МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

РОЗРОБКА НАВЧАЛЬНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ ТА МЕТОДИ ЗОБРАЖЕНЬ»

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти Середня освіта (математика)
Конотоп Катерина Анатоліївна
Керівник кандидат педагогічних наук,
старший викладач Григор'єва В.Б.
Рецензент кандидат фізико-математичних наук,
доцент Валько Н.В.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

Вступ ………………………………………………………………. 3

Розділ 1. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з курсу «Проективна геометрія та методи зображень»

1.1. Огляд літератури та аналіз сучасного стану проблеми ……. 5

1.2. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з курсу «Проективна геометрія та методи зображень» ………….. 6

Розділ 2. Навчальний матеріал для розробки планів практичних занять з курсу «Проективна геометрія та методи зображень» …... 32

Висновки …………………………………………………………….. 48

Список використаних джерел ……………………………………… 49

Додатки ……………………………………………………………… 51

ВСТУП

Важливою складовою професійної підготовки майбутнього вчителя математики є навчальна дисципліна «Проективна геометрія та методи зображень». Мета курсу "Проективна геометрія та методи зображень" полягає у формуванні в майбутніх фахівців у галузі математики більш широкого погляду на геометрію, глибшого і чіткішого розуміння зв'язків між різними геометричними системами, природи геометричних властивостей, можливостей різних методів їх вивчення.

Завдання курсу:

- розкрити місце і значення знань з проективної геометрії в загальній і професійній освіті людини, з'ясувати взаємозв'язки курсу проективної геометрії з іншими навчальними дисциплінами;
- показати практичну значущість методів проективної геометрії, їх застосовність до розв'язання найрізноманітніших геометричних задач;
- забезпечити ґрунтовне вивчення студентами тих понять і методів проективної геометрії, які можуть бути використані ними під час викладання шкільної геометрії та проведення позакласних занять з математики.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен *знати*: основні геометричні поняття і відношення; основні визначення та теореми проективної геометрії; формулювання тверджень та методи доведення основних із них; можливі сфери їх застосувань в шкільній математиці;

вміти: проводити стандартні дослідження геометричних властивостей і обчислювати різні геометричні характеристики; робити геометричні побудови використовуючи методи зображень, які базуються на теорії проективної геометрії; застосовувати координатний метод для розв'язування задач аналітичної і проективної геометрії; застосовувати методи геометричних побудов при розв'язанні відповідних типів задач.

Мета роботи – розробка навчально-методичного комплексу з навчальної дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень».

Об'єктом дослідження є процес підготовки майбутніх вчителів математики, а *предметом* – безпосередньо організація навчання дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень».

Завдання роботи:

1) аналіз навчально-методичної літератури з «Проективної геометрії та методів зображень» та складання на основі його списків літературних джерел, що є корисними при вивченні тем дисципліни;

2) розробка планів-конспектів лекційних та практичних занять з курсу;

3) розробка методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять з проективної геометрія та методів зображень, зокрема, самостійних робіт;

4) розробка завдань комплексної контрольної роботи для проведення контрольних заходів з тем курсу, а також розробка питань для проведення заліку або екзамену.

Для розв'язування поставлених завдань застосовувалися такі *методи* науково-педагогічного дослідження: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження; вивчення педагогічного досвіду викладачів.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ «ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ ТА МЕТОДИ ЗОБРАЖЕНЬ»

1.1. Огляд літератури та аналіз сучасного стану проблеми

Проективна геометрія – це розділ геометрії, в якому вивчаються властивості фігур, що не змінюються при проективних перетвореннях, тобто перетвореннях, при яких прямі переходять у прямі. Проективна геометрія реалізується в евклідовому просторі, доповненому нескінченно віддаленими елементами. Такий простір називається проективним. При проективних перетвореннях зберігається гармонійне розташування точок на прямій. Кожне проективне перетворення площини зводиться до перспективи її на другу площину і до суміщення цих площин. Основним інваріантом проективних перетворень є подвійне відношення. Паралельність і перпендикулярність прямих, рівність відрізків і кутів не є інваріантами проективних перетворень. В класичній проективній геометрії основними теоремами є теорема Бріаншона, теорема Дезарга, теорема Паскаля. Існує кілька систем аксіом для завдання проективного простору як сукупності точок, прямих і площин, зв'язаних відношеннями належності та порядку. З виникненням і розвитком графів теорії та комбінаторного аналізу значного розвитку набула теорія скінченних геометрій; зокрема, триває вивчення властивостей скінченних проективних площин, тобто площин, що складаються зі скінченної кількості точок і прямих. Основи проеквтиної геометрії закладено в працях Ж. Дезарга, Б. Паскаля і Ж. Понселе. Значний внесок у її розвиток зробили Е. Картан, А. Келі, Ф. Клейн, А. Ф. Мебіус, М. Шаль, К. О. Андрєєв та ін.

Вивчення навчальної дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень» організовується на принципах кредитно-модульної системи, яка сприяє систематичній і динамічній роботі студентів над засвоєнням досить складної дисципліни, з використанням модульної технології навчання та рейтингового оцінювання якості засвоєння навчального матеріалу.

За навчальним планом спеціальності 014 Середня освіта (математика) вивчення курсу «Проективна геометрія та методи зображень» передбачено протягом 3 семестру. Загальний обсяг дисципліни об’єднує усі види навчальної діяльності студента: аудиторні заняття (лекційні, семінарські, практичні), самостійну роботу студентів, контрольні заходи (самостійні роботи, контрольні роботи, тестові завдання, залік або екзамен). Самостійна робота студентів має дві складові: самостійна підготовка до аудиторних занять і підготовка до модульного контролю або екзамену.

Що стосується сучасного стану проблеми методичного забезпечення курсу «Проективна геометрія та методи зображень» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика), то можна зазначити, що комплекси з даної дисципліни, ймовірно, розроблені на відповідних кафедрах закладів вищої освіти педагогічного напрямку, проте, як відомо, доступ до зазначених комплексів мають, як правило, або викладачі випускаючих кафедр, або студенти відповідних вишів.

1.2. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з курсу «Проективна геометрія та методи зображень»

До теми «Проективний простір»

1. Нехай M – довільна точка площини π, точка M' перетину прямої OM з площиною σ (див. рис. 1.1) *називається проекцією точки* M на площину σ (з центра O).

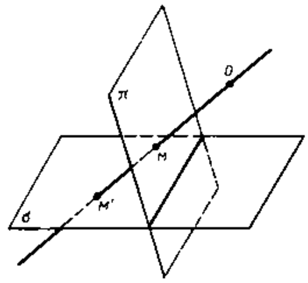


Рис. 1.1

2. Якщо Φ – довільна фігура на площині π, то множина проекцій всіх точок фігури Φ на площину σє фігурою площини σ, яка *називається проекцією фігури* Φ.

3. Властивості фігури Φ, що зберігаються при довільному центральному проектуванні називаються *проективними* (за Понселе).

4. Нехай A – довільна точка простору, a – пряма, що не проходить через точку A (див. рис. 1.2), а через A і a проведена площина α, де всі можливі прямі площини α, які проходять через точку A утворюють плоский пучок з центром A, називається пучок A.

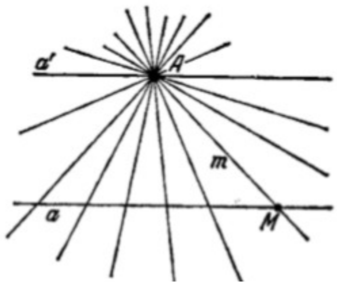


Рис. 1.2

5. Щоб перетворити центральне проектування у взаємно однозначну відповідність, простір E_3 доповнюють новими точками, а саме: до всіх звичайних точок кожної прямої подумки добавляємо ще одну, яку *називають невласною точкою (нескінченно віддаленою точкою),* а звичайні точки *називають власними точками*.

6. Пряма, яка доповнена невласною точкою, *називається розширеною прямою.*

7. Площина, яка доповнена невласною прямою, *називається розширеною площиною.*

8. Простір E_3, доповнений невласною площиною *називається розширеним евклідовим простором.*

Твердження (про центральне проектування):

1) дві паралельні прямі мають одну і ту ж невласну точку;

2) непаралельні прямі мають різні невласні точки;

3) якщо розширена пряма лежить в площині, то її невласна точка лежить у цій же площині;

4) усі невласні точки площини утворюють невласну пряму;

5) усі невласні точки простору E_3 утворюють невласну точку.

Твердження (про взаємне розташування розширених прямих і площин):

1) довільні дві прямі, що лежать у площині, перетинаються, тобто мають спільну (власну або невласну) точку;

2) довільна пряма, яка не лежить у площині, перетинає площину, тобто має з нею спільну (власну або невласну) точку;

3) довільні дві площини перетинаються по прямій, тобто мають спільну (власну або невласну) пряму.

До теми «Координати точок на проективній прямій та проективній площині»

1. *Проективним базисом (або проективною системою координат)* на площині σ називається упорядкована система точок A_1, A_2, A_3, E загального розташування площини σ і позначається $R=(A_1, A_2, A_3, E)$.

2. Точки A_1, A_2, A_3 *називаються вершинами базису*, точка E – *одинична точка*, прямі A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 – *координатні прямі*.

3. Якщо вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{e}$ породжують точки A_1, A_2, A_3, E, $\vec{e}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$, то система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{e}$ *називається узгодженою* відносно базису R.

4. Числа x_1, x_2, x_3 *називаються проективними координатами* точки X у базисі R.

5. Упорядкована система трьох точок A_1, A_2, E проективної прямої l *називається проективним базисом прямої* $R=(A_1, A_2, E)$.

6. Точки A_1, A_2 *називаються вершинами ба*зису, а точка E – *одинична точка*.

7. Якщо вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{e}$, породжуючи вершини і одиничну точку проективного базису E, вибрані так, що $\vec{e}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$, то система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{e}$ *називається узгоджена відносно базису* R.

8. Числа x_1, x_2 *називаються проективними координатами* точки X у базисі R.

9. Нехай X – довільна точка площини σ, яка відмінна від точки A_3, а X_3 – точка перетину прямих A_1A_2 і A_3X (див. рис. 2.1), то точка X_3 називається проекцією точки X з центра A_3 на пряму A_1A_2.

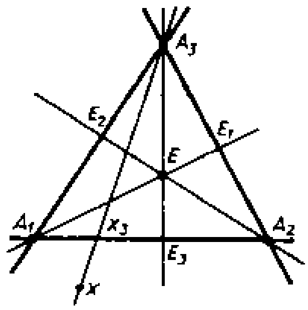


Рис. 2.1

Лема 2.1. Якщо кожна з систем векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{e}$ і $\vec{a}_1'$, $\vec{a}_2'$, $\vec{a}_3'$, $\vec{e}'$ узгоджена відносно даного базису $R=(A_1, A_2, A_3, E)$, то існує таке число $\lambda\neq0$, що $\vec{a}_1'=\lambda\vec{a}_1$, $\vec{a}_2'=\lambda\vec{a}_2$, $\vec{a}_3'=\lambda\vec{a}_3$, $\vec{e}'=\lambda\vec{e}$.

Лема 2.2. Якщо (x_1, x_2, x_3) – координати точки X у базисі R, а $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{e}$ – яка-небудь система векторів, узгоджена відносно базису R, то вектор $\vec{y}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+x_3\vec{a}_3$ породжує точку X.

Теорема 2.1. Три точки $X(x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_1, y_2, y_3)$, $Z(z_1, z_2, z_3)$, що задані координатами у базисі R, лежать на одні прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Теорема 2.2. Якщо довільна точка X площини, яка відмінна від точки A_3, у базисі R має координати x_1, x_2, x_3, то проекція X_3 точки X з центра A_3 на пряму A_1A_2 у базисі R_3 має координати x_1, x_2.

До теми «Перетворення проективних координат точок на площині і на прямій. Рівняння прямої. Координати прямої»

1. Нехай вершина базису R' у базисі R мають такі координати: $A_1'(a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $A_2'(a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $A_3'(a_{13}, a_{23}, a_{33})$, $E'(a_{10}, a_{20}, a_{30})$, тоді матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\, a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\, a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\, a_{30} \end{pmatrix}$$

називається матрицею переходу від базису R до базису R'.

2. Стовпці матриці *називаються узгодженими*, якщо вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ не компланарні, а вектори $\vec{a}_1'$, $\vec{a}_2'$, $\vec{a}_3'$, $\vec{e}'$ узгоджені з базисом R' і виконується рівність $\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3'-\vec{e}'=\vec{0}$, що буде місце тоді і тільки тоді, коли четвертий стовпчик матриці буде сумою перших трьох стовпців.

3. Матриця виду $\begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13}\, a_{10} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23}\, a_{20} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33}\, a_{30} \end{pmatrix}$ *називається матрицею переходу* від базису R до базису R', де стовпці цієї матриці є узгодженими.

4. Нехай вершини базису R' у базисі R мають координати: $A_1'(a_{11}, a_{21})$, $A_2'(a_{12}, a_{22})$, $E'(a_{10}, a_{20})$, тоді матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix}$$

називається матрицею переходу від базису R до базису R'.

5. *Рівняння фігури Φ* у вибраному базисі *називається* таке рівняння, якому задовольняють координати довільної точки цієї фігури і не задовольняють координати точок, які не належать цій фігурі.

6. Нехай $M(x_1, x_2, x_3)$ – довільна точка прямої d, тоді точки M, A, B лежать на одній прямій, тому рівняння

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

називається рівнянням прямої, що проходить через точки A і B.

7. *Параметричними рівняннями прямої* d *називаються* рівняння виду $x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1$, $x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2$, $x_3 = \lambda a_3 + \mu b_3$, де λ і μ одночасно не дорівнюють нулю.

8. Числа u_1, u_2, u_3 *називаються координатами прямої* d у базисі R і при цьому пишуть $d(u_1, u_2, u_3)$, якщо у базисі R пряма d задана рівнянням $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$.

Формули перетворення проективних координат проективної площини:

$$\rho x_1 = a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + a_{13} x_3',$$

$$\rho x_2 = a_{21} x_1' + a_{22} x_2' + a_{23} x_3',$$

$$\rho x_3 = a_{31} x_1' + a_{32} x_2' + a_{33} x_3'.$$

Формули перетворення проективних координат проективної прямої :

$$\rho x_1 = a_{11} x_1' + a_{12} x_2',$$

$$\rho x_2 = a_{21} x_1' + a_{22} x_2'.$$

Теорема 3.1. Фігура на проективній площині, яка задана у проективному базисі однорідним рівнянням першого степеня, є пряма лінія.

Теорема 3.2. Нехай задані прямі d_1, d_2 рівняннями:

$$d_1 : u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

$$d_2 : v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0,$$

тоді а) прямі d_1, d_2 співпадають тоді і тільки тоді, коли ранг $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1$

;

б) d_1, d_2 перетинаються, коли ранг $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$.

До теми « Принцип двоїстості. Теорема Дезарга»

1. *Тривершинником називається* фігура, як складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох прямих, які з'єднують ці точки.

2. Точки A, B, C *називаються вершинами*, а прямі AB, BC, AC – *сторонами.*

3. Вершини A і A', B і B', C і C' *називаються відповідними*, а також *відповідними* будуть *сторони* AB і $A'B'$, BC і $B'C'$, AC і $A'C'$.

Принцип двоїстості на площині: якщо справедливе твердження Δ, в якому мова йде про точки, прямі на проективній площині та про їх взаємну належність, то справедливе й так зване двоїсте твердження $\Delta^{¿}$, яке отримується з Δ заміною слова «точка», словом «пряма» і слова «пряма» словом «точка».

Принцип двоїстості у просторі: якщо справедливе твердження Δ, в якому мова йде про точки, прямі і площини проективного простору та про їх належність, то справедливе й так зване двоїсте твердження Δ*, яке отримується з Δ заміною слів «точка», «пряма», «площина» відповідно словами «площина», «пряма», «точка».

Теорема 3.1 *(теорема Дезарга).* Якщо прямі, що проходять через відповідні вершини двох тривершинників, проходять через одну точку, то відповідні сторони цих тривершинників перетинаються у точках, які лежать на одній прямій.

Теорема 3.2 *(обернена теорема Дезарга)*. Якщо точки перетину відповідних сторін двох тривершинників лежать на одній прямій, то прямі, що проходять через відповідні вершини цих тривершинників, проходять через одну точку.

До теми «Складне відношення чотирьох точок та чотирьох прямих пучка»

1. Якщо на прямій задано чотири точки A, B, C, D і точка D має координати x_1, x_2 в базисі (A, B, C), то число $\frac{x_1}{x_2}$ *називається складним*

(подвійним або ангармонічним) відношенням точок A, B, C, D і позначається (AB, CD). Отже,

$$(AB,CD)=\frac{x_1}{x_2}.$$

2. Якщо A, B, C, D – чотири точки прямої g, то пара точок A, B *розділяє пару точок* C, D, якщо $(AB,CD)<0$, і *не розділяє пару точок* C, D, якщо $(AB,CD)>0$.

3. Точка M' *називається проекцією точки* M на пряму g' з центра O, де M – довільна точка прямої g, а M' – точка перетину прямих OM і g' (див. рис. 5.1).

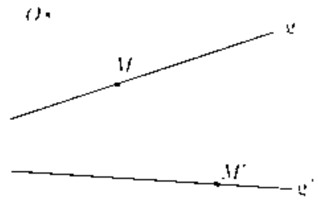


Рис. 5.1

4. Нехай a, b, c, d – чотири прямі деякого пучка з центром у точці O, пряма g не проходить через точку O, а A, B, C, D – точки перетину g з прямими (див. рис. 5.2), тоді число (AB,CD) *називається складним відношенням прямих* a, b, c, d і позначається через (ab,cd).

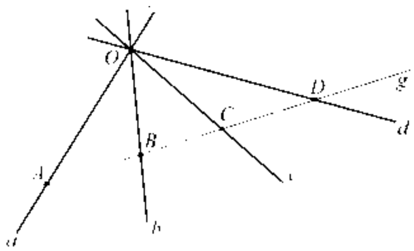


Рис. 5.2

Теорема 5.1. Якщо A, B і C – різні точки прямої, а λ – довільне дійсне число, то на даній прямій існує одна і тільки одна точка X така, що $(AB,CX)=\lambda$.

Наслідок 5.1. Якщо на прямій задані точки A, B, C, D і D', які задовольняють умову $(AB,CD)=(AB,CD')$, то точки D і D' співпадають.

Теорема 5.2. Якщо точки A, B, C, D, які лежать на одній прямій, мають у базисі R координати $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$ і $D(d_1,d_2)$, причому точки A, B, C різні і точка D не співпадає з точкою A, то

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}. \qquad (5.1)$$

Теорема 5.3. Якщо A, B, C, D – власні точки, а P_∞ – невласна точка розширеної прямої, то

$$(AB,CD)=\frac{(AB,C)}{(AB,D)},\ (AB,CP_\infty)=-(AB,C),$$

де (AB,C) і (AB,D) – прості відношення відповідних точок.

Теорема 5.4. Якщо A, B, C, D – точки прямої g, а A', B', C', D' – їх проекції на пряму g' із точки O, то $(AB,CD)=(A'B',C'D')$.

Властивості подвійного відношення чотирьох точок:

1. $(AB,CD)=(CD,AB)$.
2. $(AB,CD)=\dfrac{1}{(AB,CD)}$, $(AB,CD)=\dfrac{1}{(BA,CD)}$, якщо $(AB,CD)\neq 0$.
3. $(AB,CD)=(BA,DC)$.
4. $(AB,CC)=1$, $(AB,CB)=0$.
5. $(AB,CD)+(AC,BD)=1$.

Властивості складного відношення чотирьох прямих пучка:

1. $(ab,cd)=(cd,ab)$.
2. $(ab,cd)=\dfrac{1}{(ab,dc)}$, $(ab,cd)=\dfrac{1}{(ba,cd)}$, якщо $(ab,cd)\neq 0$.
3. $(ab,cd)=(ba,dc)$.
4. $(ab,cc)=1$, $(ab,cb)=0$.
5. $(ab,cd)+(ac,bd)=1$.

Твердження 5.1. Нехай на проективній площині задані чотири прямі одного пучка у базисі $R=(M_1,M_2,M_3,E)$ своїми координатами: $a(a_1,a_2,a_3)$, $b(b_1,b_2,b_3)$, $c(c_1,c_2,c_3)$, $d(d_1,d_2,d_3)$, тоді складне відношення цих прямих обчислюється за однією з формул:

$$(ab,cd)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}},$$

$$(ab,cd)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$(ab,cd)=\frac{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

До теми «Проективні перетворення площини»

1. Перетворення проективної площини *називається проективним*, якщо точкам довільної прямої відповідають точки, які лежать на деякій прямій так, що зберігається складне відношення чотирьох точок, тобто довільних точок M_1, M_2, M_3, M_4 однієї прямої та їх образів $M_1^{'}$, $M_2^{'}$, $M_3^{'}$, $M_4^{'}$ виконується рівність $(M_1M_2,M_3M_4)=(M_1^{'}M_2^{'},M_3^{'}M_4^{'})$.

2. Нетотожне проективне перетворення *називається гомологією*, якщо воно має принаймні три інваріантні точки, які лежать на одній прямій.

3. *Центром гомології називається* точка перетину прямих, які проходять через відповідні точки гомології.

4. Якщо центр гомології не лежить на осі гомології, то гомологія *називається гіперболічною*; якщо центр гомології лежить на осі, то гомологія *називається параболічною*.

5. Фігури F і $F^{'}$ *називаються проективно-еквівалентними*, якщо існує таке проективне перетворення, яке фігуру F переводить у фігуру $F^{'}$.

Лема 6.1. Нехай $R=(M_1,M_2,M_3,E)$ і $R^{'}=(M_1^{'},M_2^{'},M_3^{'},E^{'})$ – проективні базиси проективної площини. Тоді відображення f, яке кожній точці з заданими координатами у базисі R ставить у відповідність точку з тими ж координатами у базисі R', є проективним перетворенням.

Лема 6.2. Якщо проективні перетворення f_1 і f_2 три точки A, B, C деякої прямої g переводять відповідно у точки A', B', C', то $f_1(M)=f_2(M)$, де M – довільна точка даної прямої g.

