

ISSN 2618-0332

Міністерство освіти і науки України  
Херсонський національний технічний університет

**ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ  
МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**ТОМ 3  
№2.1**

ХЕРСОН, 2020

Міністерство освіти і науки України

Херсонський національний технічний університет

# **ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

## **Т. 3, № 2.1**

Рекомендовано до друку Вченою радою  
Херсонського національного технічного університету  
(протокол № 8 від 29 червня 2020 року)

---

Журнал включений до Реєстру наукових фахових видань України категорії Б  
на підставі Наказу МОН України від 17 березня 2020 року № 409.

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:  
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,  
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Херсон 2020**

## Редакційна рада

### Головний редактор

Тулученко Г.Я.

д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

### Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, перший проректор Херсонського національного технічного університету.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили.

### Відповідальний секретар

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедри інтелектуальних управляючих та обчислювальних систем Університету державної фіскальної служби України (м. Ірпінь, Київська обл.)

## Члени редакційної колегії за спеціальностями:

### Іноземні фахівці

Бабічев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехія)

Гучек П.Й.

д.т.н., доцент, (Польща)

## 113 – Прикладна математика

Андрейцев А.Ю.

к.ф.-м.н., доцент

Астіоненко І.О.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева І.М.

д.т.н., професор

Гнатушенко Вікт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., професор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Різник В.В.

д.т.н., професор

Стрельнікова О.О.

д.т.н., професор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор

## 122 – Комп'ютерні науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., професор
Ванін В.В.	д.т.н., професор
Вірченко Г.А.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., професор
Гумен О.М.	д.т.н., професор
Корчинський В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко В.І.	д.т.н., професор
Мартин Є.В.	д.т.н., професор
Найдиш А.В.	д.т.н., професор
Несвідомін В.М.	д.т.н., професор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., професор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., професор
Устенко С.А.	д.т.н., професор
Шоман О.В.	д.т.н., професор

## 126 – Інформаційні системи та технології

Аль-Амморі А.Н.	д.т.н., професор
Баклан І.В.	к.т.н., доцент
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левикін В.М.	д.т.н., професор
Литвиненко О.І.	к.т.н., доцент
Мороз Б.І.	д.т.н., професор
Стеценко І.В.	д.т.н., професор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., професор

## 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Алексєєв М.О.	д.т.н., професор
Бардачов Ю.М.	д.т.н., професор
Головко В.І.	д.т.н., професор
Кондратець В.О.	д.т.н., професор
Мещеряков Л.І.	д.т.н., професор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.І.	д.т.н., професор
Рожков С.О.	д.т.н., професор
Рудакова Г.В.	д.т.н., професор

## Інші спеціальності

Мельник І.В.	д.т.н., професор
Розов Ю.Г.	д.т.н., професор

ISSN 2618-0332

Министерство образования и науки Украины

Херсонский национальный технический университет

# **ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

## **Т. 3, № 2.1**

Рекомендовано к печати Ученым советом  
Херсонского национального технического университета  
(протокол № 8 от 29 июня 2020 года)

---

Журнал включен в Реестр научных специализированных изданий Украины  
категории Б на основании Приказа МОН Украины от 17 марта 2020 года № 409.

Журнал включен в наукометрические базы, электронные библиотеки и репозитории:  
Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List,  
CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Херсон 2020**

## **Редакционный совет**

### **Главный редактор**

Тулученко Г.Я.

д.т.н., профессор, заведующая кафедрой высшей математики и математического моделирования Херсонского национального университета.

### **Заместители главного редактора**

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, первый проректор Херсонского национального технического университета.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского национального университета им. П. Могилы.

### **Ответственный секретарь**

Омельчук А.А.

к.т.н., доцент кафедры интеллектуальных управляющих и вычислительных систем Университета государственной фискальной службы Украины (г. Ирпень, Киевская обл.)

## **Члены редакционной коллегии по специальностям:**

### **Иностранные специалисты**

Бабичев С.А.

д.т.н., доцент, (Чехия)

Гучек П.И.

д.т.н., доцент, (Польша)

### **113 – Прикладная математика**

Андрейцев А.Ю.

к.ф.-м.н., доцент

Астионенко И.А.

к.ф.-м.н., доцент

Гвоздева И.М.

д.т.н., профессор

Гнатушенко Викт.В.

д.т.н., доцент

Ляшенко В.П.

д.т.н., профессор

Миргород В.Ф.

д.т.н., доцент

Ризнык В.В.

