МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

РОЗРОБКА МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ З НАВЧАЛЬНОГО МОДУЛЯ «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ» ДЛЯ МАЙБУТНІХ ПРОГРАМІСТІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка

Спеціальності 014 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти Середня освіта (математика)

Чорна Юлія Володимирівна

Керівник кандидат педагогічних наук,

старший викладач Григор'єва В.Б.

Рецензент кандидат фізико-математичних наук,

доцент Валько Н.В.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Аналіз світового методичного досвіду самостійної діяльності студентів засвідчив, що самостійна робота майбутніх програмістів з позицій компетентнісного підходу є засобом індивідуалізації процесу їх професійної підготовки як основи самоосвітньої діяльності та професійної мобільності. Тому організацію самостійної діяльності кожного студента варто спрямовувати на формування вмінь самостійного опанування значимої для нього інформації, використання математичних методів, моделей та алгоритмів для вирішення практичних завдань з обов'язковим досягненням результату, творчого підходу до вирішення професійних задач. Однак передумовою реалізації зазначених завдань має бути висока мотивація навчання. Відомо, що усвідомлення значущості дисципліни у майбутній професійній діяльності фахівця сприяє мотивації її вивчення. Окрім того, велика кількість професійних задач програміста пов'язана з курсом аналітичної геометрії, наприклад в основи комп'ютерної графіки та задачі, пов'язані з геометричним моделюванням, закладені елементи аналітичної геометрії. Зміст таких задач в навчально-методичних матеріалах до вивчення дисципліни "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" не виокремлюється. Однак практичний курс дисципліни має бути орієнтований на її застосування в ІТ-сфері, яка використовується у широкому колі професій, сприяти формуванню аналітичного мислення, що позитивно впливає на самоорганізацію особистості студента, здатного планувати власну самостійну навчальну діяльність, раціонально розподіляти час, надавати пріоритетність поставленим завданням з метою їх виконання і є необхідною вимогою до конкурентоспроможного фахівця.

Мета роботи – розробка методичного забезпечення з навчального модуля «Аналітична геометрія», який є складовою частиною курсу

«Лінійна алгебра та аналітична геометрія», що викладається студентам комп'ютерних спеціальностей 1-го курсу.

Об'єктом дослідження є процес підготовки майбутніх програмістів, а *предметом* – безпосередньо організація вивчення навчального модуля «Аналітична геометрія».

Завдання роботи:

1) аналіз навчально-методичної літератури з «Аналітичної геометрії» та складання на основі його списків літературних джерел, що є корисними при вивченні тем дисципліни;

2) розробка планів-конспектів лекційних та практичних занять з курсу;

3) розробка методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять та самостійної роботи вдома, зокрема, розробка систем завдань для самостійного розв'язування, що стосуються основних тем навчального модуля;

4) розробка опорних блок-схем, які наочно та стисло розкривають зміст основних теоретичних питань навчального модуля «Аналітична геометрія».

Для розв'язування поставлених завдань застосовувалися такі *методи* науково-педагогічного дослідження: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження; вивчення педагогічного досвіду викладачів.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ З НАВЧАЛЬНОГО МОДУЛЯ «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

1.1. Огляд літератури та аналіз сучасного стану проблеми

Якість математичної підготовки молодого покоління є індикатором готовності суспільства до соціально-економічного розвитку, мобільності особистості в освоєнні та впровадженні нових технологій, розумінні принципів будови і правильного використання сучасної техніки, сприйманні наукових і технічних ідей. Якісна математична підготовка є важливою складовою професійної компетентності сучасного фахівця, який повинен володіти методами математичного моделювання, оптимізації, прогнозування, кількісного та якісного аналізу, збору та обробки інформації. Особливо гостро проблема математичної підготовки постає для IT–фахівців, оскільки основу програмування складає не тільки знання певної мови програмування, а й уміння побудувати математичну модель, знання ефективних алгоритмів, процесу створення алгоритмів для розв'язання поставленого завдання.

Галузь IT–технологій вже змінила світ та продовжує відігравати ключову роль в його подальшому розвитку. Тому професійні кадри в галузі інформаційних технологій є одними з найбільш затребуваних на ринку праці розвинутих країн. Але нині мова йде про підготовку такого фахівця, який вміє в потрібний момент знайти необхідну інформацію, проаналізувати її, співвіднести одержану інформацію із задачами, які необхідно розв'язати, та на цій основі виробити адекватні шляхи розв'язання поставленої задачі. Тобто IT–фахівцю в першу чергу необхідно побудувати модель задачі, яку він повинен дослідити чи автоматизувати. Побудова цієї моделі – самий важливий етап розробки програмного продукту, який вимагає ґрунтовної математичної підготовки.

Практика показує, що вимоги до рівня математичної підготовки програмістів з часом все більше зростають. І нині без ґрунтовної математичної підготовки підготувати висококваліфікованого програміста неможливо. Математична підготовка забезпечує потреби особистості, зокрема IT–фахівця, в загальному інтелектуальному розвитку та математичному мисленні, формує методологічну базу діяльності, необхідну фахівцю, в його професійній освіті та самоосвіті, в професійній мобільності та професійній адаптації в динамічних умовах виробництва.

Поняття математичної підготовки, її зміст та структура, проблема професійно-орієнтованої математичної підготовки фахівців різного профілю розглядались в багатьох роботах. Зокрема, це роботи таких вітчизняних та зарубіжних педагогів-науковців, як Г.Бокарева, Р.Блохіна, Г.Дутка, Ю.Колягін, О.Красножон, Г.Луканін, С.Мухіна, Т.Тарасова.

Однією з дисциплін математичного циклу, що викладається майбутнім програмістам, є «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». За навчальним планом студентів комп’ютерних спеціальностей вивчення курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» передбачено протягом першого курсу. Загальний обсяг дисципліни об’єднує усі види навчальної діяльності студента: аудиторні заняття (лекційні, семінарські, практичні), самостійну роботу студентів, контрольні заходи (самостійні роботи, контрольні роботи, тестові завдання, залік або екзамен). Самостійна робота студентів має дві складові: самостійна підготовка до аудиторних занять і підготовка до модульного контролю або екзамену.

Що стосується сучасного стану проблеми методичного забезпечення курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для майбутніх програмістів, то можна зазначити, що комплекси з даної дисципліни, ймовірно, розроблені на відповідних кафедрах закладів вищої освіти, проте, як відомо, доступ до зазначених комплексів мають, як правило, або викладачі випускаючих кафедр, або студенти відповідних вишів.

1.2. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з навчального модуля «Аналітична геометрія»

До теми «Вектори та дії над ними»

Вектором називається напрямлений відрізок. Напрямок відрізка вказується стрілкою. Розрізняють початок і кінець вектора. Два вектора називаються *рівними* між собою, якщо кожен із них можна дістати за допомогою паралельного перенесення іншого.

Рівні вектори є колінеарними, мають один і той самий напрямок і однакову довжину. Довжина вектора $\bar{a}$ називається *модулем* вектора і позначається $|\bar{a}|$.

Вектор називається *нульовим* (*нуль-вектором*), якщо він має нульову довжину (тобто його кінець збігається з початком).

Щоб знайти суму двох векторів $\bar{a}\, i\, \bar{b}$, потрібно розташувати вектори так, щоб початок вектора $\bar{b}$ збігався з кінцем вектора $\bar{a}$. *Сумою* $\bar{a}+\bar{b}$ векторів $\bar{a}\, та\, \bar{b}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\bar{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\bar{b}$ (рис 1.1)

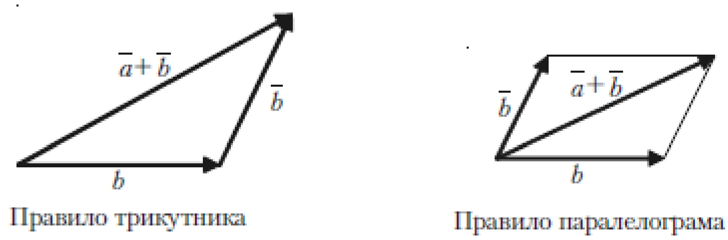


Рис. 1.1.

Для операції додавання векторів мають місце наступні властивості:

1) переставний (комутативний): $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;

2) сполучний (асоціативний): $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$;

3) для кожного вектора $\bar{a}$ існує протилежний вектор ($-\bar{a}$), такий, що $\bar{a}+(-\bar{a})=0$;

4) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;

5) для будь-яких двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ виконуються нерівності:

$$|\bar{a}+\bar{b}|\leq|\bar{a}|+|\bar{b}|,\quad |\bar{a}-\bar{b}|\leq|\bar{a}|+|\bar{b}|.$$

Якщо вектор $\bar{a}$ утворює кут φ з віссю Ox (рис. 1.2), то *проекцією* вектора $\bar{a}$ на вісь називається величина

$$np_x\bar{a}=a_x=|\bar{a}|\cos\varphi, \qquad (1.1)$$

$$a_x=x_2-x_1. \qquad (1.2)$$

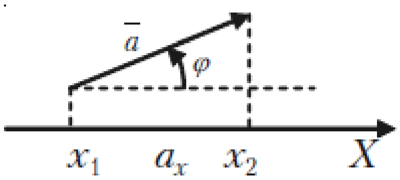


Рис. 1.2.

Нехай вектор має початок у точці $M_1(x_1,y_1,z_1)$, а кінець – у точці $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Тоді величини $a_x=x_2-x_1$, $a_y=y_2-y_1$, $a_z=z_2-z_1$ є *проекціями* вектора $\bar{a}$ на осі x, y, z.

Проекції вектора однозначно визначають вектор. Тому має місце рівність $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$. Якщо вектор $\bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то проекція суми векторів

$$\bar{a}+\bar{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}.$$

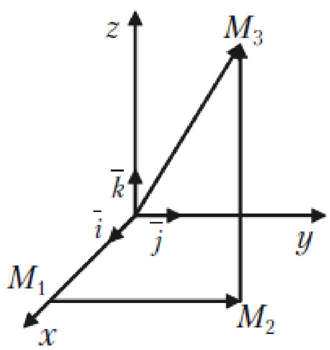
Добутком вектора $\bar{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\bar{a}$, довжина якого дорівнює $|\lambda\bar{a}|=|\lambda||\bar{a}|$. Множення вектора на число має властивість асоціативності та дистрибутивності, тобто для довільних чисел λ, μ та векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ справедливі рівності:

1) $\lambda(\mu\bar{a})=\mu(\lambda\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$;

2) $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$;

(1.3)

3) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.



Будь-який вектор $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ можна записати у вигляді :

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}, \qquad (1.4)$$

де $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ –одиничні відрізки, $a_x\bar{i},a_y\bar{j},a_z\bar{k}$ називаються *компонентами* вектора $\bar{a}$

$$\overline{OM_1}=\overline{OM_3}+\overline{M_3M_2}+\overline{M_2M_1}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}.$$

Ознакою колінеарності двох векторів $\bar{a}\,i\,\bar{b}$ є пропорційність їх відповідних координат:

$$\bar{a}\parallel\bar{b}\quad \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.(1.5)$$

Скалярним добутком двох векторів $\bar{a}\,i\,\bar{b}$ називається число $\bar{a}\bar{b}$, яке дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b}). \qquad (1.6)$$

Скалярний добуток можна записати у такому вигляді:

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|=|\bar{b}|np_{\bar{b}}\bar{a}.$$

Якщо вектори $\bar{a}\,ma\,\bar{b}$ задані своїми координатами, то їх скалярний добуток обчислюється за формулою:

$$\bar{a}\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (1.7)$$

Враховуючи формули (1.6) та (1.7), можна знайти косинус кута між векторами $\bar{a}\,i\,\bar{b}$:

$$\cos(\bar{a},\bar{b})=\cos\varphi=\frac{\overline{ab}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.(1.8)$$

Звідси випливає умова перпендикулярності двох векторів: якщо $\bar{a}\perp\bar{b},mo\bar{a}\bar{b}=0$або в координатній формі:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.(1.9)$$

Серед властивостей скалярного добутку відмітимо найважливіші:

1) $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{a};$

2) $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c};$

3) $\lambda\bar{a}\bar{b}=\lambda(\bar{a}\bar{b})=\bar{a}\lambda\bar{b}.$

Векторним добутком вектора $\bar{a}$на вектор $\bar{b}$називається вектор $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, який має такі властивості:

1) довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює добутку довжин співмножників на синус кута між ними: $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi$;

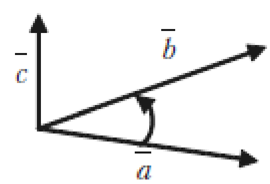


Рис. 1.4.

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}$ *та вектора* $\bar{b}$;

3) з кінця вектора $\bar{c}$ найкоротший поворот від $\bar{a}$ *до* $\bar{b}$ здійснюється таким чином, що він відбувається проти годинникової стрілки (рис 1.4).

Зауважимо, що $[\bar{a}\times\bar{b}]=-[\bar{a}\times\bar{b}]$, а модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ *та* $\bar{b}$, якщо вони виходять із спільного початку.

У координатній формі векторний добуток векторів $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}\, i\, \bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$можна записати у вигляді:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}.(1.10)$$

Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$називається векторний добуток векторів $\bar{a}\, i\, \bar{b}$, який скалярно помножений на вектор $\bar{c}$, тобто $[\bar{a}\times\bar{b}]\bar{c}$.

Якщо вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланарні, тобто належать одній площині або розташовані на паралельних площинах, то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Якщо відомі координати співмножників $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\bar{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$, то мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$[\bar{a}\times\bar{b}]\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1.11)$$

Якщо три ненульові вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ розташовані в одній площині, то вони будуть компланарними, а їх мішаний добуток в цьому випадку $[\bar{a}\times\bar{b}]\bar{c}=0$.

Отже, в координатній формі умова компланарності трьох ненульових векторів має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

До теми «Метод координат»

Прямокутна система координат у просторі складається із трьох взаємно перпендикулярних осей, що перетинаються в одній точці, які називаються *осями координат*. Точка перетину трьох осей називається *початком координат* і позначається буквою *O*. Координатні осі позначаються через *Ox, Oy* і *Oz* та відповідно називаються *віссю абсцис, віссю ординат і віссю аплікат.*

На кожній вісі обирається додатний напрямок, що вказується стрілкою, та одиниця вимірювання.

Координатні осі *Ox, Oy і Oz* попарно визначають координатні площини *xOy, xOz* і *yOz,* що перетинаються в одній точці *O* (рис. 2.1).

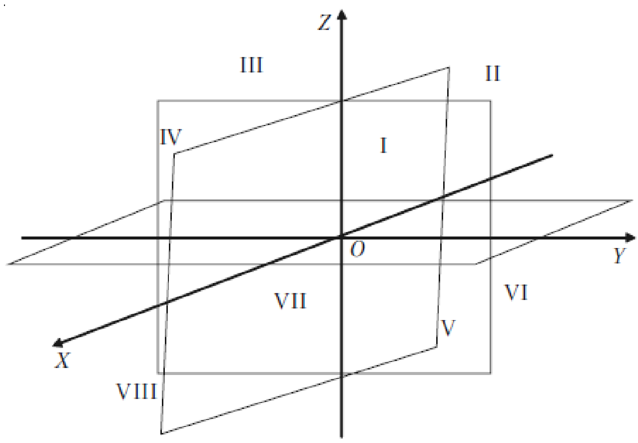


Рис. 2.1.

Положення точки *M* відносно взятих осей визначається відрізками *OA*, *OB*, *OC* (рис. 2.2), які відповідно дорівнюють відстаням точки *M* від координатних площин. Величини цих відрізків виражаються числами.

Число $x = \frac{AO}{e}$ називається *абсцисою точки M.*

Число $y = \frac{OB}{e}$ називається *ординатою точки M.*

Число $z = \frac{OC}{e}$ називається *аплікатою точки M.*

Таким чином, положення будь-якої точки в просторі визначається трійкою чисел (*x,y,z*), які називаються її *координатами*.

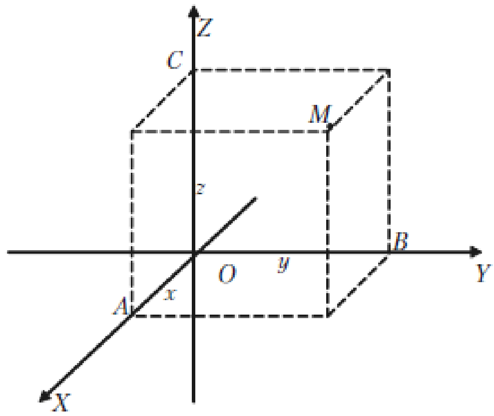


Рис. 2.2.

Між трьома числами (x,y,z) і точками простору встановлена взаємно однозначна відповідність, а саме: кожній трійці чисел відповідає одна і тільки одна точка простору і, навпаки, кожній точці простору відповідає одна трійка чисел (x,y,z).

Відстань між точками

Якщо точки $M_1(x_1;y_1)\,ma\,M_2(x_2;y_2)$ належать двомірному простору R^2,то відстань між двома точками визначається за формулою:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.(2.1)$$

Якщо ж точки $M_1(x_1;y_1;z_1)\,ma\,M_2(x_2;y_2;z_2)$ належать тривимірному простору R^3,то відстань між двома точками визначається за формулою:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (2.2)$$

Поділ відрізка в заданому відношенні

Якщо точка *M(x,y,z)* поділяє відрізок, що визначений точками $M_1(x_1;y_1;z_1)\,ma\,M_2(x_2;y_2;z_2)$ в відношенні $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$, то її координати знаходяться за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\, z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.(2.3)$$

У випадку, якщо точка *M* поділяє відрізок M_1M_2 навпіл, тоді $l = 1$, і координати точки *M* визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\, y=\frac{y_1+y_2}{2},\, z=\frac{z_1+z_2}{2}.(2.4)$$

Площа трикутника

Площа трикутника за відомими координатами його вершин A($x_1; y_1$), B($x_2; y_2$), C($x_3; y_3$) обчислюється за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\left(\left(x_1-x_2\right)\left(y_2-y_3\right)-\left(x_2-x_1\right)\left(y_1-y_3\right)\right). (2.5)$$

Одержане за допомогою цієї формули число необхідно взяти по модулю.

До теми «Пряма на площині»

В прямокутній системі координат рівняння прямої на площині визначається одним із наступних видів.

1. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*:

$$y=kx+b, \qquad (2.1)$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута нахилу, який пряма утворює з додатним напрямом осі *Ox,* причому цей кут відраховується від осі *Ox* до прямої проти годинникової стрілки; *b* – величина відрізка, що відтинає пряма на осі ординат. При *b* = 0 рівняння (2.1) має вигляд $y=kx$, і відповідна йому пряма проходить через початок координат.