Теорема 6.1. Нехай $R=(M_1,M_2,M_3,E)$, $R'=(M_1',M_2',M_3',E')$ – довільні базиси проективної площини. Тоді існує одне і тільки одне проективне перетворення, яке переводить базис R у базис R'. При цьому точка з даними координатами у базисі R переходить у точку з тими ж координатами у базисі R'.

Наслідок 6.1. Якщо вершини і одинична точка деякого базису є інваріантними точками проективного перетворення, то воно є тотожним перетворенням.

Властивості проективних перетворень:

1. При проективному перетворення три точки, які не лежать на одній прямій, переходять у три точки, які також не лежать на одній прямій.
2. При проективному перетворення довільний базис переходить у базис.
3. При проективному перетворенні пряма переходить у пряму.
4. При проективному перетворенні пучок прямих переходить у пучок прямих.

Властивості гомології:

1. Пряма, що проходить через не співпадаючі відповідні точки гомології, є інваріантною прямою.
2. Прямі, які проходять через не співпадаючі відповідні точки гомології, належать одному пучку, центр якого є інваріантною точкою гомології.

Теорема 6.2. Якщо відображення проективної площини у деякому базисі R задане аналітично формулами:

$$\rho x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3,$$

$$\rho x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3,$$

$$\rho x_3' = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3,$$

де $det\|a_{ij}\| \neq 0$, то це відображення є проективним перетворенням.

До теми «Повний чотиривершинник»

1. Нехай A, B, C, D – чотири точки проективної прямої, тоді пара точок A, B *гармонійно розділяє* пару точок C, D, якщо $(AB, CD) = -1$ (кажуть також, що A, B гармонійно спряжена з C, D).

2. *Повний чотиривершинник* – це фігура, яка складається з чотирьох точок проективної площини, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і шести прямих, які з'єднують попарно ці точки. Указані точки *називаються вершинами*, а прямі – *сторонами* повного чотиривершинника.

3. Сторони, які не мають спільної вершини, *називаються протилежними*.

4. Точки перетину протилежних сторін *називаються діагональними точками*.

5. Прямі, які попарно з'єднують діагональні точки *називаються діагоналями* повного чотиривершинника.

6. Точка D *називається четвертою гармонійною до трьох точок* A, B, C, якщо $(AB, CD) = -1$.

Лема 7.1. Діагональні точки повного чотиривершинника не лежать на одній прямій.

Теорема 7.1. На кожній діагоналі повного чотиривершинника діагональні точки гармонійно розділяють дві точки, в яких ця діагональ перетинає сторони, що проходять через третю діагональну точку.

Наслідок 7.1. Дві вершини, що лежать на стороні чотиривершинника, гармонійно розділяють пару точок, яка складається з діагональної точки і точки, в якій ця сторона перетинає діагональ, що проходить через дві інші діагональні точки.

Наслідок 7.2. Дві протилежні сторони чотиривершинника гармонійно розділяють дві діагоналі, що проходять через точку перетину цих сторін.

Постулати побудов на проективній площині:

1. Побудова прямої, яка проходить через дві побудовані точки.

2. Побудова точки перетину двох побудованих прямих.

До теми «Проективні відображення прямих та пучків. Проективні перетворення прямої»

1. Нехай g і g' – дві прямі проективної площини. Взаємно однозначне відображення множини точок прямої g на множину точок прямої g' *називається проективним*, якщо воно зберігає складне відношення чотирьох точок, тобто $(AB,CD)=(A'B',C'D')$, де A, B, C, D – точки прямої g, а A', B', C', D' – відповідно їх образи на прямій g'.

2. Нехай g, g' – дві прямі, O – точка, яка не лежить на g і g'. Кожній точці M прямої g поставимо у відповідність проекцію M' цієї точки на пряму g' з центра O (див. рис. 8.1). Тоді таке проективне відношення *називається перспективним відображенням прямої g на пряму g'*. Точка O *називається центром перспективи*.

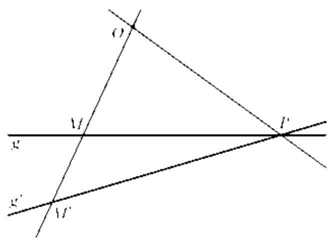


Рис. 8.1

3. Взаємно однозначне відображення пучка O на пучок O' *називається проективним*, якщо воно зберігає складне відношення чотирьох прямих.

4. Відображення пучка O на пучок O' є проективним і *називається перспективним відображенням пучка O на пучок O'*, а пряма d *називається віссю перспективи*.

5. Якщо прямі g і g' співпадають, то проективне відображення прямої g на пряму g' *називається проективним перетворенням прямої* g.

6. Нехай $f: g \to g$ – це проективне перетворення прямої g, тоді точка цієї прямої *називається інваріантною (нерухомою) точкою* перетворення f, якщо вона переходить у себе у цьому перетворення.

7. Нехай f – проективне перетворення прямої g, тоді обернене перетворення f^{-1} *називається проективним перетворенням прямої* g.

8. Нетотожне проективне перетворення прямої *називається інволюцією*, якщо воно співпадає з оберненим перетворенням.

9. Інволюція *називається еліптичною*, якщо вона немає інваріантних точок, і *гіперболічною*, якщо вона має дві інваріантні точки.

Теорема 8.1. Якщо $R=(M_1, M_2, M_3)$ і $R'=(M_1', M_2', M_3')$ – довільні базиси на прямих g і g', то існує одне і тільки одне проективне відображення прямої g на пряму g', яке базис R переводить у базис R'.

Теорема 8.2. Для того, щоб дане проективне відношення $f: g \to g'$ було перспективним, необхідно і достатньо, щоб точка перетину прямих g і g' переходила сама в себе.

Теорема 8.3. Якщо a, b, c – три довільні прямі пучка O, a', b', c' – три довільні прямі пучка O', то існує єдине проективне відображення пучка O на пучок O', яке прямі a, b, c переводить відповідно у прямі a', b', c'.

Теорема 8.4. Для того, щоб дане проективне відображення одного пучка на інший пучок було перспективним, необхідно і достатньо, щоб пряма, яка проходить через центри пучків переходила сама в себе.

Теорема 8.5. Якщо R і R' – довільні базиси на прямій g, то існує одне і тільки одне проективне перетворення прямої g, яке базис R переводить у базис R'.

Теорема 8.6. Якщо проективне перетворення прямої має три нерухомі точки, то воно є тотожним перетворенням.

Теорема 8.7. Якщо у даному проективному перетворенні $f: g \to g$ деяка точка A прямої g переходить у точку B, яка відмінна від точки A, а точка B переходить у точку A, то f є інволюція.

Теорема 8.8. Кожна інволюція або немає жодної нерухомої точки, або має лише дві нерухомі точки.

Властивість гіперболічної інволюції: дві інваріантні точки гіперболічної інволюції гармонійно розділяють довільні дві відповідні точки цієї інволюції, які не співпадають.

До теми «Лінія другого порядку»

1. У базисі R точкою *називається довільна трійка чисел* (x_1, x_2, x_3), де $x_1, x_2, x_3 \in C$, де C – множина усіх комплексних чисел, а числа x_1, x_2, x_3 – *координати точки*.

2. Точка M *називається дійсною*, якщо її координати – дійсні числа або можуть бути зведені до дійсних чисел множенням на якесь комплексне число $\lambda \neq 0$; в іншому випадку точка *називається уявною*.

3. Множину всіх дійсних і уявних точок *називають комплексною проективною площиною*.

4. Дві точки A_1 і A_2 *називаються комплексно-спряженими*, якщо їх координати можуть бути записані у вигляді $A_1(a_1+ib_1, a_2+ib_2, a_3+ib_3)$, $A_2(a_1-ib_1, a_2-ib_2, a_3-ib_3)$, де a_i, b_i – дійсні числа.

5. *Прямою лінією у комплексній проективній площині називається* множина усіх (дійсних і уявних) точок, координати (x_1, x_2, x_3) яких у вибраному базисі задовольняють рівняння:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

причому u_1, u_2, u_3 (координати прямої) – комплексні числа, які одночасно не можуть дорівнювати нулю.

6. Пряма *називається дійсною*, якщо її координати – дійсні числа або можуть бути зведені до дійсних чисел множенням на якесь комплексне число $\lambda \neq 0$, в іншому разі пряма називається *уявною*.

7. *Складним відношенням точок* A, B, C, D називається число (AB,CD), яке визначається формулою (5.1).

8. Пари точок A, B і C, D *називаються гармонійно спряженими*, якщо $(AB,CD)=-1$.

9. *Лінією другого порядку називається* множина всіх точок проективної площини, координати яких у деякому базисі R задовольняють однорідному рівнянню другого степеня:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0.$$

10. Нехай $A=\|a_{ij}\|$ – матриця, складена з коефіцієнтів рівняння, тоді ранг цієї матриці *називається рангом лінії другого порядку*.

11. Лінія *називається невиродженою*, якщо ранг r цієї лінії дорівнює 3, і *виродженою*, якщо $r<3$.

Твердження:

1. На кожній дійсній прямій знаходиться нескінченна множина уявних точок.

2. На кожній уявній прямій лежить тільки одна дійсна точка.

3. Через дві точки проходить одна і тільки одна пряма. Через комплексно-спряжені точки проходить дійсна пряма.

4. Довільні дві прямі перетинаються в одній точці (дійсній або уявній).

Лема 9.1. Якщо J_1 і J_2 – комплексно-спряжені точки дійсної прямої d, а P – довільна дійсна точка цієї прямої, то існує на цій прямій єдина дійсна точка Q_1 так, що $(J_1J_2,PQ_1)=-1$, та дуга єдина дійсна точка Q_2 така, що $(J_1J_2,PQ_2)=i$.

Лема 9.2. Довільна пряма перетинає невироджену лінію другого порядку не більш, ніж у двох точках.

Теорема 9.1. При довільному проективному перетворенні лінія другого порядку рангу r переходить у лінію другого порядку того ж самого рангу r.

Типи ліній другого порядку на проективній площині:

а) якщо $r=3$, тоді отримуємо такі рівняння:

1. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ – *нульова лінія другого порядку* (немає жодної дійсної точки);

2. $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ – *овальна лінія другого порядку*;

б) якщо $r=2$, тоді

3. $x_1^2+x_2^2=0$ – *пара уявних прямих* ($x_1+ix_2=0$ і $x_1-ix_2=0$), що перетинаються у дійсній точці $(0,0,1)$;

4. $x_1^2-x_2^2=0$ – *пара дійсних прямих*;

в) $r=1$, тоді $x_1^2=0$ – *пара прямих, які співпадають*.

До теми «Полюс і поляра»

1. Точки $P(p_1,p_2,p_3)$ і $Q(q_1,q_2,q_3)$ *називаються спряженими* відносно лінії γ, заданої рівнянням $\sum a_{ij}x_i x_j=0$, якщо

$$\sum a_{ij}p_i p_j=0.$$

2. *Автополярним тривершинником* (першого роду) відносно лінії γ називається тривершинник, в якого овальна лінія (або нульова лінія) γ у базисі R задана канонічним рівнянням $x_1^2+x_2^2+\varepsilon x_3^2=0$, де $\varepsilon=\pm 1$ і умова спряженості приймає вигляд $p_1q_1+p_2q_2+\varepsilon p_3q_3=0$, а вершини A_1, A_2, A_3 мають координати $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,)$, $A_3(0,0,1)$ й довільні з них спряжені відносно γ.

3. Нехай γ – невироджена лінія другого порядку, то коефіцієнти у (10.1) не дорівнюють нулю одночасно, тому множина g – пряма лінія, яка *називається полярою*, а точка P – *полюсом прямої* g.

4. Поляритетом називається бієкція $\Psi:\pi\to\pi'$, де π – множина точок проективної площини, π' – множина прямих проективної площини, Ψ: точка   поляра.

Теорема 10.1. У кожній точці $P(p_1,p_2,p_3)$ невиродженої лінії другого порядку, яка задана рівнянням $\sum a_{ij}x_i x_j=0$, існує єдина дотична, що визначається рівнянням

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i1}p_i\right)x_1+\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i2}p_i\right)x_2+\left(\sum_{i=1}^{3}a_{i3}p_i\right)x_3=0.(10.1)$$

Теорема 10.2. Дві точки P і Q, що не лежать на невиродженій лінії другого порядку γ, спряжені відносно цієї лінії тоді і тільки тоді, коли пряма PQ перетинається з лінією γ у двох точках, гармонійно спряжених із даними точками P і Q.

Теорема 10.3. Нехай задана невироджена лінія другого порядку. Якщо точка Q лежить на полярі точки P, то точка P лежить на полярі точки Q.

До теми « Овальна лінія другого порядку»

1. Точка M площини, яка не лежить на даній овальній лінії другого порядку γ, *називається внутрішньою точкою* відносно γ, якщо довільна пряма, що через точку M, перетинає лінію γ у двох дійсних точках. В іншому випадку, якщо вона не лежить на лінії γ, ця точка *називається зовнішньою*.

2. Нехай A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – шість точок загального розташування, тоді фігура утворена цими точками та шістьма прямими A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1, *називається шестивершинником* і позначається так: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

3. Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *називаються вершинами*, прямі A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1 – *сторонами*, а A_1A_2 і A_4A_5, A_2A_3 і A_5A_6, A_3A_4 і A_6A_1 – *протилежними*.

Лема 11.1. Точка $M(m_1, m_2, m_2)$ є внутрішньою точкою відносно овальної лінії, заданої рівнянням $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, тоді і тільки тоді, коли $m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 < 0$.

Твердження 11.1. Через довільну точку, зовнішню відносно овальної лінії $\gamma : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, проходять дві і тільки дві дотичні.

Теорема 11.1 *(теорема Штейнера).* Дано два пучка прямих з різними центрами O_1 та O_2 і встановлено проективне, але не перспективне відображення f першого пучка на другий, тоді множина γ точок перетину відповідних прямих цих пучків є овальною лінією другого порядку, що проходить через точки O_1 і O_2.

Наслідок 11.1. Якщо f – відображення, указане у теоремі 11.1, то прямі $f(O_1O_2)$ і $f^{-1}(O_1O_2)$ є дотичними до лінії γ відповідно в точках O_2 і O_1 .

Зауваження 11.1. Якщо пучки O_1 і O_2 перспективні, то $\gamma = O_1O_2 \cup d$, де d – вісь перспективи, тоді γ розпадається на пару прямих.

Теорема 11.2. Дана овальна лінія другого порядку γ і на ній дві довільні точки O_1 і O_2. Кожній прямій O_1M пучка з центром O_1 поставимо у відповідність пряму O_2M пучка з центром O_2, де M – довільна точка лінії γ, яка не співпадає з точками O_1 і O_2. Дотичній у точці O_1 поставимо у відповідність пряму O_2O_1, а прямій O_1O_2 – дотичну в точці O_2. Отримане відображення f є проективним, але не перспективним відображенням пучка з центром O_1 на пучок з центром O_2.

Теорема 11.3 *(теорема Паскаля).* Точки перетину протилежних сторін довільного шестивершинника, вписаного в овальну лінію другого порядку, лежать на одній прямій.

Теорема 11.4 *(обернена теорема Паскаля).* Якщо точки перетину протилежних сторін шестивершинника лежать на одній прямій, то всі його вершини лежать на овальній лінії другого порядку.

Теорема 11.5 *(теорема Бріаншона).* У кожному шестивершиннику, описаному навколо овальної лінії другого порядку, три прямі, які з’єднують протилежні вершини, проходять через одну точку.

Теорема 11.6 *(обернена теорема Бріаншона).* Якщо три прямі, які з’єднують протилежні вершини, проходять через одну точку, то даний шестивершинник описаний навколо овальної лінії другого порядку.

До теми «Паралельне проектування, зображення фігур у паралельній проекції»

1. Нехай $\acute{A}$ – довільна точка простору і проведена пряма через цю точку паралельно вектору $\vec{p}$, позначимо через A_0 *точку*, в якій ця пряма перетинає площину σ (див. рис. 12.1), тоді ця точка A_0 *називається*

проекцією точки $\acute{A}$ на площину σ при проектуванні паралельно вектору $\vec{p}$.

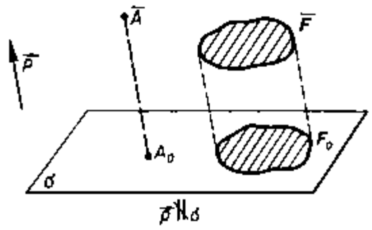


Рис. 12.1

2. Якщо площина σ і вектор $\vec{p}$ задані, то точка A_0 *називається паралельною проекцією точки* $\acute{A}$.

3. Якщо вектор $\vec{p}$ перпендикулярний до площини σ, то точка A_0 *називається ортогональною проекцією точки* $\acute{A}$ (див. рис. 12.2).

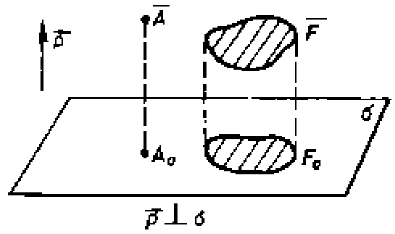


Рис. 12.2

4. *Паралельною проекцією фігури* $\acute{F}$ *називається* множина паралельних проекцій усіх точок даної фігури $\acute{F}$, яка утворює деяку фігуру F_0 (див. рис. 12.1).

5. Якщо вектор $\vec{p}$ перпендикулярний до площини σ, то F_0 *називається ортогональною проекцією фігури* $\acute{F}$(див. рис. 12.2).

6. Нехай $\acute{\sigma}$ і σ – різні площини. Взаємно однозначне відображення $f : \acute{\sigma} \rightarrow \sigma$ *називається афінним*, якщо воно три точки $\acute{M}_1$, $\acute{M}_2$, $\acute{M}_3$ площини $\acute{\sigma}$, що лежать на одній прямій, переводить у три точки M_1, M_2, M_3 площини σ, які лежать на одній прямій, і зберігає їх просте відношення, тобто $(\acute{M}_1 \acute{M}_2, \acute{M}_3) = (M_1 M_2, M_3)$.

7. Відображення $f : \acute{\sigma} \rightarrow \sigma$ *називається подібністю*, якщо існує таке число $k > 0$, що для довільних точок $\acute{A}$ і $\acute{B}$ площини $\acute{\sigma}$ та їх образів A і B площини σ виконується рівність $AB = k \acute{A} \acute{B}$.

8. Фігури F' і F, що лежать відповідно у площинах σ' і σ, *називаються афінно-еквівалентними*, якщо існує афінне відображення $f:\sigma' \to \sigma$, яке фігуру F' переводить у фігуру F.

9. Нехай σ – площина зображень, $\vec{p}$ – ненульовий вектор, який не паралельний площині σ, F' – довільна фігура (плоска або просторова), розташована у просторі, а F_0 – паралельна проекція цієї фігури на площину σ, тоді фігура F' *називається оригіналом*, а F_0 – *проекцією оригінала* (див. рис. 12.3).

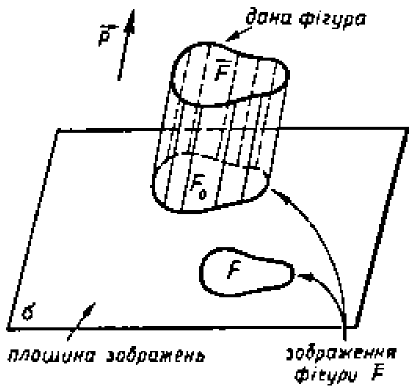


Рис. 12.3

10. Довільну фігуру F на площині σ, подібну до фігури F_0, *називають зображенням фігури* F'.

Властивості паралельного проектування:

1. Паралельною проекцією прямої є пряма.

2. Паралельною проекцією паралельних прямих є паралельні прямі або прямі, які співпадають.

3. Паралельною проекцією відрізка $A'B'$ є відрізок A_0B_0, де A_0, B_0 – паралельні проекції відповідних точок A', B'.

4. Зберігається просте відношення трьох точок при паралельному проектуванні.

5. Паралельні проекції паралельних відрізків паралельні або належать одній прямій.

6. Паралельні проекції паралельних відрізків або відрізків, що лежать на одній прямій, пропорційні самим відрізкам.

Теорема 12.1. Нехай $\acute{R}=(\acute{A},\acute{B},\acute{C})$ і $R=(A,B,C)$ – довільні базиси відповідно площин $\acute{\sigma}$ і σ. Тоді існує одне і тільки одне афінне відображення площини $\acute{\sigma}$ на площину σ, яке переводить базис $\acute{R}$ у базис R. При цьому довільна точка $\acute{M}$ площини $\acute{\sigma}$ із даними координатами у базисі $\acute{R}$ переходить у точку M площини σ з тими самими координатами у базисі R.

Теорема 12.2. Два чотирикутника, що лежать відповідно у площинах $\acute{\sigma}$ і σ, афінно-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх можна позначити літерами $\acute{A}\acute{B}\acute{C}\acute{D}$ і $ABCD$ так, щоб

$$(\acute{A}\acute{C},\acute{E})=(AC,E),\ (\acute{B}\acute{D},\acute{E})=(BD,E),$$

де $\acute{E}$ і E – точки перетину $\acute{A}\acute{C}$, $\acute{B}\acute{D}$ і AC, BD.

Теорема 12.3. Нехай фігури $\acute{F}$ і F лежать відповідно на площинах $\acute{\sigma}$ і σ, що не перетинаються. Фігура F може бути зображенням фігури $\acute{F}$ тоді і тільки тоді, коли фігури $\acute{F}$ і F афінно-еквівалентні.

Зображення деяких многокутників:

1. *Трикутник.* Для довільного трикутника ABC площина σ може слугувати зображенням даного трикутника $\acute{A}\acute{B}\acute{C}$ площини $\acute{\sigma}$, якщо площини σ і $\acute{\sigma}$ перетинаються. Справді, існує афінне відображення $f:\acute{\sigma}\to\sigma$, яке базис $(\acute{A},\acute{B},\acute{C})$ переводить в базис (A,B,C), тому трикутники $\acute{A}\acute{B}\acute{C}$ і ABC афінно-еквівалентні. За попередньою теоремою трикутник ABC може слугувати зображенням трикутника $\acute{A}\acute{B}\acute{C}$.