д.т.н., профессор

Стрельникова Е.А.

д.т.н., профессор

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор

## 122 – Компьютерные науки

Борисенко В.Д.	д.т.н., профессор
Ванин В.В.	д.т.н., профессор
Вирченко Г.А.	д.т.н., профессор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., профессор
Гумен Е.Н.	д.т.н., профессор
Корчинский В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко В.И.	д.т.н., профессор
Мартин Е.В.	д.т.н., профессор
Найдыш А.В.	д.т.н., профессор
Несвидомин В.Н.	д.т.н., профессор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., профессор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., профессор
Устенко С.А.	д.т.н., профессор
Шоман О.В.	д.т.н., профессор

## 126 – Информационные системы и технологии

Аль-Аммори А.Н.	д.т.н., профессор
Баклан И.В.	к.т.н., доцент
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Левыкин В.М.	д.т.н., профессор
Литвиненко Е.И.	к.т.н., доцент
Мороз Б.И.	д.т.н., профессор
Стеценко И.В.	д.т.н., профессор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., профессор

## 151 – Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии

Алексеев М.А.	д.т.н., профессор
Бардачев Ю.Н.	д.т.н., профессор
Головко В.И.	д.т.н., профессор
Кондратец В.А.	д.т.н., профессор
Мещеряков Л.И.	д.т.н., профессор
Омельчук А.А.	к.т.н.
Осадчий С.И.	д.т.н., профессор
Рожков С.А.	д.т.н., профессор
Рудакова А.В.	д.т.н., профессор

## Другие специальности

Мельник И.В.	д.т.н., профессор
Розов Ю.Г.	д.т.н., профессор

ISSN 2618-0332

Ministry of Education and Science of Ukraine

Kherson National Technical University

# **APPLIED QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELLING**

## **V. 3, № 2.1**

Recommended for publication by the Academic Council of  
Kherson National Technical University  
(Minutes № 8 on 29th June 2020)

---

The journal is included in the Register of scientific specialized publications of Ukraine of category B on the basis of Minutes of the Ministry of Education and Science of Ukraine dated March 17, 2020 № 409.

The journal is included in the scientometric bases, electronic libraries and repositories: Google Scholar, Index Copernicus International Journal Master List, CiteFactor Academic Scientific Journals, National Library of Ukraine (Vernadsky).

**Kherson 2020**



## Editorial Board

### Editor-in-Chief

Tuluchenko H.Ya.

Professor, Doctor of Engineering Science, Head of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling of Kherson National Technical University.

### Deputies Editor-in-Chief

Rozov Yu.H.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, First Vice-Rector of Kherson National Technical University.

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Professor at the Department of Intelligent Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University.

### Executive Secretary

Omelchuk A.A.

Ph.D., Associate Professor at the Department of Intelligent Control and Computing Systems of University of State Fiscal Service of Ukraine (Irpin, Kyiv region).

## Members of Editorial Board by specialities:

### Foreign Specialists

**Babichev S.A.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Czech Republic)

**Guchek P.Y.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor, (Republic of Poland)

## 113 – Applied Mathematics

**Andreytsev A.Yu.**

Ph.D., Associate Professor

**Astionenko I.O.**

Ph.D., Associate Professor

**Hvozdeva I.M.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Hnatushenko Vikt.V.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

**Liashenko V.P.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Myrhorod V.F.**

Doctor of Engineering Science, Associate Professor

**Riznyk V.V.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Strelnikova O.O.**

Doctor of Engineering Science, Professor

**Khomchenko A.N.**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

## 122 – Computer Science

<b>Borysenko V.D.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Vanin V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Virchenko H.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Hnatushenko V.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Humen O.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Korchynskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Lytvynenko V.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Martyn Ye.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Naidysh A.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Nesvidomin V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Pylypaka S.F.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tuluchenko H.Ya.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Ustenko S.A.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Shoman O.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## 126 – Information Systems and Technologies

<b>Al-Ammori A.N.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Baklan I.V.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Ben A.P.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Levykin V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Lytvynenko O.I.</b>	Ph.D., Associate Professor
<b>Moroz B.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Stetsenko I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Tomashevskyi V.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Sherstiuk V.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## 151 – Automation and Computer Integrated Technologies

<b>Aleksieiev M.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Bardachov Yu.M.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Holovko V.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Kondratets V.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Meshcheriakov L.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Omelchuk A.A.</b>	Ph.D.
<b>Osadchyi S.I.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rozhkov S.O.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rudakova H.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## Other Specialties