2. *Загальне рівняння прямої*

$$Ax + By + C=0. \qquad (2.2)$$

Окремі випадки загального рівняння прямої:

а) якщо C = 0, то рівняння (2.2) буде мати вигляд:

$$Ax + By=0,\ y=\frac{-A}{B}x,$$

якщо $k=\frac{-A}{B}$, то $y=kx$, і пряма, що визначається цим рівнянням, проходить через початок координат, так, як координати початку координат *x* = 0*, y* = 0 задовольняють цьому рівнянню;

б) якщо в загальному рівнянні (2.2) *B* = 0, то рівняння матиме вигляд:

$$Ax+C=0, \text{ або } x=\frac{-A}{C}=a.$$

Рівняння не містить змінної *y*, і цим рівнянням визначається пряма, яка паралельна осі *Oy;*

в) якщо в загальному рівнянні (2.2) $A = 0$, то рівняння приймає вигляд:

$$By + C = 0, \text{ або } \quad y = \frac{-B}{C} = b.$$

Рівняння не містить змінної *x,* і цим рівнянням визначається пряма, яка паралельна осі *Ox;*

г) при $C = 0$ і $A = 0$ – рівняння (2.2) має вигляд $By = 0$ або $y = 0$. Це рівняння вісі *Ox*;

д) при С = 0 і В = 0 рівняння (2.2) запишеться в вигляді $Ax = 0$ або $x = 0$. Це рівняння вісі *Oy.*

3. *Рівняння прямої у відрізках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (2.3)$$

де a – величина відрізка, який відтинає пряма на вісі *Ox*; b – величина відрізка, який відтинає пряма на вісі *Oy*. Кожний з цих відрізків відкладається від початку координат.

4. Якщо пряма має кутовий коефіцієнт k і проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$,то її рівняння має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.4)$$

Якщо в цьому рівнянні параметру kнадавати різні значення, то будемо одержувати різні прямі, які проходять через задану точку $(x_0; y_0)$. Тоді рівняння (2.4) дає пучок прямих з центром в точці $M_0(x_0; y_0)$.

5. Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, то рівняння:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (2.5)$$

називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$.

6. Якщо задано вектор $\bar{S} = \{m; n\}$, паралельний прямій, і точку $M_0(x_0; y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді :

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Вектор $\overline{S}$ називається *напрямним вектором прямої.*

7. Кутом між прямими $y=k_1x+b_1\, і\, y=k_2x+b_2$називається кут, на який необхідно повернути пряму (з кутовим коефіцієнтом k_1) до збігу її з другою прямою (з кутовим коефіцієнтом k_2), проти годинникової стрілки.

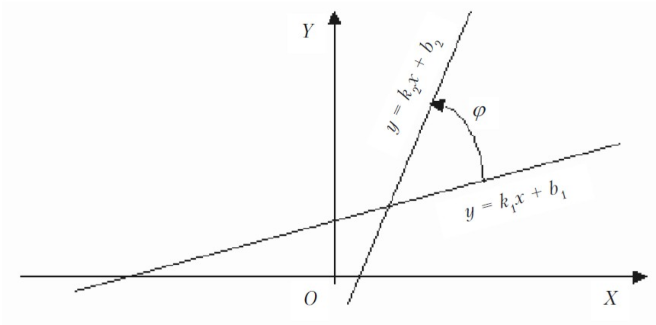


Рис. 2.5.

І цей кут φ обчислюється за формулою:

$$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.(2.6)$$

Необхідно звернути увагу на те, що в чисельнику дробу від кутового коефіцієнта другої прямої віднімається кутовий коефіцієнт першої прямої.

Умова паралельності двох прямих:

$$k_1-k_2.(2.7)$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_1k_2-1,\, або\, k_2=\frac{-1}{k_1}.(2.8)$$

Якщо прямі задані рівняннями в загальному вигляді:

$$A_1x+B_1y+C_1=0\, і\, A_2x+B_2y+C_2=0,$$

то умовою паралельності буде рівність $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, а умовою перпендикулярності є $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Координати точки перетину двох прямих визначаються шляхом розв’язання системи рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},(2.9)$$

де

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},\Delta_x=\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix},\Delta_y=\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

Відхиленням δ заданої точки $M_0(x_0;y_0)$ від заданої прямої $Ax+By+C=0$ називається довжина перпендикуляра, проведеного із цієї точки на пряму, яку беремо зі знаком плюс, якщо задана точка і початок координат лежить по різні сторони від заданої прямої, і зі знаком мінус, якщо вони лежать по одну сторону від прямої.

Відхилення δ обчислюється за формулою:

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Відстанню d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ називається модуль відхилення точки $M_0(x_0;y_0)$ від прямої $Ax+By+C=0$.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}(2.10)$$

До теми «Площина у просторі»

Будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними визначає площину. І навпаки, будь-яка площина визначається рівнянням першого степеня відносно змінних координат, які задають довільну точку площини.

1. *Загальне рівняння площини.*

Загальне рівняння площини має вигляд:

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3.1)$$

де числа *A, B, C* – координати нормального вектора.

Особливі випадки рівняння (3.1):

а) якщо вільний член $D=0$, тоді одержуємо рівняння $Ax+By+Cz=0$ площини, що проходить через початок координат;

б) якщо в рівнянні (3.1) один із коефіцієнтів *A, B* або *C* дорівнює нулю, тоді одержуємо рівняння площин, які паралельні відповідним координатним осям. Зокрема, рівняння площини, що паралельна осі *Ox*:

$By+Cz+D=0,$

рівняння площини, що паралельна осі *Oy*:

$$Ax+Cz+D=0,$$

рівняння площини, що паралельна осі *Oz*:

$$Ax+By+D=0;$$

в) якщо в наведених вище рівняннях до тог ж і вільний член $D=0$, то одержимо рівняння площин, які проходять через відповідні осі координат. Зокрема, рівняння площини, що проходить через вісь *Ox*:

$By+Cz=0;$

рівняння площини, що проходить через вісь *Oy*:

$Ax+Cz=0;$

рівняння площини, що проходить через вісь *Oz*:

$Ax+By=0;$

г) якщо в рівнянні (3.1) два коефіцієнта дорівнюють нулю, тобто: $B = C = 0$, або $A = C = 0$, або $A = B = 0$, тоді одержуємо рівняння площин, які паралельні відповідним координатним площинам, а саме: рівняння площини, що паралельна координатній площині *yOz*:

$$Ax+D=0, \text{ або } \quad x=a;$$

рівняння площини, що паралельна координатній площині *xOz*:

$By+D=0, або\, y=b;$

рівняння площини, що паралельна координатній площині xOy:

$Cz+D=0, або\, z=c;$

д) якщо в рівнянні (3.1) три коефіцієнти *B, C* і *D*, або *A, C* і *D*, або *A, B* і *D* дорівнюють нулю, тоді одержуємо рівняння координатних площин, а саме: рівняння координатної площини *yOz*:

$$Ax=0\,, або\; x=0\,;$$

рівняння координатної площини xOz:

$$By=0\,, або\; y=0\,;$$

рівняння координатної площини xOy:

$$Cz=0\,, або\; z=0.$$

2. *Рівняння площини у відрізках*.

Рівняння площини в відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, (3.2)$$

де a, b і c – величини відрізків, які відтинає площина на осях координат.

3. *Рівняння площини, що проходить через задану точку*

Рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,, (3.3)$$

де A, B, C – координати нормального вектора площини $\overline{N}=\{A; B; C\}$.

4. *Рівняння площини, що проходить через три задані точки*.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. (3.4)$$

Кут між двома площинами, які задані рівняннями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}*\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. (3.5)$$

Умова паралельності двох площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. (3.6)$$

Умова перпендикулярності двох площин має вигляд :

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.7)$$

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *до площини* $Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} (3.8)$$

До теми «Пряма у просторі»

1. *Загальне рівняння прямої.*

Пряма лінія в просторі може бути визначена як лінія перетину двох площин. В такому випадку вона визначається системою двох рівнянь першого ступеню:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2+D_2=0 \end{cases} (4.1)$$

Рівняння (4.1), які розглядаються сумісно, називаються *загальними рівняннями прямої в просторі.*

2. *Канонічне рівняння прямої в просторі*.

Канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, (4.2)$$

де x_1, y_1, z_1 – координати заданої точки M_1, що лежить на прямій, $x, y, z-¿$ поточні координати довільної точки прямої; *l,m,n* – напрямні коефіцієнти, які пропорційні напрямним косинусам прямої.

Від загальних рівнянь прямої (4.1) можна перейти до її канонічного рівняння (4.2). Для цього необхідно:

а) знайти яку-небудь її точку$M_1(x_1;y_1;z_1)$. Для цього потрібно задати числове значення однієї з невідомих координат *x* або *y*, або *z*, і підставити його замість відповідної координати в загальні рівняння прямої. Одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими. Розв'язавши цю систему, визначимо дві інші координати;

б) знайти напрямний вектор $\overline{S}=\{l;m;n\}$ прямої. За вектор $\overline{S}$ беремо вектор, який перпендикулярний до векторів $\overline{N_1}=\{A_1;B_1;C_1\}$і $\overline{N_2}=\{A_2;B_2;C_2\}$, тобто векторний добуток векторів $\overline{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2$,або

$$\bar{S}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\bar{i}+\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\bar{k}.$$

Отже,

$$\bar{l}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},\bar{m}=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},\bar{n}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

3. *Векторне рівняння прямої.*

Векторне рівняння прямої має вигляд: $\bar{r}=\bar{r_1}+\bar{S}t$, де $\bar{r}$ – радіус-вектор довільної точки *M;* $\bar{r_1}$ – радіус –вектор заданої точки $M_1;\bar{S}=\{l;m;n\}$ – напрямний вектор, що паралельний заданій прямій; t – змінний параметр.

4. *Параметричні рівняння* прямої.

$$\begin{cases} x=¿+x_1; \\ y=mt+y_1; \\ z=nt+z_1. \end{cases}$$

де $x_1,y_1,z_1-¿$ координати точки M_1, що лежить на прямій; *x, y, z* – координати довільної точки прямої; *l, m, n* – напрямні коефіцієнти; *t* – змінний параметр.

5. *Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.*

Рівняння прямої, що проходить через задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.(4.3)$$

Кут між двома прямими

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}i\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}*\sqrt{l_2^2+m_2^2+l_2^2}}.(4.4)$$

Умова паралельності двох прямих має вигляд:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих має вигляд :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

До теми «Пряма та площина у просторі»

Кут між прямою $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ *та площиною* $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.(5.1)$$

Умова паралельності прямої і площини має вигляд :

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої та площини має вигляд:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Для визначення *точки перетину* прямої $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ і площини

$Ax + By + Cz + D = 0$ необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \end{cases}$$

Рівняння прямої записуємо в параметричній формі:

$$x = ¿ + x_1; y = mt + y_1; z = nt + z_1.$$

Ці значення *x, y, z* підставимо в рівняння площини. З останнього виразу знаходимо значення *t*:

$$t = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Підставляючи знайдене значення t в рівняння $¿ < + x_1; y = mt + y_1; z = nt + z_1$, знаходимо координати точки перетину.

Умова, при якій *пряма*

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

лежить в площині

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

визначається наступними рівняннями:

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \end{cases} \qquad (5.2)$$

Умова належності двох прямих одній площині. Умовою, при якій дві прямі

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} i \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

лежать в одній площині, є рівність :

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

До теми «Криві другого порядку»

Колом називається геометричне місце точок площини, які рівновіддалені від однієї і тієї ж точки цієї площини (рис. 2.13).

Рівняння кола з центром *C(a; b)* і радіусом *r* має вигляд:

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. (6.1)

У випадку, коли центр кола знаходиться в початку координат, рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

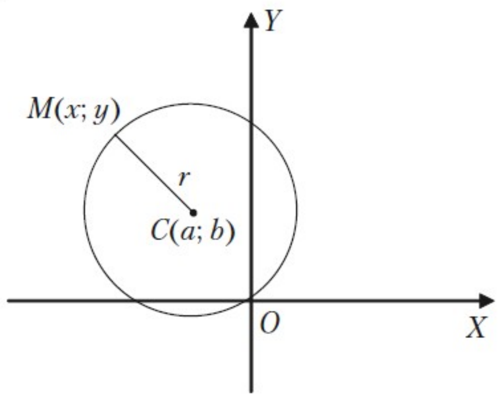


Рис. 2.13.

Коло – рівняння другого порядку. Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

являє собою коло, якщо коефіцієнти при квадратах координат рівні між собою $A = C$, і якщо відсутній член з добутком координат xy, тобто $B = 0$.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох фіксованих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала і дорівнює $2a$ (рис. 2.14). Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\left(b^2=a^2-c^2\right).(6.2)$$

Координати фокусів еліпса$F_1(c;0)\,i\,F_2(-c;0)$. Відстань між фокусами дорівнює *2c*. Точки перетину еліпса з осями координат $A_1(a;0), A_2(-a;0), B_1(0;b), B_2(0;-b)$ називаються *вершинами еліпса*. Відрізки $A_1A_2=2a, B_1B_2=2b$ називаються *осями еліпса*. *Ексцентриситетом* еліпса називається число $e=\frac{c}{a}$< 1.

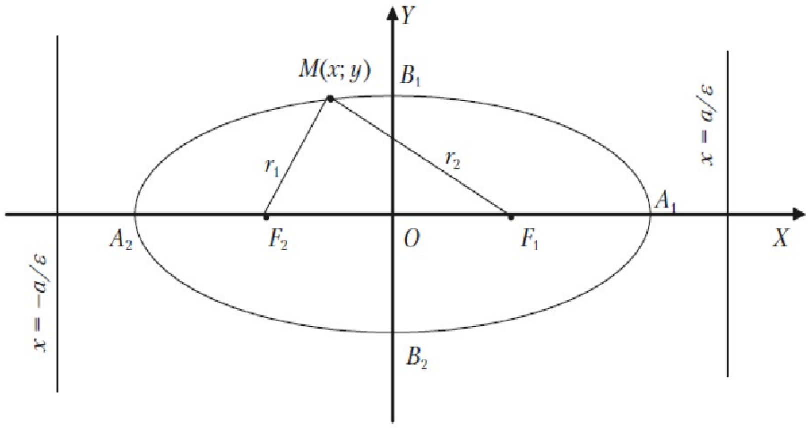


Рис. 2.14.

Відстані r_1 та r_2точки *M(x; y)* еліпса до його фокусів називаються *фокальними радіусами* цієї точки і визначаються за формулами:

$r_1=a-ex, r_2=a+ex.$

Рівняння еліпса с осями, які паралельні координатним осям, має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

де ($x_0; y_0$) – центр еліпса.

Гіперболою називається геометричне місце точок, для кожної із яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок, що називаються *фокусами*, є величина стала і дорівнює *2a* (рис. 2.15).

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

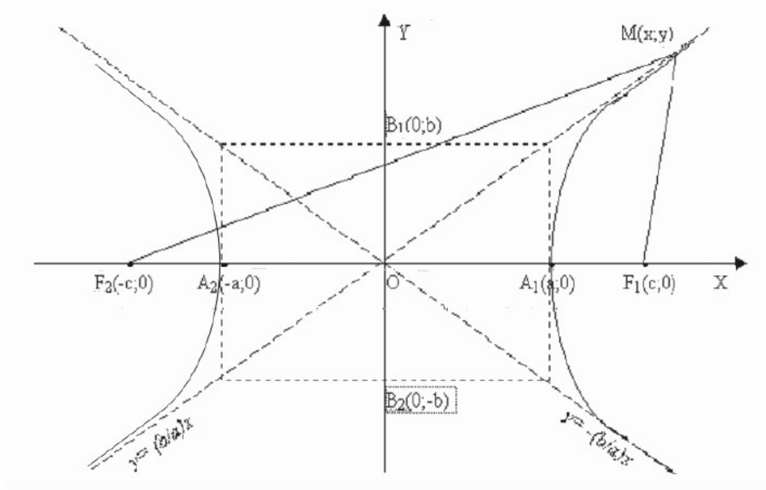


Рис. 2.15.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\left(b^2-c^2-a^2\right).(6.3)$$

Координати фокусів гіперболи $F_1(c;0)\,i\,F_2(-c;0)$. Відстань між фокусами дорівнює *2с.* Точки перетину гіперболи з віссю абсцис $A_1(a;0),A_2(-a;0)$ називається *вершинами*, відрізок $A_1A_2=2a$ називається *дійсною віссю гіперболи*.

Точки $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -\ b)$ називаються *уявними вершинами*, а відрізок $B_1B_2=2b$ – *уявною віссю гіперболи. Ексцентриситетом* гіперболи називається число $e=\frac{c}{a}>1.$

Відстані r_1та r_2 точки *M(x; y)* гіперболи до його фокусів називаються *фокальними радіусами* цієї точки і визначаються за формулами:

$$r_1=ex-a,r_2=ex+a,$$

за умови, що точка *M(x; y)* лежить на правій вітці гіперболи.

Прямі, які визначаються рівняннями:

$$y=\frac{b}{a}x,y=\frac{-b}{a}x$$

називаються *асимптотами гіперболи*.

Якщо висі гіперболи рівні, тобто $a\ =\ b$, то гіпербола називається *рівнобічною*, або *рівносторонньою*. Її рівняння має вигляд:

$x^2 - y^2 = a^2$

Її асимптотами служать бісектриси координатних кутів.

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки – *фокуса* та заданої прямої – *директриси* (рис. 2.16).

Канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2\,px, \tag{6.4}$$

де p – відстань від фокуса до директриси. Вершина параболи знаходиться в початку координат, віссю симетрії є вісь абсцис.

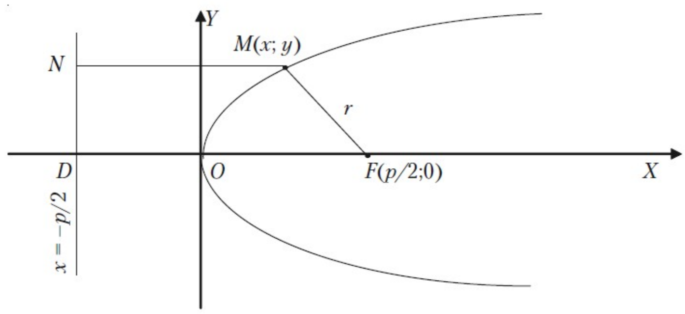


Рис. 2.16.

Координати фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Рівняння директриси *DN* має вигляд:

$x = \frac{-p}{2}$.

Фокальний радіус M(x; y) параболи дорівнює: $r = x + \frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи вважається рівним одиниці, $e = 1$.

Якщо віссю симетрії параболи служить вісь ординат (рис. 2.17), то рівняння параболи має вигляд:

$$x^2 = 2qy\ . \tag{6.5}$$

Рівняння директриси в цьому випадку:

$y = \frac{-q}{2}$.