2. *Чотирикутник.* Не кожен чотирикутник площини σ може бути зображенням чотирикутника у площині $\acute{\sigma}$. Для побудови зображення $ABCD$ даного чотирикутника $\acute{A}\acute{B}\acute{C}\acute{D}$ в якості вершин A, B, C можна вибрати довільні три точки, а четверта вершина D визначається з співвідношень :

$$(\acute{A}\acute{C},\acute{E})=(AC,E),\ (\acute{B}\acute{D},\acute{E})=(BD,E), \qquad (12.1)$$

де $\acute{E}$ і E – точки перетину відповідних діагоналей.

3. *Трапеція.* Зображення трапеції може бути трапеція, яка задовольняє умові (12.1), яка означає, що відношення основ оригінала дорівнює відношенню основ зображення.

4. *Паралелограм* (включаючи ромб, прямокутник і квадрат). Оскільки довільні два паралелограма афінно-еквівалентні, то довільний паралелограм площини зображень є зображенням даного паралелограма – оригіналу. Зокрема, довільний паралелограм площини σ є зображенням квадрата площини $\acute{\sigma}$.

5. *n-кутник, де* $n>4$. Для побудови зображення n-кутника при $n>4$ три вершини зображення можна вибрати довільно, а решта вершин знаходяться побудовою.

Лема 12.1. У довільному афінному відображенні еліпс (зокрема, коло) переходить в еліпс.

До теми «Зображення многогранників та тіл обертання в паралельній проекції»

Лема 13.1. Нехай чотирикутники $A_1B_1C_1D_1$ і $ABCD$, які не лежать відповідно у площинах σ_1 і σ афінно-еквівалентні. Тоді існує така площина σ_0, що проекція чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$ на цю площину за напрямком вектора, ортогонального до площини σ_1, подібна чотирикутнику $ABCD$.

Теорема 13.1 *(Польке-Шварца).* Вершини довільного чотирикутника $ABCD$ площини σ, задані у певному порядку, можуть слугувати зображенням афінного базису, рівного даному базису $R^{¿}=(A^{¿},B^{¿},C^{¿},D^{¿})$.

Наслідок 13.1. Вершини довільного чотирикутника площини σ можуть бути зображенням вершин тетраедра, рівного даному тетраедру.

Зображення деяких многогранників у паралельній проекції:

1. *Тетраедр.* Нехай $\acute{A}\acute{B}\acute{C}\acute{D}$ – тетраедр-оригінал, A_0, B_0, C_0, D_0 – проекції його вершин, а A, B, C і D – зображення його вершин (див. рис. 13.1). Тоді фігура, яка складається з трикутників ABC, ABD, ACD і BCD, і

буде зображенням цього тетраедра. Іншими словами, зображенням тетраедра $A'B'C'D'$ є фігура, яка складається зі всіх сторін і діагоналей чотирикутника $ABCD$.

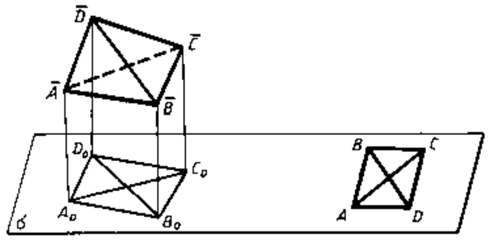


Рис. 13.1

2. *Паралелепіпед.* Зображенням паралелепіпеда (у тому числі прямокутного паралелепіпеда, куба) є фігура, яка складається з трьох пар паралелограмів, причому у кожній парі один отримується з другого паралельним перенесенням (див. рис. 13.2).

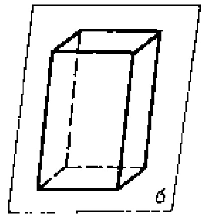


Рис. 13.2

3. *Призма.* Зображенням n-кутної призми на площині σ є фігура, яка складається з двох рівних n-кутників (один отримується з іншого паралельним перенесенням), які зображають основи призми, і n паралелограмів, для кожного з яких протилежним сторонам є зображення паралельних сторін основ (див. рис. 13.3).

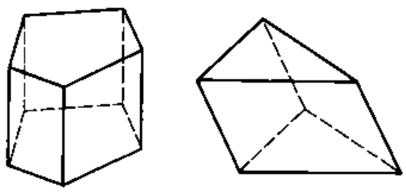


Рис. 13.3

4. *Піраміда.* Зображенням піраміди є фігура, яка складається з многокутника, що зображує основу піраміди-оригінала, та декількох

трикутників зі спільною вершиною, які зображають бічні грані піраміди (див. рис. 13.4).

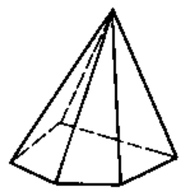


Рис. 13.4

5. *Циліндр.* Нехай даний циліндр-оригінал $\acute{F}$ розташований так, що його вісь $\acute{O}\acute{O}_1$ паралельна площині зображення σ (див. рис. 13.5). Напрямок проектування вибрано таким чином: він не паралельний площинам основ циліндра, але паралельний площині, що проходить через вісь циліндра перпендикулярно до площини σ. Такий вибір напрямку проектування пояснюється вимогою наочності зображення. Насправді, якщо, наприклад, напрямок проектування вибрати паралельно площинам основ, то при вказаному розташуванні оригінала циліндр спроектується у прямокутник і зображення не буде наочним.

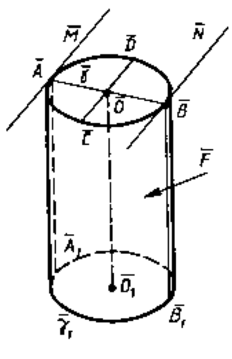


Рис. 13.5

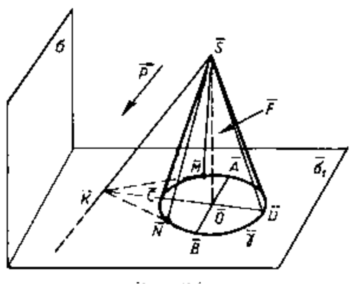


Рис. 13.6

6. *Конус.* Аналогічно випадку циліндра припустимо, що вісь $\acute{S}\acute{O}$ даного конуса $\acute{F}$ паралельна площині зображення σ. Напрямок проектування виберемо так, щоб:

а) пряма, що проходить через вершину $\acute{S}$ конуса за цим напрямком, перетинала б площину σ_1 основи у деякій точці $\acute{K}$ поза колом $\acute{\gamma}$ основи, причому $\acute{O}\acute{K} > \acute{O}\acute{S}$ (див. рис. 13.6);

б) площина $\acute{O}\acute{S}\acute{K}$ була перпендикулярна до площини σ.

7. *Куля.* Нехай $\acute{F}$ – куля, а F_0 – паралельна проекція цієї кулі на площину зображення. Усі прямі, які дотичні до кулі та мають напрямок проектування, утворюють циліндричну поверхню обертання, яка перетинається з площиною σ по еліпсу γ_0 (див. рис. 13.7). Ця лінія називається абрисом кулі. Ясно, що проекція F_0 кулі на площину σ є частина площини, яка обмежена обрисом кулі (на рис. 13.7 фігура F_0 заштрихована).

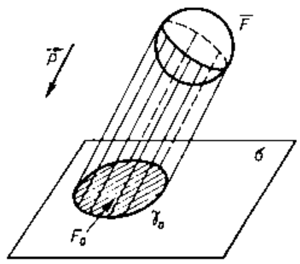


Рис. 13.7

РОЗДІЛ 2
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ «ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ ТА МЕТОДИ ЗОБРАЖЕНЬ»

Практичне заняття № 1
з теми «Проективний простір»

Аудиторні завдання:

1. F_2^2 – двовимірний векторний простір над полем F_2 лишків за модулем 2. Довести, що проективна пряма $P\left(F_2^2\right)$ містить три точки.

Доведення.

Поле F_2 лишків за модулем 2 складається з елементів 0, 1.

$$F_2^2 = F_2 \times F_2 = \{\{0,0\},\{0,1\},\{1,0\},\{1,1\}\}.$$

F_2^2 – векторний простір. Дійсно, операції φ_1 і φ_2 додавання векторів і множення вектора на елемент з поля F_2 зводяться до додавання і множення чисел. Операції φ_1, φ_2 підпорядковуються всім аксіомам двовимірного векторного простору, базис якого $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\vec{e}_1 = \{0,1\}$, $\vec{e}_2 = \{1,0\}$. Побудуємо

$$F_2^2 ¿ \{\vec{0} ¿\} = V_2^{¿} = \{\{1,0\},\{0,1\},\{1,1\}\}.$$

Вектори $V_2^{¿}$ – попарно неколінеарні. Через P позначимо множину проективних точок:

$$P = \{(0,1),(1,0),(1,1)\} = \{A, B, C\}.$$

π – це відображення множини векторів $V^{¿}$ на множину P, таке що $\pi\{0,1\} = (0,1)$, $\pi\{1,0\} = (1,0)$, $\pi\{1,1\} = (1,1)$. Це відображення задовольняє аксіомам проективного простору. Оскільки вектори $\{0,1\}$, $\{1,0\}$, $\{1,1\}$ попарно неколінеарні, то точки A, B, C різні. Доведено.

2. Довести, що проективна площина $P(V)$ містить, принаймні, 7 точок.

3. Довести, що на проективній площині $P(V)$ існує чотири точки, з яких жодні три не лежать на одній прямій.

Практичне заняття № 2
з теми «Проективні координати»

Аудиторні завдання:

1. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E\}$, побудувати точку $M(2,3)$ за її координатами у цьому базисі.

Розв'язання.

Нехай V_2 – векторний простір, що породжує пряму $\acute{d}$: $\pi\left(V_2 ¿ \{\vec{0} ¿\}\right) = ¿ \acute{d}$.

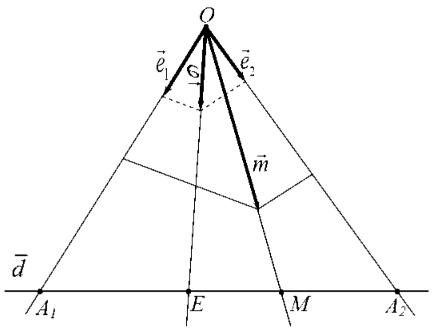


Рис. 2.1

В якості V_2 візьмемо множину напрямлених відрізків із початком у точці $O \notin \acute{d}$. Позначимо $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ базис векторного простору V_2, узгоджений з базисом R або векторний базис проективного базису. Розв'язок задачі проводимо за наступною схемою:

1. Відновимо векторний базис проективного базису $R=\{A_1, A_2, E\}$. Для цього візьмемо будь-який вектор $\vec{e}$, що породжує точку E і побудуємо вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, сума яких дорівнює вектору $\vec{e}$. $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ – векторний базис проективного базису. Вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ породжують відповідні точки A_1 і A_2 (див. рис. 2.1).
2. Побудуємо вектор $\vec{m}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$.
3. Побудуємо точку M, що породжена вектором $\vec{m}$, як перетин прямих $\acute{d}$ і m, для якої вектор $\vec{m}$ є напрямним.

2. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E_\infty\}$. Побудувати точку $M(-1, 2)$ відносно базису R.

3. На розширеній площині $\acute{\Pi}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Побудувати точку $M(1,1,2)$ відносно базису R.

4. На розширеній площині $\acute{\Pi}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, A_3, E_\infty\}$, де точки A_1, A_2, A_3 – власні, а точка E_∞ – невласна. Побудуємо точку $M(1,1,2)$ за її координатами у базисі R.

Практичне заняття № 3

з теми «Рівняння прямої»

Аудиторні завдання:

1. На проективній площині заданий базис $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$. E_α – проекція точки E з центру A_α на пряму $(A_\beta A_\gamma)(\alpha, \beta, \gamma=\overline{1,3})$. Знайти рівняння координатних прямих $(A_\alpha A_\beta)$ і $(A_\alpha E_\alpha)$ відносно R.

Розв'язання.

Так як точки A_1, A_2 мають координати $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, то рівняння прямої $(A_1 A_2)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \text{ або } x^3=0.$$

Аналогічно отримуємо рівняння двох інших координатних прямих:

$$(A_2 A_3): x^1=0; \ (A_3 A_1): x^2=0.$$

Складемо рівняння прямої $(A_1 E_1): u_1 x^1+u_2 x^2+u_3 x^3=0$.

Якщо точка $A_1 \in (A_1 E_1)$, то координати цієї точки задовольняють рівнянню прямої:

$$u_1+u_2 0+u_3 0=0 \text{ або } u_1=0.$$

$$E_1 \in (A_1 E_1), \ E_1(0,1,1).$$

$$u_1 0+u_2 1+u_3 1=0 \text{ або } u_2=-u_3.$$

Рівняння прямої $A_1 E_1$ прийме вигляд:

$$u_2 x^2-u_2 x^3=0, \ u_2 \neq 0, \ (A_1 E_1): x^2-x^3=0.$$

Аналогічно рівняння прямих:

$$(A_2 E_2): x^1-x^3=0, \ (A_3 E_3): x^1-x^2=0.$$

2. Довести, що точки $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$, $C(c^1, c^2, c^3)$ із координатами у проективному базисі $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.1)$$

3. Знайти координати точки перетину прямих $2x^1+x^2+x^3=0$ і $3x^1+3x^2+2x^3=0$.

4. Яка особливість розташування прямої (AB) відносно базису $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ на проективній площині, якщо перші пари координат точок $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$ пропорційні.

5. Побудувати пряму $x^1+2x^2-2x^3=0$ за її координатами відносно проективного базису R на розширеній площині.

Практичне заняття № 4

з теми «Перетворення проективних координат»

Аудиторні завдання:

1. Складти формули перетворення проективних координат при переході від базису $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ до базису $R'=\{A_1', A_2', A_3', E'\}$, якщо у базисі $R: A_1'(1, 0, -1)$, $A_2'(2, 1, 0)$, $A_3'(0, 0, 1)$; а) $E'(3, 1, 0)$, б) $E'(1, 1, 2)$.

Розв'язання.

а) Нехай $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ система векторів, узгоджена відносно базису R. Нехай надалі $\vec{a}_1'$, $\vec{a}_2'$, $\vec{a}_3'$ – векторний базис базису R'.

$$\pi(\vec{a}_1')=A_1',\ \vec{a}_1'\{1, 0, -1\};\ \pi(\vec{a}_2')=A_2',\ \vec{a}_2'\{2, 1, 0\};\ \pi(\vec{a}_3')=A_3',\ \vec{a}_3'\{0, 0, 1\}.$$

Знайдемо суму векторів:

$$\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3'=\{3, 1, 0\}.$$

Бачимо, що сума $\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3'$ є вектор, що породжує точку E': $\pi(\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3')=E'$. Отже, у випадку а) система векторів $\{\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'\}$ узгоджена відносно базису R' і ми скористаємося формулами переходу.

Підставимо у праві частини формул переходу координати точок A_1', A_2', A_3', ми отримаємо шукані формули перетворення проективних координат:

$$\lambda x^1 = y^1 + 2y^2,$$

$$\lambda x^2 = y^2,$$

$$\lambda x^3 = -y^1 + y^3.$$

б) У цьому випадку сума векторів $\vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \vec{a}_3' = \{3,1,0\}$ не породжує точку E', тобто система векторів $\{\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'\}$ не узгоджена відносно базису R'. Отже, треба знайти базис, що визначає базис R'.

Позначимо $\vec{e}\,'$ – вектор, що породжує точку E', $\pi(\vec{e}\,') = E'$ і знайдемо вектори

$$\vec{b}_1 = k_1 \vec{a}_1',\ \vec{b}_2 = k_2 \vec{a}_2',\ \vec{b}_3 = k_3 \vec{a}_3', \text{ такі, що}$$

$$k_1 \vec{a}_1' + k_2 \vec{a}_2' + k_3 \vec{a}_3' = \vec{e}\,'. \quad (4.1)$$

Розкладемо вектори $\vec{a}_1'$, $\vec{a}_2'$, $\vec{a}_3'$, $\vec{e}\,'$ за векторами базису $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, де $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ – векторний базис проективного базису R :

$$\vec{a}_1' = \vec{a}_1 - \vec{a}_3,\ \vec{a}_2' = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{a}_3' = \vec{a}_3,\ \vec{e}\,' = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

Підставляємо $\vec{a}_1'$, $\vec{a}_2'$, $\vec{a}_3'$, $\vec{e}\,'$ у (4.1), отримаємо:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = k_1(\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + k_2(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + k_3\vec{a}_3.$$

$$(k_1 + 2k_2)\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + (k_3 - k_1)\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

Звідси:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1, \\ k_2 = 1, \\ k_3 - k_{1k} = 2; \end{cases} \begin{cases} k_1 = -1, \\ k_2 = 1, \\ k_3 = 1. \end{cases}$$

Тобто, $\vec{b}_1 = -\vec{a}_1'$, $\vec{b}_2 = \vec{a}_2'$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_3'$. Матриця переходу в формулах [5] має вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукані формули перетворення координат будуть наступними:

$$\lambda x^1 = -y^1 + y^3,\ \lambda x^2 = y^2,\ \lambda x^3 = y^1 + y^3.$$

Практичне заняття № 5

з теми «Принцип двоїстості. Теорема Дезарга»

Аудиторні завдання:

1. На кресленні обмежених розмірів задано дві пари прямих p і q, що перетинаються у недоступній точці A, і u, і v, що перетинаються у недоступній точці B. Побудувати доступну частину прямої AB.

Розв'язання.

Точку перетину двох прямих будемо називати недоступною , якщо прямі перетинаються за межами креслення.

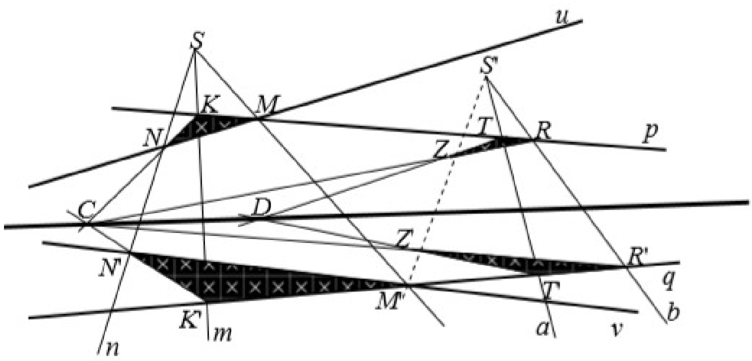


Рис. 5.1

Задача зводиться до побудови двох доступних точок прямої (AB), де $A = p \cap q$, $B = u \cap v$. Використовуючи теорему Дезарга, доступну точку C прямої AB можемо побудувати як точку перетину відповідних сторін двох тривершинників, в яких двома парами відповідних сторін слугують прямі p і q, u і v, а прямі, що проходять через відповідні вершини, перетинаються у деякій точці S. $M = u \cap p$ і $M' = v \cap q$ – відповідні вершини.

Візьмемо будь-яку точку $S \in (MM')$, що не лежить на даних прямих. Через точку S проведемо дві прямі m і n, що перетинають дані прямі у доступній частині креслення. $N = n \cap u$, $N' = n \cap v$; $K = m \cap p$, $K' = m \cap q$.

Розглянемо два тривершинники: MNK і $M'N'K'$. Прямі MM', NN', KK' проходять через одну точку S. Отже, за теоремою Дезарга, точки перетину прямих

$$(NM) \cap (N'M') = A, \ (KM) \cap (K'M') = B, \ (NK) \cap (N'K') = C$$

лежать на одній прямій. Тобто, доступна точка $C \in AB$.

Для побудови ще однієї доступної точки D прямої AB побудуємо конфігурацію Дезарга так, щоб прямі p і q складали одну пару відповідних сторін, друга пара сторін перетиналась у точці C, а третя – у доступній точці D. А прямі, що проходять через відповідні вершини, перетинались у довільній точці S', що не належить прямим p і q.

Через точку S' проведемо довільні прямі a і b.

$$b \cap p = R,\ b \cap q = R',\ a \cap p = T,\ a \cap q = T'.$$

Побудуємо прямі (RC) і $(R'C')$. Візьмемо точку $Z \in RC$ і побудуємо $Z' = S'Z \cap R'C$.

Розглянемо два тривершинники TRZ і $T'R'Z'$. Так як

$$(TT') \cap (RR') \cap (ZZ') = S',$$

то точки $A = p \cap q$, C, $D = (ZT) \cap (Z'T')$лежать на одній прямій. Отже, A, B, C, $D \in (AB)$. Точки C і D доступні точки прямої AB. Побудуємо (CD) – доступну частину прямої AB (див. рис. 5.1).

2. В евклідовому просторі дано паралелограм $NKLM$, пряма n і точка A, що не належить ані прямій n, ані сторонам паралелограма. Користуючись однією лінійкою, проведемо пряму через дану точку паралельно прямій n.

3. На евклідовій площині трапеція вписана у чотирикутник так, що її паралельні сторони паралельні одній із його діагоналей. Довести, що непаралельні сторони трапеції перетинаються на другій діагоналі.

4. Два трикутника ABC і DBC, що перетинаються трьома паралельними прямими p, q, r, $r = (AD)$, $p \cap (AB) = M$, $p \cap (DB) = P$, $q \cap (AC) = N$, $q \cap (DC) = Q$. Довести, що прямі (MN), (PQ) і (BC) належать одному пучку.

Практичне заняття № 6

з теми «Складне відношення чотирьох точок прямої»

Аудиторні завдання:

1. Довести, що в упорядкованій четвірці точок прямої перестановка середніх або крайніх елементів однаково змінює складне відношення цих точок.

Доведення.

Нехай A, B, C, D – упорядкована четвірка точок. $R=\{A_1, A_2, E\}$ – базис на прямій. І точки A, B, C, D мають відносно базису R координати: $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, $D(d_1,d_2)$.

Знайдемо складні відношення чотирьох точок прямої (AB,CD), (AC,BD), (DB,CA).