<b>Melnyk I.V.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor
<b>Rozov Yu.H.</b>	Doctor of Engineering Science, Professor

## ЗМІСТ

<b>БЛАЖЕВСЬКИЙ С.Г., ЛЕНЮК О.М., НІКІТІНА О.М., ШИНКАРИК М.І.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ .....	18
<b>БРАІЛОВ О.Ю., ПАНЧЕНКО В.І.</b> КОМБІНОВАНА ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ В ОПТИМІЗАЦІЙНОМУ ПІДХОДІ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕДОСТУПНОЇ ТОЧКИ ОБ'ЄКТА .....	27
<b>ВАЛЬКО Н.В., БОЛГАРИН Т.О., ВАЛЬКО К.В.</b> АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ШЛЯХУ ДЛЯ АВТОНОМНОГО РУХУ БЕЗПЛОТНОГО ТРАНСПОРТУ ПО ЛІНІЇ .....	39
<b>ВАХНЕНКО В.О., ВЕНГРОВИЧ Д.Б., МІЩЕНКО О.В.</b> ДІАГНОСТИКА СТРУКТУРОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА ДОВГИМИ НЕЛІНІЙНИМИ ХВИЛЯМИ: ТЕОРЕТИЧНЕ ОБґРУНТУВАННЯ .....	49
<b>ВОРОНЕНКО С.В., СУББОТІН О.В., ЛЕБЕДЕНКО Ю.О., РУДАКОВА Г.В.</b> АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ РОБОТИ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ СУДНОВОЮ КОМПЛЕКСНОЮ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОЮ ТУРБОКОМПРЕСОРНОЮ УСТАНОВКОЮ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ЗОВНІШНІХ ФАКТОРІВ .....	60
<b>ГАЛЬЧЕНКО А.В., ЧОПОРОВ С.В.</b> КОДУВАННЯ ДАНИХ В АЛГОРИТМАХ ЗАПЕРЕЧУВАННОГО ШИФРУВАННЯ .....	72
<b>МИРГОРОД В.Ф., ГВОЗДЕВА І.М., ЛЕЩЕНКО В.В., ТУМОЛЬСКИЙ А.П., А.Г. КАЛУЄВ</b> ПРОБЛЕМИ АЕРОДИНАМІЧНОЇ СТАЛОСТІ І МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНОЇ УСТАНОВКИ ТУРБОГЕНЕРАТОРНОГО ТИПУ .....	80
<b>ГРИЦИК В.В.</b> ДОСЛІДЖЕННЯ УНІФІКАЦІЇ СТАНДАРТНИХ ПОРОГОВИХ МЕТОДІВ СЕГМЕНТАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ .....	88
<b>ЄВГРАШКІНА Г.П., ХАРИТОНОВ М.М.</b> ЕКОЛОГІЧНА ОЦІНКА, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗ СОЛЬОВИХ РЕЖИМІВ ЗРОШУВАНИХ ЗЕМЕЛЬ В АРІДНИХ РЕГІОНАХ .....	99
<b>КАГАДІЙ Т.С., ШПОРТА А.Г., БІЛОВА О.В., ЩЕРБИНА І.В.</b> НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ШАРУВАТОЇ ОСНОВИ З ПІДКРІПЛЮЮЧИМ ЕЛЕМЕНТОМ .....	107
<b>КАШТАН В.Ю., ГНАТУШЕНКО В.В.</b> ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ ЗЛИТТЯ СУПУТНИКОВИХ ЗНІМКІВ ВИСОКОГО ПРОСТОРОВОГО РОЗРІЗНЕННЯ .....	117