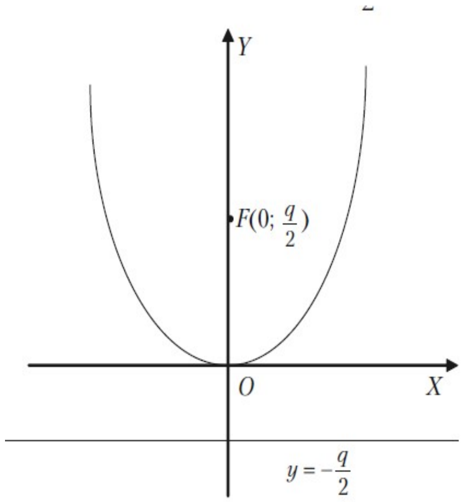


Рис. 2.17.

Рівняння параболи з віссю симетрії, яка паралельна одній із координатних осей, має вигляд:

$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$,

або

$(x-x_0)^2=2q(y-y_0)$,

де $(x_0; y_0)$ — координати вершин параболи.

До теми «Поверхні другого порядку»

Поверхнею другого порядку називають геометричне місце точок простору, декартові координати яких задовольняють рівнянню другого степеня.

Сферою називається геометричне місце точок простору, рівновіддалених від заданої точки – *центра* сфери.

Якщо центр сфери є точка *C(a; b; c)*, а радіус *R*, тоді рівняння сфери буде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (7.1)$$

Якщо центр сфери знаходиться в початку координат *O*(0; 0; 0) і радіус є *R*, тоді рівняння сфери буде:

$x^2+y^2+z^2=R^2$.

Поверхня називається *циліндричною*, якщо вона утворена прямою (*твірна*), паралельною до заданої прямої *a* і яка проходить через задану лінію *l* (*напрямна лінія*). Приклад циліндричної лінії зображено на рис. 2.24.

Якщо твірна циліндричної поверхні паралельна осі *Oz*, а напрямна *l* лежить в площині *xOy* і задана рівнянням:

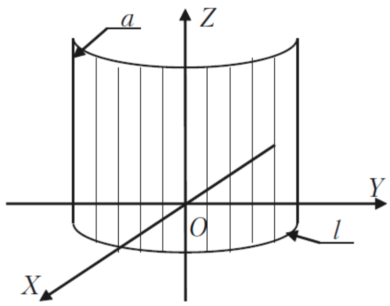


Рис. 2.24.

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ Z=0 \end{cases}$$

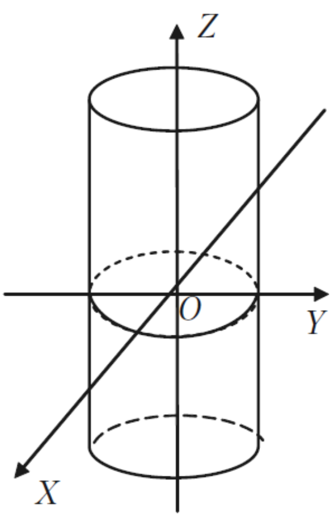


Рис. 2.25.

тоді рівняння циліндричної поверхні буде:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ Z\epsilon(-\infty;\infty) \end{cases}$$

Рівняння *F(x,z)=0* визначає циліндричну поверхню з твірною, яка паралельна осі *Oy,* рівняння $F(x,y)=0$ – циліндричну поверхню з твірною, яка паралельна осі *Ox*.

Циліндри другого порядку

а) *Еліптичним циліндром* називається поверхня (рис.2.25), канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Якщо $a = b$, то маємо круговий циліндр:

$$x^2+y^2=a^2.$$

б) *Гіперболічним циліндром* називається поверхня, рівняння якої має вигляд (рис. 2.26):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

в) *Параболічним циліндром* називається поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд (рис. 2.27):

$$y^2=2px.$$

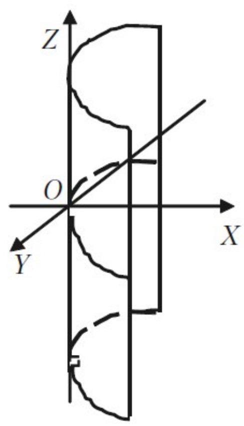


Рис. 2.27.

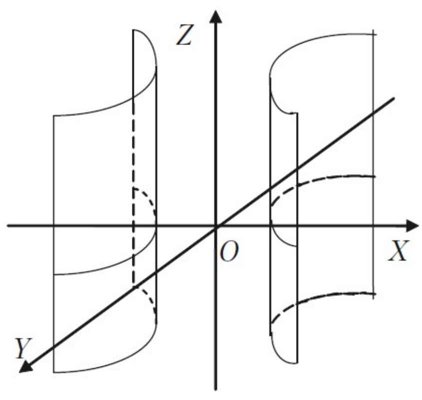


Рис. 2.26.

Еліпсоїдом називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд (рис. 2.28):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. (7.2)$$

Відрізки *a, b, c* називаються *півосями еліпсоїда.*

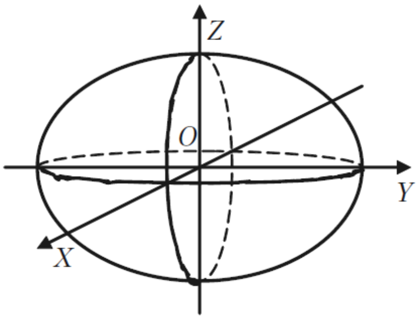


Рис. 2.28.

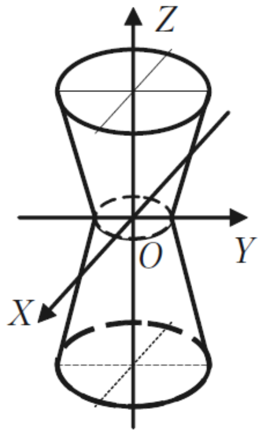


Рис. 2.29.

Гіперболоїди

Однопорожнинним гіперболоїдом (рис. 2.29) називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

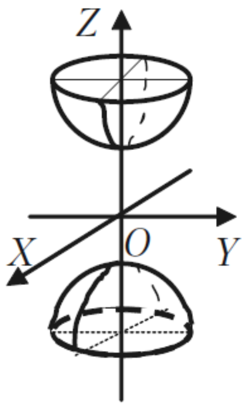


Рис. 2.30.

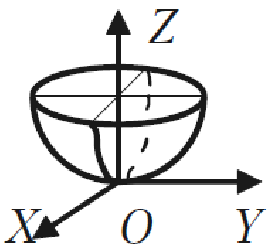


Рис. 2.31.

Двопорожнинним гіперболоїдом (рис. 2.30) називається поверхня, канонічне рівняння якої має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Параболоїди

Еліптичним параболоїдом (рис. 2.31) називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z.$$

Гіперболічним параболоїдом (рис. 2.32) називається поверхня, канонічне (найпростіше) рівняння якої має вигляд:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Конічні поверхні

Конічною поверхнею називається поверхня, яка описана прямою, що проходить через точку – *вершину* конуса – і що перетинає задану лінію – *напрямну конуса*. Рівняння конуса (рис. 2.33) другого порядку має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

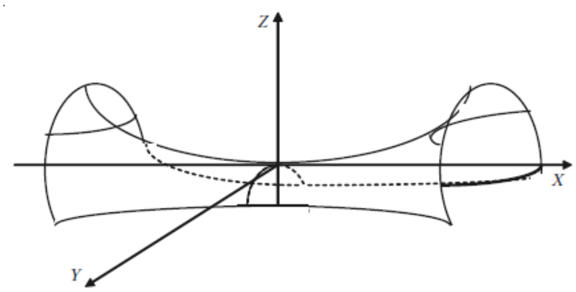


Рис. 2.32.

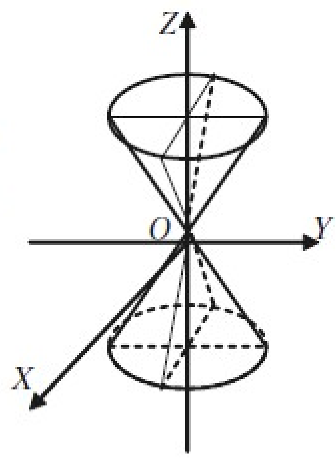


Рис. 2.33.

Поверхні обертання

Нехай в площині *xOz* задана лінія *l*, що має рівняння *F(x, z)* = 0. Тоді щоб одержати рівняння поверхні, що утворена обертанням лінії *l*, що лежить в площині *xOz,* навколо осі *Ox*, треба в рівнянні цієї лінії замінити *z* на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Шукане рівняння поверхні обертання буде

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right) = 0.$$

Аналогічні правила будуть мати місце і по відношенню до поверхонь, які утворюються обертанням плоских ліній навколо інших координатних осей.

РОЗДІЛ 2
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З НАВЧАЛЬНОГО МОДУЛЯ «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

Практичне заняття № 1
з теми «Вектори та дії над ними»

Аудиторні завдання:

Задача 1.1. Знати модуль вектора $\bar{a}=20i+30j-60k$ та його напрямні косинуси.

Розв'язання.

$$a=\sqrt{20^2+30^2+60^2}=70;\cos\alpha=\frac{20}{70}=\frac{2}{7},$$

$$\cos\beta=\frac{30}{70}=\frac{3}{7},\cos\gamma=\frac{-60}{70}=\frac{-6}{7}.$$

Задача 1.2. Знайти вектор $\bar{a}=\overline{AB}$, якщо відомі $A(1;3;2)$ і $B(5;8;-1)$.

Задача 1.3. Знайти скалярний добуток заданих векторів $\bar{a}=3i+4j+7k$ і $\bar{b}=2i-5j+2k$.

Задача 1.4. Дано вектори $\bar{a}=mi+3j+4k$ і $\bar{b}=4i+mj-7k$.При якому значенні m ці вектори будуть перпендикулярними?

Задача 1.5. Знайти $(5a+3b)\cdot(2a-b)$, якщо $a=2,=3$, $a\perp b$.

Задача 1.6. Визначити кут між векторами $\bar{a}=i+2j+3k$ і $\bar{b}=6i+4j-2k$.

Задача 1.7. Знайти векторний добуток векторів $\bar{a}=2i+3j+5k$ і $\bar{b}=i+2j+k$.

Задача 1.8. Обчислити площу паралелограму, побудованого на векторах $\bar{a}=6i+3j-2k$ і $\bar{b}=3i-2j+6k$.

Задача 1.9. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

Задача 1.10. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a}=2i-j-k,\bar{b}=i+3j-k,\bar{c}=i+j+4k$.

Задача 1.11. Показати, що вектори $\bar{a}=2i+5j+7k, \bar{b}=i+j-k, \bar{c}=i+2j+2k$ компланарні.

Задача 1.12. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами *A*(2; 2; 2), *B*(4; 3; 3), *C*(4; 5; 4) і *D*(5; 5; 6).

Практичне заняття № 2
з теми «Метод координат»

Аудиторні завдання:

Задача 2.1. Обчислити відстань між двома точками M_1(4; -5) і M_2(7; -1).

Розв'язання.

За формулою для відстані *d* між двома точками, якщо покласти в ній $x_1 = 4$; $x_2 = 7$; $y_1 = -5$; $y_2 = -1$, отримаємо:

$$d = \sqrt{(7-4)^2+(-1-(-5))^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Задача 2.2. Задана точка *P*(3; 5; 2). Знайти координати точки, яка симетрична точці *P*:

1) відносно початку координат точки *O*;

2) відносно координатної площини *xOz*;

3) відносно осі *Oy*.

Задача 2.3. Перевірити, що один із внутрішніх кутів трикутника з вершинами в точках *A*(3; 5; 3), *B*(2; -1; 4), *C*(0; -2; 1) тупий.

Задача 2.4. На осі *Oz* знайти точку, яка рівновіддалена від двох даних точок *M*(-2; 1; 4) і *N*(3; 0; 1).

Задача 2.5. Знайти координати кінця *B* відрізка, якщо відомі один кінець відрізка $-\text{точка}\, A(-5;-7)\, \text{і середина відрізка} - C(-9;-12)$.

Задача 2.6. Відрізок M_1M_2, який з'єднує точки M_1(2; 5) і M_2(4; 9), потрібно розділити точкою у відношенні $l = 1/3$.

Задача 2.7. Знайти координати кінця відрізка *AB*, якщо відомо, що його початок знаходиться в точці *A*(-1; 2; 4) і точка *M*(2; 0; 2) відтинає від нього третю частину.

Задача 2.8. Відомі дві вершини трикутника: *A*(-3; -2; 2), *B(4;* 1; -2). Знайти третю вершину *C,* якщо відомо, що середина сторони *AC* належить осі *Oy*, а середина сторони *BC* – площині *xOz*.

Практичне заняття № 3
з теми «Пряма на площині»

Аудиторні завдання:

Задача 3.1. Загальне рівняння прямої $3x - 4y + 12 = 0$ записати у вигляді:

1) з кутовим коефіцієнтом;
2) у відрізках;
3) побудувати пряму.

Розв'язання.

1) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = kx + b$. Щоб задане рівняння перетворити до такого вигляду, слід розв’язати його відносно *y:*

$$4y = 3x + 12,\ y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Тут кутовий коефіцієнт прямої дорівнює $k = \frac{3}{4}$, а величина відрізка, який відтинає пряма на осі ординат, $b = 3$.

2) У відрізках рівняння прямої має вигляд: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Щоб отримати величини відрізків, які відтинає пряма на координатних осях, виконаємо перетворення:

$$3x - 4y + 12 = 0,\ 3x - 4y = -12$$

$$\frac{3x}{-12} - \frac{4y}{-12} = \frac{-12}{-12},\ \frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 13.$$

3) Побудова: $a = -4$; $b = 3$ (рис. 2.9).

Задача 3.2. Знайти рівняння прямої, яка відтинає на осі *Oy* відрізок, що дорівнює та утворює з віссю *Ox* кут в 120°.

Задача 3.3. Знайти рівняння сторін трикутника, для якого вершини розташовані в точках $A(1; -1)$, $B(3\ 5)$, $C(-7; 11)$.

Задача 3.4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; 5)$ паралельно прямій $3x - 4y + 15 = 0$.

Задача 3.5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $P_0(5; -1)$ і перпендикулярна до прямої $3x - 7y + 14 = 0$.

Задача 3.6. Знайти проекцію точки $M(-8; 12)$ на пряму, яка проходить через точки $C(2; -3)$ та $D(-5; 1)$.

Задача 3.7. Знайти відстань між двома паралельними прямими: $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y + 13 = 0$.

Задача 3.8. Задано вершини трикутника $A(12; 4)$, $B(0; 5)$, $C(-12; -11)$. Знайти:

1) довжини сторін трикутника;
2) рівняння сторін трикутника;
3) рівняння висоти, яка проведена з вершини B;
4) довжину цієї висоти;
5) рівняння медіани, яка проведена із вершини A;
6) точку перетину висоти, яка проведена із вершини B, та медіани, яка проведена з точки A;
7) рівняння бісектриси кута C;
8) центр ваги трикутника;
9) кут C;
10) площу трикутника.

Практичне заняття № 4
з теми «Пряма та площина у просторі»

Аудиторні завдання:

Задача 4.1. Задано дві точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярна вектору $\overline{M_1M_2}$.

Розв'язання.

Скористаємося рівнянням площини через точку і вектор нормалі. Отримаємо рівняння площини, яка проходить через точку M_1:

$A(x-3)+B(y+1)+C(z-2)=0.$

Вектор нормалі до площини

$$\overline{M_1M_2}=(4-3)\bar{i}+(-2+1)\bar{j}+(-1-2)\bar{k}=\bar{i}-\bar{j}-\overline{3k}=\{1;-1;-3\}.$$

Підставимо координати вектора $\overline{M_1M_2}=\{1;-1;-3\}$ замість A, B, і C в рівняння, що одержали раніше, будемо мати:

$(x-3)-(y+1)-3(z-2)=0\ \textit{або}\ x-y-3z+2=0.$

Це й є шукане рівняння площини.

Задача 4.2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3;0;4)$ і $M_2(5;2;6)$ перпендикулярно до площини $2x+4y+6z-7=0.$

Задача 4.3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку перетину трьох площин $2x-y-z-1=0, x+2z-4=0, x-y=0,$ через початок координат і через точку $P(7;1;2)$.

Задача 4.4. Знайти канонічне рівняння прямої:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=11, \\ 2x+y-3z=1. \end{cases}$$

Задача 4.5. Скласти канонічне рівняння, що проходять через точки $M_1(3;-5;2)\ \textit{та}\ M_2(1;-1;-4)$.

Задача 4.6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2;-3;4)$ і перпендикулярно до прямих $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ і $\frac{x+4}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{3}$.

Задача 4.7. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{2}=t;\ \frac{y+2}{1}=t;\ \frac{z-2}{1}=t;\ x=2t+1;\ y=t-2;\ z=t+2.$

Задача 4.8. Знайти проекцію точки $M(2;-1;3)$ на площину $x+3y-4z-13=0.$

Задача 4.9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;1;-2)$ і пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}$.

Практичне заняття № 5

з теми «Криві другого порядку»

Аудиторні завдання:

Задача 5.1. Скласти рівняння кола з центром в точці $C(2; -3)$ і радіусом, що дорівнює 6.

Розв'язання.

В рівнянні кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ маємо $a = 2$; $b = -3$; $r = 6$. Тоді одержимо:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36.$$

Задача 5.2. Визначити центр і радіус кола, яке задано рівнянням: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Задача 5.3. Скласти рівняння кола, що проходить через точки $M_1(-1; 1)$ і $M_2(1; -3)$, якщо центр його лежить на прямій $2x - y + 1 = 0$.

Задача 5.4. Скласти рівняння кола, що проходить через три задані точки: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; 2)$ і $M_3(5; 5)$.

Задача 5.5. Знайти довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 14$.

Задача 5.6. Велика вісь еліпса дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16. Знайти рівняння еліпса. Чому дорівнює його ексцентриситет?

Задача 5.7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо задана точка $M_1\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гіперболи та рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

Задача 5.8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо кут між її асимптотами дорівнює 120° і відстань між фокусами дорівнює $8\sqrt{3}$.

Задача 5.9. Скласти рівняння параболи, знаючи, що парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через точку $M(1; -4)$ і початок координат.

Практичне заняття № 6
з теми «Поверхні другого порядку»

Аудиторні завдання:

Задача 6.1. Визначити координати центра сфери і її радіус $x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+25=0$.

Розв'язання.

Представимо задане рівняння в вигляді рівняння сфери, для цього:
1) об'єднаємо в групи члени, які містять однойменні координати;
2) виділимо в групах повні квадрати (ми раніше так само визначали координати центра кола і його радіус). Одержимо:

$x^2-6x+y^2+8y+z^2+10z+25=0$;

$x^2-2\times 3x+3^2-3^2+y^2+2\times 4y+4^2-4^2+z^2+25z+5^2-5^2+25=0$;

$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+(z+5)^2-25+25=0$;

$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=25.$

Порівнюючи з рівнянням сфери, маємо a=3, b= - 4, c=-5, $R^2=25$. Отже, центр сфери – точка С(3;-4;-5), радіус R = 5.