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ c^1 & c^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b^1 & b^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b^1 & d^2\\ c^1 & c^2\end{vmatrix}}=t;$$

$$(AC,BD)=\frac{\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ b^1 & b^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c^1 & c^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c^1 & c^2\\ b^1 & b^2\end{vmatrix}}=q;$$

$$(DB,CA)=\frac{\begin{vmatrix}d^1 & d^2\\ c^1 & c^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b^1 & b^2\\ a^1 & a^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}d^1 & d^2\\ a^1 & a^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b^1 & b^2\\ c^1 & c^2\end{vmatrix}}=\frac{(-1)\begin{vmatrix}c^1 & c^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}\cdot(-1)\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ b^1 & b^2\end{vmatrix}}{(-1)\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}\cdot(-1)\begin{vmatrix}c^1 & c^2\\ b^1 & b^2\end{vmatrix}}=q.$$

Отримали, що $(AC,BD)=(DB,CA)$. Доведено.

2. Довести, що для п’яти різних точок A, B, M, U, V проективної прямої має місце: $(AB,MV)=(AB,MU)(AB,UV)$.

3. На розширеній прямій дано три різні точки A, B, C. Побудувати на цій прямій точку D таку, що $(AB,CD)=2$.

4. Довести, що середина C відрізка AB і невласна точка D_∞ розширеної прямої AB гармонічно розділяють кінці відрізка AB.

5. Прямі a і b перетинаються у точці O, прямі c і d містять бісектриси кутів, що утворенні прямими a і b. Довести, що $(ab,cd)=-1$.

Практичне заняття № 7
з теми «Повний чотиривершинник»

Аудиторні завдання:

1. На проективній прямій d дано три точки P, Q і M. Побудувати точку X так, щоб вона була четвіркою до точок P, Q і M.

Розв'язання.

Для розв'язання задачі побудуємо повний чотиривершинник $ABCD$ так, щоб точки P і Q були діагональними точками, а M – точкою перетину прямої PQ зі стороною, що проходить через третю діагональну точку R. Тоді сторона BD перетне пряму PQ у шуканій точці X.

Із цього аналізу випливає наступний спосіб побудови шуканої точки. Нехай P, Q, M – задані точки на прямій D. Через точку P проведемо яку-небудь пряму, яка не співпадає з прямою d, і візьмемо на цій прямій дві точки A і B. Побудуємо прямі QA, QB, MA і позначимо через C точку перетину прямих MA і QB. Потім побудуємо пряму PC і позначимо через D точку перетину цієї прямої з прямою AQ. Побудувавши пряму BD, отримуємо шукану точку X як точку перетину прямих BD і d. Задача розв'язана правильно, так як $ABCD$ – повний чотиривершинник з діагональними точками P, Q і R, де R – точка перетину прямих AC і BD. За доведеною теоремою $(PQ, MX)=-1$.

2. Дано відрізок AB, його середина C і точка M, яка не лежить на прямій AB. За допомогою однієї лінійки побудувати пряму, яка проходить через точку M і паралельна прямій AB.

3. Дано паралельні відрізок AB і пряма p. За допомогою однієї лінійки побудувати середину відрізка AB.

4. Дано дві паралельні прямі a, a' і точка M, яка не лежить на цих прямих. За допомогою лінійки побудувати пряму, яка проходить через точку M і паралельну прямим a і a'.

5. Довести, що діагоналі паралелограма точками перетину діляться навпіл.

6. Задана довільна трапеція $ABCD$ з основами AB і CD. Довести, що пряма, яка проходить через точку S перетину прямих AD і BC і через

точку M перетину діагоналей, проходить через середини E і F основ трапецій (див. рис. 7.5).

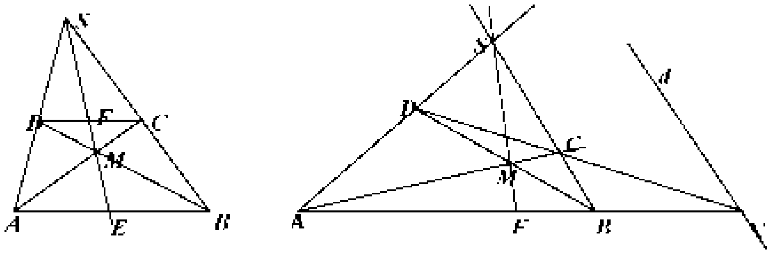


Рис. 7.5

Практичне заняття № 8

з теми «Лінії другого порядку на проективній площині»

Аудиторні завдання:

1. Знайти точки перетину лінії другого порядку, координати (x^1, x^2, x^3) яких задовольняють рівнянню :

$$2x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}+3x^1x^2-x^1x^2+2x^2x^3=0,$$

із прямою:

а) $y^1=5\lambda-\mu,\ y^2=-\mu,\ y^3=2\lambda+\mu$;

б) $x^1-2x^2+x^3=0$.

Розв'язання.

Для знаходження координат точок перетину розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}+3x^1x^2-x^1x^3+2x^2x^3=0, \\ y^1=5\lambda-\mu,\ y^2=-\mu,\ y^3=2\lambda+\mu. \end{cases}$$

$$2(5\lambda-\mu)^2+9\mu^2-(-2\lambda+\mu)^2-9\mu(5\lambda-\mu)-¿$$

$$-(5\lambda-\mu)(-2\lambda+\mu)+2(-\mu)(-2\lambda+\mu)=0.$$

$$50\lambda^2-20\lambda\mu+2\mu^2+9\mu^2-4\lambda^2+4\lambda\mu-\mu^2-45\lambda\mu+9\mu^2+¿$$

$$+10\lambda^2-2\lambda\mu-5\lambda\mu+\mu^2-6\mu^2=0;$$

$$56\lambda^2-56\lambda\mu+14\mu^2=0;$$

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2-4\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)+4=0;\ \frac{\mu}{\lambda}=2,\ \lambda=1,\ \mu=2.$$

Отримаємо точку $M(1,-2,0)$.

б) Координати точок перетину лінії другого порядку і прямої задовольняють системі:

$$2x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}+3x^1x^2-x^1x^3+2x^2x^3=0,$$

$$x^1=2x^2-x^3.$$

Після нескладних перетворень, отримаємо:

$$x^1=2x^2-x^3,\ \ 15x^{2^2}-11x^2x^3+2x^{3^2}=0,$$

звідки $(x^1)_1=\frac{-1}{3}x^3$, $(x^1)_2=\frac{-1}{5}x^3$.

$$M_1(\frac{-1}{3}x^3,-\frac{1}{3}x^3,x^3) \text{ або } M_1(-1,1,3).$$

$$M_2(\frac{-1}{5}x^3,-\frac{1}{5}x^3,x^3) \text{ або } M_2(-1,2,5).$$

2. Дано лінію другого порядку $2x^{1^2}+x^{2^2}-2x^{3^2}-6x^1x^2+4x^2x^3=¿$. Записати рівняння поляри точки $M(2,-1,5)$.

3. Дано лінію другого порядку $2x^{1^2}+x^{2^2}-2x^{3^2}-6x^1x^2+4x^2x^3=0$. Знайти координати полюса прямої $7x^1+4x^2-10x^3=0$ відносно лінії Q.

4. Знайти рівняння дотичної до лінії другого порядку $x^{1^2}-x^{2^2}+x^1x^3=0$ у точці $A(1,2,3)$.

5. Подайте у канонічному вигляді рівняння лінії другого порядку $4x^{1^2}+x^{2^2}+2x^1x^3+2x^2x^3=0$ і встановіть її проективний клас.

Практичне заняття № 9
з теми «Овальні лінії на проективній площині»

Аудиторні завдання:

1. Побудувати лінію другого порядку, яка проходить через точки (у неоднорідних координатах):

$$M_1(3,0),\ M_2(-3,0),\ M_3(0,2),\ M_4(0,-2),\ M_5(\frac{3\sqrt{3}}{2},1).$$

Розв'язання.

Коефіцієнти рівняння шуканої лінії визначаються з наступної системи:

$$\begin{cases} 9a_{11}-6a_{13}+a_{33}=0, \\ 4a_{22}+4a_{23}+a_{33}=0, \\ 4a_{22}-4a_{23}+a_{33}=0, \\ \frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}a_{12}+a_{22}+3\sqrt{3}a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0. \end{cases}$$

Віднімаючи друге рівняння із першого, отримаємо $a_{13}=0$; віднімаючи четверте із третього, отримаємо $a_{23}=0$, тому система зводиться до наступної:

$$\begin{cases} 9a_{11}+a_{33}=0, \\ 4a_{22}+a_{33}=0 \\ \frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}a_{12}+a_{22}+a_{33}=0. \end{cases}$$

Із перших двох рівнянь маємо:

$$a_{11}=\frac{-a_{33}}{9},\ a_{22}=\frac{-a_{33}}{4}.$$

Підставляючи ці значення в останнє, отримаємо, $a_{12}=0$. Отже, $a_{13}=a_{12}=a_{23}=0$, і рівняння шуканої лінії набуде вигляду (за поділом на a_{33})

$$\frac{-1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2+1=0 \text{ або } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

2. Задано п’ять точок загального положення і пряма, яка проходить через останні точки. Побудувати другу точку перетину даної прямої з овальною лінією γ, яка проходить через дані п’ять точок.

3. Овальна лінія другого порядку γ задана п’ятьма точками загального положення. Побудувати декілька точок цієї лінії.

4. Овальна лінія другого порядку γ задана чотирма точками загального положення і дотичною в одній із даних точок. Побудувати декілька точок лінії γ.

5. Задано п’ять точок загального положення: O, O', A, B, C. У точці O' побудувати дотичну до овальної лінії γ, яка проходить через ці точки.

6. Задано п’ять точок загального положення: A, B, C, D, E і точка P. Побудувати поляру точки P овальної лінії γ, яка проходить через задані точки A, B, C, D, E.

Практичне заняття № 10

з теми «Методи побудови перерізів многогранників»

Аудиторні завдання:

1. *Метод слідів січних площин*. Суть методу слідів полягає у тому, що будується слід площини перерізу на площині основи або бічної грані многогранника, яким і буде лінія перетину цих площин. Потім знаходять точки перетину цього сліду з площинами бічних граней і діагональних перерізів цих многогранників. Ці точки разом з даними точками площини перерізу визначають прямі, яким належать сторони шуканого перерізу.

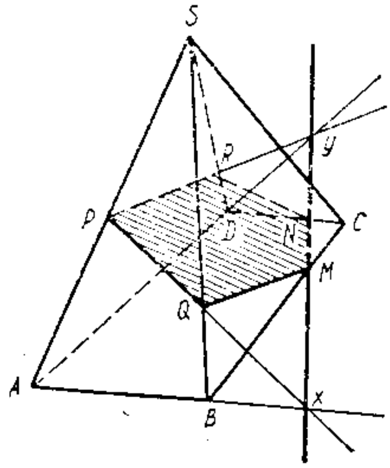


Рис. 10.1

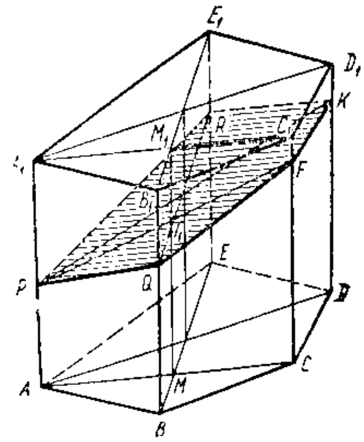


Рис.10.2

Приклад 10.1. Дано чотирикутну піраміду $SABCD$ (див. рис. 10.1), точки P, Q, $R \vee P \in [SA]$, $Q \in [SB]$, $R \in [SD]$. Побудувати переріз (PRQ) піраміди.

Розв'язання.

Щоб побудувати $(PQR) \cap (ABCD)$, досить побудувати дві їх спільні точки $X = (PQ) \cap (AB)$ і $Y = (PR) \cap (AD)$. (XY) – слід. Знаходимо $M = (XY) \cap [BC]$ і $N = (XY) \cap [DC]$.

Фігура $PQMNR$ – шуканий переріз.

2. *Метод поділу n-кутної призми (піраміди) на трикутні.* Із даної n-кутної призми (піраміди) виділяється та трикутна, на ребрах якої лежать точки, що визначають площину перерізу. Будується переріз цієї призми, а потім – перерізи інших трикутних призм, які мають спільні частини із даним многогранником.

Приклад 10.2. Дано призму $ABCDE\,A_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 10.2). Точки $P\in[AA_1]$, $Q\in[B_1B]$, $R\subset[E_1E]$. Побудувати переріз призми площиною PQR.

3. *Метод доповнення n-кутної призми (піраміди) до трикутної.* Задана призма (піраміда) добудовується до трикутної, будується її переріз. Шуканий переріз дістанемо як частину перерізу трикутної призми.

Приклад 10.3. Дано піраміду $SABCDE$ (див. рис. 10.3) і точки $M\in[SA]$, $N\in[SC]$. Побудувати переріз площиною MBN.

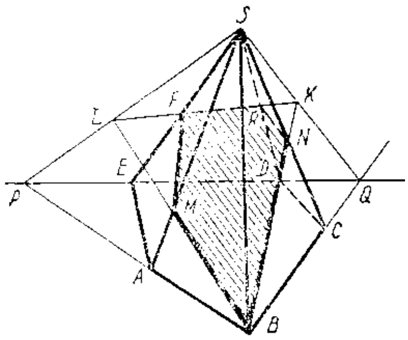


Рис. 10.3

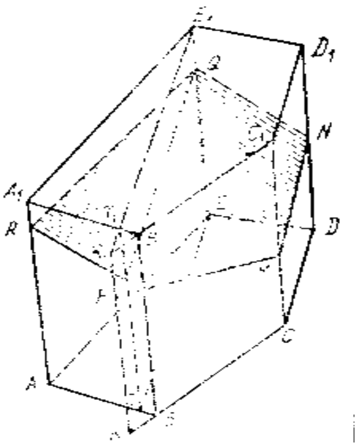


Рис. 10.4

4. *Метод паралельних прямих.* Коли врахувати, що лінії перерізу паралельних площин площиною перерізу паралельні, то, маючи лінію перерізу на одній з паралельних площин і точку на іншій, будують пряму, що проходить через цю точку і паралельну лінії перерізу першої площини. У цьому полягає суть методу паралельних прямих.

Приклад 10.4. Побудувати переріз даної п'ятикутної призми $ABCDE\,A_1B_1C_1D_1E_1$ площиною $PMN \vee P\in(BB_1)$, $M\in(CC_1)$, $N\in(DD_1)$.

Практичне заняття № 11

з теми «Побудова перерізів многогранників»

Аудиторні завдання:

1. Побудувати переріз куба так, щоб він проходив через слід AB у площині нижньої основи і точку C (див. рис. 11. 1).

Розв'язання.

За основну площину беремо $A_1A_6A_5A_4$ і продовжуємо A_1A_4 до перетину із слідом у точці K. Тоді KCM є лінія перетину площини перерізу і грані $A_1A_6A_5A_4$, тобто MC – сторона перерізу. Аналогічно знаходимо сторону CO перерізу. Потім проводимо $MP \parallel AB$ (бо переріз перетинає паралельні площини основ по паралельних прямих) і сполучає точки P і O.

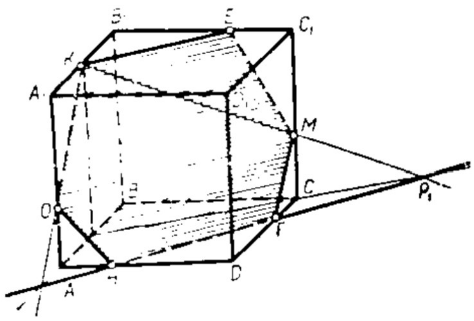


Рис. 11. 1

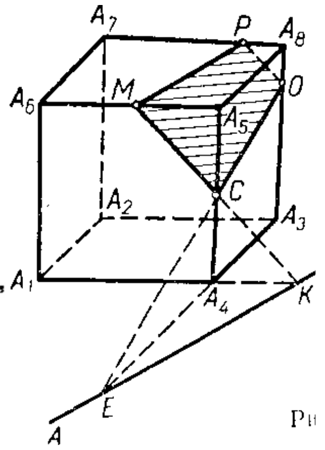


Рис. 11.2

2. Побудувати переріз куба так, щоб він проходив через точки OKM (див. рис. 11.2).

3. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив через середини A_1 і A_2 сторін основи AD і CD, і середину висоти M (див. рис. 11.3).

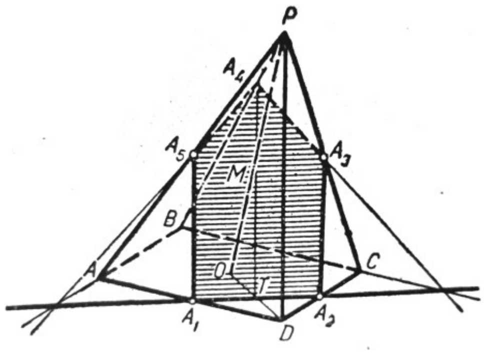


Рис. 11.3

4. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро утворює з висотою кут $30°$. Побудувати переріз, що проходить через вершину основи, перпендикулярно протилежному ребру і знайти його ребро.

5. У правильній чотирикутній піраміді побудувати переріз, що проходить через діагональ основи паралельно бічному ребру. Сторона основи a, а бічне ребро b. Визначити площу перерізу.

6. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сполучити послідовно середини ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA і AA_1. Довести, що одержана фігура є правильним шестикутником, і обчислити його площу, якщо ребро куба дорівнює a.

7. У кубі з ребром a провести переріз через середини двох суміжних сторін верхньої основи і центр нижньої основи. Обчислити периметр перерізу.

8. Площа бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює M. Визначити площу перерізу, перпендикулярного до більшої діагоналі основи, який ділить цю діагональ у відношенні $1:k(k=1,3,4)$.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було здійснено аналіз навчально-методичної літератури з «Основ геометрії» та складено на основі його списків літературних джерел (основної, додаткової та інтернет-ресурсів), які можуть бути корисними при вивченні тем дисциплін.

Також під час виконання роботи було розроблено плани-конспекти лекційних та практичних занять з курсу, які містять стислі теоретичні відомості з навчального матеріалу, а також приклади розв'язування завдань з тем курсу, що можуть бути запропоновані під час проведення практичних занять або для забезпечення дистанційного навчання студентів. Окрім наведених прикладів для організації аудиторної роботи студентів, розроблено системи вправ з відповідних тем курсу для організації самостійної роботи студентів в аудиторії та в позааудиторний час.

В роботі наведено розробку методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять з основ геометрії, зокрема, самостійних робіт, а також розробку завдань комплексної контрольної роботи для проведення контрольних заходів з тем курсу та питань для проведення заліку або екзамену.

Структурні компоненти роботи повністю відповідають структурним компонентам навчально-методичного комплексу дисципліни, нормативні вимоги до якого визначені для навчально-методичних комплексів з дисциплін кафедр Херсонського державного університету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна література

1. Атанасян С.Л. Геометрия. Часть 1/ С. Л. Анатасян, В. Г.Покровский, А. В. Ушаков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 334 с. – ISBN 978-5-9963-2371-5.

2. Бернхард А. Проективная геометрия / А. Бернхард. – М.: Парсифаль, 2005. – 214 с.

3. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії / В. Н. Боровик, В. П. Яковець : навч. пос. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.

4. Ефимов Н. В. Высшая геометрия / Н. В. Ефимов.– 7-е изд. – М., 2004. – 584 с.

5. Клейн Феликс Высшая геометрия / Феликс Клейн. – Пер. с нем. изд. 2-е, стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 400 с. – ISBN 5-354-00603-1.

6. Певзнер С.Л. Проективная геометрия / С. Л. Певзнер. – М.: Просвещение, 1987.– 352 с.

7. Трохименко В.С. Конспект лекцій з конструктивної геометрії / В. С. Трохименко. – Вінниця, 2012. - 104 с.

8. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии / Р. Хартсхорн, пер. с англ. Е. Б. Шабат, под ред. И. М. Яглома. – М.: Мир, 1970 –160 с.: ил. – (Современная математика. Популярная серия).

Додаткова література

1. Агафонов А.А. Проективная геометрия и методы зображений / А. А. Агафонов, Ю. Г. Игнатьев : уч. пос. – Казань: Казанский университет, 2014, – 179 с.

2. Базылев В. Т. Сборник задач по геометри / В. Т. Базылев. – М.: Лань, 2008. – 239 с.

3. Базылев В.Т. Сборник задач по геометрии / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев, В. П. Иваницкая и др.. – М., Просвещение, 1990.

4. Гусева Н. И. Сборник задач по геометри: в 2 ч. / Н. И. Гусева и др. . – М. : Академия, 2013. – 446 с.

5. Игнатьев Ю.Г. Сборник индивидуальных заданий по теме “Проективная геометрия и методы изображений.” III семестр. Компьютерная версія / Ю. Г. Игнатьев. – Казань, КГПУ, кафедра геометрии, 2001

6. Комисарук А. М. Проективная геометрия в задачах / А. М. Комисарук. – Минск: Высшая школа, 1971. – 320 с.

7. Павлов В. О. Збірник задач з проективної геометрії [Текст] : навч. посіб. для фіз.-мат. ф-тів пед.ін-тів / В. О. Павлов . – 2-ге вид. – К. : Вища школа, 1974. – 163 с.

8. Певзнер С. Л. Задачник-практикум по проективной геометрии / С. Л. Певзнер, М. М. Цаленко. – М.: Просвещение, 1982. – 80 с.

9. Понарин Я. П. Аффинная и проективная геометрия / Я. П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2009. – 288 с.

10. Сергунова О. П. Практикум з проективної геометрії [Текст] : посібник для студ. фіз-мат. ф-тів педінститутів / О. П. Сергунова, В. М. Котлова ; за заг. ред. М.І. Кованцова. – К. : Вища школа, 1971. – 188 с.

Електронні ресурси

1. Иванченко И.А. Методическая разработка курса по выбору по теме «Элементы проективной геометрии в решении задач на построение» [Электронный документ]. – Режим доступа – gim-kekina.edu.yar.ru/.../ivanchenko/metodicheskaya_razrabotka.doc

2. Кирсанов А.А. Лекции по проективной геометрии [Электронный документ]. – Режим доступа – http://pskgu.ru/ebooks/geoproekt.html

3. НОУ ИНТУИТ. Введение в проективную геометрию для школьников [Электронный документ]. – Режим доступа –http://www.intuit.ru/studies/courses/1027/307/info

4. Проективная геометрия [Электронный документ]. – Режим доступа – http://files.schoolcollection.edu.ru/dlrstore/96950221-9b34-c6a7-6484-c3d66cec8d6c/1001556A.htm

ДОДАТКИ

Додаток А
Плани практичних занять
з «Проективної геометрії та методів зображень»

Практичне заняття № 1
з теми «Проективний простір»

Аудиторні завдання:

4. F_2^2 – двовимірний векторний простір над полем F_2 лишків за модулем 2. Довести, що проективна пряма $P\left(F_2^2\right)$ містить три точки.

