость рядов методами Чезаро отрицательного порядка / К. М. Слепенчук // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1965. – № 12. – С. 29-36.
37. Сырмус Т. Об абсолютной суммируемости простых и двойных последовательностей методами Хаусдорфа / Т. Сырмус // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1967. – № 93. – С. 13-22.
38. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера / И. Таммерайд // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1971. – № 277. – С. 161-170.
39. Тюрнпу Х. Некоторые типы множителей суммируемости для метода Рисса второго порядка / Х. Тюрнпу // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 253-263.
40. Тяхт Т. Мультипликаторы базисов суммирования и множители суммируемости / Т. Тяхт // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1975. – № 355. – С. 157-164.
41. Харди Г. Х. Расходящиеся ряды / Г. Х. Харди. – М. : Просвещение, 1951. – 386 с.

42. Харшиладзе Ф. И. Множители равномерной сходи мости / Ф. И. Харшиладзе // Тр. Тбилисск. матем. ин-та. – 1960. – № 27. – С. 195-208.

43. Эспенберг Х. О множителях суммируемости для метода Эйлера-Кноппа / Х. Эспенберг // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 241-249.

44. Эспенберг Х. О множителях суммируемости в последовательности для метода Эйлера-Кноппа / Х. Эспенберг // Сб. науч. тр. Эст. с.-х. акад. – 1963. – № 131. – С. 73-81.

45. Юримяэ Э. Заметки о корегулярных обобщенных матричних методах суммирования / Э. Юримяэ // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1965. – № 177. – С. 62-66.

46. Юримяэ Э. Множество совершенства для методов, сохраняющих сходимость / Э. Юримяэ // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1971. – № 277. – С. 115-124.

47. Lorentz G.G. Direct theorems on methods of summability II. – Canad. J. Math. – 1951, 3. – №2. – P. 236-256.

48. Wood B. On l-l summability. –Proc. Amer. Math. Soc. – 1970, 25. – P. 433-436.