Задача 6.2. Еліпс з півосями 5 та 3 обертається навколо своєї великої осі, яка співпадає з початком координат. Скласти рівняння поверхні, що описує еліпс при обертанні.

Задача 6.3. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат і напрямною:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=c. \end{cases}$$

Задача 6.4. Які поверхні визначаються рівняннями:

1)$x^2+z^2=16$; 2)$\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$; 3) $x=2z^2$;4) $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{7}=1.$

Задача 6.5. Гіпербола з півосями 3 і 4 обертається навколо своєї уявної осі, яка співпадає з віссю *Oz*. Центр гіперболи співпадає з початком координат. Скласти рівняння поверхні, яку одержуємо при обертанні гіперболи.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було здійснено аналіз навчально-методичної літератури з «Аналітичної геометрії» та складено на основі його списків літературних джерел (основної, додаткової та інтернет-ресурсів), які можуть бути корисними при вивченні тем дисциплін.

Також під час виконання роботи було розроблено плани-конспекти лекційних та практичних занять з курсу, які містять стислі теоретичні відомості з навчального матеріалу, а також приклади розв'язування завдань з тем курсу, що можуть бути запропоновані під час проведення практичних занять або для забезпечення дистанційного навчання студентів. Окрім наведених прикладів для організації аудиторної роботи студентів, розроблено системи вправ з відповідних тем курсу для організації самостійної роботи студентів в аудиторії та в позааудиторний час.

В роботі наведено розробку методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять з аналітичної геометрії, а також розробку опорних блок-схем, які містять теоретичний матеріал з питань, що відносяться до навчального модуля «Аналітична геометрія», та є зручними для підготовки студентів до складання заліку або для організації самостійної роботи по відпрацюванню навичок розв'язування задач.

Структурні компоненти роботи повністю відповідають структурним компонентам навчально-методичного комплексу дисципліни, нормативні вимоги до якого визначені для навчально-методичних комплексів з дисциплін кафедр Херсонського державного університету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна

1.Вища математика: Навчальний посібник: у 2-х ч. / К.Г.Валєєв, І.А.Джаладова: — К.: КНЕУ, 2001, 2003.

2. Сборник задач по курсу математического анализа., Г.Н.Берман, – М.: Наука, 1985.

3. Практические занятия по высшей математике, часть I–V. / И.А.Каплан. – Х.: Издательство Харьковского университета, 1972.

4. Опорные схемы по высшей математике: учеб. пособие / Н.С. Знаенко. – Ульяновск: УВАУ ГА(И), 2011. – 90 с.

5. Клетеник А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. / А.С. Клетеник. – М.: Наука, 1975. – 214 с.

Додаткова

1. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I .— 4-е изд., испр. и доп. — М.: Высш. шк., 1986.— 304 с., ил.

2. Руководство к решению задач по аналитической геометрии. / П.И.Рубак, Е.Е.Гармаш. — М.: Высшая школа, 1972.

3. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. / А.Д.Тевяшев, О.Г.Литвин. – Х.: Рубікон, 1999.

4. Руководство к решению задач по математическому анализу. / Г.И.Запорожець. – М.: Высшая школа, 1966.

5. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

Інтернет-ресурси

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Аналітична_геометрія
2. http://matan.kpi.ua/public/files/Алгебра_геометрия_лекции.pdf
3. https://ru.onlinemschool.com/math/library/analytic_geometry/
4. http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/AGLA.pdf
5. https://nmetau.edu.ua/file/kaplmath_17942.pdf

ДОДАТКИ

Додаток А

Плани практичних занять

Практичне заняття № 1

з теми «Вектори та дії над ними»

Аудиторні завдання:

Задача 1.1. Знати довжину вектора $\bar{a}=20i+30j-60k$ та його напрямні косинуси.

Розв'язання.

$a=\sqrt{20^2+30^2+60^2}=70;\cos\alpha=\frac{20}{70}=\frac{2}{7},$

$\cos\beta=\frac{30}{70}=\frac{3}{7},\cos\gamma=\frac{-60}{70}=\frac{-6}{7}.$

Задача 1.2. Знайти вектор $\bar{a}=\overline{AB},$ якщо A(1;3;2) і B(5;8;-1).

Розв'язання.

Проекціями вектора $\overline{AB}$ на осі координат є різниці відповідних координат точок В і А: $a_x=5-1=4,a_y=8-3=5,a_z=-1-2=-3.$

Отже, $\overline{AB}=4i+5j-3k.$

Задача 1.3. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a}=3i+4j+7k$ і $\bar{b}=2i-5j+2k.$

Розв'язання.

Знаходимо $a\cdot b=3\cdot2+4\cdot(-5)+7\cdot2=0.$Так як $a\cdot b=0 i\, a\neq0, b\neq0, mo\, a\perp b.$

Задача 1.4. Дано вектори $\bar{a}=mi+3j+4k\, i\, \bar{b}=4i+mj-7k.$При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання.

Знаходимо скалярний добуток цих векторів: $a\cdot b=4m+3m-28;$ так як $a\perp b$, то $a\cdot b=0.Звідси\,7m-28=0,$ тобто $m=4.$

Задача 1.5. Знайти ($5a+3b)\cdot(2a-b)$, якщо $a=2,=3,$ $a\perp b.$

Розв'язання.

$(5a+3b)\cdot(2a-b)=10a^2-5a\cdot b+6a\cdot b-3b^2=10a^2-3b^2=40-27=13.$

Задача 1.6. Визначити кут між векторами $\bar{a}=i+2j+3k$ і $\bar{b}=6i+4j-2k$.

Розв'язання.

Так як $a\cdot b=ab\cos\varphi$, то $\cos\varphi=\dfrac{a\cdot b}{ab}$. Отримаємо $a\cdot b=1\cdot 6+2\cdot 4+3\cdot(-2)=8$,

$a=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}, b=\sqrt{36+16+4}=2\sqrt{14}$.

Отже, $\cos\varphi=\dfrac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}=\dfrac{2}{7}$ і $\varphi=\arccos\dfrac{2}{7}$.

Задача 1.7. Знайти векторний добуток векторів $\bar{a}=2i+3j+5k$ і $\bar{b}=i+2j+k$.

Розв'язання.

Маємо:

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

тобто, $a\times b=-7i+3j+k$.

Задача 1.8. Обчислити площу паралелограму, побудованого на векторах $\bar{a}=6i+3j-2k$ і $\bar{b}=3i-2j+6k$.

Розв'язання.

Знаходимо векторний добуток a на b:

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=14i-42j-21k.$$

Так як модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі побудованого на них паралелограма, то

$$S=|a\times b|=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49(\text{кв.од.}).$$

Задача 1.9. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

Розв'язання.

Знаходимо вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$:

$\overline{AB}=(2-1)i+(3-1)j+(4-1)k=i+2j+3k$,

$\overline{AC}=(4-1)i+(3-1)j+(2-1)k=3i+2j+k$.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, тому знаходимо векторний добуток цих векторів:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4i+8j-4k.$$

Отже

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+16}=\sqrt{24}\,(кв.\,од.)$$

Задача 1.10. Знайти мішаний добуток векторів $\bar{a}=2i-j-k,\bar{b}=i+3j-k,\bar{c}=i+j+4k.$

Розв'язання.

$$abc=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=26+5+2=33.$$

Задача 1.11. Показати, що вектори $\bar{a}=2i+5j+7k,\bar{b}=i+j-k,\bar{c}=i+2j+2k$ компланарні.

Розв'язання.

Знаходимо змішаний добуток векторів:

$$abc=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=8-15+7=0.$$

Так як $abc=0$,то задані вектори компланарні.

Задача 1.12. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ і $D(5; 5; 6)$.

Розв'язання.

Знайдемо вектори $\overline{AB},\overline{AC}\,i\,\overline{AD}$, які співпадають з ребрами піраміди, і сходяться у вершині А: $\overline{AB}=2i+j+k,\overline{AC}=2i+3j+2k,\overline{AD}=3i+3j+4k.$

Знаходимо змішаний добуток цих векторів:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot6-1\cdot2-1\cdot3=7.$$

Так як об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}\, i\, \overline{AD}$, то $V = \frac{7}{6}(куб.од.)$.

Задачі для самостійного розв'язування:

1. Знайти проекції вектора на вісі координат, якщо a=$\overline{AB}+\overline{CD}$, A(0;0;1), B(3;2;1),C(4;6;5) і D(1;6;3).

2. Знайти довжину вектора a=$mi+(m+1)j+m(m+1)k$.

3. Обчислити модуль вектора a=$i+2j+k-\left(\frac{1}{5}\right)(4i+8j+3k)$ і знайти його напрямляючі косинуси.

4. Дано вектор a=4$i-2j+3k$. Знайти вектор bякщо b=$a, b_y = a_y\, i\, b_x = 0$.

5. Знайти скалярний добуток векторів 3a-2b і 5a-6b, якщо *a=4,* b=6 і кут між векторами a і b дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

6. Визначити кут між векторами a=3i+4j+5k і b=4i+5j-3k.

7. При якому значенні *m* вектори a= *m*i+j і b=3i-3j+4k перпендикулярні?

8. Знайти скалярний добуток векторів 2a + 3b + 4c і 5a + 6b + 7c, якщо a=1, b=2, c=3, a $(\widehat{a,b})=(\widehat{a,c})=¿=\frac{\pi}{3}$.

9. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний векторам $\varphi = \widehat{F,s} = \frac{\pi}{6}$.

10. Знайти векторний добуток векторів a=2i+5j+k і b=i+2j-3k.

11. Обчислити площу трикутника з вершинами A(1;2;2), B(4;0;3) і C (0;1;0).

12. Показати, що вектори a=7i-3j+2k, b=3i-7j+8k, c=i+j+k компланарні.

13. Обчислити об’єм трикутної піраміди з вершинами A(0;0;1), B(2;3;5), C(6;2;3) і D(3;7;2). Знайти довжину висоти піраміди, опущеної на грань BCD.

14. Показати, що точки A(5;7;-2), B(3;1;-1), C(9;4;-4) і D(1;5;0) лежать в одній площині.

Практичне заняття № 2
з теми «Метод координат»

Аудиторні завдання:

Задача 2.1. Знайти відстань між точками $M_1(4; -5)$ і $M_2(7; -1)$.

Розв'язання.

За формулою для відстані d між двома точками, якщо взяти в ній $x_1 = 4$; $x_2 = 7$; $y_1 = -5$; $y_2 = -1$, одержуємо:

$$d = \sqrt{(7-4)^2+(-1-(-5))^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Задача 2.2. Задана точка $P(3; 5; 2)$. Знайти координати точки, що симетрична з точкою P:

1) відносно початку координат;

2) відносно площини xOz;

3) відносно осі Oy.

Розв'язання.

1) Точка P лежить в I октанті, симетрична їй точка відносно початку координат P_1 буде знаходитися в VII октанті. Її координати – $P_1(-3; -5; -2)$.

2) Точка P_2, симетрична точці P відносно площини xOz, буде знаходитися в IV октанті, отже, її координати $P_2(3; -5; 2)$.

3) Точка P_3, симетрична точці P відносно осі Oy, буде знаходитися в VI октанті, отже, її координати $P_3(-3; 5; -2)$.

Задача 2.3. Показати, що один із внутрішніх кутів трикутника з вершинами $A(3; 5; 3)$, $B(2; -1; 4)$, $C(0; -2; 1)$ тупий.

Розв'язання.

Знайдемо довжини сторін трикутника за формулою відстані між двома точками:

$$d=\sqrt{(x¿¿2-x_1)^2+(y¿¿2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2¿¿}.$$

$AB=\sqrt{(2-3)^2+(-1-5)^2+(3-4)^2}=\sqrt{1+36+1}=\sqrt{38}$;

$AC=\sqrt{¿¿}$;

$BC=\sqrt{(0-2)^2+(-2+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$.

Розглянемо співвідношення між числами, що виражають квадрати сторін даного трикутника:

$$38 + 14 = 52,\ 62 > 52,\ 62 > 38 + 14,$$

Тобто $AC^2 > AB^2 + BC^2$. Отже, сторона AC лежить проти тупого кута. Кут B – тупий.

Задача 2.4. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від двох точок $M(-2; 1; 4)$ і $N(3; 0; 1)$.

Розв'язання.

Точка, що лежить на осі Oz, має координати $P(0; 0; z)$. Знайдемо відстані MP і NP:

$MP=\sqrt{(0+2)^2+(0-1)^2+(z-4)^2}=\sqrt{4+1+(z-4)^2}=\sqrt{5+z^2-8z+16}=\sqrt{z^2-8z+21}$;

$NP=\sqrt{(0-3)^2+(0-0)^2+(z-1)^2}=\sqrt{9+0+(z-1)^2}=\sqrt{9+z^2-2z+1}=\sqrt{z^2-2z+10}$.

Згідно з умовою, що $MP = PN$, одержуємо:

$$\sqrt{z^2-8z+21}=\sqrt{z^2-2z+10}.$$

Розв'язавши одержане рівняння, знаходимо аплікату точки P:

$$z^2 - 8z + 21 = z^2 - 2z + 10;$$

$$-6z = -11;\ z = 11/6.$$

$P(0; 0; 11/6)$.

Задача 2.5. Знайти координати кінця B відрізка, якщо один кінець відрізка $-\,точка\,A(-5;-7),\,а\,середина\,відрізка-C(-9;-12)$.

Розв'язання.

За формулами середини відрізка

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\quad,\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

координати середини відрізка позначено через x і y. За умовою задачі $x=-9$; $y=-12$.Координати одного кінця відрізка точки A в цих формулах: x_1 = -5; y_1 = -7. Координати відрізка точки B (другого кінця відрізка) – величини невідомі, позначені через x_2 і y_2.

Тоді для визначення цих невідомих одержуємо два рівняння:

$$-9=\frac{-5+x_2}{2}, -12=\frac{-7+y_2}{2},$$

Звідси: $-18=-5+x_2 \, i \, x_2=-13$;

$$-24=-7+y_2 \, i \, y_2=-17.$$

B(-13;-17)

Задача 2.6. Відрізок M_1M_2, що з'єднує точки M_1(2; 5) і M_2(4; 9), розділити в відношенні l = 1/3.

Розв'язання.

Умова задачі вимагає знайти координати точки P, що ділить відрізок M_1M_2 у відношенні l = 1/3. Використовуючи формули поділу відрізка у заданому відношенні, точку M_1(2; 5) будемо вважати початком відрізка, а точку M_2(4; 9) – його кінцем. Тоді x і y – координати точки P, які ми шукаємо, x_1 і y_1 – координати точки M_1, x_2 і y_2 – координати точки M_2; l = 1/3. Отже, у нас x_1 = 2; x_2 = 4; y_1 = 5; y_2 = 9. Маємо за формулами:

$$x=\frac{2+\frac{1}{3}4}{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow x=\frac{2+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow x=\frac{5}{2} \; ;$$

$$y=\frac{2+\frac{1}{3}9}{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow y=\frac{5+3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow y=6 \; .$$

Точка P має координати P(5/2; 6).

Задача 2.7. Визначити координати кінця відрізка AB, якщо відомо, що його початок в точці A(-1; 2; 4) і точка M(2; 0; 2) відтинає від нього третю частину.

Розв'язання.

Точка M відтинає від відрізка AB третю частину його довжини, ділить його в відношенні $l = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$.

Використаємо формули поділу відрізка в заданому відношенні:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, z_M = \frac{z_A + z_B}{1+\lambda}.$$

Підставивши в ці формули координати точок *A* і *M*:

$$2 = \frac{-1+\frac{1}{2}X_B}{1+\frac{1}{2}}; 0 = \frac{2+\frac{1}{2}y_в}{1+\frac{1}{2}}; 2 = \frac{4+\frac{1}{2}Z_B}{1+\frac{1}{2}}$$

та розв'язавши одержані рівняння, знайдемо:

$$2\frac{2}{3} = -1 + \frac{1}{2}x_B, \frac{1}{2}x_B = 4; x_B = 8;$$

$$0\frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{2}y_B; \frac{1}{2}y_B = -2; y_B = -4;$$

$$2\frac{3}{2} = 4 + \frac{1}{2}z_B; \frac{1}{2}z_B = -1; z_B = -2.$$

B(8;-4;-2).

Задача 2.8. Задано дві вершини трикутника: *A*(-3; -2; 2), *B(4;* 1; -2). Знайти третю вершину *C,* знаючи, що середина сторони *AC* лежить на осі *Oy*, а середина сторони *BC* – на площині *xOz*.

Розв'язання.

Позначимо середину сторони *AC* буквою *M*. Так як вона лежить на осі *Oy*, то її координати $M(0; y_M; 0)$. Середину сторони *BC* позначимо як *N*, яка лежить на площині *xOz,* $N(x_N; 0; z_N)$. Скориставшись формулами поділу відрізка навпіл, одержимо:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}; 0 = \frac{-3 + x_c}{2}; x_c = 3;$$

$$z_M = \frac{z_A + Z_C}{2}; 0 = \frac{2 + z_C}{2}; Z_c = -2;$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2}; 0 = \frac{1 + y_C}{2}; y_c = -1.$$

C(3; -1; 2).

Задачі для самостійного розв'язування:

1. Встановити, які координати має точка, симетрична точці (-3; 5):

а) відносно осі *Ox*;

b) відносно осі Oy;

c) відносно початку координат;

d) відносно бісектриси I та III координатних кутів;

e) відносно бісектриси II та IV координатних кутів.

2. На якій відстані від початку координат знаходяться точки: $M(3; 4)$, $N(12; -5)$; $P(7; -24)$; $Q(-6; -8)$?

3. Знайдіть периметр трикутника, якщо координати його вершин $A(-3; -6)$; $B(4; -1)$; $C(5; -2)$.

4. Визначити вид трикутника якщо координати його вершин $A(2; -5)$; $B(-7; -4)$; $C(-1; 6)$.

5. Точка, рухаючись рівномірно та прямолінійно, за 4 сек перемістилась із положення $A(6; -7)$ в положення $B(-4; 5)$. Де знаходилась точка в момент часу 2 сек.?

6. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $M_1(1; -3; 7)$ і $M_2(5; 7; -5)$.

7. Задано три послідовні вершини паралелограма: $A(1; 1)$; $B(2; 2)$; $C(3; -1)$. Знайти його четверту вершину D.

8. Задано дві вершини $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину його діагоналей $M(4; -1; 7)$. Визначити координати двох інших вершин цього паралелограма.

9. Задано вершини трикутника $A(3; 2; -1)$; $B(5; -4; 7)$ і $C(-1; 1; 2)$. Обчислити довжину його медіани, що проведена із вершини C.

10. Задано вершини трикутника $A(1; -1; -3)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

Практичне заняття № 3

з теми «Пряма на площині»

Аудиторні завдання:

Задача 3.1. Загальне рівняння прямої $3x - 4y + 12 = 0$ подати у вигляді:

4) з кутовим коефіцієнтом;

5) у відрізках;

6) побудувати пряму.