Доведення.

Поле F_2 лишків за модулем 2 складається з елементів 0, 1.

$$F_2^2 = F_2 \times F_2 = \{\{0,0\},\{0,1\},\{1,0\},\{1,1\}\}.$$

F_2^2 – векторний простір. Дійсно, операції φ_1 і φ_2 додавання векторів і множення вектора на елемент з поля F_2 зводяться до додавання і множення чисел. Операції φ_1, φ_2 підпорядковуються всім аксіомам двовимірного векторного простору, базис якого $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, $\vec{e}_1=\{0,1\}$, $\vec{e}_2=\{1,0\}$. Побудуємо

$$F_2^2 ¿ \{\vec{0} ¿\} = V_2^{¿} = \{\{1,0\},\{0,1\},\{1,1\}\}.$$

Вектори $V_2^{¿}$ – попарно неколінеарні. Через P позначимо множину проективних точок:

$$P=\{(0,1),(1,0),(1,1)\}=\{A,B,C\}.$$

π – це відображення множини векторів $V^{¿}$ на множину P, таке що $\pi\{0,1\}=(0,1)$, $\pi\{1,0\}=(1,0)$, $\pi\{1,1\}=(1,1)$. Це відображення задовольняє аксіомам проективного простору. Оскільки вектори $\{0,1\}$, $\{1,0\}$, $\{1,1\}$ попарно неколінеарні, то точки A, B, C різні. Доведено.

5. Довести, що проективна площина $P(V)$ містить, принаймні, 7 точок.

Доведення.

V_3 – векторний простір, який породжує проективну площину. $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – базис векторного простору. Розглянемо систему векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}_1+\vec{e}_3$, $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

Жодні два з них не будуть лінійно залежними. Покажемо, що вектори $\vec{e}_1+\vec{e}_2$ і $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ лінійно незалежні. Припустимо противне, тобто ці вектори лінійно залежні, а, отже, виконується векторна рівність:

$$\alpha(\vec{e}_1+\vec{e}_2)+\beta(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)=\vec{0},\ \alpha^2+\beta^2\neq 0.$$

Перепишемо цю рівність у вигляді:

$$(\alpha+\beta)\vec{e}_1+(\alpha+\beta)\vec{e}_2+\beta\vec{e}_3=\vec{0}.$$

Оскільки вектори базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – лінійно незалежні, то вище наведені рівності виконуються тільки при α і β рівні нулю одночасно. Отримали протиріччя з припущенням. Отже, вектори $\vec{e}_1+\vec{e}_2$ і $\vec{e}_1+\vec{e}_2++\vec{e}_3$ лінійно незалежні.

Аналогічно можна довести лінійну незалежність останніх пар векторів.

Вектори цієї системи породжують наступні точки:

$$E_1=\pi(\vec{e}_1),\ E_2=\pi(\vec{e}_2),\ E_3=\pi(\vec{e}_3),\ E_4=\pi(\vec{e}_1+\vec{e}_2),\ E_5=\pi(\vec{e}_2+\vec{e}_3),\ E_6=\pi(\vec{e}_1+\vec{e}_3),$$
$$E_7=\pi(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3).$$

Точки E_i $(i=\overline{1,7})$, що породжують неколінеарні вектори, різні. Доведено.

6. Довести, що на проективній площині $P(V)$ існує чотири точки, з яких жодні три не лежать на одній прямій.

Доведення.

Так як $dim(P(V))=2$, то векторний простір, що породжує проективну площину $P(V)$ має розмірність 3. $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – базис векторного простору V. Вектори базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ лінійно незалежні, отже, точки E_1, E_2, E_3, які породжені цими векторами, не лежать на одній прямій. Розглянемо

$$E_1=\pi(\vec{e}_1),\ E_2=\pi(\vec{e}_2),\ E_3=\pi(\vec{e}_3),\ \ E=\pi(\vec{e}_1+\vec{e}_2+e_3).$$

Візьмемо точки E_1, E_2, E і покажемо, що вони не лежать на одній прямій. Для цього достатньо показати, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}$, що породжують ці точки, лінійно незалежні.

Припустимо, що $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}$ – лінійно залежні. За означенням лінійної залежності маємо:

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}=\vec{0},\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0.$$

Замінимо $\vec{e}$ сумою векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ і отримаємо:

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)=\vec{0} \text{ або:}$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\vec{e}_1+(\lambda_2+\lambda_3)\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3=\vec{0}.$$

Оскільки вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ за умовою є лінійно незалежними, то ця векторна рівність виконується тільки при λ_1, λ_2, λ_3 рівні нулю одночасно. Наше припущення не вірне. Отже, вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}$ лінійно незалежні, а точки E_1, E_2, E не лежать на одній прямій.

Аналогічно доводиться, що трійка точок E_1, E_3, E і E_2, E_3 E не лежать на одній прямій. Доведено.

Для самостійного розв'язання:

1. F_3^3 – тривимірний векторний простір над полем F_3 лишок за модулем 3. Скільки точок містить довільна пряма проективного простору $P(F_3^3)$?

2. Скільки прямих містить площина $P(F_2^3)$?

3. Довести, що проективна пряма містить, принаймні, три точки.

4. Довести, що на проективній площині існують три точки, які не лежать на одній прямій.

5. Довести, що будь-які дві прямі проективної площини перетинаються.

6. Довести, що через дві відмінні точки проективної площини можна провести пряму.

7. Яка найменша кількість точок проективного простору $P_3(K)$ над полем K.

8. Довести, що у n-вимірному просторі $(n+2)$ точки загального положення.

9. F_p^{n+1} – $(n+1)$-вимірний векторний простір над полем F_p лишків за модулем p, де p – просте число. Довести, що n-вимірний векторний простір $P\left(F_p^{n+1}\right)$ складається з $\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ точок.

10. Скільки точок містить довільна пряма n-вимірного проективного простору $P\left(F_p^{n+1}\right)$?

Практичне заняття № 2
з теми «Проективні координати»

Аудиторні завдання:

5. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E\}$, побудувати точку $M(2,3)$ за її координатами у цьому базисі.

Розв'язання.

Нехай V_2 – векторний простір, що породжує пряму $\acute{d}$: $\pi\left(V_2 ¿ \{\vec{0} ¿\}\right) = ¿ \acute{d}$.

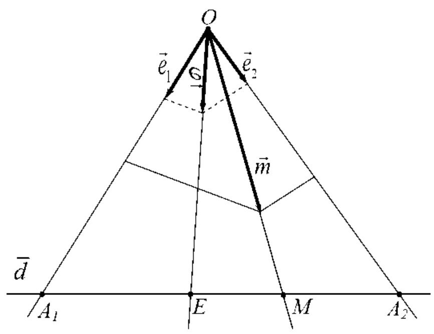


Рис. 2.1

В якості V_2 візьмемо множину напрямлених відрізків із початком у точці $O \notin \acute{d}$. Позначимо $B=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ базис векторного простору V_2, узгоджений з базисом R або векторний базис проективного базису. Розв'язок задачі проводимо за наступною схемою:

4. Відновимо векторний базис проективного базису $R=\{A_1, A_2, E\}$. Для цього візьмемо будь-який вектор $\vec{e}$, що породжує точку E і

побудуємо вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, сума яких дорівнює вектору $\vec{e}$. $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ – векторний базис проективного базису. Вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ породжують відповідні точки A_1 і A_2 (див. рис. 2.1).

5. Побудуємо вектор $\vec{m}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$.

6. Побудуємо точку M, що породжена вектором $\vec{m}$, як перетин прямих $\acute{d}$ і m, для якої вектор $\vec{m}$ є напрямним.

6. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E_\infty\}$. Побудувати точку $M(-1,2)$ відносно базису R.

Розв'язання.

1. Знайдемо векторний базис проективного базису $R=\{A_1, A_2, E_\infty\}$. Так як E_∞ – невласна точка прямої $\acute{d}$, то вектор, що її породжує, є напрямним вектором прямої d_0, паралельній прямій d. Візьмемо точку $O\in d_0$ і векторний базис $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, базису R: $\pi(\vec{e}_1)=A_1$, $\pi(\vec{e}_2)=A_2$, $\pi(\vec{e})=E_\infty$ (див. рис. 2.2)

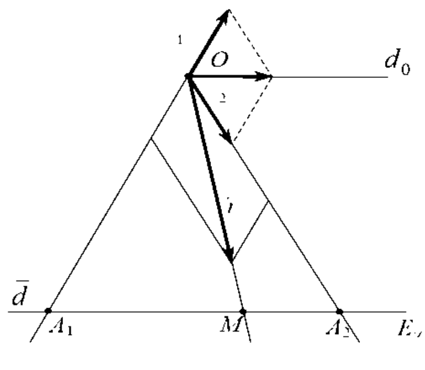


Рис. 2.2

2. Побудуємо вектор $\vec{m}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2$.

3. $M=m\cap\acute{d}$.

7. На розширеній площині $\acute{\Pi}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Побудувати точку $M(1,1,2)$ відносно базису R.

Розв'язання.

Позначимо через E_3 проекцію одиничної точки базису R з центра A_3 на пряму A_1A_2. Упорядкована трійка точок A_1, A_2, E_3 утворює на прямій A_1A_2 проективний базис $R_3=\{A_1, A_2, E_3\}$. Відносно базису R_3 проекція M_3 точки M з центра A_3 співпадає з точкою E_3. Аналогічно можна ввести базиси $R_2=\{A_1,A_3,E\}$, $R_1=\{A_2,A_3,E\}$ і побудувати ще одну проекцію точки M. Побудуємо, наприклад, точку M_2 відносно базису R_2 (побудова виконується як у прикладі 1).

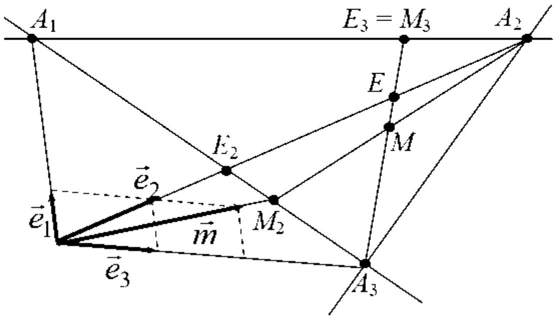


рис. 2.3

Тоді точка M знаходиться на перетині прямих A_3M_3 і A_2M_2 (див. рис. 2.3).

8. На розширеній площині $\acute{\Pi}$ заданий проективний базис $R=\{A_1,A_2,A_3,E_\infty\}$, де точки A_1, A_2, A_3 – власні, а точка E_∞ – невласна. Побудуємо точку $M(1,1,2)$ за її координатами у базисі R.

Розв’язання.

Вважаємо, що точка E_∞ є невласною точкою прямої $\acute{d}$. Побудуємо точку E_1, яка є проекцією точки E_∞ на пряму A_2A_3 із точки A_1. Для цього на $\acute{\Pi}$ через точку A_1 проведемо пряму, паралельну прямій $\acute{d}$, яка у перетині з прямою A_2A_3 дасть точку E_1. E_1 співпадає з M_1.

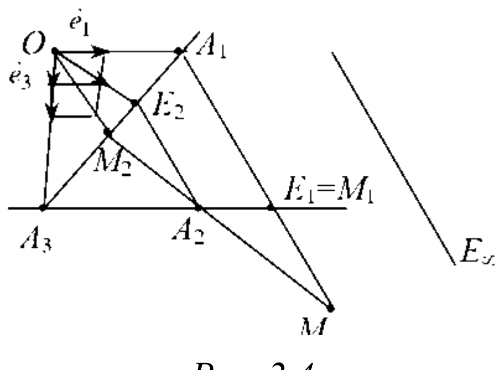


Рис. 2.4

Побудуємо $E_2=(A_2E_\infty)\cap(A_1A_3)$ і точку $M_2(1,2)$ за її координатами у базисі $R_2=\{A_1,A_3,E_2\}$. Тоді точку M нескладно побудувати: $M=(A_1M_1)\cap(A_2M_2)$ (див. рис. 2.4).

Для самостійного розв’язання:

1. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E\}$. Побудувати точку $M(-2,1)$ за її координатами у цьому базисі.

2. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, M_\infty, E\}$. Побудувати точку $M(2,1)$ за її координатами у базисі R.

3. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E\}$, де E – середина відрізка $A_1 A_2$. Знайти координати невласної точки M_∞ прямої $\acute{d}$ відносно базису R.

4. На розширеній прямій $\acute{d}$ задані точки A_1, A_2. Побудувати одиничну точку E проективного базису $R=\{A_1, A_2, E\}$, якщо відомо, що невласна точка M_∞ прямої $\acute{d}$ має координати $M_\infty(-1,2)$ у базисі R.

5. На розширеній площині $\acute{\Pi}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Побудувати точку $M(1,2,1)$ за її координатами у базисі R .

6. Точка E – центр тяжіння $\Delta A_1 A_2 A_3$ на площині $\acute{\Pi}$. Побудувати точку M¿1) за її координатам у проективному базисі $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ на розширеній площині $\acute{\Pi}$.

Практичне заняття № 3
з теми «Рівняння прямої»

Аудиторні завдання:

6. На проективній площині заданий базис $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$. E_α – проекція точки E з центру A_α на пряму $(A_\beta A_\gamma)(\alpha, \beta, \gamma=\acute{1},3)$. Знайти рівняння координатних прямих $(A_\alpha A_\beta)$ і $(A_\alpha E_\alpha)$ відносно R.

Розв'язання.

Так як точки A_1, A_2 мають координати $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, то рівняння прямої $(A_1 A_2)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } x^3 = 0.$$

Аналогічно отримуємо рівняння двох інших координатних прямих:

$$(A_2 A_3): x^1 = 0;\ (A_3 A_1): x^2 = 0.$$

Складемо рівняння прямої $(A_1 E_1): u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0.$

Якщо точка $A_1 \in (A_1 E_1)$, то координати цієї точки задовольняють рівнянню прямої:

$$u_1 + u_2 0 + u_3 0 = 0 \text{ або } u_1 = 0.$$

$$E_1 \in (A_1 E_1),\ E_1(0,1,1).$$

$$u_1 0 + u_2 1 + u_3 1 = 0 \text{ або } u_2 = -u_3.$$

Рівняння прямої $A_1 E_1$ прийме вигляд:

$$u_2 x^2 - u_2 x^3 = 0,\ u_2 \neq 0,\ (A_1 E_1): x^2 - x^3 = 0.$$

Аналогічно рівняння прямих:

$$(A_2 E_2): x^1 - x^3 = 0,\ (A_3 E_3): x^1 - x^2 = 0.$$

7. Довести, що точки $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$, $C(c^1, c^2, c^3)$ із координатами у проективному базисі $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.1)$$

Доведення.

Якщо точки A, B, C лежать на одній прямій, то вектори, що їх породжують, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні, тобто

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

І обернено, нехай умова (3.1) виконана, тоді вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні. Отже, точки $\pi(\vec{a}) = A$, $\pi(\vec{b}) = B$, $\pi(\vec{c}) = C$ належать одній прямі. Доведено.

8. Знайти координати точки перетину прямих $2x^1 + x^2 + x^3 = 0$ і $3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = 0.$

Розв'язання.

Точка перетину заданих прямих задовольняє системі лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ 3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Із курсу алгебри відомо, що загальний розв'язок цієї системи знаходиться за формулами:

$$x^1 = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix},\ x^2 = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\ x^3 = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Тому для зазначеної системи $x^1 = -\lambda$, $x^2 = -\lambda$, $x^3 = 3\lambda$. Отже, точка перетину має координати $(-1, -1, 3)$.

9. Яка особливість розташування прямої (AB) відносно базису $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ на проективній площині, якщо перші пари координат точок $A(a^1, a^2, a^3)$, $B(b^1, b^2, b^3)$ пропорційні.

Розв'язання.

За умовою $a^1 = \lambda b^1$, $a^2 = \lambda b^2$. Запишемо рівняння прямої (AB):

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ \lambda b^1 & \lambda b^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо за елементами першого рядка визначник, отримаємо:

$$(AB): u_1 x^1 + u_2 x^2 = 0, \text{ де } u_1 = \begin{vmatrix} \lambda b^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix},\ u_1 = \begin{vmatrix} a^3 & \lambda b^1 \\ b^2 & b^1 \end{vmatrix}.$$

Рівняння прямої (AB) задовольняє координати точки $A_3(0, 0, 1)$ вершини базису R. Отже, пряма AB проходить через координатну точку A_3 проективного базису R.

10. Побудувати пряму $x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0$ за її координатами відносно проективного базису R на розширеній площині.

Розв'язання:

Для побудови прямої треба знати дві її точки. Знайдемо їх, покладемо $x^1 = 0$, $x^2 = 1$. Тоді точка M має координати $(0, 1, 1)$. Аналогічно, знайдемо другу точку прямої $N(2, 0, 1)$.

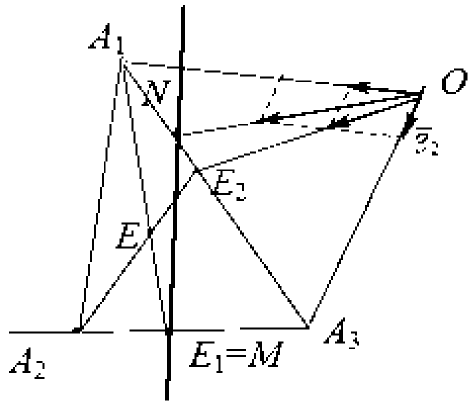


Рис. 3.1

Побудуємо точки M і N за їх координатами відносно базису R на розширеній площині. Бачимо, що $M=E_1$ – проекція точки E із A_1. Точка N лежить на прямій A_1A_3 і має координати $(2,1)$ відносно базису $R_2=\{A_1,A_3,E_2\}$, де E_2 – проекція точки E на (A_1A_3) із центру A_2. Побудова точки $N(2,1)$ відносно базису R_2 проведено на рис. 3.1. Пряма (MN) – шукана (див. рис. 3.1).

Для самостійного розв'язання:

1. Знайти рівняння прямої на P_2 відносно базису $R=\{A_1,A_2,A_3,E\}$, якщо вона проходить через точки $A(2,3,2)$, $B(4,-1,0)$.

2. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $A(1,1,2)$, $B(2,3,1)$, що мають координати відносно базису R.

3. Знайти точку перетину прямих $2x^1-3x^2+5x^3=0$ і $x^1+x^2+3x^3=0$, що мають дані рівняння відносно базису R.

4. Побудувати пряму $a(1,2,-2)$ за її координатами відносно заданого на розширеній площині проективного базису $R=\{A_1,A_2,A_3,E\}$.

5. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $l:3x^1-x^2+6x^3=0$, $m:x^2-4x^3=0$ і точку $A(1,-2,3)$.

6. Дано чотири прямі:

$a:x^1+x^2-x^3=0$;

$b:2x^1+x^2-2x^3=0$;

$c:x^1-x^2-x^3=0$;

$d:2x^1-x^2+2x^3=0$.

Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $a \cap b$ і $c \cap d$.

Практичне заняття № 4
з теми «Перетворення проективних координат»

Аудиторні завдання:

5. Скласти формули перетворення проективних координат при переході від базису $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ до базису $R'=\{A_1', A_2', A_3', E'\}$, якщо у базисі $R: A_1'(1,0,-1)$, $A_2'(2,1,0)$, $A_3'(0,0,1)$; а) $E'(3,1,0)$, б) $E'(1,1,2)$.

Розв'язання.

а) Нехай $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ система векторів, узгоджена відносно базису R. Нехай надалі $\vec{a}_1'$, $\vec{a}_2'$, $\vec{a}_3'$ – векторний базис базису R'.

$$\pi(\vec{a}_1')=A_1',\ \vec{a}_1'\{1,0,-1\};\ \pi(\vec{a}_2')=A_2',\ \vec{a}_2'\{2,1,0\};\ \pi(\vec{a}_3')=A_3',\ \vec{a}_3'\{0,0,1\}.$$

Знайдемо суму векторів:

$$\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3'=\{3,1,0\}.$$

Бачимо, що сума $\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3'$ є вектор, що породжує точку E': $\pi(\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3')=E'$. Отже, у випадку а) система векторів $\{\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'\}$ узгоджена відносно базису R' і ми скористаємося формулами переходу.

Підставимо у праві частини формул переходу координати точок A_1', A_2', A_3', ми отримаємо шукані формули перетворення проективних координат:

$$\lambda x^1 = y^1 + 2y^2,$$
$$\lambda x^2 = y^2,$$
$$\lambda x^3 = -y^1 + y^3.$$

б) У цьому випадку сума векторів $\vec{a}_1'+\vec{a}_2'+\vec{a}_3'=\{3,1,0\}$ не породжує точку E', тобто система векторів $\{\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'\}$ не узгоджена відносно базису R'. Отже, треба знайти базис, що визначає базис R'.