<b>КЛОЧАН А.С.</b> МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОЛЯРИМЕТРИЧНОЇ СИСТЕМИ ПОСАДКИ ПОВІТРЯНИХ СУДЕН .....	128
<b>КОВИЛІН Є.Р., ВОЛКОВСЬКИЙ О.С.</b> КОМП'ЮТЕРНА МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦІЇ ВІДПОВІДЕЙ У ПОШУКОВІЙ СИСТЕМІ НА ОСНОВІ НЕСТРУКТУРОВАНОЇ БАЗИ ЗНАНЬ .....	142
<b>КОРЧИНСЬКИЙ В.М., СВИНАРЕНКО Д.М.</b> ЗБІЛЬШЕННЯ ПРОСТОРОВОГО ТА РАДІОМЕТРИЧНОГО РОЗРІЗНЕННЯ БАГАТОСПЕКТРАЛЬНИХ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДИСТАНЦІЙНОГО ЗОНДУВАННЯ НА ОСНОВІ ЇХ АНАЛІТИЧНИХ СИГНАЛІВ .....	156
<b>КУЗЬМИЧ В.І., КУЗЬМИЧ Л.В., САВЧЕНКО О.Г.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ПРЯМОЛІНІЙНОГО ТА ПЛОСКОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ .....	165
<b>МИХАЙЛУЦА О.М., ПОЖУЄВ А.В.</b> ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В НАВЧАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ВИКЛАДАННЯ ЖИВОПИСУ .....	174
<b>МИРГОРОД В.Ф., ГВОЗДЕВА І.М.</b> ОЦІНКА ПОТУЖНОСТІ ДЕЯКИХ НЕПАРАМЕТРИЧНИХ КРИТЕРІЇВ ТРЕНДУ .....	184
<b>ОСАДЧИЙ С.І., ДЯЧЕНКО М.М.</b> ЗБІР ТА ПЕРВИННА ОБРОБКА ДАНИХ З СИСТЕМИ ARDUPILOT ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ КВАДРОКОПТЕРУ .....	197
<b>ОСАДЧУК О.В., КРИЛИК Л.В., ОСАДЧУК Я.О.</b> МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРИЧНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА ВОЛОГОСТІ З ЧАСТОТНИМ ВИХОДОМ .....	206
<b>ПРОЛІСКО Е.Е., ШУТЬ В.Н., КОЗИНСЬКИЙ А.А.</b> УПРАВЛІННЯ ПЕРЕВІЗНИМ ПРОЦЕСОМ В МІСЬКІЙ ПАСАЖИРСЬКІЙ ТРАНСПОРТНІЙ СИСТЕМІ .....	216
<b>РЕДЧИЦЬ Д.О., ТАРАСОВ С.В., ТАРАСОВ А.С., МОІСЕЄНКО С.В.</b> ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПОТОКІВ ХОЛОДНОЇ ПЛАЗМИ ДІЕЛЕКТРИЧНОГО БАР'ЄРНОГО РОЗРЯДУ В ПОВІТРІ .....	224
<b>РОЖКОВ С.О., ХЛОПЕНКО М.Я., ТИМОФЕЄВ К.В., ТЕРНОВА Т.І., СОКОЛОВ А.С.</b> ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ТЕОРІЇ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ. МЕТОДИ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ ПРИ АНАЛІЗІ СЦЕНИ .....	235
<b>СОКОЛОВА Н.О., БЄЛОВ А.С.</b> РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІoT-СИСТЕМИ НА АПАРАТНІЙ ПЛАТФОРМІ ARDUINO .....	251
<b>СТЕГАНЦЕВ Є.В.</b> КЛАСИФІКАЦІЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЇХ ПРООБРАЗАМИ ПРИ СТЕРЕОГРАФІЧНІЙ ПРОЕКЦІЇ .....	260