Розв'язання.

1) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = kx + b$. Щоб задане рівняння перетворити до такого вигляду, розв'яжемо його відносно *y:*

$$4y = 3x + 12, y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Бачимо, що тут кутовий коефіцієнт прямої $k = \frac{3}{4}$, а величина відрізка, що відтинає пряма на осі ординат $b = 3$.

2) У відрізках на осях рівняння прямої має вигляд: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.Щоб одержати величини відрізків, що відтинає пряма на координатних осях, виконаємо перетворення:

$$3x - 4y + 12 = 0, 3x - 4y = -12$$

$$\frac{3x}{-12}-\frac{4y}{-12}=\frac{-12}{-12}, \frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=13.$$

3) Побудова: $a = -4$; $b = 3$ (рис. 2.9).

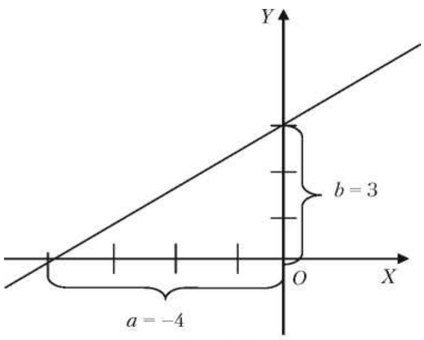


Рис. 2.9.

Задача 3.2. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осі *Oy* відрізок, рівний 4 (одиниць масштабу) та утворює з віссю *Ox* кут в 120°.

Розв'язання.

Скористаємося рівнянням прямої з заданим кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$. Згідно з умовою

$$b = 4, k = \text{tg } 120^o = \text{tg } (180^o - 60^o) = -\text{tg } 60^o = -3, k = -3.$$

Шукане рівняння прямої буде:

$$y = -3x + 4 \text{ або } 3x + y - 4 = 0.$$

Задача 3.3. Знайти рівняння сторін трикутника, вершини якого *A*(1; -1), *B(3 5), C*(-7; 11).

Розв'язання.

Скористаємося формулою рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_{2-¿x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.¿}$$

Для знаходження рівняння сторони *AB* беремо *A*(1; -1) та *B*(3; 5). Нехай

$$x_1 = 1,\ y_1 = -1;$$

$$x_2 = 3,\ y_2 = 5;$$

Підставимо в рівняння:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+1}{5+1}\ або\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6}\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x\text{-}1)=y+1 \Rightarrow 3x\text{-}3=y+1 \Rightarrow 3x-y-4=0 \quad \text{(AB)}.$$

Для знаходження рівняння сторони *AC* беремо *A*(1; -1) та *C*(-7; 11).

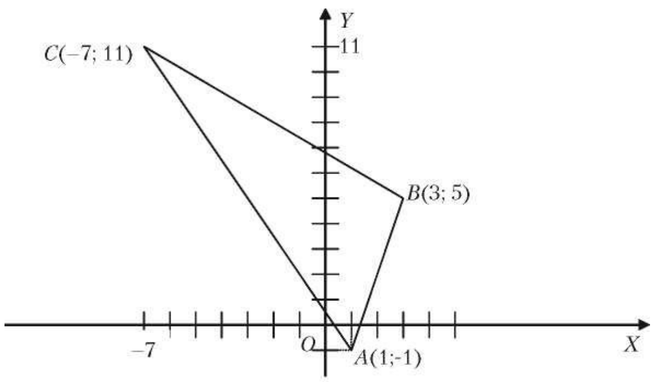


Рис. 2.10.

Нехай $x_1=1, y_1=-1; x_1=-7, x_2=11$. Підставимо в рівняння:

$$\frac{x-1}{-7-1}=\frac{y+1}{11+1}\ \text{або}\ \frac{x-1}{-8}=\frac{y+1}{12}\Rightarrow\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x - 1) = -2(y + 1) \Rightarrow 3x - 3 = -2y - 2 \Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0\ (AC).$$

Для знаходження рівняння сторони *BC* беремо *B*(3; 5) та *C*(-7; 11).

Нехай $x_1=3, y_1=5; x_2=¿\text{-}7, y_2=11$.Підставимо в рівняння:

$$\frac{x-3}{-7-3}=\frac{y-5}{11-5}\Rightarrow\frac{x-3}{-10}=\frac{y-5}{6}\Rightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y-5}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x - 3) = -5(y - 5) \Rightarrow 3x - 9 = -5y + 25 \Rightarrow 3x + 5y - 34 = 0\ (BC).$$

Задача 3.4. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; 5)$ паралельно прямій $3x - 4y + 15 = 0$.

Розв'язання.

Виходячи з того, що шукана пряма паралельна заданій, її кутовий коефіцієнт дорівнює кутовому коефіцієнту заданої прямої, тобто $k_1 = k_2 = k$.

$$k_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = k_2 = k.$$

Складемо рівняння шуканої прямої за формулою:

$$y - y_0 = k(x - x_0);\ y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2);$$

$$4y - 20 = 3x - 6;\ 3x - 4y + 14 = 0.$$

Шукане рівняння прямої $3x - 4y + 14 = 0$.

Задача 3.5. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $P_0(5; -1)$ і перпендикулярна до прямої $3x - 7y + 14 = 0$.

Розв'язання.

Так як шукана пряма перпендикулярна заданій, то добуток кутових коефіцієнтів обох прямих має дорівнювати -1, тобто $k_1k_2 = -1$. Таким чином, кутовий коефіцієнт шуканої прямої має бути обернений за абсолютною величиною і протилежний за знаком кутовому коефіцієнту заданої прямої: $k_2 = \frac{-1}{k_1}$. Знайдемо кутовий коефіцієнт заданої прямої:

$$k_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}.$$

За умовою перпендикулярності:

$$k_2 = \frac{-1}{k_1} = \frac{-1}{3} = \frac{-7}{3}.$$

Знаходимо рівняння шуканої прямої за формулою:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

$$y + 1 = \frac{-7}{3}(x - 5),\ 3(y + 1) = -7(x - 5),$$

$$3y + 3 = -7x + 35,\ 7x + 3y - 32 = 0.$$

Шукане рівняння прямої: $7x + 3y - 32 = 0$.

Задача 3.6. Знайти проекцію точки *M(-8; 12)* на пряму, що проходить через точки *C(2;* -3) та *D*(-5; 1).

Розв'язання.

Рівняння прямої *CD* знайдемо за формулою рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \frac{x-2}{-5-2}=\frac{y+3}{1+3},$$
$$4(x-2)=-7(y+3), 4x-8=-7y-21,$$
$$4x+7y+13=0.$$

Проекцією точки *M* на пряму *CD* буде основа перпендикуляру, який опущений із точки *M* на пряму *CD*. Рівняння перпендикуляра *MN* можна знайти за формулою $y - y_0 = k(x - x_0)$, так як координати точки *M* задано, а кутовий коефіцієнт, згідно умові перпендикулярності дорівнює:

$$k_2=\frac{-1}{k_1}=\frac{-1}{-4}=\frac{7}{4}; y-12=\frac{-7}{4}(x+8);$$

$$7x - 4y + 104 = 0.$$

Одержали рівняння $7x - 4y + 104 = 0$ перпендикуляра *MN*.

Розв'язавши систему рівнянь *MN* і *CD* знайдемо проекцію точки *M* на пряму *CD*.

$$\begin{cases} 7x-4y+104=0, \\ 4x+7y+13=0. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=49+16=65; \ \Delta_x=\begin{vmatrix} -104 & -4 \\ -13 & 7 \end{vmatrix}=-728-52=-780;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 7 & -104 \\ 4 & -13 \end{vmatrix}=-91+416=325.$$

Використовуючи формули Крамера знаходимо *x* та *y*:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-780}{65}=-12; y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{325}{65}=5.$$

Шукана точка *N*(-12; 5).

Задача 3.7. Знайти відстань між двома паралельними прямими: $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y + 13 = 0$.

Розв'язання.

Шукану відстань ми знайдемо як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої. Візьмемо на першій прямій довільну точку, наприклад точку з абсцисою $x = -4$, її ордината буде:

$$3(-4) + 4y - 12 = 0; 4y = 24; y = 6.$$

Отже, на першій прямій вибрана точка $M_0(-4;\ 6)$. Знайдемо відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до заданої другої прямої $Ax + By + C = 0$ за формулою:

$$d=\frac{\left|A x_0+B y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$d=\frac{\left|3(-4)+4*6+13\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\left|-12+24+13\right|}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5(\textit{лін. од.})$$

Задача 3.8. Задано вершини трикутника $A(12;\ 4)$, $B(0;\ 5)$, $C(-12;\ -11)$. Знайти:

11) довжини сторін;

12) рівняння сторін;

13) рівняння висоти, що проведена з вершини B;

14) довжину цієї висоти;

15) рівняння медіани, що проведена із вершини A;

16) точку перетину висоти, що проведена із вершини B, та медіани, що проведена з точки A;

17) рівняння бісектриси кута C;

18) центр ваги трикутника;

19) кут C;

20) площу трикутника.

Розв'язання.

1) Довжини сторін визначимо за допомогою формули відстані між двома точками:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$d_{AB}=\sqrt{(0-12)^2+(5+4)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15;$$

$$d_{BC}=\sqrt{(-12-0)^2+(-11-5)^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20;$$

$$d_{AC}=\sqrt{(-12-12)^2+(-11-5)^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25.$$

2) Кожна сторона трикутника проходить через дві точки, через це для знаходження рівнянь сторін використаємо формулу:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Знайдемо рівняння сторін:

$$(AB)\frac{x-12}{0-12}=\frac{y+4}{5+4}\Rightarrow\frac{x-12}{-12}=\frac{y+4}{9}\Rightarrow\frac{x-12}{-4}=\frac{y+4}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-36=-4y-16\Rightarrow 3x+4y-20=0 \quad (AB);$$

$$(BC)\ \frac{x-0}{-12-0}=\frac{y-5}{-11-5}\Rightarrow\frac{x}{-12}=\frac{y-5}{-16}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y-5}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x=3y-15\Rightarrow 4x-3y+15=0 \quad (BC);$$

$$(AC)\ \frac{x-12}{-12-12}=\frac{y+4}{-11+4}\Rightarrow\frac{x-12}{-24}=\frac{y+4}{-7}\Rightarrow 7(x-12)=24(y+4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x-84=24y+96\Rightarrow 7x-24y-180=0 \quad (AC).$$

2) Щоб скласти рівняння висоти, яка проведена із точки *B* на сторону *AC*, необхідно знати кутовий коефіцієнт висоти. Спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт сторони *AC*

$$k_1=\frac{-A}{B}=\frac{-7}{-24}=\frac{7}{24}.$$

З умови перпендикулярності двох прямих $k_1\cdot k_2=-1$ знайдемо кутовий коефіцієнт висоти *BD*:

$$k_2=\frac{-1}{k_1}=\frac{-1}{7}=\frac{-24}{7}.$$

Складемо рівняння висоти, скориставшись формулою:

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

$$y-5=\frac{-24}{7}(x-0), 7y-35=-24x,$$

$$24x+7y-35=0(BD).$$

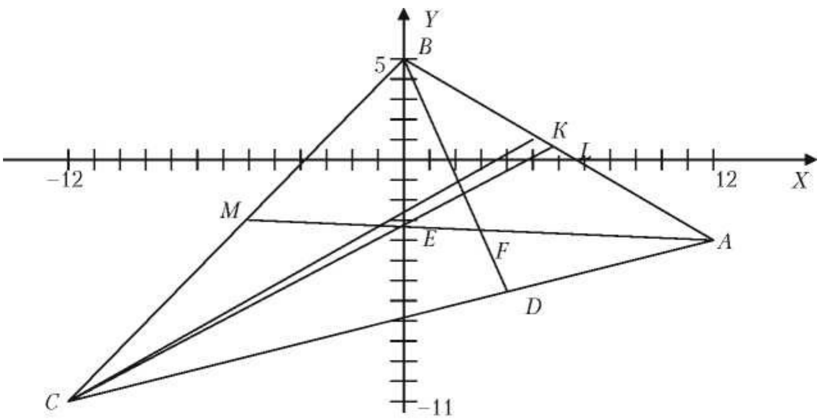


Рис. 2.12.

4) Для знаходження довжини *BD* використаємо формулу:

$d=\frac{|A x_0+B y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, за допомогою якої знайдемо відстань від точки B(5; 0) до прямої AC

$$7x-24y-180=0 \ (AC)$$

$$d_{BD}=\frac{|7\cdot 0-24\cdot 5-180|}{\sqrt{7^{2+¿(-24)^2}}=\frac{|-300|}{\sqrt{49+576}}=\frac{300}{25}=12.¿}$$

5) Для знаходження рівняння медіани AM потрібно знайти координати точки M.

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{0+(-12)}{2}=-6;$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5+(-11)}{2}=-3.$$

Координати точки M(-6; -3).

Рівняння медіани AM знаходиться як рівняння прямої, що проходить через дві точки A(12; -4) та M(-6; -3).

$$\frac{x-12}{-6-12}=\frac{y+4}{-3+4}\Rightarrow\frac{x-12}{-18}=\frac{y+4}{1}\Rightarrow x-12=-18(y+4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-12=-18y-72\Rightarrow x+18y+60=0 \qquad \text{(AM)}.$$

6) Щоб знайти координати точки F перетину висоти BD та медіани AM, необхідно розв'язати систему рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases}24x+7y-35=0,\\ x+18y+60=0.\end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix}24 & 7\\ 1 & 18\end{vmatrix}=432-7=425;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}35 & 7\\ -60 & 18\end{vmatrix}=630+420=1050;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}24 & 7\\ 1 & -60\end{vmatrix}=-1440-35=-1475;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{1050}{425}\approx 2,47;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-1475}{425}\approx 3,47.$$

Шукана точка перетину F(2,47; -3,47).

7) Для знаходження рівняння бісектриси внутрішнього кута C необхідно знайти координати точки K. Згідно властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника, яка ділить сторону AB в відношенні λ= $\frac{AK}{KB}=\frac{AC}{CB}$, знаходимо $\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{15}{20}=\frac{5}{4}$. Знаходимо координати точки K за

формулами:

$$x_k=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{12+\frac{4}{5}\cdot 0}{1+\frac{4}{5}}=\frac{12}{\frac{9}{4}}=\frac{12\cdot 4}{9}=\frac{16}{3},$$

$$y_k=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{-4+\frac{5}{4}\cdot 5}{1+\frac{5}{4}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}=1.$$

Шукана точка $K(\frac{16}{3};\ 1)$.

Знаходимо рівняння бісектриси внутрішнього кута C:

$$\frac{x+12}{\frac{16}{3}+12}=\frac{y+11}{1+11}\Rightarrow\frac{x+12}{\frac{52}{3}}=\frac{y+11}{12}\Rightarrow\frac{3(x+12)}{52}=\frac{y+11}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3(x+12)}{13}=\frac{y+11}{3}\Rightarrow 9(x+12)=13(y+11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x+108=13y+143\Rightarrow 9x-13y-35=0\quad (CK)$$

8) Центр ваги трикутника E визначається за формулами

$$x=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\ y=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};$$

$$x_E=\frac{12+0-12}{3}=0;\ y_E=\frac{-4+5-11}{3}=\frac{-10}{3}.$$

Шукана точка центру трикутника $E(0;\ -3\frac{1}{3})$.

9) Величину кута C знаходимо за формулою:

$$tg\angle C=\frac{k_{BC}-k_{AC}}{1+k_{BC}K_{AC}}$$

З розв'язаного вище маємо: $k_{BC}=\frac{3}{4};k_{AC}=\frac{7}{24}$;тоді величина кута

$\angle C=arctg\frac{3}{4}$.

10) Знайдемо площу трикутника за формулою:

$$S=\frac{1}{2}d_{AC}d_{BD};\ S=\frac{1}{2}25\cdot 12=25\cdot 6=150.$$

Шукана площа S = 150 (кв. од.).

Задачі для самостійного розв'язування:

1. Які з точок *M(3; 5), N(2; 7), P(-1; -3), Q(-2; 0), R(3; -5)* лежать на

прямій $y = 2x - 1$, а які лежать вище або нижче цієї прямої?

2. Задана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 1)$:

1) паралельно заданій прямій;
2) перпендикулярно до заданої прямої.

3. Знайти проекцію точки $P(-6; 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

4. Знайти точку Q, яка симетрична точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

5. Знайти точку M_1, яка симетрична точці $M_2(8; -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3; -4)$ і $B(-1; -2)$.

6. Задано вершини трикутника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ і $C(3; 5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, що опущений із вершини A на медіану, яка проведена із вершини B.

7. Задано вершини трикутника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ і $C(5; 1)$. Скласти рівняння перпендикуляра, який опушений із вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B.

8. Задано дві суміжні вершини $A(2; 5)$ і $B(5; 3)$ паралелограма $ABCD$ і точка $M(-2; 0)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма.

9. Задано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y -1= 0$ і $x - 2y = 0$ та точка перетину його діагоналей $M(3; -1)$. Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма.

10. В рівнобедреному прямокутному трикутнику задано координати вершини гострого кута (5; 7) і рівняння його протилежного катета $6x + 4y - 9 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника.

11. Знайти вершини прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо задано вершина прямого кута $C(3; -1)$ та рівняння його гіпотенузи $3x - y + 2 = 0$.

12. Точка $A(2; -5)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрату.

13. Задано вершини трикутника $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$ і $C(2; 1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, який опущений із вершини B на медіану, що проведена із вершини C.

14. Сторони AB і BC паралелограма задано рівняннями $2x - y + 5 = 0$ і $x - 2y + 4 = 0$, діагоналі його перетинаються в точці $M(1; 4)$. Знайти довжину його висот.

15. Задано дві вершини трикутника $A(-4; 3)$ і $B(4; -1)$ і точка перетину його висот $M(3; 3)$. Знайти третю вершину C.

16. В трикутнику ABC відомо: сторона AB: $4x + y - 12 = 0$, висота BK: $5x - 4y - 15 = 0$ і висота AH: $2x + 2y - 9 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника і третьої висоти.

17. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну із його вершин $A(3; -4)$ та рівняння двох висот $7x - 2y - 1 = 0$ і $2x - 7y - 6 = 0$.

18. Задана пряма $2x + y - 6 = 0$ і на цій прямій дві точки A і B ординатами $y_A = 6$ і $y_B = -2$. Знайти рівняння висоти AD трикутника AOB, Знайти її довжину і $ADAB$.

Практичне заняття № 4
з теми «Пряма та площина у просторі»

Аудиторні завдання:

Задача 4.1. Задано дві точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Розв'язання.