Позначимо $\vec{e}'$ – вектор, що породжує точку E', $\pi(\vec{e}')=E'$ і знайдемо вектори

$\vec{b}_1=k_1\vec{a}_1^{'}$, $\vec{b}_2=k_2\vec{a}_2^{'}$, $\vec{b}_3=k_3\vec{a}_3^{'}$, такі, що

$$k_1\vec{a}_1^{'}+k_2\vec{a}_2^{'}+k_3\vec{a}_3^{'}=\vec{e}^{'}. \quad (4.1)$$

Розкладемо вектори $\vec{a}_1^{'}$, $\vec{a}_2^{'}$, $\vec{a}_3^{'}$, $\vec{e}^{'}$ за векторами базису $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$, де $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$ – векторний базис проективного базису R :

$$\vec{a}_1^{'}=\vec{a}_1-\vec{a}_3,\ \vec{a}_2^{'}=2\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_3^{'}=\vec{a}_3,\ \vec{e}^{'}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+2\vec{a}_3.$$

Підставляємо $\vec{a}_1^{'}$, $\vec{a}_2^{'}$, $\vec{a}_3^{'}$, $\vec{e}^{'}$ у (4.1), отримаємо:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+2\vec{a}_3=k_1(\vec{a}_1-\vec{a}_3)+k_2(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)+k_3\vec{a}_3.$$

$$(k_1+2k_2)\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+(k_3-k_1)\vec{a}_3=\vec{a}_1+\vec{a}_2+2\vec{a}_3.$$

Звідси:

$$\begin{cases} k_1+k_2=1, \\ k_2=1, \\ k_3-k_{1k}=2; \end{cases} \begin{cases} k_1=-1, \\ k_2=1, \\ k_3=1. \end{cases}$$

Тобто, $\vec{b}_1=-\vec{a}_1^{'}$, $\vec{b}_2=\vec{a}_2^{'}$, $\vec{b}_3=\vec{a}_3^{'}$. Матриця переходу в формулах [5] має вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукані формули перетворення координат будуть наступними:

$$\lambda x^1=-y^1+y^3,\ \lambda x^2=y^2,\ \lambda x^3=y^1+y^3.$$

Для самостійного розв’язання:

1. Записати формули перетворення координат при переході від системи $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ до системи $R^{'}=\{A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}, E^{'}\}$, якщо:

а) $A_1^{'}=A_2$, $A_2^{'}=A_3$, $A_3^{'}=A_1$, $E^{'}=E$;

б) $A_1^{'}=A_2$, $A_2^{'}=A_1$, $A_3^{'}=A_3$, $E^{'}=E$;

в) $A_1^{'}=A_1$, $A_2^{'}=A_2$, $A_3^{'}=E$, $E^{'}=A_3$.

2. Записати формули перетворення координат при переході від системи координат $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ до системи $R^{'}=\{A_1, A_2, A_3, E^{'}\}$, якщо $E^{'}$ у шуканій системі координат має координати $(-1,2,3)$.

3. Записати формули перетворення координат, якщо точки A_1', A_2', A_3', E', що визначають базис R', мають відносно старої системи координат $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ наступні координати: $A_1'(1,1,0)$, $A_2'(0,-1,2)$, $A_3'(1,1,1)$, $E'(2,3,-5)$.

4. На площині задано дві системи координат: $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ і $R'=\{A_1', A_2', A_3', E'\}$, точки A_1', A_2', A_3', E' мають у координатній системі R наступні координати:

$$A_1'(1,-1,1),\ A_2'(1,0,1),\ A_3'(2,1,-3),\ E'(5,-4,0);$$

а) знайти координати точки M у системі R', якщо відомі її координати у системі $R: M(1,1,1)$;

б) знайти рівняння прямої у базисі R', якщо відоме її рівняння з базису $R: x^1+2x^2=0$;

в) знайти рівняння прямої у системі R, якщо відоме її рівняння у системі $R': y^1+2y^2=0$.

5. Вершини координатного трикутника і одинична точка проективного базису R' мають на розширеній площині наступні афінні координати: $A_1'(0,3)$, $A_2'(4,0)$, $A_3'(4,3)$, $E'(3,2)$. Знайти:

а) проективні координати точки M, якщо її афінні координати $M(1,1)$;

б) афінні координати точки P, якщо її проективні координати $P(4,3,-6)$;

в) проективні координати невласної точки вісі абсцис;

г) проективні координати невласної точки вісі ординат;

ґ) проективні координати невласної точки прямої $x-2y+1=0$;

д) однорідні координати точки K, якщо її проективні координати $K(5,5,-7)$.

Практичне заняття № 5

з теми «Принцип двоїстості. Теорема Дезарга»

Аудиторні завдання:

1. На кресленні обмежених розмірів задано дві пари прямих p і q, що перетинаються у недоступній точці A, і u, і v, що перетинаються у недоступній точці B. Побудувати доступну частину прямої AB.

Розв'язання.

Точку перетину двох прямих будемо називати недоступною , якщо прямі перетинаються за межами креслення.

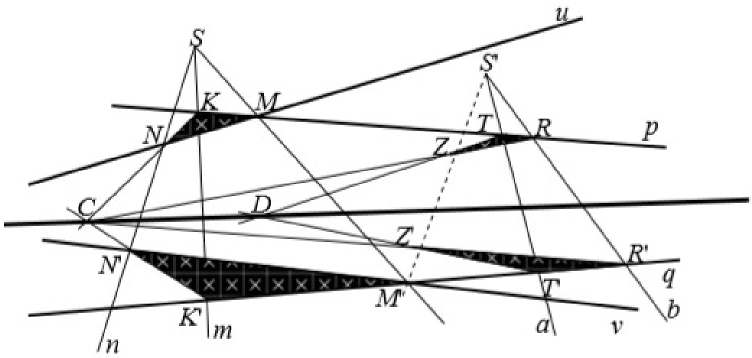


Рис. 5.1

Задача зводиться до побудови двох доступних точок прямої (AB), де $A = p \cap q$, $B = u \cap v$. Використовуючи теорему Дезарга, доступну точку C прямої AB можемо побудувати як точку перетину відповідних сторін двох тривершинників, в яких двома парами відповідних сторін слугують прямі p і q, u і v, а прямі, що проходять через відповідні вершини, перетинаються у деякій точці S. $M = u \cap p$ і $M' = v \cap q$ – відповідні вершини.

Візьмемо будь-яку точку $S \in (MM')$, що не лежить на даних прямих. Через точку S проведемо дві прямі m і n, що перетинають дані прямі у доступній частині креслення. $N = n \cap u$, $N' = n \cap v$; $K = m \cap p$, $K' = m \cap q$.

Розглянемо два тривершинники: MNK і $M'N'K'$. Прямі MM', NN', KK' проходять через одну точку S. Отже, за теоремою Дезарга, точки перетину прямих

$$(NM) \cap (N'M') = A,\ (KM) \cap (K'M') = B,\ (NK) \cap (N'K') = C$$

лежать на одній прямій. Тобто, доступна точка $C \in AB$.

Для побудови ще однієї доступної точки D прямої AB побудуємо конфігурацію Дезарга так, щоб прямі p і q складали одну пару відповідних сторін, друга пара сторін перетиналась у точці C, а третя – у доступній точці D. А прямі, що проходять через відповідні вершини, перетинались у довільній точці S', що не належить прямим p і q.

Через точку S' проведемо довільні прямі a і b.

$$b\cap p=R,\ b\cap q=R',\ a\cap p=T,\ a\cap q=T'.$$

Побудуємо прямі (RC) і $(R'C')$. Візьмемо точку $Z\in RC$ і побудуємо $Z'=S'Z\cap R'C$.

Розглянемо два тривершинники TRZ і $T'R'Z'$. Так як

$$(TT')\cap(RR')\cap(ZZ')=S',$$

то точки $A=p\cap q$, C, $D=(ZT)\cap(Z'T')$лежать на одній прямій. Отже, A, B, C, $D\in(AB)$. Точки C і D доступні точки прямої AB. Побудуємо (CD) – доступну частину прямої AB (див. рис. 5.1).

6. В евклідовому просторі дано паралелограм $NKLM$, пряма n і точка A, що не належить ані прямій n, ані сторонам паралелограма. Користуючись однією лінійкою, проведемо пряму через дану точку паралельно прямій n.

Розв'язання.

Побудуємо спочатку довільну пряму, що паралельна прямій n. Для цього побудуємо два тривершинника XYN і $X'Y'L$, де $X=n\cap NK$, $Y=n\cap NM$.

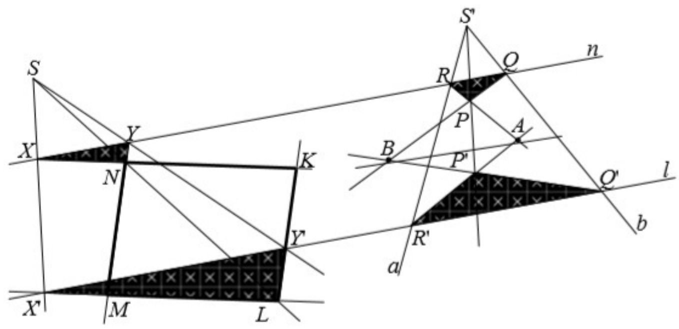


Рис. 5.2

Прямі (XX'), (YY'), (NL) перетинаються в одній точці. Отже, тривершинники XYN і $X'Y'L$ задовольняють теоремі Дезарга і прямі XN і $X'L$, YN і $Y'L$, XY і $X'Y'$ перетинаються на одній прямій. Але сторони тривершинників XN і $X'L$, YN і $Y'L$ паралельні. Отже, $XY\parallel X'Y'$, тобто

$n \| X'Y'$. Позначимо пряму, що паралельна прямій n, через l. Маємо тепер дві паралельні прямі n, l і точку A. Для побудови прямої, що паралельна даній, знайдемо точку B. Для цього побудуємо конфігурацію Дезарга так, щоб одну пару відповідних сторін складали прямі l і n, друга – перетиналась у точці A, а третя – у шуканій точці.

Довільно виберемо $S' \notin n$, $S' \notin l$ і проводимо дві довільні прямі a і b: $n \cap a = R$, $l \cap a = R'$, $n \cap b = Q$, $l \cap b = Q'$.

Візьмемо на відрізку RA довільну точку P і побудуємо точку $P' = S'P \cap AR'$.

Два тривершинника RQP і $R'Q'P'$ задовольняють теоремі Дезарга, прямі RQ і $R'Q'$, RP і $R'P'$, QR і $Q'R'$ перетинаються на одній прямі, тобто A , B, $D_\infty = n \cap l$ належать одній прямій. $D_\infty \in (AB)$, отже пряма $AB \| n$ (див. рис. 5.2).

7. На евклідовій площині трапеція вписана у чотирикутник так, що її паралельні сторони паралельні одній із його діагоналей. Довести, що непаралельні сторони трапеції перетинаються на другій діагоналі.

Доведення.

Трапеція $EFQM$ вписана у чотирикутник $ABCD$ так, що $FQ \| EM$, $FQ \| AC$. Отже, тривершинники AFE і CQM задовольняють теоремі Дезарга.

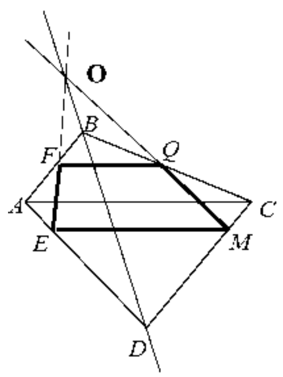


Рис. 5.3

Отже, точки $B = AF \cap CQ$, $D = AE \cap CM$ і точка O перетину непаралельних сторін трапеції і FE, і QM лежать на одній прямій, тобто точка O лежить на прямій BD (див. рис. 5.3). Доведено.

8. Два трикутника ABC і DBC, що перетинаються трьома паралельними прямими p, q, r, $r = (AD)$, $p \cap (AB) = M$, $p \cap (DB) = P$, $q \cap (AC) = N$, $q \cap (DC) = Q$. Довести, що прямі (MN), (PQ) і (BC) належать одному пучку.

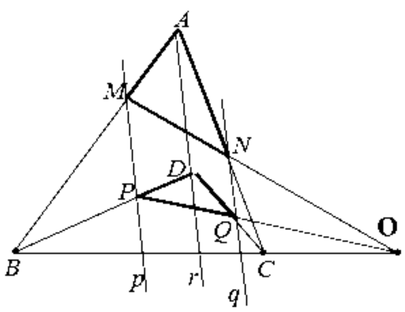


Рис. 5.4

Доведення.

Розглянемо два тривершинника MNA і PDQ (див. рис. 5.4). За теоремою Дезарга, $(MN) \cap (PQ) = O$, $O \in BC$, отже, $(MN) \cap (PQ) \cap (BC) = O$. Тобто (MN), (PQ), (BC) належать одному пучку. Доведено.

Для самостійного розв'язання:

1. На кресленні обмежених розмірів задані точка A і пара прямих p і q, що перетинаються за межами креслення (у недоступній точці B). Побудувати доступну частину прямої (AB).

2. За допомогою однієї лінійки через дану точку A провести пряму, паралельну двом заданим паралельним прямим p і q.

3. На евклідовій площині дано паралелограм $ABCD$, точка M, що належить одній із сторін паралелограма і пряма n. Користуючись однією лінійкою, провести пряму через точку M паралельну прямій n.

4. Дано пряму n і точки M і N, що не лежать на ній. Користуючись однією лінійкою, побудувати точку перетину прямої n з MN, не будуючи прямої MN.

5. Довести, що: а) якщо прямі (AA'), (BB'), (CC'), що сполучають вершини трикутників ABC і $A'B'C'$, паралельні і точки $(AB)\cap(A'B')$, $(BC)\cap(B'C')$, $(AC)\cap(A'C')$ існують, то ці точки лежать на одній прямій; б) якщо $(AB)\parallel(A'B')$, $(BC)\parallel(B'C')=M$, $(AC)\cap(A'C')=N$, то $(MN)\parallel AB$; в) якщо $(AB)\parallel(A'B')$, $(BC)\parallel(B'C')$, то $(AC)\parallel(A'C')$.

6. Трапеція $ABCD$, що перетинається прямими p і q, які паралельні основі AB, $p\cap(AD)=M$, $p\cap(AC)=P$, $q\cap(BD)=N$, $q\cap(BC)=Q$. Довести, що точка $(MN)\cap(PQ)$ лежить на (AB).

7. Використовуючи теорему Дезарга, довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Практичне заняття № 6
з теми «Складне відношення чотирьох точок прямої»

Аудиторні завдання:

6. Довести, що в упорядкованій четвірці точок прямої перестановка середніх або крайніх елементів однаково змінює складне відношення цих точок.

Доведення.

Нехай A, B, C, D – упорядкована четвірка точок. $R=\{A_1, A_2, E\}$ – базис на прямій. І точки A, B, C, D мають відносно базису R координати: $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$, $D(d_1,d_2)$.

Знайдемо складні відношення чотирьох точок прямої (AB,CD), (AC,BD), (DB,CA).

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b^1 & d^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}}=t;$$

$$(AC,BD)=\frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}}=q;$$

$$(DB,CA)=\frac{\begin{vmatrix} d^1 & d^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d^1 & d^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}}=\frac{(-1)\begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}\cdot(-1)\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}}{(-1)\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}\cdot(-1)\begin{vmatrix} c^1 & c^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}}=q.$$

Отримали, що $(AC,BD)=(DB,CA)$. Доведено.

7. Довести, що для п'яти різних точок A, B, M, U, V проективної прямої має місце: $(AB,MV)=(AB,MU)(AB,UV)$.

Доведення.

На прямій візьмемо базис $R=\{A,B,M\}$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $M(1,1)$. Нехай точки U і V мають координати (u^1,u^2), (v^1,v^2) відносно базису R. Знайдемо складні відношення (AB,MV), (AB,MU), (AB,UV).

$$(AB,MV)=\frac{v^1}{v^2},\ (AB,MU)=\frac{u^1}{u^2},$$

$$(AB,UV)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u^1 & u^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ u^1 & u^2 \end{vmatrix}}=\frac{u^2(-v^1)}{u^2(-v^1)}=\frac{v^1u^2}{v^1u^2},$$

$$(AB,MU)(AB,UV)=\frac{u'}{u^2}\cdot\frac{v^1u^2}{u^1v^2}=\frac{v^1}{v^2}=(AB,MV).$$

Доведено.

8. На розширеній прямій дано три різні точки A, B, C. Побудувати на цій прямій точку D таку, що $(AB,CD)=2$.

Розв'язання.

Візьмемо на прямій базис $R=\{A,B,C\}$.

Нехай точка D має координати (d_1,d_2) відносно базису R. Тоді $(AB,CD)=\frac{d^1}{d^2}2$. Звідси $d^1=2d^2$. Відносно базису R точка D має координати $(2,1)$. Побудуємо точку $D(2,1)$ на розширеній прямій.

Векторний простір, що породжує пряму AB, можна представити у вигляді множини напрямних відрізків з початком у деякій точці O, що не належить прямій AB.

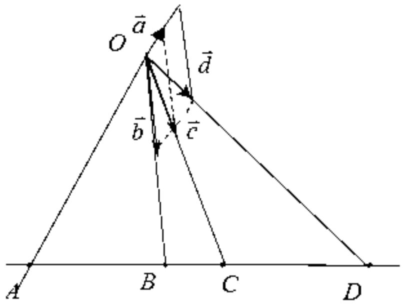


Рис. 6.1

$\pi(V_2)=(AB)$. Знаходимо векторний базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, що визначає базис:

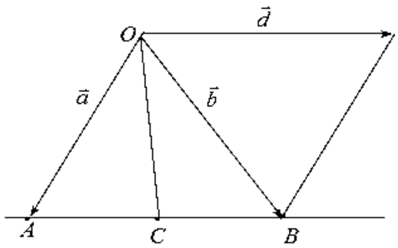
$$\pi(\vec{a})=A,\ \pi(\vec{b})=B,\ \pi(\vec{a}+\vec{b})=C.$$

Візьмемо вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, що породжує точку C і знаходимо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ такі, що $\pi(\vec{a})=A$, $\pi(\vec{b})=B$ і будуємо вектор $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\pi(\vec{d})=D$ (див. рис. 6.1).

9. Довести, що середина C відрізка AB і невласна точка D_∞ розширеної прямої AB гармонічно розділяють кінці відрізка AB.

Доведення.

На прямій (AB) розглянемо базис $R=\{A,B,C\}$ (див. рис. 6.2).



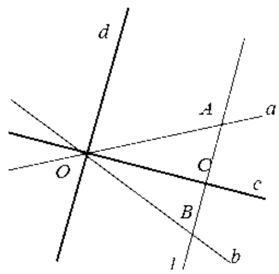


Рис. 6.2 *Рис. 6.3*

Векторний простір, що породжує пряму AB, можна подати у вигляді множини напрямлених відрізків з початком у деякій точці O, що не належать прямій AB.

$\pi(V_2)=(AB)$. Знаходимо векторний базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, що визначає базис $R=\{A,B,C\}$.

$$\pi(\vec{a})=A,\ \pi(\vec{b})=B,\ \pi(\vec{a}+\vec{b})=C.$$

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Базис $R=\{A,B,C\}$ визначається базисом $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

$\pi(\vec{d})=D_\infty$. $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Отже, точка D_∞ має відносно базису R координати $(-1,1)$ і складне відношення чотирьох точок прямої $(AB,CD)=-1$.

10. Прямі a і b перетинаються у точці O, прямі c і d містять бісектриси кутів, що утворенні прямими a і b. Довести, що $(ab,cd)=-1$.

Доведення.

Так як прямі c і d містять бісектриси кутів, то ці прямі перпендикулярні (див. рис. 6.3). Проведемо пряму l, яка паралельна прямій d. Отже, пряма l перпендикулярна прямій c.

$$A=l\cap a,\ B=l\cap b,\ C=l\cap c,\ D_\infty=l\cap d.$$

Так як $l\perp c$, а c – бісектриса кута (ab), то C – середина відрізка AB.

Отже,

$$(AB,C\,D_\infty)=-1 \text{ і } (ab,cd)=-1.$$

Доведено.

Для самостійного розв'язання:

1. Довести, що в упорядкованій четвірці точок прямої перестановка першого і третього елемента, або другого і четвертого однаково змінює складне відношення цих точок.

2. Складне відношення чотирьох точок A, B, C, D дорівнює t. Знайти значення складних відношень всіх четвірок точок, які можна скласти з точок A, B, C, D.

3. Довести, що точка D є четвертою гармонічною до трійки точок A, B, C однієї прямої тоді і тільки тоді, коли координати (u^1,u^2) точки D у базисі $R=\{A,B,C\}$ задовольняє умові $u^1=-u^2$.

4. Довести, що пряма $a(1,1,1)$ перетинає сторони координатного трикутника проективного базису $R=\{A_1,A_2,A_3,E\}$ у точках M_γ таких, що $(A_\alpha,B_\beta,E_\gamma,M_\gamma)=-1\,(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$.

5. Дано точки $A(1,2,4)$, $B(5,0,4)$, $C(3,1,4)$, $D(2,-1,0)$. У базисі $R\{A_1,A_2,A_3,E\}$. Довести їх колінеарність і знайти складні відношення (AB,CD) і (DB,CA).

6. Які проективні координати середини C відрізка AB у базисі $R=\{A,B,D_\infty\}$ на розширеній прямій AB?

7. Довести, що пряма CM, що містить медіану CM трикутника ABC і пряма CX, яка паралельна стороні AB, гармонійно розділяють прямі CA і CB, які містять дві інші сторони трикутника ABC.

8. Довести, що прямі, які містять бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника ABC перетинають пряму AB у точках, які гармонійно ділять вершини A і B.

9. Дано дві паралельні прямі. Користуючись тільки лінійкою, побудувати середину відрізка, яку задано на одній із даних прямих.

10. Довести, що діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Практичне заняття № 7
з теми «Повний чотиривершинник»

Аудиторні завдання:

7. На проективній прямій d дано три точки P, Q і M. Побудувати точку X так, щоб вона була четвіркою до точок P, Q і M.

Розв'язання.

Для розв'язання задачі побудуємо повний чотиривершинник $ABCD$ так, щоб точки P і Q були діагональними точками, а M – точкою перетину прямої PQ зі стороною, що проходить через третю діагональну точку R. Тоді сторона BD перетне пряму PQ у шуканій точці X.

Із цього аналізу випливає наступний спосіб побудови шуканої точки. Нехай P, Q, M – задані точки на прямій D. Через точку P проведемо яку-небудь пряму, яка не співпадає з прямою d, і візьмемо на цій прямій дві точки A і B. Побудуємо прямі QA, QB, MA і позначимо через C точку перетину прямих MA і QB. Потім побудуємо пряму PC і позначимо через D точку перетину цієї прямої з прямою AQ. Побудувавши пряму BD, отримуємо шукану точку X як точку перетину прямих BD і d. Задача розв'язана правильно, так як $ABCD$ – повний чотиривершинник з діагональними точками P, Q і R, де R – точка перетину прямих AC і BD. За доведеною теоремою $(PQ,MX)=-1$.