<b>ТРОХИМЧУК П.П.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ПРЯМОГО ЛАЗЕРНО-ІНДУКОВАНОГО ОПТИЧНОГО ПРОБОЮ В ТВЕРДИХ ТІЛАХ .....	269
<b>УСОВ А.В., СІКІРАШ Ю.Є.</b> МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ МЕХАНІЧНІЙ ОБРОБЦІ ВИРОБІВ ІЗ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ .....	280
<b>ЧОПОРОВА О.В., ЛІСНЯК А.О.</b> ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ ПРИ ПРОГНОЗУВАННІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНКИ .....	290
<b>ЯРЕЦКА Н.О., РАМСЬКИЙ А.О.</b> ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ПІВПРОСТОРУ .....	300

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>БЛАЖЕВСКИЙ С.Г., ЛЕНИУК О.М., НИКИТИНА О.М., ШИНКАРИК Н.И.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ГИБРИДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА БЕССЕЛЯЭЙЛЕРА-БЕССЕЛЯ НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ .....	18
<b>БРАИЛОВ А.Ю., ПАНЧЕНКО В.И.</b> КОМБИНИРОВАННАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ОПТИМИЗАЦИОННОМ ПОДХОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕДОСТУПНОЙ ТОЧКИ ОБЪЕКТА .....	27
<b>ВАЛЬКО Н.В., БОЛГАРИН Т.А., ВАЛЬКО К.В.</b> АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПУТИ ДЛЯ АВТОНОМНОГО ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНОГО ТРАНСПОРТА ПО ЛИНИИ .....	39
<b>ВАХНЕНКО В.А., ВЕНГРОВИЧ Д.Б., МИЩЕНКО А.В.</b> ДИАГНОСТИКА СТРУКТУРИРОВАННОЙ СРЕДЫ ДЛИННЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЛНАМИ: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ .....	49
<b>ВОРОНЕНКО С.В., СУББОТИН А.В., ЛЕБЕДЕНКО Ю.А., РУДАКОВА А.В.</b> АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СУДОВОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТУРБОКОМПРЕССОРНОЙ УСТАНОВКИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ .....	60
<b>ГАЛЬЧЕНКО А.В., ЧОПОРОВ С.В.</b> КОДИРОВАНИЕ ДАННЫХ В АЛГОРИТМАХ ОТРИЦАЕМОГО ШИФРОВАНИЯ .....	72
<b>МИРГОРОД В.Ф., ГВОЗДЕВА И.М., ЛЕЩЕНКО В.В., ТУМОЛЬСКИЙ А.П., КАЛУЕВ А.Г.</b> ПРОБЛЕМЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ ТУРБОГЕНЕРАТОРНОГО ТИПА .....	80
<b>ГРИЦИК В.В.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ УНИФИКАЦИИ СТАНДАРТНЫХ ПОРОГОВЫХ МЕТОДОВ СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ .....	88
<b>ЕВГРАШКИНА Г.П., ХАРИТОНОВ Н.Н.</b> ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗ СОЛЕВЫХ РЕЖИМОВ ОРОШАЕМЫХ ЗЕМЕЛЬ В АРИДНЫХ РЕГИОНАХ .....	99
<b>КАГАДИЙ Т.С., ШПОРТА А.Г., БЕЛОВА О.В., ЩЕРБИНА И.В.</b> НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОГО ОСНОВАНИЯ С ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ .....	107
<b>КАШТАН В.Ю., ГНАТУШЕНКО В.В.</b> ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ СЛИЯНИЯ СПУТНИКОВЫХ СНИМКОВ ВЫСОКОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ .....	117
<b>КЛОЧАН А.Е.</b> МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛЯРИМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОСАДКИ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ .....	128
<b>КОВЫЛИН Е.Р., ВОЛКОВСКИЙ О.С.</b> КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ГЕНЕРАЦИИ ОТВЕТОВ В ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЕ НА ОСНОВЕ НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ БАЗЫ ЗНАНИЙ .....	142
<b>КОРЧИНСКИЙ В.М., СВИНАРЕНКО Д.Н.</b> ПОВЫШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И РАДИОМЕТРИЧЕСКОГО РАЗРЕШЕНИЯ МНОГОСПЕКТРАЛЬНЫХ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙДИСТАНЦИОННОГО ОНДИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ .....	156
<b>КУЗЬМИЧ В.И., КУЗЬМИЧ Л.В., САВЧЕНКО А.Г.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО И ПЛОСКОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА .....	165
<b>МИХАЙЛУЦА Е.Н., ПОЖУЕВ А.В.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УЧЕБНОЙ СИСТЕМЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ЖИВОПИСИ .....	174
<b>МИРГОРОД В.Ф., ГВОЗДЕВА И.М.</b> ОЦЕНКА МОЩНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ТРЕНДА .....	184
<b>ОСАДЧИЙ С.И., ДЯЧЕНКО М.Н.</b> СБОР И ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ ИЗ СИСТЕМЫ ARDURILOT ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ КВАДРОКОПТЕРА .....	197
<b>ОСАДЧУК А.В., КРИЛИК Л.В., ОСАДЧУК Я.А.</b> МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ВЛАЖНОСТИ С ЧАСТОТНЫМ ВЫХОДОМ .....	206
<b>ПРОЛИСКО Е.Е., ШУТЬ В.Н., КОЗИНСКИЙ А.А.</b> УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕВОЗОЧНЫМ ПРОЦЕССОМ В ГОРОДСКОЙ ПАССАЖИРСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЕ .....	216
<b>РЕДЧИЦ Д.А., ТАРАСОВ С.В., ТАРАСОВ А.С., МОИСЕЕНКО С.В.</b> ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО БАРЬЕРНОГО РАЗРЯДА В ВОЗДУХЕ .....	224
<b>РОЖКОВ С.А., ХЛОПЕНКО Н.Я., ТИМОФЕЕВ К.В., ТЕРНОВАЯ Т.И., СОКОЛОВ А.Е.</b> ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ .....	235