Скористаємося рівнянням площини через точку і вектор нормалі. Одержимо рівняння площини, яка проходить через точку M_1:

$A(x-3)+B(y+1)+C(z-2)=0.$

Нормальний вектор

$$\overline{M_1M_2}=(4-3)\bar{i}+(-2+1)\bar{j}+(-1-2)\bar{k}=\bar{i}-\bar{j}-\overline{3k}=\{1;-1;-3\}.$$

Підставимо координати вектора $\overline{M_1M_2}=\{1;-1;-3\}$ замість *A*, *B*, і *C* в рівняння, що одержали раніше, будемо мати:

$$(x-3)-(y+1)-3(z-2)=0\,або\,x-y-3z+2=0.$$

Це й є шукане рівняння площини.

Задача 4.2. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3;0;4)$ і $M_2(5;2;6)$ перпендикулярно до площини $2x+4y+6z-7=0.$

Розв'язання.

Нехай точка $M(x;y;z)-¿$довільна точка шуканої площини. Тоді вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$ компланарні з нормальним вектором $\overline{N}=\{2;4;6\}$ заданої площини $2x+4y+6z-7=0.$ Через це мішаний добуток цих трьох векторів дорівнює нулю: $(\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{N})=0$ або

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix}=0;\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник, одержимо рівняння площини

$$2x-3y+6z-11=0.$$

А тепер обчислимо відстань *d* від точки *P*(-1;1;-2) до площини $2x-3y+6z-11=0$. Використаємо формулу для обчислення відстані:

$$d=\frac{|2(-1)-3(1)+6(-2)-11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{|-28|}{7}=\frac{28}{7}=4.$$

d = 4 (од. довж.)

Задача 4.3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин $2x-y-z-1=0, x+2z-4=0, x-y=0$,через початок координат і через точку *P*(7;1;2).

Розв'язання.

Знайдемо точку перетину трьох заданих площин. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x-y-z-1=0, \\ x+2z-4=0, \\ x-y=0. \end{cases}$$

Знайдемо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1-2+4=3.$$

Знайдемо визначник $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=4+2=6.$

Таким чином:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{6}{3}=2; x=2.$$

Із третього рівняння системи знайдемо, що $x = y$, $y = 2$. Із другого рівняння системи знаходимо z:

$$z=\frac{4-x}{2}=\frac{4-2}{2}=1, z=1.$$

Точка перетину трьох заданих площин (2;2;1). Для знаходження рівняння шуканої площини використаємо формулу рівняння площини через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2-0 & 2-0 & 1-0 \\ 7-0 & 1-0 & 2-0 \end{vmatrix}=0.$$

Спростивши, маємо:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник, одержимо рівняння шуканої площини: $x+y-4z=0.$

Задача 4.4. Знайти канонічне рівняння прямої:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z=11, \\ 2x+y-3z=1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $x_1=1$, тоді маємо:

$$\begin{cases} 3\cdot 1+2y+4z=11 \\ 2\cdot 1+y-3z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y+4z=8, \\ y-3z=-1. \end{cases}$$

Від першого рівняння віднімемо друге, помножене на 2:

$$\begin{cases} 2y+4z=8, \\ 2y-6z=-2. \end{cases} 10z=10, z_1=1$$

$y=1+3z-2x, y=1+3-2=2, y_1=2.$

Отримали точку площини $M_1(1;2;1)$.

Знайдемо вектор $\bar{S}$:

$$\bar{S}=\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & -3\end{vmatrix}\bar{i}+\begin{vmatrix}4 & 3\\-3 & 2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}\bar{k}=-10\bar{i}+17\bar{j}-\bar{k}.$$

Маємо $l=-10, m=17, n=-1.$

Користуючись формулою для канонічного рівняння прямої, одержимо рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}.$$

Задача 4.5. Скласти канонічне рівняння, що проходять через точки $M_1(3;-5;2)\, ma\, M_2(1;-1;-4)$.

Розв'язання.

За формулою рівняння прямої через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+5}{-1+5}=\frac{z-2}{-4-2}\Rightarrow\frac{x-3}{-2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-2}{-6}$$

або

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{3}$$

– це канонічне рівняння прямої.

Задача 4.6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2;-3;4)$ і перпендикулярно до прямих $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ і $\frac{x+4}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{3}$.

Розв'язання.

Рівняння шуканої прямої є:

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+3}{m}=\frac{z-4}{n}.$$

Задані прямі мають напрямні вектори:

$$\overline{S_1}=\{1;-1;1\}\, i\, \overline{S_2}=\{2;1;3\}.$$

Так як шукана пряма перпендикулярна до заданих прямих, то за напрямний вектор її можна прийняти векторний добуток $\overline{S_1}\times\overline{S_2}$:

$$\overline{S}=\left[\overline{S_1}\,\overline{S_2}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=-4\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k},$$

або $\overline{S}=\{l;m;n\}=\{-4;-1;2\}$.Звідси буде випливати, що координати напрямного вектора шуканої прямої дорівнюють:

$l=-4, m=-1, n=2.$

Шукана пряма має рівняння :

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2},$$

або

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}.$$

Задача 4.7. Знайти координати точки перетину прямої

$$\frac{x-1}{2}=t;\frac{y+2}{1}=t;\frac{z-2}{1}=t;x=2t+1;y=t-2;z=t+2.$$

Підставимо ці значення *x,y,z* в рівняння площини:

$3(2t+1)-(t-2)+2(t+2)+5=0,$

$6t+3-t+2+2t+4+5=0, 7t+14=0,$

$t=-2.$

Одержане значення $t=-2$ є значенням параметру в точці перетину прямої з площиною. Підставляємо це значення в параметричні рівняння прямої:

$x=2t+1; y=t-2; z=t+2,$

одержуємо:

$x=2(-2)+1=-3, y=-2-2=-4, z=-2+2=0$

$-¿$точку перетину прямої з площиною. Отже, пряма перетинає площину в точці *M*(-3;-4;0).

Задача 4.8. Знайти проекцію точки *M*(2;-1;3) на площину $x+3y-4z-13=0.$

Розв'язання.

а) Складено рівняння прямої, що проходить через точку *M*(2;-1;3) перпендикулярно до площини $x+3y-4z-13=0$. Спочатку напишемо рівняння прямої, що проходить через точку *M*(2;-1;3):

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-3}{n}.$$

б) Щоб знайти проекцію точки на площину, необхідно знайти координати основи перпендикуляра, проведеного із точки *M* на площину, тобто точку перетину прямої з площиною.

$$\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4},\\ x+3y-4z-13=0.\end{cases}$$

Рівняння $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$ подамо в параметричній формі. Одержимо : $x=t+2, y=3t-1, z=-4t+3.$ Одержані значення *x,y,z* підставляємо в рівняння площини:

$$t+2+3(3t-1)-4(-4t+3)-13=0,$$

$$t+2+9t-3+16t-12-13=0,$$

$$26t-26=0, t=1.$$

Значення параметра $t=1$ підставимо в рівняння

$$x=t+2, y=3t-1, z=-4t+3.$$

Маємо: $x=1+2=3, y=3*1-1=2, z=-4*1+3=-1.$

Отже, проекцією точки на площину є точка $M_1(3;2;-1)$.

Задача 4.9. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;1;-2)$ і пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}.$

Розв'язання.

В шуканій площині повинні знаходиться точка $M_1(1;1;-2)$ та пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}$. Оберемо в шуканій площині точку *M(x;y;z)* . Якщо пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}$ лежить в шуканій площині, то точка *P*(1;3;0) заданої прямої знаходиться в площині, а напрямний вектор $\overline{S}=\{2;-1;5\}$ паралельний шуканій площині. Розглянемо вектори: $\overline{M_1M}=\{x-1;y-1;z+2\}, \overline{M_1P}=\{1-1;3-1;0+2\}$ та $\overline{S}=\{2;-1;5\}$. Ці вектори компланарні, а це означає, що їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overline{M_1 M} \cdot \overline{M_1 P} \cdot \overline{S} = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник:

$10(x-1)+0(z+2)+4(y-1)-4(z+2)-2(x-1)-0(y-1)=0;$

$8(x-1)+4(y-1)-4(z+2)=0;$

$2(x-1)+(y-1)-(z+2)=0;$

$2x+y-z-5=0.$

Ми отримали рівняння шуканої площини.

Задачі для самостійного розв'язування:

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(2;5;-1)$ і паралельна площині $x+3y-4z+5=0.$

2. Задані точки $M_1(0;-1;3)$ і $M_2(1;3;5)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярна до вектора $\overline{N}=\overline{M_1 M_2}$.

3. Знайти рівняння площини, що проходить через точку *M* (2;-1;3) і відтинає на осях координат рівні відрізки.

4. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1;-1;2), M_2(2;1;2) i\, M_3$¿4¿.

5. Знайти відстань від точки *P*(4;3;0) до площини, що проходить через точки $M_1(1;3;0), M_2(4;-1;2) i\, M_3$¿1¿.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку *P*(1;2;3) і перпендикулярної до площини $x-y+z-7=0, 3x+2y-12z+5=0.$

7. Знайти точку перетину площин: $2x-y+3z-9=0; x+2y+2z-3=0; 3x+y-4z+6=0.$

8. Скласти рівняння перпендикуляру, який опущений із точки *M*(2;-3;4) на вісь *Oz.*

9. Привести до канонічного виду рівняння прямої, яке задано:

$$\begin{cases} x+3y-4z+5=0, \\ \quad 2x-y+z=0 \end{cases}$$

10. Знайти кут між прямими:

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}\,i\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\4x-y-5z+4=0.\end{cases}$

11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ з площиною $2x+3y+z-1=0.$

12. Знайти проекцію точки P(2;-1;3) на пряму $\frac{x}{3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-2}{2}.$

13. Знайти проекцію точки P(5;2;-1) на площину $2x-y+3z+23=0.$

14. Обчислити відстань d від точки P(2; 3;-1) до прямої

$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}.$

15. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку P(3;1;-2) і через пряму $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}.$

16. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і перпендикулярну до площини $x+4y-3z+7=0.$

17. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$

18. Знайти точку Q, що симетрична точці P(1;3;-4) відносно площини $3x+y-2z=0.$

19. Знайти точку Q, що симетрична точці P(2;-5;7) відносно прямої, що проходить через дві точки $M_1(5;4;6)\,i\,M_2(-2;-17;-8).$

20. Скласти рівняння перпендикуляра, який опущений із точки Q(2;3;1) на пряму $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}.$

Практичне заняття № 5
з теми «Криві другого порядку»

Аудиторні завдання:

Задача 5.1. Скласти рівняння кола з центром в точці $C(2; -3)$ і радіусом, що дорівнює 6.

Розв'язання.

В рівнянні кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ маємо $a = 2$; $b = -3$; $r = 6$. Тоді одержимо:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36.$$

Задача 5.2. Визначити центр і радіус кола, яке задано рівнянням: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Розв'язання.

Так як в заданому рівнянні коефіцієнт при x^2 і y^2 рівні між собою і відсутній член з добутком координат, то задане рівняння є рівнянням кола. Його необхідно привести до вигляду рівняння кола. Випишемо члени, які містять тільки *x,* і члени, які містять тільки *y*. Виділимо повний квадрат:

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x * 1 + 1^2 - 1^2 = (x - 1)^2 - 1,$$

$$y^2 + 4y = y^2 + 2y * 2 + 2^2 - 2^2 = (y + 2)^2 - 4.$$

Ліва частина заданого рівняння запишеться так:

$$\underbrace{(x-1)^2-1}_{x^2 - 2x} + \underbrace{(y+2)^2-4}_{y^2 + 4y} - 20 = 0$$

звідки: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Порівнюючи одержане рівняння з рівнянням кола, приходимо до висновку, що це рівняння визначає коло, центр якого має координати $C(1; -2)$, $r^2 = 25$, а $r = 5$.

Задача 5.3. Скласти рівняння кола, що проходить через точки $M_1(-1; 1)$ і $M_2(1; -3)$, якщо центр його лежить на прямій $2x - y + 1 = 0$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння кола:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Так як коло проходить через точки $M_i(-1; 1)$ і $M_2(1; -3)$, то координати цих точок повинні задовольняти рівнянню кола. Звідти маємо два рівняння:

$$(-1 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2,\ (1 - a)^2 + (-3 - b)^2 = r^2.$$

Якщо центр кола знаходиться на прямій $2x - y + 1 = 0$, то координати центра повинні задовольняти рівнянню прямої. Одержуємо трете рівняння: $2a - b + 1 = 0$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(-3-b)^2=r^2,\\2a-b+1=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2a+a^2+1-2b+b^2=r^2,\\1-2a+a^2+9+6b+b^2=r^2,\\2a-b+1=0.\end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге. Одержимо систему:

$$\begin{cases}4a-8b-8=0,\\2a-b+1=0.\end{cases}$$

Тепер віднімемо від першого рівняння друге, помножене на 2:

$$\begin{cases}4a-8b-8=0\\4a-2b+2=0\end{cases}.$$

Отримаємо: $-3b = 5$, $b = \frac{-5}{3}$

Підставивши отримане значення b у рівняння $2a - b + 1 = 0$, одержимо значення параметру a:

$$a=\frac{b-1}{2}=\frac{\frac{-5}{3}-1}{2}=\frac{-4}{3}.$$

Таким чином, координати центра кола знайдено: $C(\frac{-4}{3};-\frac{5}{3})$.

Щоб визначити r^2, скористаємося рівнянням:

$r^2=(-1-a)^2+(1-b)^2;$

$r^2=(-1+\frac{4}{3})^2+(1+\frac{5}{3})^2=\frac{1}{9}+\frac{64}{9}=\frac{65}{9}.$

Отже, рівняння кола:

$(x+\frac{4}{3})^2+(y+\frac{5}{3})^2=\frac{65}{9}.$

Задача 5.4. Скласти рівняння кола, що проходить через три задані точки: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; 2)$і $M_3(5; 5)$.

Розв'язання.

Шукане рівняння має вигляд: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Так як коло проходить через задані точки, то координати кожної з цих точок задовольняють рівнянню кола. Підставляємо по черзі в шукане рівняння координати заданих точок, одержимо три рівняння для визначення a, b і r.

$$\begin{cases} (-1-a)^2+(5-b)^2=r^2, \\ (-2-a)^2+(-2-b)^2=r^2 \\ (5-a)^2+(5-b)^2=r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2a+a^2+25-10b+b^2=r^2, \\ 4+4a+a^2+4+4b+b^2=r^2, \\ 25-10a+a^2+25-10b+b^2=r^2. \end{cases}$$

Від першого рівняння віднімемо друге, а потім від першого рівняння віднімемо третє. Одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -2a-14b+18=0, \\ -24+12a=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+7b=9, \\ a=2. \end{cases}$$

Звідки $a = 2$, $b = 1$.

Для знаходження r^2 скористаємося точкою $M_1(-1; 5)$ і рівнянням:

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2, r^2 = (-1-2)^2+(5-1)^2=9+16=¿25 .$$

Шукане рівняння кола моє вигляд:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Задача 5.5. Знайти довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 14$.

Розв'язання.

Приведемо це рівняння до канонічного вигляду: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Розділивши обидві частини заданого рівняння на 144, одержимо:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Звідси одержуємо, що $a^2=¿\ 36$, $b^2 = 16$. Отже $a = 6$, $2a = 12$; $b = 4$, $2b = 8$. Знаючи a і b, із співвідношення $a^2 - c^2 = b^2$ знаходимо c:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20, c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Координати фокусів будуть: $F_1(2\sqrt{5};0)\, i\, F_2(-2\sqrt{5};0)$.

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Задача 5.6. Велика вісь еліпса дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16. Знайти рівняння еліпса. Чому дорівнює його ексцентриситет?

Розв'язання.

Для знаходження рівняння еліпса необхідно знайти його півосі a та b. За умовою $2a = 8$, $a = 4$. Піввісь b знаходимо із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$, а c можна знайти, використовуючи відстань між директрисами

$$d_1 d_2 = 2\frac{a^2}{c} = 16, c = \frac{a^2}{8} = \frac{4^2}{8} = 2.$$

Таким чином, $b^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$.

Одержуємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Ексцентриситет еліпса $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Задача 5.7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо задана точка $M_1\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гіперболи та рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

Розв'язання.

Для знаходження рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, необхідно знайти її півосі a та b. Скористуємося умовою: точка $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ знаходиться на гіперболі, а це означає, що координати точки M_1 повинні задовольняти рівнянню гіперболи:

$$\frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{(-1)^2}{b^2} = 1, \frac{81}{4a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Рівняння асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$, а ми маємо $y = \pm\frac{2}{3}x$. Отже, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$. Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{81}{4a^2}-\frac{1}{b^2}=1,\\ b=\frac{2}{3}a.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{81}{4a^2}-\frac{1}{\left(\frac{2}{3}a\right)^2}=1,\\ b=\frac{2}{3}a.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{81}{4a^2}-\frac{9}{4a^2}=1,\\ b=\frac{2}{3}a.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{72}{4a^2}=1,\\ b=\frac{2}{3}a.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=18,\\ b=\frac{2}{3}a.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\sqrt{2},\\ b=2\sqrt{2}.\end{cases}$$

Підставимо отримані значення параметрів в канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{(3\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1.$$

Таким чином, отримуємо шукане рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1.$

Задача 5.8. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо кут між її асимптотами дорівнює 120° і відстань між фокусами дорівнює $8\sqrt{3}$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$Рівняння асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x, де\ \frac{b}{a}=tg\,\varphi$, а φ – кут нахилу асимптоти до осі Ox. Так як кут між асимптотами дорівнює 120°, то $\varphi=\frac{120^{\circ}}{2}=60^{\circ}$. Звідси $tg\,60^{\circ}=\frac{b}{a};\frac{b}{a}=\sqrt{3}$; $b=\sqrt{3}a.$

За умовою задачі $2c=8\sqrt{3}$, то $c=4\sqrt{3}$. Із співвідношення $c^2=a^2+b^2$ одержуємо друге рівняння: $(4\sqrt{3})^2=a^2+b^2$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}a^2+b^2=48,\\ b=\sqrt{3}a.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+(\sqrt{3}a)^2=48,\\ b=\sqrt{3}a.\end{cases}\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2}-\frac{y^2}{6^2}=1.$$

Отримуємо рівняння: $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{36}=1.$

Задача 5.9. Скласти рівняння параболи, знаючи, що парабола симетрична відносно осі *Ox,* проходить через точку *M(1;* -4) і початок координат.

Розв’язання.

Канонічне рівняння параболи, що симетрична відносно осі *Ox,* вершина якої знаходиться в початку координат, є $y^2 = 2px$. Для складання рівняння необхідно знайти значення параметра *p*. Так як парабола проходить через точку *M*(1; -4), то координати цієї точки задовольняють рівнянню параболи:

$$(-4)^2 = 2p\cdot 1,\ 16 = 2p,\ p = 8.$$

Звідси $y^2 = 16x$.

Задачі для самостійного розв'язування:

1. Скласти рівняння кола, що проходить через точку *M*(2; 6) і його центр співпадає з точкою *C*(-1; 2).

2. Скласти рівняння кола, якщо точки *A(3;* 2) і *Б*(-1; 6) є кінцями одного із діаметрів кола.