8. Дано відрізок AB, його середина C і точка M, яка не лежить на прямій AB. За допомогою однієї лінійки побудувати пряму, яка проходить через точку M і паралельна прямій AB.

Розв'язання.

Розглянемо дані фігури, тобто відрізок AB і точки C, M на розширеній площині $\acute{E}_2$. Позначимо через $\vec{d}$ пряму розширеної площини, що проходить через точки A і B, а через D_∞ – невласну точку цієї прямої. Задача зводиться до побудови на площині $\acute{E}_2$ прямої MD_∞, де M – дана точка, а D_∞ – недоступна точка, але про неї відомо, що вона лежить на прямій $\vec{d}$ і $(AB,CD_\infty)=-1$.

Для побудови шуканої прямої скористуємося теоремою про властивості повного чотиривершинника. Побудуємо який-небудь повний чотиривершинник $MNPQ$ так, щоб точки A і B були його діагональними точками, а точка C лежала та стороні, що проходить через третю діагональну точку K (див. рис. 7.1).

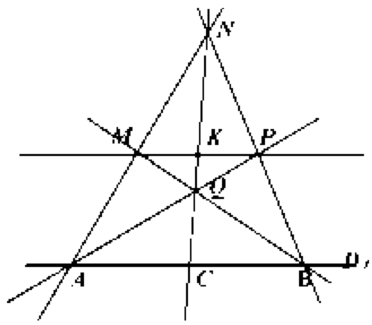


рис. 7.1

Проведемо прямі AM і BM і яку-небудь пряму, яка проходить через точку C, але не проходить через точки A і M. Нехай ця пряма перетинає прямі AM і BM відповідно у точках N і Q. Потім проводимо прямі AQ і BN, які перетинаються у точці P. Пряма MP – шукана.

Задача розв'язана правильно, так як $MNPQ$ – повний чотирившинник, а A і B – його діанальні точки, тому, якщо $X = AB \cap MP$, то за теоремою про властивості повного чотирившинника $(AB, CX) = -1$. За умовою задачі C – середина відрізка AB, отже, X – невласна точка D_∞ прямої $\vec{d}$. Звідси випливає, що $AB \parallel MP$.

9. Дано паралельні відрізок AB і пряма p. За допомогою однієї лінійки побудувати середину відрізка AB.

Розв'язання.

Задача розв'язується аналогічно до попередньої. Позначимо через d пряму розширеної площини $\acute{E}_2$, яка проходить через точки A і B, а через D_∞ невласну точку цієї прямої. Задача зводиться до побудови точки C прямої d, яка задовольняє умову $(AB, C\,D_\infty) = -1$. Тут A і B – задані точки, а D_∞ – недоступна точка, у якій перетинаються прямі AB і p.

Візьмемо точку N, яка не лежить на прямих AB і p, проведемо прямі AN і BN. Позначимо через M і P точки перетину цих прямих з прямою p. Потім проводимо прямі AP і BM і знаходимо точку $Q = AP \cap BM$. Пряма NQ перетинає пряму AB у шуканій точці C (див. рис. 7.2).

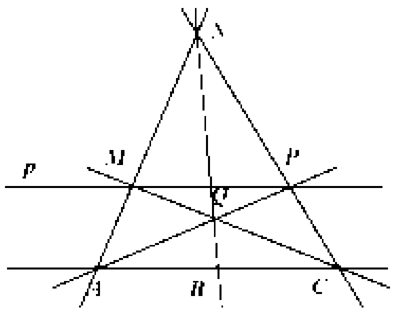


Рис. 7.2

10. Дано дві паралельні прямі a, a' і точка M, яка не лежить на цих прямих. За допомогою лінійки побудувати пряму, яка проходить через точку M і паралельну прямим a і a'.

Розв'язання.

Укажемо спосіб побудови шуканої прямої, використовуючи попередні задачі. Відмітимо на прямій a дві точки A і B і побудуємо середину C відрізка AB.

Потім побудуємо шукану пряму (див. рис. 7.3).

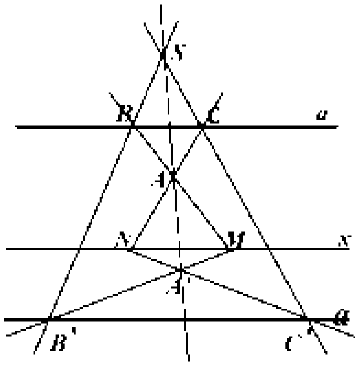


Рис. 7.3

11. Довести, що діагоналі паралелограма точками перетину діляться навпіл.

Доведення.

Нехай $ABCD$ – даний паралелограм афінної площини, а E – точка перетину його діагоналей AC і BD.

Розглянемо даний паралелограм як фігуру площини A_2. Так як $AC \parallel BD$ і $AD \parallel BC$, то на проективній площині P_2 точки $R_\infty = AB \cap CD$ і $S_\infty = AD \cap BC$ лежать на одній прямій d_∞ (див. рис. 7.4).

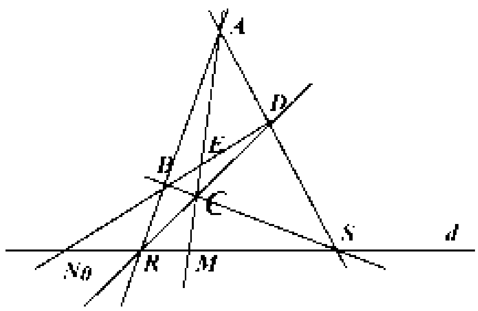


Рис. 7.4

Отже, на площині P_2 $ABCD$ – повний чотиривершинник з діагональними точками E, R_∞ і S_∞.

Якщо $M_\infty = AC \cap d_\infty$, то складне відношення чотирьох точок A, B, C, M_∞ є гармонійним, тобто $(AE, M_\infty) = -1$, тому і $(AC, E) = -1$. Отже, E –

середина відрізка AC. Так само доводиться, що E – середина відрізка AB. Доведено.

12. Задана довільна трапеція $ABCD$ з основами AB і CD. Довести, що пряма, яка проходить через точку S перетину прямих AD і BC і через точку M перетину діагоналей, проходить через середини E і F основ трапецій (див. рис. 7. 5).

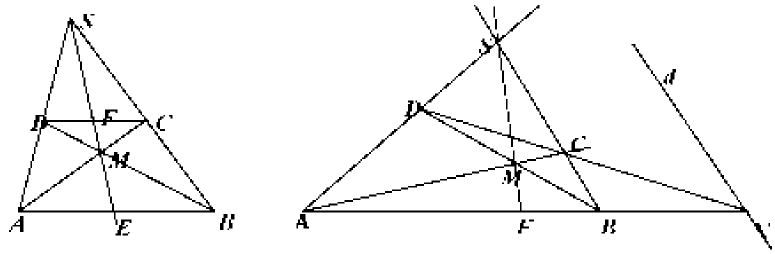


Рис. 7.5

Доведення.

Розглянемо дану трапецію $ABCD$. Так як $AB \parallel CD$, то на проективній площині P_2 точка $N_\infty = AB \cap CD$ лежить на розширеній прямій d_∞. Отже, на проективній площині P_2 $ABCD$ – повний чотиривершинник з діагональними точками M, S і N_∞ (див. рис. 7.5). Як відомо, $(AB, E N_\infty) = -1$ і $(CD, F N_\infty) = -1$, тому $(AB, E) = -1$ і $(CD, F) = -1$. Отже, E – середина відрізка AB, а F – середина відрізка CD.

Для самостійного розв'язання:

1. Довести, що пряма (CM), яка містить медіану $[CM]$ трикутника ABC, і пряма (CX), паралельні стороні $[AB]$, гармонійно розділяють прямі (CA) і (CB), які містять дві інші сторони трикутника ABC.

2. На афінній (або евклідовій) площині π заданий відрізок $[AB]$ і його середина C. Через дану точку $M \in (AB)$ провести пряму, яка паралельна прямій (AB), користуючись тільки лінійкою.

3. Дано дві паралельні прямі (різні). Користуючись тільки лінійкою, побудувати:

а) середину відрізка, який заданий на одній із даних прямих;

б) пряму, яка проходить через дану точку і паралельна даним прямим.

4. Довести, що точка перетину діагоналей трапеції, точка перетину продовження її бічних сторін і середини її основи лежить на одній прямій (вказівка: на розширеній площині розглянути повний чотиривершинник із вершинами у вершинах трапеції).

Практичне заняття № 8
з теми «Лінії другого порядку на проективній площині»

Аудиторні завдання:

6. Знайти точки перетину лінії другого порядку, координати $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ яких задовольняють рівнянню :

$$2x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}+3x^1x^2-x^1x^2+2x^2x^3=0,$$

із прямою:

а) $y^1=5\lambda-\mu,\ y^2=-\mu,\ y^3=2\lambda+\mu;$

б) $x^1-2x^2+x^3=0.$

Розв'язання.

Для знаходження координат точок перетину розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}+3x^1x^2-x^1x^3+2x^2x^3=0, \\ y^1=5\lambda-\mu,\, y^2=-\mu,\, y^3=2\lambda+\mu. \end{cases}$$

$$2(5\lambda-\mu)^2+9\mu^2-(-2\lambda+\mu)^2-9\mu(5\lambda-\mu)-\text{¿}$$

$$-(5\lambda-\mu)(-2\lambda+\mu)+2(-\mu)(-2\lambda+\mu)=0.$$

$$50\lambda^2-20\lambda\mu+2\mu^2+9\mu^2-4\lambda^2+4\lambda\mu-\mu^2-45\lambda\mu+9\mu^2+\text{¿}$$

$$+10\lambda^2-2\lambda\mu-5\lambda\mu+\mu^2-6\mu^2=0;$$

$$56\lambda^2-56\lambda\mu+14\mu^2=0;$$

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2-4\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)+4=0;\ \frac{\mu}{\lambda}=2,\ \lambda=1,\ \mu=2.$$

Отримаємо точку $M(1,-2,0)$.

б) Координати точок перетину лінії другого порядку і прямої задовольняють системі:

$$2x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}+3x^1x^2-x^1x^3+2x^2x^3=0,$$

$$x^1=2x^2-x^3.$$

Після нескладних перетворень, отримаємо:

$$x^1=2x^2-x^3,\ \ 15x^{2^2}-11x^2x^3+2x^{3^2}=0,$$

звідки $(x^1)_1=\frac{-1}{3}x^3$, $(x^1)_2=\frac{-1}{5}x^3$.

$$M_1(\frac{-1}{3}x^3,-\frac{1}{3}x^3,x^3) \text{ або } M_1(-1,1,3).$$

$$M_2(\frac{-1}{5}x^3,-\frac{1}{5}x^3,x^3) \text{ або } M_2(-1,2,5).$$

7. Дано лінію другого порядку $2x^{1^2}+x^{2^2}-2x^{3^2}-6x^1x^2+4x^2x^3=0$. Записати рівняння поляри точки $M(2,-1,5)$.

Розв'язання.

Рівняння поляри точки $A(a^1,a^2,a^3)$ відносно лінії другого порядку має вигляд:

$$\Phi_1(A)x^1+\Phi_2(A)x^2+\Phi_3(A)x^3=0,$$

де

$$\Phi_1(A)=a_{11}a^1+a_{12}a^2+a_{13}a^3,\quad \Phi_2(A)=a_{21}a^1+a_{22}a^2+a_{23}a^3,$$

$$\Phi_3(A)=a_{31}a^1+a_{32}a^2+a_{33}a^3.$$

У нашому випадку

$$a_{11}=2,\ a_{12}=-3,\ a_{22}=1,\ a_{33}=-2,\ a_{23}=2.\ \ A=M(2,-1,5).$$

$$\Phi_1(M)=2\cdot 2-3\cdot(-1)=7,\ \ \Phi_2(M)=-3\cdot 2+1\cdot(-1)+2\cdot 5=3,$$

$$\Phi_3(M)=2\cdot(-1)-2\cdot 5=12.$$

Рівняння поляри має вигляд: $7x^1+3x^2-12x^3=0$.

8. Дано лінію другого порядку $2x^{1^2}+x^{2^2}-2x^{3^2}-6x^1x^2+4x^2x^3=0$. Знайти координати полюса прямої $7x^1+4x^2-10x^3=0$ відносно лінії Q.

Розв'язання.

Координати полюса $A(a^1,a^2,a^3)$ знаходяться за формулами:

$$\Phi_1(A)=\lambda u^1,\ \Phi_2(A)=\lambda u^2,\ \Phi_3(A)=\lambda u^3,\ \lambda\neq 0$$

або

$$a_{11}a^1+a_{12}a^2+a_{13}a^3=\lambda u^1,\quad a_{21}a^1+a_{22}a^2+a_{23}a^3=\lambda u^2,$$

$$a_{32}a^1+a_{32}a^2+a_{33}a^3=\lambda u^3,\quad u^1=7,\ u^2=4,\ u^3=-10.$$

Вважаючи $\lambda=1$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2a^1-3a^2=7, \\ -3a^1+a^2+2a^3=4, \\ 2a^2-2a^3=-10, \end{cases}$$

із якої знаходимо координати полюса $A(-1,-3,2)$.

9. Знайти рівняння дотичної до лінії другого порядку $x^{1^2}-x^{2^2}+x^1x^3=0$ у точці $A(1,2,3)$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної до заданої лінії у точці A буде мати вигляд:

$$\Phi_1(A)x^1+\Phi_2(A)x^2+\Phi_3(A)x^3=0$$

або

$$\left(1+\frac{1}{2}\cdot 3\right)x^1+(-1)\cdot 2x^2+\frac{1}{2}\cdot x^3=0.$$

Отримаємо шукане рівняння дотичної $5x^1-4x^2+x^3=0$.

10. Подайте у канонічному вигляді рівняння лінії другого порядку $4x^{1^2}+x^{2^2}+2x^1x^3+2x^2x^3=0$ і встановіть її проективний клас.

Розв'язання.

I спосіб. Подамо рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду методом Лагранжа:

$$2\left(x^{1^2}+x^1x^2+\frac{1}{4}x^{2^2}\right)-\frac{1}{2}x^{2^2}+x^{2^2}+2x^2x^3=0;$$

$$2\left(x^1+\frac{1}{2}x^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^{2^2}+x^2x^3+\frac{1}{4}x^{32}\right)-\frac{1}{2}x^{3^2}=0;$$

$$2\left(x^1+\frac{1}{2}x^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}x^3\right)^2-\frac{1}{2}x^{3^2}=0.$$

Перейдемо до нових змінних за формулами:

$$y^1=\sqrt{2}\left(x^1+\frac{1}{2}x^2\right),\quad y^2=\sqrt{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{2}x^3\right),\ \ y^3=\sqrt{\frac{1}{2}}x^3,$$

$y^{1^2}+y^{2^2}-y^{3^2}=0$ – овальна лінія.

II спосіб. Ранг матриці A, складеної із коефіцієнтів лівої частини рівняння квадрики, дорівнює трьом,так як

$$det\,A=\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0.$$

Отже, квадрика невироджена, тому вона належить або класу уявних невироджених квадрик або класу овальних квадрик. Точка $(0,0,1)$ належить квадрику (безпосередньо перевіряємо: $4\cdot 0+0+2\cdot 0\cdot 1=0$), отже, задана лінія другого порядку є овальною, тому її канонічне рівняння має вигляд:

$$y^{1^2}+y^{2^2}-y^{32}=0.$$

Для самостійного розв'язання:

1. Знайти точки перетину прямої, яка проходить через точки $A(1,7,2)$ і $B(7,-1,0)$ з лінією, яка задана рівнянням $x^{1^2}+x^{22}-x^{3^2}=0$.

2. Знайти рівняння дотичної до квадрики $x^{2^2}+2x^{32}-x^1x^2--5x^2x^3=0$ у точках $A(1,0,0)$, $C(1,1,0)$.

3. Знайти рівняння дотичної, які проведенні із точки $A(3,-2,2)$ до квадрики, яка задана рівнянням $3x^{1^2}+x^{2^2}-5x^{3^2}+2x^1x^2++2x^1x^3-4x^2x^3=0$.

4. На прямій ¿1) знайти точку, гармонійно спряжену з точкою $A(4,1,-1)$ відносно лінії другого порядку

$$x^{1^2}+x^{2^2}-x^{3^2}+2x^1x^2+4x^1x^3=0.$$

5. На прямій $2x^1-x^2-9x^3=0$ знайти точку, спряжену точці $A(-1,2,1)$ відносно лінії другого порядку $x^{1^2}-x^{2^2}+3x^{3^2}++2x^1x^2+2x^1x^3-6x^2x^3=0$.

6. Задана лінія другого порядку $2x^{1^2}+x^{2^2}-2x^{3^2}-6x^1x^2++4x^2x^3=0$. Записати рівняння поляр точок $A(2,-5,5)$, $C(0,2,-1)$ відносно лінії γ.

7. Знайти полюс прямої $a(0,-1,2)$ відносно лінії другого порядку $x^{2^2}+4x^1x^3=0$.

8. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $(3,-1,1)$ і полюс прямої $x^1+x^2+x^3=0$ відносно лінії другого порядку $x^{2^2}+2x^1x^2-4x^1x^3=0$.

9. Рівняння нижченаведених ліній другого порядку подати у канонічному вигляді і визначити їх проективні класи:

а) $2x^{1^2}+3x^{2^2}+4x^{3^2}-2x^1x^2-6x^2x^3+2x^1x^3=0$;

б) $x^{1^2}+3x^{2^2}+x^{3^2}+4x^1x^2+2x^2x^3+2x^1x^3=0$;

в) $x^{1^2}+2x^{2^2}-x^{32}+2x^1x^3=0$;

г) $2x^{1^2}+x^{3^2}-2x^1x^2+2x^1x^3=0$;

ґ) $x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}+2x^1x^2+4x^1x^3-2x^2x^3=0$;

д) $x^{12}+x^{2^2}+4x^{3^2}-2x^1x^2+4x^1x^3-4x^2x^3=0$;

е) $x^{1^2}-3x^{3^2}-2x^1x^2-6x^2x^3+2x^1x^3=0$.

Практичне заняття № 9

з теми «Овальні лінії на проективній площині»

Аудиторні завдання:

7. Побудувати лінію другого порядку, яка проходить через точки (у неоднорідних координатах):

$$M_1(3,0),\ M_2(-3,0),\ M_3(0,2),\ M_4(0,-2),\ M_5\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},1\right).$$

Розв'язання.

Коефіцієнти рівняння шуканої лінії визначаються з наступної системи:

$$\begin{cases} 9a_{11}-6a_{13}+a_{33}=0, \\ 4a_{22}+4a_{23}+a_{33}=0, \\ 4a_{22}-4a_{23}+a_{33}=0, \\ \frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}a_{12}+a_{22}+3\sqrt{3}a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0. \end{cases}$$

Віднімаючи друге рівняння із першого, отримаємо $a_{13}=0$; віднімаючи четверте із третього, отримаємо $a_{23}=0$, тому система зводиться до наступної:

$$\begin{cases} 9a_{11}+a_{33}=0, \\ 4a_{22}+a_{33}=0 \\ \frac{27}{4}a_{11}+3\sqrt{3}a_{12}+a_{22}+a_{33}=0. \end{cases}$$

Із перших двох рівнянь маємо:

$$a_{11}=\frac{-a_{33}}{9},\ a_{22}=\frac{-a_{33}}{4}.$$

Підставляючи ці значення в останнє, отримаємо, $a_{12}=0$. Отже, $a_{13}=a_{12}=a_{23}=0$, і рівняння шуканої лінії набуде вигляду (за поділом на a_{33})

$$\frac{-1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2+1=0 \text{ або } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

8. Задано п’ять точок загального положення і пряма, яка проходить через останні точки. Побудувати другу точку перетину даної прямої з овальною лінією γ, яка проходить через дані п’ять точок.

Розв’язання.

Дане розв’язання ґрунтується на теоремі Штейнера. Нехай O, $O^{'}$, A, B, C – задані точки, а a – задана пряма, яка проходить через точку O. Розглянемо проективне відображення f пучків O і $O^{'}$, які переводять прямі OA, OB, OC відповідно у прямі $OA^{'}$, $OB^{'}$, $OC^{'}$. Відображення f за теоремою Штейнера породжує лінію γ. Якщо тепер побудувати пряму $a^{'}=f(a)$, то, очевидно, шуканою точкою M є точка перетину прямих a і $a^{'}$.

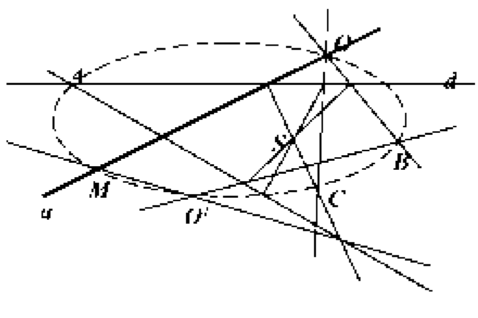


Рис. 9.1

На рис. 9.1 виконано побудову точки M. На ньому d і $d^{'}$ – довільні прямі, які проведені через точку A і не проходять через O і $O^{'}$. Точка S – центр перспективного відображення $\varphi: d \to d^{'}$, які породжують відображення f. Шуканою точкою буде точка перетину прямих a і $O^{'}3^{'}$.

9. Овальна лінія другого порядку γ задана п’ятьма точками загального положення. Побудувати декілька точок цієї лінії.

Розв’язання.

Проведемо через одну з даних точок декілька прямих, які не проходять через інші дані точки. Користуючись попередньою задачею, побудуємо точки перетину проведених прямих з лінією γ. Кожна з цих точок є шуканою.

10. Овальна лінія другого порядку γ задана чотирма точками загального положення і дотичною в одній із даних точок. Побудувати декілька точок лінії γ.

Розв’язання.

Нехай O, O', A, B – задані точки, а a – дотична у точці O. Розглянемо проективне відображення f пучків O і O', яке переводить прямі a, OA, OB відповідно у прямі $O'O$, $O'A$, $O'B$. Відображення f за теоремою Штейнера породжує лінію γ.