3. Скласти рівняння кола, центр якого співпадає з точкою *C*(1; -1) і пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола.

4. Скласти рівняння кола, що проходить через точки *A*(3; 1) і *B*(-1; 3), а його центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$.

5. Скласти рівняння кола, що проходить через точки *A*(1; 1), *B*(1; -1) і *C*(2; 0).

6. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат. Знаючи, що:

1) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;

2) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;

3) відстань між його фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;

4) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;

5) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e=\frac{12}{13}$.

7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо задано:

1) точка $M_1(-2\sqrt{5}; 2)$ і його мала піввісь $b = 3$;

2) точка $M_1(2; -2)$ і його велика піввісь $a = 4$;

3) точки $M_1(4; -\sqrt{3})$ і $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ еліпса;

4) точка $M_1(\sqrt{15}; -1)$ еліпса і відстань між його фокусами $2c = 8$;

5) точка $M_1(2; \frac{-5}{3})$ еліпса і його ексцентриситет $e = \frac{2}{3}$.

8. Знайти ексцентриситет еліпса, знаючи, що:

1) малу вісь його видно із фокуса під прямим кутом;

2) відстань між фокусами дорівнює відстані між вершинами малої та великої осей.

9. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що:

1) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;

2) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$.

3) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$

4) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;

5) точки $M_1(6; -1)$ і $M_2(-8; 2\sqrt{2}¿)$ знаходяться на гіперболі;

6) $M_1(-5; 3)$ гіперболи і ексцентриситет $e = \sqrt{2}$;

7) точка $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ гіперболи та рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$.

10. Знайти ексцентриситет гіперболи при умові, що

1) кут між асимптотами дорівнює 60°;

2) кут між асимптотами дорівнює 90°.

11. Побудувати параболи, що задані рівняннями:

1) $y^2 = 6x$;

2) $y^2 = -6x$;

3) $x^2 = 6y$;

4) $x^2 = -6y$.

12. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат. Знаючи, що:

1) парабола розміщена симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $M(9; 6)$;

2) парабола розміщена симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $P(-1; 3)$;

3) парабола розміщена симетрично відносно осі Oy і проходить через мочку $Q(1; 1)$;

4) парабола розміщена симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $R(4; -8)$.

Практичне заняття № 6
з теми «Поверхні другого порядку»

Аудиторні завдання:

Задача 6.1. Визначити координати центра сфери і її радіус $x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+25=0$.

Розв'язання.

Представимо задане рівняння в вигляді рівняння сфери, для цього:

1) об’єднаємо в групи члени, які містять однойменні координати;

2) виділимо в групах повні квадрати (ми раніше так само визначали координати центра кола і його радіус). Одержимо:

$$x^2-6x+y^2+8y+z^2+10z+25=0;$$

$$x^2-2\times 3x+3^2-3^2+y^2+2\times 4y+4^2-4^2+z^2+25z+5^2-5^2+25=0;$$

$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+(z+5)^2-25+25=0;$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=25.$$

Порівнюючи з рівнянням сфери, маємо a=3, b= - 4, c=-5, $R^2=25$. Отже, центр сфери – точка C(3;-4;-5), радіус R = 5.

Задача 6.2. Еліпс з півосями 5 та 3 обертається навколо своєї великої осі, яка співпадає з початком координат. Скласти рівняння поверхні, що описує еліпс при обертанні.

Розв'язання.

Складемо канонічне рівняння еліпса з центром в початку координат, який розміщений в площині *yOz*: *a*=5, *b*= 3.

$$\begin{cases} \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1 \\ x=0. \end{cases}$$

Щоб одержати рівняння поверхні, яка утворена обертанням еліпса, що розміщений в площині *yOz*, навколо осі *Oy*, необхідно в рівнянні еліпса замінити z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Одержуємо еліпсоїд обертання, який витягнуто вздовж осі *Oy*:

$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2+z^2}{9}=1\text{, або } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Задача 6.3. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат і напрямною:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=c. \end{cases}$$

Розв'язання.

Канонічні рівняння твірних, що проходять через вершину O(0;0;0) конуса і точку (*x;y;z*) напрямної, будуть :

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Виключимо *x,y,z* із заданих рівнянь. Замінюючи *z* через *c,* визначимо *x* і *y* із останніх двох рівнянь: $x=c\frac{X}{z}, y=c\frac{Y}{z}$. Підставимо одержані значення *x* і *y* в перше рівняння напрямної, будемо мати:

$$\frac{c^2X^2}{z^2}+\frac{c^2Y^2}{z^2}=a^2\text{, або } \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Задача 6.4. Які поверхні визначаються рівняннями:

1) $x^2+z^2=16$; 2) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$; 3) $x=2z^2$; 4) $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{7}=1$.

Розв'язання.

Кожне із цих рівнянь містить тільки дві змінні *x* і *y,* та визначає на площині *xOz* криві: 1) коло; 2) еліпс; 3) параболу; 4) гіперболу.

В просторі ж кожне із них визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі *Oy*, так як ці рівняння не містять змінної *y*. Напрямними цих циліндричних поверхонь являються вказані криві:

1) $x^2+z^2=16-$¿рівняння прямого кругового циліндра;

2) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$ – рівняння еліптичного циліндра;

3) $x=2z^2-$¿рівняння параболічного циліндра;

4) $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{7}=1$ – рівняння гіперболічного циліндра.

Задача 6.5. Гіпербола з півосями 3 і 4 обертається навколо своєї уявної осі, яка співпадає з віссю *Oz.* Центр гіперболи співпадає з початком координат. Скласти рівняння поверхні, яку одержуємо при обертанні гіперболи.

Розв'язання.

Складемо канонічне рівняння гіперболи з центром в початку координат, що знаходиться в площині *yOz: a=3; b=4;*

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

Щоб скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи, що знаходиться в площині *yOz,* навколо осі *Oz,* необхідно в рівняння гіперболи замість $\pm\sqrt{x^2+y^2}$:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1, \text{або } \frac{y^2+x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Отже, одержуємо однопорожнинний гіперболоїд обертання:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Задачі для самостійного розв'язування:

1. Визначити координати центрів і радіуси сфер, заданих рівняннями:

1) $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=25$;

2) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z-2=0$;

3) $2x^2+2y^2+2z^2+4y-3z+2=0$;

4) $x^2+y^2+z^2=2x$;

5) $x^2+y^2+z^2=4z-3$.

2. Як розташована точка $M(1;-1;3)$ відносно сфер:

1) $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=19$;

2) $x^2+y^2+z^2-x+y+$¿0;

3) $x^2+y^2+z^2-4x+y-2z=0$?

3. Скласти рівняння сфери, якщо точки M(4;-1;-3) і N(0;3;-1) є кінцями одного з її діаметрів.

4. Скласти рівняння канонічної поверхні, вершиною якої є точка M(0;0;1), а напрямною – еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, z=3$.

5. Скласти рівняння ліній перерізу конуса $x^2-y^2+z^2=0$ площинами:

1) $y=3$; 2¿ $z=1$; 3¿ $x=0$.

6. Знайти рівняння поверхні, отриманої при обертанні прямої 2y+z-2=0, x = 0 навколо осі *Oz*.

7. Звести рівняння поверхні до канонічного виду:

1) $x^2+z^2-4x-4z+4=0$;

2) $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$;

3) $x^2+2y^2+2z^2-4y+4z+4=0$;

4) $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$;

5) $x^2+y^2-z^2-2x-2y-2z+2=0$;

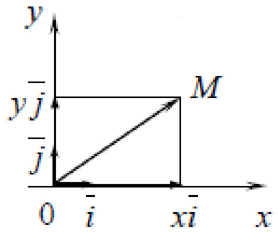
6) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$;

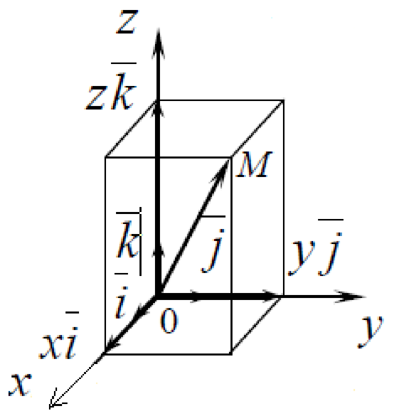
7) $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$.

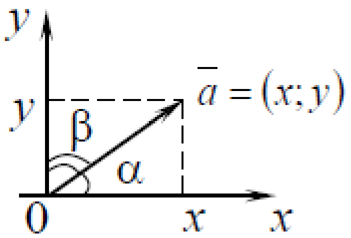
Додаток Б

Блок-схеми до тем з навчального модуля

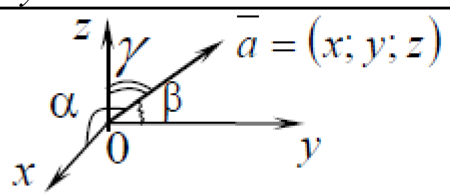
«Аналітична геометрія»

<table>
<tr><td colspan="2">ВЕКТОРИ В ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТАХ</td></tr>
<tr><td>Вектори на площині</td><td>Вектори в просторі</td></tr>
<tr><td>$(\bar{i};\bar{j})$, $|\bar{i}|=|\bar{j}|=1$, $\bar{i}\perp\bar{j}$


$\overline{OM}=x\bar{i}+y\bar{j}=(x;y)$</td><td>$(\bar{i};\bar{j};\bar{k})$, $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$,
$\bar{i}\perp\bar{j}$, $\bar{i}\perp\bar{k}$,$\bar{j}\perp\bar{k}$


$\overline{OM}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=(x,y,z)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Координати вектора</td></tr>
<tr><td>A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)
$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$</td><td>A$(x_1,y_1,z_1)$, B$(x_2,y_2,z_2)$
$\overline{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модуль вектора</td></tr>
<tr><td>$\bar{a}=(x_1;y_1)$, $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$</td><td>$\bar{a}=(x,y,z),\bar{a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дії над векторами</td></tr>
<tr><td>$\bar{a}=(x_1;y_1)$, $\bar{b}=(x_2;y_2)$,
$\bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2)$,
k$\bar{a}=(kx_1;ky_1)$,</td><td>$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1),\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$,
$\bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$,
k$\bar{a}=(kx_1;ky_1;kz_1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Умова колінеарності векторів</td></tr>
<tr><td>$\bar{a}\parallel\bar{b}\leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\pm\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$</td><td>$\bar{a}\parallel\bar{b}\leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=\pm\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Напрямні косинуси</td></tr>
<tr><td>

cos α $=\frac{x}{|\bar{a}|}$; $x=|\bar{a}|\cdot$ cos α

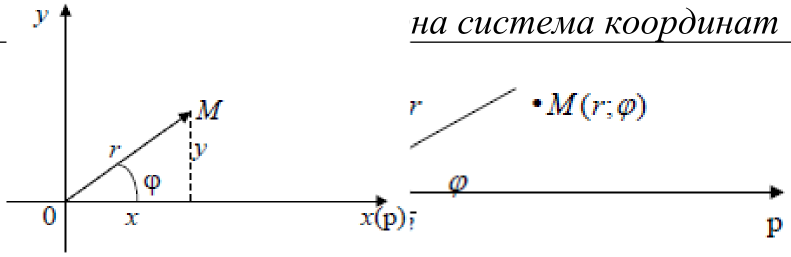
cos β$=\frac{y}{|\bar{a}|}$; $y=|\bar{a}|\cdot$ cos β</td><td>

cos α $=\frac{x}{|\bar{a}|}$; $x=|\bar{a}|\cdot$ cos α

cos β$=\frac{y}{|\bar{a}|}$; $y=|\bar{a}|\cdot$ cos β</td></tr>
</table>

	$\cos\gamma=\frac{z}{\lvert\bar{a}\rvert}$; $z=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\cos\gamma$

на система координат



де, O- полюс; O_p– полярна вісь; r – полярний радіус, $r\epsilon[0;\infty¿;$ φ- полярний кут, $-\pi<\varphi\leq\pi$(або $0\leq\varphi\leq2\pi$)

$M(r;\varphi)$ – координати точки M в полярних координатах

Зв'язок між прямокутними та полярними координатами

$(x;y)$- прямокутні координати М;

$(r;\varphi)$- полярні координати *M.*

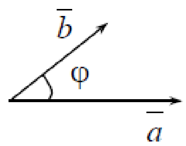
Формули переходу від прямокутних до полярних координат

$$\sqrt{x^2+y^2},\ tg\varphi=\frac{x}{y},$$

(визначаючи величину φ, слід встановити чверть, в якій лежить шуканий кут, і враховувати, що $-\pi<\varphi\leq\pi$)

Формули переходу від полярних до прямокутних координат

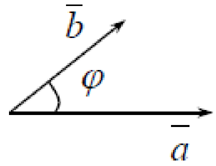
$$x=r\cdot\cos\varphi,\quad y=r\cdot\sin\varphi$$

НЕЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ	
Скалярний добуток	
Означення	
$\bar{a}\cdot\bar{b}=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\cos\varphi$ – число, $\varphi=(\widehat{\bar{a};\bar{b}})$-кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$	
Властивості	
1. $\bar{a}^2=\lvert\bar{a}\rvert^2$	4.$(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$
2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$	5. $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$
3. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$	
Координатна форма	
$\bar{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\bar{b}=(x_2;y_2;z_2)$	

$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2$

Застосування

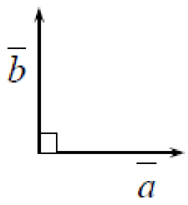
1.Кут між векторами



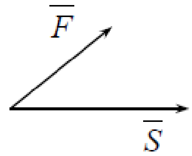
$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

2.Умова перпендикулярності:

$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\ \bar{a}\cdot\bar{b}=0$



3.Робота A= $\bar{F}\cdot\bar{S}$



4. Проекція вектора: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|np_{\bar{a}}\,\bar{b}=|\bar{b}|np_{\bar{b}}\,\bar{a}$

Векторний добуток

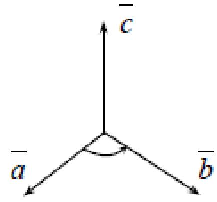
Означення

$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ – вектор, що задовольняє умову:

1.$|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a};\bar{b}})$;

2. $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}-$¿права трійка



Властивості

1. $\bar{a}\times\bar{b}$ = -$\bar{b}\times\bar{a}$

2. $\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$

3. .$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$

4.$\bar{a}\times\bar{a}=0$

5.$\bar{a}\parallel\bar{b}$ $\bar{a}\times\bar{b}=0$

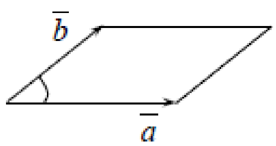
Координатна форма

$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1),\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$ $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$

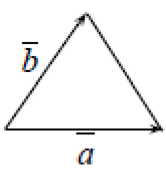
Застосування

1. Площа паралелограма:

$S=|\bar{a}\times\bar{b}|$

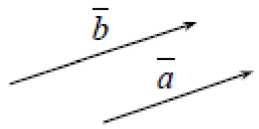


2.Площа трикутника:



$S=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$

3. Умова колінеарності :



$\bar{a}\parallel\bar{b} \quad \bar{a}\times\bar{b}=0$

Мішаний добуток

Визначення

1.$\overline{abc}=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ – числ

Властивості

1.$\overline{abc}=-\overline{bac}$

2.$\overline{abc}=\overline{bca}=\overline{cab}$

3.$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланарні ⇔ $\overline{abc}=0$

Координатна форма

$\bar{a}=¿),\quad \bar{b}=¿),\quad \bar{c}=¿)$

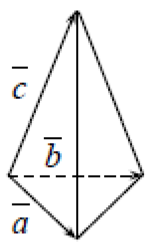
$$\overline{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Застосування

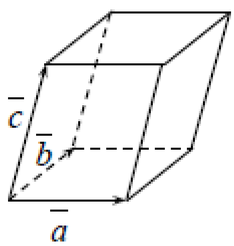
1.Об'єм паралелепіпеда:

$V=\overline{abc}=S_{осн}\cdot h$

2. Об’єм трикутної піраміди(тетраедра):



$V=\frac{1}{6}|\overline{abc}|=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$



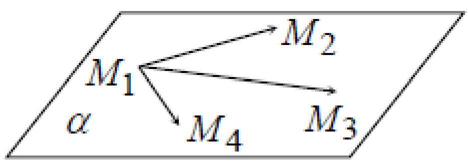
3. Умова компланарності:

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланарні ⇔ $\overline{abc}=0$

4. Умова належності чотирьох точок однієї площини

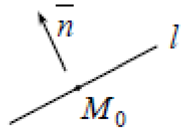
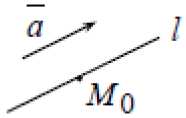
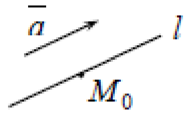
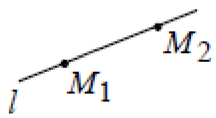
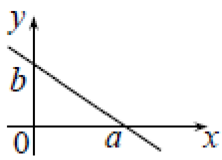
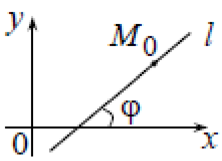
$M_1,M_2,M_3,M_4\in\alpha$

$\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}\cdot\overline{M_1M_4}=0$

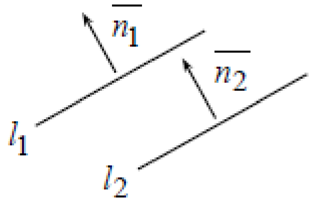
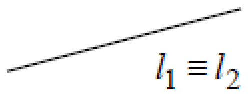
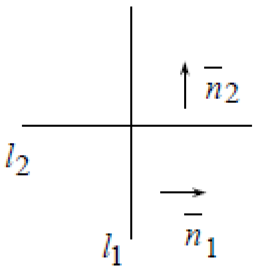
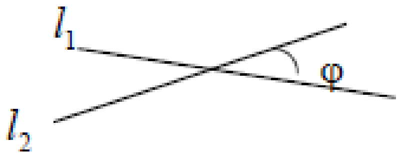
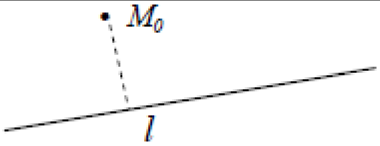


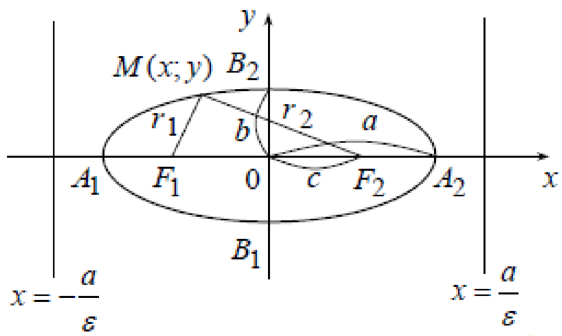
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно вектору

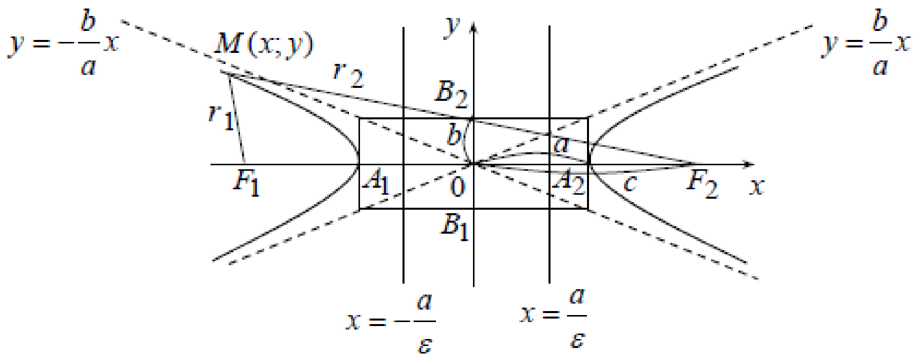
<table>
<tr><td></td><td>$\bar{n}=(A;B), M_0(x_0,y_0), \bar{n}\perp l$
$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Загальне рівняння прямої</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Ax+By+C=0\, \bar{n}=(A;B)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.Канонічне рівняння прямої</td></tr>
<tr><td></td><td>$\bar{a}=(p;q)\, M_0(x_0;y_0)$
$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4.Параметричне рівняння прямої</td></tr>
<tr><td></td><td>$x=x_0+pt\, M_0(x_0;y_0),\ y=y_0+qt;\bar{a}=(p;q)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Рівняння прямої ,яка проходить через 2 точки</td></tr>
<tr><td></td><td>$M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2),$
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Рівняння прямої у відрізках</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Рівняння прямої що проходить через точку і з кутовим коефіцієнтом</td></tr>
<tr><td></td><td>$M_0(x_0;y_0),\ k=tg\,\varphi$
$y-y_0=k(x-x_0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y=kx+b$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ</td></tr>
<tr><td>Взаємне розташування прямих на площині</td></tr>
<tr><td>Дано: $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\quad \bar{n}=(A_1;B_1),\quad k_1=\frac{-A_1}{B_1}$
$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0,\quad \bar{n}=(A_2;B_2),\quad k_2=\frac{-A_2}{B_2}$</td></tr>
<tr><td>Умова паралельності прямих</td></tr>
</table>

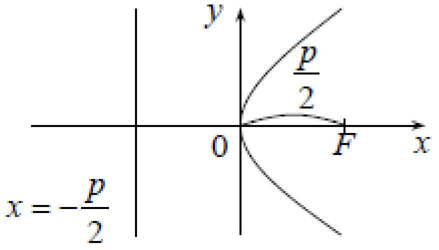
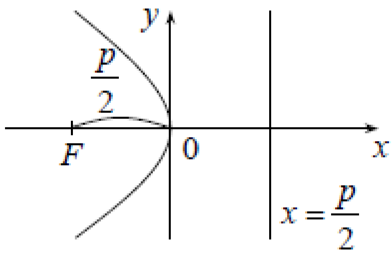
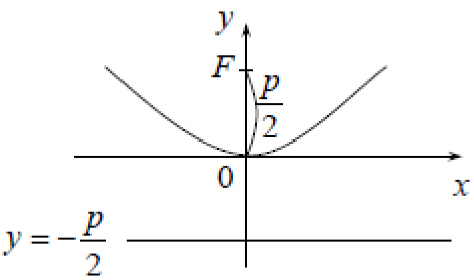
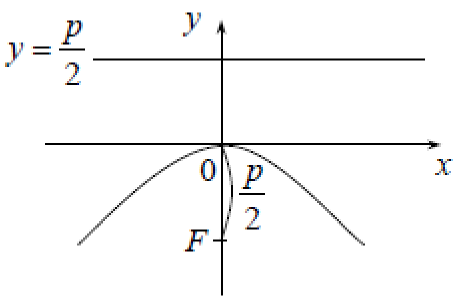
	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$ $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ *або* $k_1=k_2$
Умова збігу прямих	
	$l_1=l_2 \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
Умова перпендикулярності прямих	
	$l_1 \perp l_2 \quad \overline{n_1} \perp \overline{n_2}$ $\Leftrightarrow A_1 A_2+B_1 B_2=0$ *або* $k_1=\frac{-1}{k_2}$
Кут між прямими	
	$cos\varphi=\frac{\lvert\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}\rvert}{\lvert\overline{n_1}\rvert\cdot\lvert\overline{n_2}\rvert}$ або $tg\,\varphi=\left\lvert\frac{k_1-k_2}{1+k_1 k_2}\right\rvert$
Відстань від точки до прямої	
	$l: Ax+By+C=0,\, M_0(x_0;y_0)$ $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	
Еліпс	
	
1.Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Зв'язок між *a,b,c*	$b^2=a^2-c^2$
3. Вершини еліпсу	$A_1(-a;0), A_2(a;0)$ $B_1(0;-b), B_2(0;b)$
4. Велика вісь $[A_1 A_2]$	$\lvert A_1 A_2\rvert=2a$

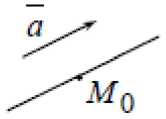
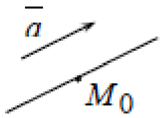
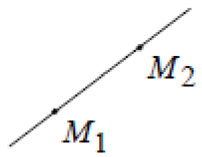
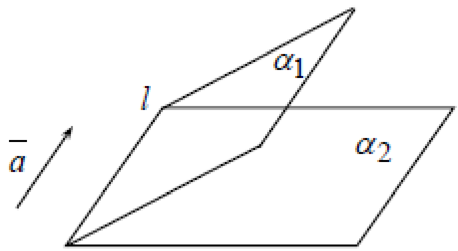
5. Мала вісь $[B_1B_2]$	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$
6. Фокуси	$F_1(-c;0), F_2(c;0)$
7. Фокусна відстань	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$
8. Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$
9. Директриси	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$
10. Фокальні радіуси	$r_1=a+\varepsilon\cdot x$ $r_2=a-\varepsilon\cdot x$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	
Гіпербола	
	
1. Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Зв'язок *a,b,c*	$b^2=c^2-a^2$
3. Вершини гіпербол	$A_1(-a;0), A_2(a;0)$
4. Дійсна вісь $[A_1A_2]$	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$
5. Уявна вісь $[B_1B_2]$	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$
6. Фокуси	$F_1(-c;0), F_2(c;0)$
7. Фокусна відстань	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$
8. Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$
9. Директриси	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$
10. Асимптоти	$y=\pm\frac{b}{a}x$
11. Фокальні радіуси для правої гілки лівої гілки	 $r_1=\varepsilon\cdot x+a, r_2=\varepsilon\cdot x-a$ $r_1=-(\varepsilon\cdot x+a),\ r_2=-(\varepsilon\cdot x-a)$
12. Рівнобічна гіпербола	$x^2-y^2=a^2$
13. Сполучена гіпербола	$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

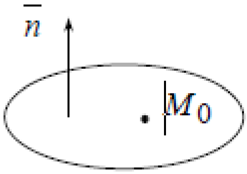
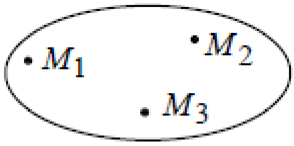
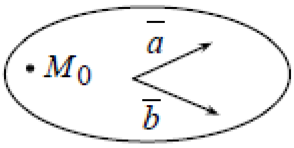
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

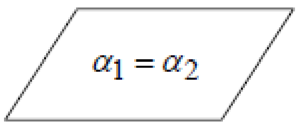
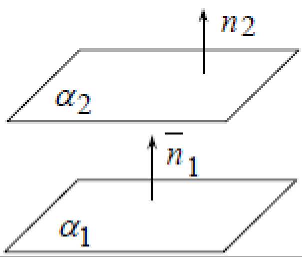
Парабола		
	Рівняння	$y^2=2px$
	Фокус	$\mathrm{F}\left(\frac{p}{2};0\right)$
	Директриса	$x=\frac{-p}{2}$
	Рівняння	$y^2=-2px$
	Фокус	$\mathrm{F}\left(\frac{-p}{2};0\right)$
	Директриса	$x=\frac{p}{2}$
	Рівняння	$x^2=2py$
	Фокус	$\mathrm{F}\left(0;\frac{p}{2}\right)$
	Директриса	$y=\frac{-p}{2}$
	Рівняння	$x^2=-2py$
	Фокус	$\mathrm{F}\left(0;-\frac{p}{2}\right)$
	Директриса	$y=\frac{p}{2}$

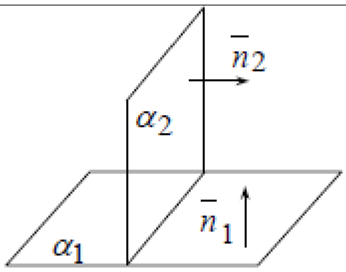
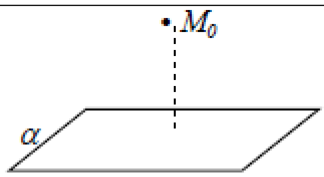
ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ
Пряма у просторі
1. Канонічне рівняння прямої

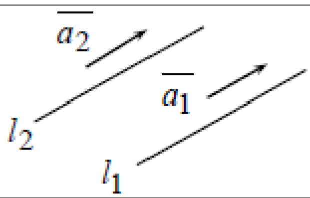
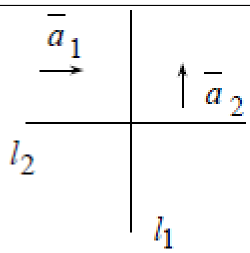
	$\overline{a}=(p;q;r), M_0(x_0;y_0;z_0)$ $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$
2.Параметричні рівняння прямої	
	$\overline{a}=(p;q;r), M_0(x_0;y_0;z_0)$ $x=x_0+pt,$ $y=y_0+qt,$ $z=z_0+rt$
3.Рівняння прямої, що проходить через дві точки	
	$M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$
4.Загальне рівняння прямої (пряма як лінія перетину площин)	
	$\overline{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ $\overline{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$ $\overline{a}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}$ $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

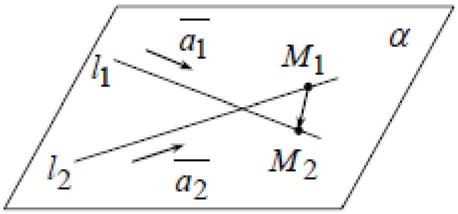
ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ
Рівняння площини
1.Рівняння площини, яка проходить через точку й перпендикулярно вектору

	$\overline{n}=(A;B;C), M_0(x_0;y_0;z_0)$ $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
2.Рівняння площини, яка проходить через три точки	
	$M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z_3)$ M(x;y;z)- точка з поточними координатами $\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
3.Рівняння площини, яка проходить через точку та паралельно двом векторам	
	$M_0(x_0;y_0;z_0)$, M($x;y;z$)- точка з поточними координатами $\overline{a}=(p_1;q_1;r_1)\overline{b}=(p_2;q_2;r_2)$ $\overline{M_0M}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}=0$
4.Загальне рівняння площини	
$Ax+By+Cz+D=0, \overline{n}=(A;B;C)$	

ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ	
Взаємне розташування площин	
Дано:	$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \overline{n_1}=(A_1;B_1;C_1)$ $\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \overline{n_2}=(A_2;B_2;C_2)$
Умова збігу площин	
	$\alpha_1 \text{¿} \alpha_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$
Умова паралельності площин	
	$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$ $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
Умова перпендикулярності площин	

	$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2}$ $\Leftrightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$ $\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$
Кут між площинами	
	$cos\varphi = \dfrac{\lvert \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} \rvert}{\lvert \overline{n_1} \rvert \cdot \lvert \overline{n_2} \rvert}$
Відстань від точки до площини	
	$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0, M_0(x_0; y_0; z_0)$ $d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ	
Взаємне розташування прямих у просторі	
Дано : $l_1 : \dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{q_1} = \dfrac{z - z_1}{r_1}, \overline{a_1} = (p_1; q_1; r_1), M_1(x_1; y_1; z_1)$ $l_2 : \dfrac{x - x_2}{p_2} = \dfrac{y - y_2}{q_2} = \dfrac{z - z_2}{r_2}, \overline{a_2} = (p_2; q_2; r_2), M_2(x_2; y_2; z_2)$	
Умова паралельності прямих	
	$l_1 \parallel l_2 \quad \overline{a_1} \parallel \overline{a_2}$ $\Leftrightarrow \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$
Умова перпендикулярності прямих	
	$l_1 \perp l_2 \quad \overline{a_1} \perp \overline{a_2} \quad \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$ $\Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0$
Умова належності прямих одній площині	

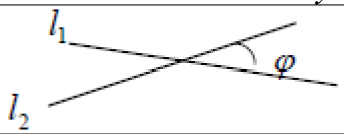


$l_1, l_2 \subset \alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}\cdot\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=0$

Умова мимобіжності прямих

$l_1 \dot{-} l_2 \quad \overline{M_1M_2}\cdot\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}\neq 0$

Кут між прямими



$$\cos\varphi=\frac{|\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}|}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|}$$

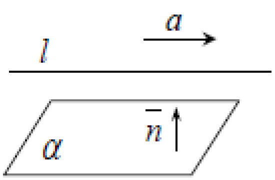
ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Взаємне розміщення прямої та площини

Дано: $l:\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$; $\quad \overline{a}=(p;q;r), M_0(x_0;y_0;z_0)$

$\alpha: Ax+By+Cz+D=0; \overline{n}=(A;B;C)$

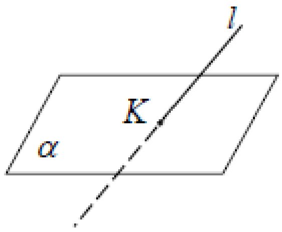
Паралельності прямої та площини



$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \overline{a}\perp\overline{n}$

$\Leftrightarrow Ap+Bq+Cr=0$

Умова перетину прямої і площини

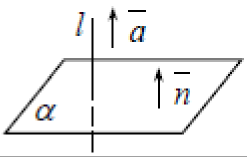


$l\cap\alpha \Leftrightarrow Ap+Bq+Cr\neq 0$

$l\cap\alpha=K$

$$K:\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

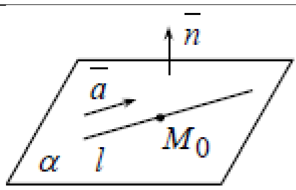
Умова перпендикулярності прямої і площини



$l\perp\alpha \Leftrightarrow \overline{n}\parallel\overline{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$$

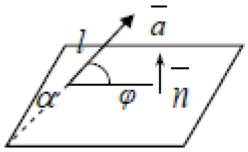
Умова належності прямої площині

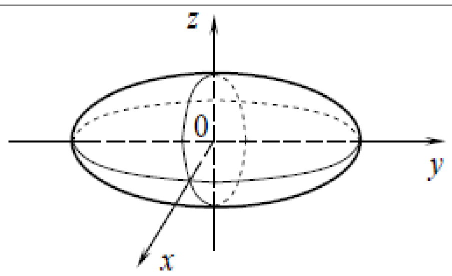
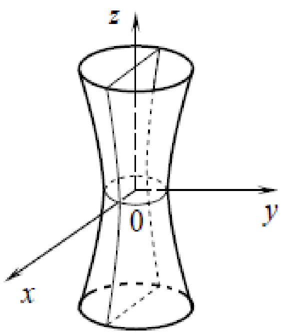
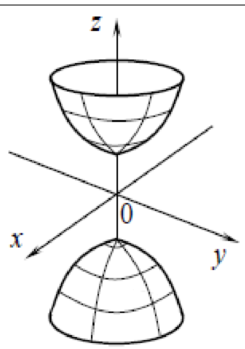


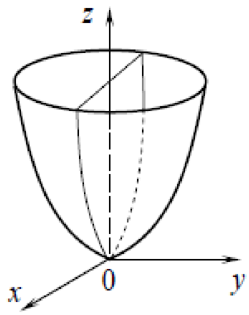
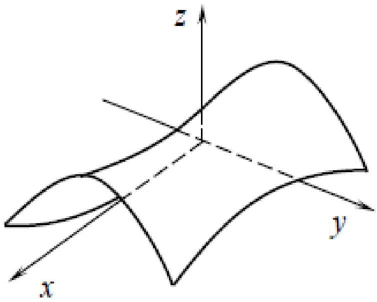
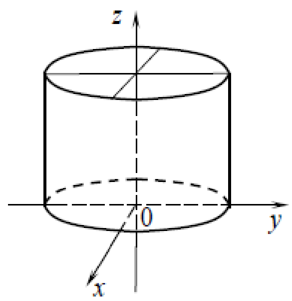
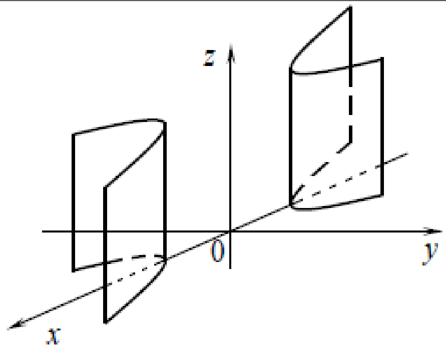
$$l\subset\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{n}\perp\overline{a} \\ M_0\in\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

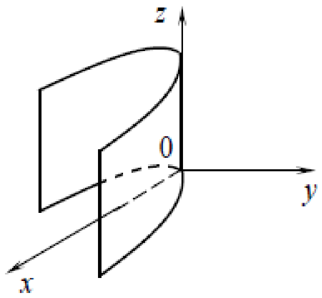
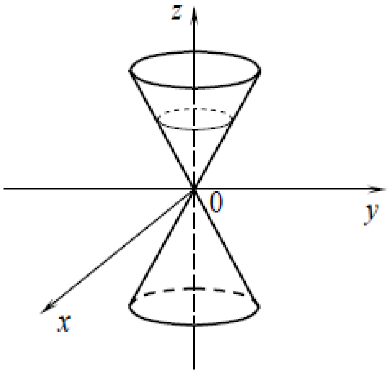
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ap+Bq+Cr=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

Кут між прямою та площиною

	$\sin\varphi = \dfrac{\lvert\bar{a}\cdot\bar{n}\rvert}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{n}\rvert}$

ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	
Вид поверхні	Рівняння поверхні
Еліпсоїд	
	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
Однопорожнинний гіперболоїд	
	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
Двопорожнинний гіперболоїд	
	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
Еліптичний параболоїд	

<table>
<tr><td>
</td><td>$z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Гіперболічний параболоїд</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Еліптичний циліндр</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Гіперболічний циліндр</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Параболічний циліндр</td></tr>
</table>

	$y^2 = px$
Конус	
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

**КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Я, Чорна Юлія Володимирівна,
учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

20.04.2020		Юлія Чорна
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)