Проведемо через точку O пряму l, яка проходить через точки O', A, B і побудуємо її образ l'. Точка перетину прямих l і l' є шуканою. Аналогічно можна побудувати й інші точки лінії γ.

11. Задано п’ять точок загального положення: O, O', A, B, C. У точці O' побудувати дотичну до овальної лінії γ, яка проходить через ці точки.

Розв’язання.

Розглянемо проективне відображення f пучків O і O', які переводять прямі OA, OB, OC відповідно у прямі $O'B$, $O'B$, $O'C$. Відображення f за теоремою Штейнера породжує лінію γ. Шукана дотична є образом прямої O, O'.

Отже, задача зводиться до побудови образу прямої OO' у проективному відображенні f. Побудова виконана на рис. 9.2.

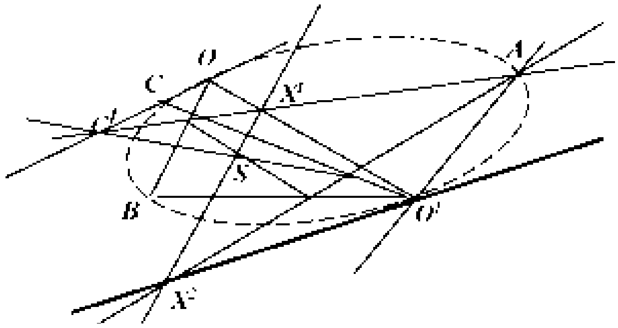


Рис. 9.2

12. Задано п’ять точок загального положення: A, B, C, D, E і точка P. Побудувати поляру точки P овальної лінії γ, яка проходить через задані точки A, B, C, D, E.

Розв’язання.

Якщо точка P співпадає з однією із даних точок, то задача зводиться до попередньої задачі, тому припустимо, що точка P не співпадає з однією з даних точок. Для розв’язання задачі достатньо побудувати дві точки поляри точки P. Для побудови цих точок скористуємося теоремою про дотичну до невиродженої лінії другого порядку.

Візьмемо такі дві із даних точок, наприклад A і B, які не лежать на одній прямій з точкою P, і проведемо прямі PA і PB. Кожна із цих прямих перетинає лінію γ, отже, у двох точках.

Побудуємо другу точку A_1 перетину прямої PA з лінією γ, а потім точку M, гармонійно спряжену з точкою P відносно пари $A\,A_1$.

Точка M лежить на полярі точки P. Аналогічно, побудувавши точки B_1 і N (див. рис. 9.3) проводимо поляру MN точки P.

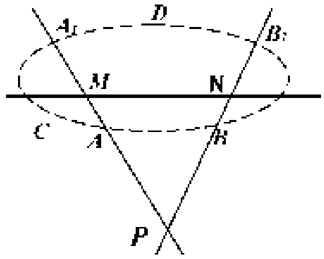


Рис. 9.3

Якщо одна з прямих, наприклад PA, є дотичною до лінії γ у точці A, то точка A лежить на шуканій полярі, тому немає потреби у побудові точки M.

Для самостійного розв'язання:

1. Знайти точки перетину кривої $x_1^2-2x_1x_2-3x_2^2-4x_1x_3--6x_2x_3+3x_3^2=0$ за наступними прямими:

а) $5x_1-x_2-5x_3=0$;

б) $x_1+2x_2+2x_3=0$;

в) $x_1+4x_2-x_3=0$.

2. Подати у канонічному вигляді рівняння кривої $x_1^2+x_2^2-2x_1x_3++2x_2x_3=0$.

3. Записати рівняння кривої, яка проходить через дані точки $(0,0,1)$, $(2,1,0)$, $(2,-1,0)$, $(-2,0,1)$, $(2,2,3)$.

4. Побудувати полюс даної прямої d відносно даної овальної кривої другого порядку Q (вказівка: побудувати поляри двох точок даної прямої).

5. Із даної точки M евклідової площини провести дотичну до даного кола Q за допомогою однієї лінійки (вказівка: побудувати поляру точки M).

6. Овальна крива другого порядку задана п'ятьма своїми точками. Побудувати:

а) дотичну в одній із даних точок;

б) ще одну точку кривої;

в) дотичну в побудові точки.

(Вказівка: скористатися теоремою Штейнера або Паскаля).

Практичне заняття № 10

з теми «Методи побудови перерізів многогранників»

Аудиторні завдання:

9. *Метод слідів січних площин.* Суть методу слідів полягає у тому, що будується слід площини перерізу на площині основи або бічної грані многогранника, яким і буде лінія перетину цих площин. Потім знаходять точки перетину цього сліду з площинами бічних граней і діагональних перерізів цих многогранників. Ці точки разом з даними точками площини перерізу визначають прямі, яким належать сторони шуканого перерізу.

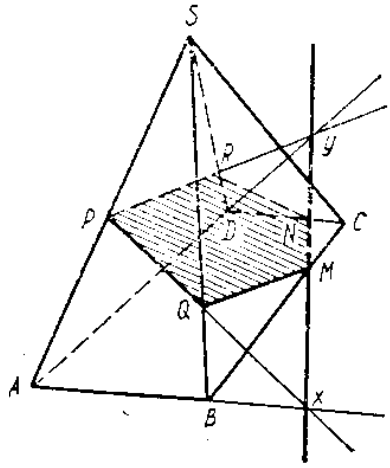


Рис. 10.1

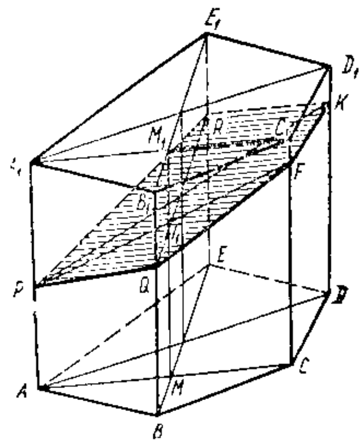


Рис.10.2

Приклад 10.1. Дано чотирикутну піраміду $SABCD$ (див. рис. 10.1), точки P, Q, $R \vee P \in [SA]$, $Q \in [SB]$, $R \in [SD]$. Побудувати переріз (PRQ) піраміди.

Розв'язання.

Щоб побудувати $(PQR) \cap (ABCD)$, досить побудувати дві їх спільні точки $X = (PQ) \cap (AB)$ і $Y = (PR) \cap (AD)$. (XY) – слід. Знаходимо $M = (XY) \cap [BC]$ і $N = (XY) \cap [DC]$.

Фігура $PQMNR$ – шуканий переріз.

10. *Метод поділу n-кутної призми (піраміди) на трикутні.* Із даної n-кутної призми (піраміди) виділяється та трикутна, на ребрах якої лежать точки, що визначають площину перерізу. Будується переріз цієї призми, а потім – перерізи інших трикутних призм, які мають спільні частини із даним многогранником.

Приклад 10.2. Дано призму $ABCDE\,A_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 10.2). Точки $P \in [A\,A_1]$, $Q \in [B_1B]$, $R \subset [E_1E]$. Побудувати переріз призми площиною PQR .

Розв'язання.

$\triangle PQR$– переріз призми $ABE\,A_1B_1E_1$. Із цією призмою мають спільні частини призми $ABC\,A_1B_1C_1$ і $ADE\,A_1D_1E_1$. Будуємо $(M\,M_1)=(BE\,E_1B_1)\cap(AC\,C_1A_1)$, $T_1=(QR)\cap(M\,M_1)$, $F=(PT_1)\cap(C\,C_1)$. $\triangle PQF$ – переріз призми $ABC\,A_1B_1C_1$ площиною перерізу. Точку K будуємо аналогічно побудові точки F.

П'ятикутник $PQFRR$ – шуканий переріз.

11. *Метод доповнення n-кутної призми (піраміди) до трикутної.* Задана призма (піраміда) добудовується до трикутної, будується її переріз. Шуканий переріз дістанемо як частину перерізу трикутної призми.

Приклад 10.3. Дано піраміду $SABCDE$ (див. рис. 10.3) і точки $M \in [SA]$, $N \in [SC]$. Побудувати переріз площиною MBN.

Розв'язання.

Будуємо $P=(BA)\cap(DE)$, $Q=(BC)\cap(DE)$, $K=(BN)\cap(SP)$, $F=[LK]\cap(SE)$, $R=(LK)\cap(SD)$.

Фігура $MBNRF$ – шуканий переріз.

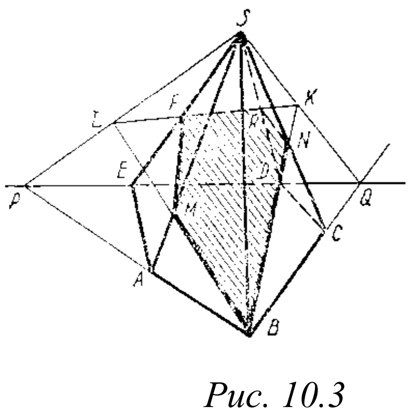


Рис. 10.3

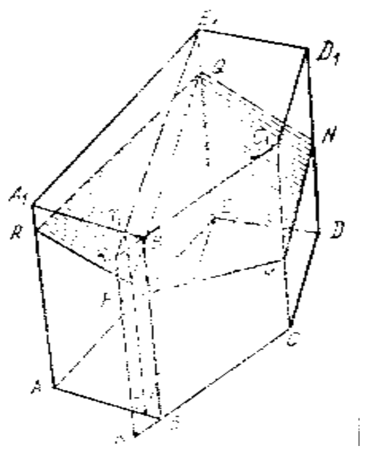


Рис. 10.4

12. *Метод паралельних прямих.* Коли врахувати, що лінії перерізу паралельних площин площиною перерізу паралельні, то, маючи лінію перерізу на одній з паралельних площин і точку на іншій, будують пряму, що проходить через цю точку і паралельну лінії перерізу першої площини. У цьому полягає суть методу паралельних прямих.

Приклад 10.4. Побудувати переріз даної п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ площиною $PMN \vee P \in (BB_1)$, $M \in (CC_1)$, $N \in (DD_1)$.

Розв'язання.

Проведемо площину $EE_1T_1T \parallel (DD_1C_1C)$ (див. рис. 10.4). Будуємо: $(KK_1) = (TEE_1) \cap (CBB_1)$, $F = (MP) \cap (KK_1)$, $[FQ] \parallel [MN]$, $L = [FQ] \cap (ABB_1)$, $(TT_1) = (KEE_1) \cap (ABB_1)$, $R = (PL) \cap [AA_1]$.

$PMNQR$ – шуканий переріз.

Практичне заняття № 11
з теми «Побудова перерізів многогранників»

Аудиторні завдання:

4. Побудувати переріз куба так, щоб він проходив через слід AB у площині нижньої основи і точку C (див. рис. 11. 1).

Розв'язання.

За основну площину беремо $A_1A_6A_5A_4$ і продовжуємо A_1A_4 до перетину із слідом у точці K. Тоді KCM є лінія перетину площини перерізу і грані $A_1A_6A_5A_4$, тобто MC – сторона перерізу. Аналогічно знаходимо сторону CO перерізу. Потім проводимо $MP \parallel AB$ (бо переріз перетинає паралельні площини основ по паралельних прямих) і сполучає точки P і O.

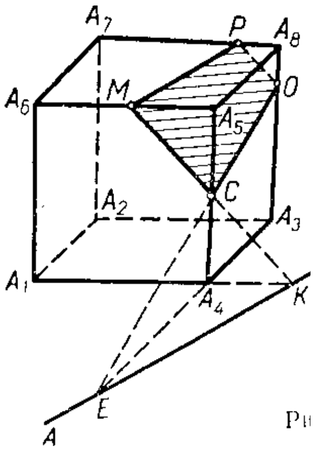


Рис. 11. 1

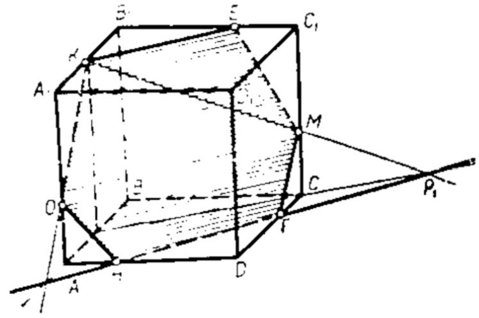


Рис. 11.2

5. Побудувати переріз куба так, щоб він проходив через точки OKM (див. рис. 11.2).

Розв'язання.

Шукаємо точки P і P_1 сліду як точки перетину прямих KO і KM із своїми проекціями. Точки перетину H і F сліду із площинами основи є вершинами перерізу. Проводимо OH, FM, KO, $EM \parallel OH$ (бо площина перерізу перетинає паралельні грані куба по паралельних прямих) і KE.

6. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив через середини A_1 і A_2 сторін основи AD і CD, і середину висоти M (див. рис. 11.3).

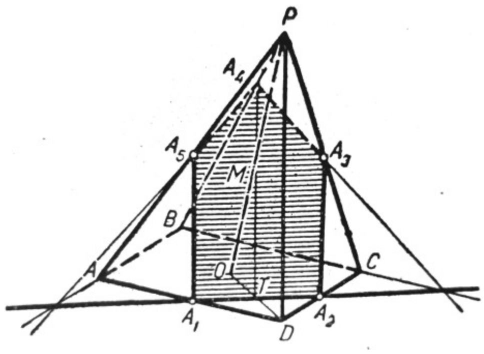


Рис. 11.3

Розв'язання.

У цій задачі маємо одну сторону A_1A_2 перерізу. Для знаходження вершини A_4 перерізу в діагональній площині BPD проводимо TM до перетину в точці A_4 з бічним ребром BP. $TM \parallel PD$ (як середня лінія трикутника OPD). Отже, MT паралельна площині APD. Тоді площина перерізу перетне бічну грань по прямій $A_1A_5 \parallel PD$. Аналітично A_2A_3. Сполучимо точки A_4 і A_5, A_4 і A_3 та одержимо $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Для самостійного розв'язання:

1. Побудувати переріз куба так, щоб він проходив:

а) через 3 точки на гранях, які сходяться в одній точці;

б) через 2 точки на протилежних бічних гранях і точку на нижній основі;

в) через 2 точки на суміжних бічних гранях і точку верхньої основи;

г) через точку верхньої основи, точку нижньої основи і точку на бічній грані;

ґ) через 2 точки на суміжних бічних гранях і точку на ребрі верхньої основи;

д) через 2 точки на суміжних бічних гранях і вершину верхньої основи;

е) через 2 точки на протилежних бічних гранях і вершину верхньої основи;

є) через 3 точки на бічних ребрах;

ж) через 2 точки на бічних ребрах, що належать одній грані, і вершину верхньої основи;

з) через 2 точки на суміжних ребрах нижньої основи і центр верхньої основи.

2. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив:

а) через 3 точки на бічних ребрах;

б) через 2 точки на протилежних бічних ребрах і точку на ребрі нижньої основи;

в) через 3 точки на бічних гранях;

г) через 2 точки на бічних ребрах однієї грані і вершину нижньої основи;

ґ) через слід у площині основи і середину бічного ребра;

д) через ребро основи перпендикулярно до протилежної грані;

е) через діагональ основи паралельно бічному ребру.

3. Провести переріз правильної шестикутної призми, що проходить:

а) через 3 точки на послідовних бічних ребрах;

б) через 3 точки на бічних ребрах через одне;

в) через 3 точки на послідовних бічних гранях;

г) через 3 точки на бічних гранях через одну;

ґ) через точку на верхній основі, точку на нижній основі і середину бічного ребра;

д) через центр верхньої основи і середини протилежних бічних ребер;

е) через пряму у площині нижньої основи і вершину верхньої основи;

є) через пряму в площині нижньої основи і середину бічного ребра;

ж) через середини суміжних ребер нижньої основи і середину висоти.

4. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро утворює з висотою кут $30°$. Побудувати переріз, що проходить через вершину основи, перпендикулярно протилежному ребру і знайти його ребро. *Відповідь*: $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

13. У правильній чотирикутній піраміді побудувати переріз, що проходить через діагональ основи паралельно бічному ребру. Сторона основи a, а бічне ребро b. Визначити площу перерізу. *Відповідь*: $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

14. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сполучити послідовно середини ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA і AA_1. Довести, що одержана фігура є правильним шестикутником, і обчислити його площу, якщо ребро куба дорівнює a. Відповідь: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

15. У кубі з ребром a провести переріз через середини двох суміжних сторін верхньої основи і центр нижньої основи. Обчислити периметр перерізу.

16. Площа бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює M. Визначити площу перерізу, перпендикулярного до більшої діагоналі основи, який ділить цю діагональ у відношенні $1:k \left(k=1,3,4\right)$. *Відповідь*: $M\sqrt{3}$; $\frac{4}{5}M\sqrt{3}$.

Додаток Б

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ПОГОДЖЕНО	**ЗАТВЕРДЖЕНО**
Завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу	Проректор з навчальної та науково-педагогічної роботи
________ Таточенко В.І.	____ проф. Тюхтенко Н.А.

Завдання

комплексної контрольної роботи з основ геометрії

для студентів 3 курсу

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Варіант № 1

1. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R = \{A_1, A_2, E\}$. Побудувати точку $M(-2,1)$ за її координатами у цьому базисі.

2. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $A(1,1,2)$, $B(2,3,1)$, що мають координати відносно базису R.

3. За допомогою однієї лінійки через дану точку A провести пряму, паралельну двом заданим паралельним прямим p і q.

4. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив через 3 точки на бічних ребрах.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ПОГОДЖЕНО
Завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу
________ Таточенко В.І.

ЗАТВЕРДЖЕНО
Проректор з навчальної та науково-педагогічної роботи
____ проф. Тюхтенко Н.А.

Завдання

комплексної контрольної роботи з основ геометрії

для студентів 3 курсу
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Варіант № 2

1. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E\}$. Побудувати точку $M(-1,3)$ за її координатами у цьому базисі.

2. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $A(1,2,-2)$, $B(4,3,1)$, що мають координати відносно базису R..

3. На евклідовій площині дано паралелограм $ABCD$, точка M, що належить одній із сторін паралелограма і пряма n. Користуючись однією лінійкою, провести пряму через точку M паралельну прямій n.

4. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив через 2 точки на протилежних бічних ребрах і точку на ребрі нижньої основи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ПОГОДЖЕНО	**ЗАТВЕРДЖЕНО**
Завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу	Проректор з навчальної та науково-педагогічної роботи
________ Таточенко В.І.	____ проф. Тюхтенко Н.А.

Завдання

комплексної контрольної роботи з основ геометрії

для студентів 3 курсу

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Варіант № 3

1. На розширеній прямій $\acute{d}$ заданий проективний базис $R=\{A_1, A_2, E\}$. Побудувати точку $M(2,3)$ за її координатами у цьому базисі.

2. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $A(2,-3,1)$, $B(-2,1,2)$, що мають координати відносно базису R..

3. Дано пряму n і точки M і N, що не лежать на ній. Користуючись однією лінійкою, побудувати точку перетину прямої n з MN, не будуючи прямої MN.

4. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив через 3 точки на бічних гранях.

Додаток В

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ

Самостійна робота № 1
з теми «Проективний простір та його властивості»

Варіант 1

1. Довести, що проективна пряма містить, принаймні, три точки.
2. Побудувати пряму $a(1,2,-2)$ за її координатами відносно заданого на розширеній площині проективного базису $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$.
3. Дано точки $A(1,2,4)$, $B(5,0,4)$, $C(3,1,4)$, $D(2,-1,0)$ у базисі $R\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Знайти складні відношення (AB,CD) і (DB,CA).
4. Дано дві паралельні прямі (різні). Користуючись тільки лінійкою, побудувати середину відрізка, який заданий на одній із даних прямих

Варіант 2

1. Довести, що на проективній площині існують три точки, які не лежать на одній прямій.
2. Побудувати пряму $a(-2,1,-1)$ за її координатами відносно заданого на розширеній площині проективного базису $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$..
3. Дано точки $A(1,-2,4)$, $B(3,0,4)$, $C(-3,2,4)$, $D(1,-1,0)$ у базисі $R\{A_1, A_2, A_3, E\}$. Знайти складні відношення (AB,CD) і (DB,CA).
4. Дано дві паралельні прямі (різні). Користуючись тільки лінійкою, побудувати пряму, яка проходить через дану точку і паралельна даним прямим.

Самостійна робота № 2
з теми «Побудова перерізів многогранників»

Варіант 1

1. Побудувати переріз куба так, щоб він проходив через 3 точки на гранях, які сходяться в одній точці.

2. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив через дві точки на бічних ребрах однієї грані і вершину нижньої основи.

3. Провести переріз правильної шестикутної призми, що проходить через 3 точки на послідовних бічних ребрах.

4. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро утворює з висотою кут $30°$. Побудувати переріз, що проходить через вершину основи, перпендикулярно протилежному ребру і знайти його ребро.

Варіант 2

1. Побудувати переріз куба так, щоб він проходив через 2 точки на протилежних бічних гранях і точку на нижній основі.

2. Побудувати переріз правильної чотирикутної піраміди так, щоб він проходив через слід у площині основи і середину бічного ребра.

3. Провести переріз правильної шестикутної призми, що проходить через три точки на бічних ребрах через одне.

4. У правильній чотирикутній піраміді побудувати переріз, що проходить через діагональ основи паралельно бічному ребру. Сторона основи a, а бічне ребро b. Визначити площу перерізу.

Додаток Г

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ / ЗАЛІКУ

1. Побудова проективного простору. Аксіоми проективного простору.
2. Моделі проективної прямої, проективної площини, проективного простору.
3. Проективні координати на прямій та на площині.
4. Перетворення проективних координат.
5. Теорема Дезарга. Принцип двоїстості.
6. Поняття повного чотиривершинника.
7. Подвійне відношення чотирьох точок.
8. Подвійне відношення чотирьох точок прямої, його властивості.
9. Криві другого порядку на проективній площині.
10. Теореми Паскаля і Бріаншона.
11. Полюс та поляра овальної кривої.
12. Дотична до кривої другого порядку.
13. Методи зображень. Паралельне проектування.
14. Зображення плоских фігур в паралельній проекції.
15. Зображення многогранників в паралельній проекції.

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Конотоп Катерина Анатоліївна,
учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:
- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:
- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

20.04.2020	К. Кон	Катерина Конотоп
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)