<b>СОКОЛОВА Н.О., БЕЛОВ А.С.</b> РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ IoT-СИСТЕМЫ НА АППАРАТНОЙ ПЛАТФОРМЕ ARDUINO.....	251
<b>СТЕГАНЦЕВ Е.В.</b> КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ ПРООБРАЗАМ ПРИ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ .....	260
<b>ТРОХИМЧУК П.П.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОГО ЛАЗЕРНО-ИНДУЦИРОВАННОГО ОПТИЧЕСКОГО ПРОБОЯ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ .....	269
<b>УСОВ А.В., СИКИРАШ Ю.Е.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗДЕЛИЙ ИЗ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ .....	280
<b>ЧОПОРОВА О.В., ЛИСНЯК А.А.</b> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ .....	290
<b>ЯРЕЦКАЯ Н.А., РАМСКИЙ А.А.</b> ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА .....	300

---



---

**CONTENTS**


---



---

<b>BLAZHEVSKIY S.G., LENYUK O.M., NIKITINA O.M., SHYNKARYK M.I.</b> MODELING OF DYNAMIC PROCESSES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORM OF BESSEL-EULER-BESSEL TYPE ON THE POLAR AXIS .....	18
<b>BRAILOV A.Yu., PANCHENKO V.I.</b> THE COMBINED GEOMETRICAL MODEL IN THE OPTIMIZING APPROACH TO DETERMINATION THE PARAMETERS OF AN INACCESSIBLE POINT OF AN OBJECT .....	27
<b>VALKO N.V., BOLGARIN T.O., VALKO K.V.</b> ALGORITHM FOR DETERMINING THE PATH FOR AUTONOMOUS MOVEMENT OF UNMANNED VEHICLES ALONG THE LINE .....	39
<b>VAKHNENKO V.O., VENGROVICH D.B., MICHCHENKO O.V.</b> THE DIAGNOSTICS OF A STRUCTURED MEDIUM BY LONG NONLINEAR WAVES: THEORETICAL JACTIFICATION .....	49
<b>VORONENKO S.V., SUBBOTIN O.V., LEBEDENKO Yu.O., RUDAKOVA H.V.</b> ANALYSIS OF THE CONTROL SYSTEM EFFICIENCY OF THE SHIP INTEGRATED ELECTRICITY INSTALLING TURBO WITH THE INFLUENCE OF EXTERNAL FACTORS .....	60
<b>HALCHENKO A.V., CHOPOROV S.V.</b> THE DATA ENCODING IN DENIABLE ENCRYPTION ALGORITHMS .....	72
<b>MYRHOROD V., HVOZDEVA I., LESHCHENKO V., TUMOLSKIY A., KALUEV A.</b> PROBLEMS OF AERODYNAMIC STABILITY AND A MATHEMATICAL MODEL OF A WIND POWER PLANT OF TURBOGENERATOR TYPE .....	80
<b>HRYTSYK V.V.</b> RESEARCH OF IMAGE SEGMENTATION METHODS FOR THEIR UNIFICATION .....	88
<b>YEVGRASHKINA G.P., KHARYTONOV M.M.</b> AN ENVIRONMENT ASSESSMENT, MODELLING AND FORECAST OF THE SALTED REGIMES OF IRRIGATED ARABLE LANDS IN ARID REGIONS .....	99
<b>KAGADIY T.S., SHPORTA A.H., BILOVA O.V., SCHERBINA I.V.</b> STRESSED-STRAINED STATE OF A LAYERED BASIS WITH A FASTENING ELEMENT .....	107
<b>KASHTAN V.J., HNATUSHENKO V.V.</b> AN INVESTIGATION OF EFFICIENCY OF PAN-SHARPENING METHODS OF HIGH RESOLUTION SATELLITE IMAGES .....	117
<b>KLOCHAN A.Ye.</b> MATHEMATICAL MODEL OF THE AIRCRAFT'S POLARIMETRIC LANDING SYSTEM .....	128
<b>KOVYLIN Y.R., VOLKOVSKY O.S.</b> COMPUTER MODEL OF RESPONSE GENERATION IN THE SEARCH SYSTEM BASED ON AN UNSTRUCTURED KNOWLEDGE BASE .....	142
<b>KORCHYNSKIY V.M., SVYNARENKO D.M.</b> IMPROVED SPATIAL AND RADIOMETRIC RESOLUTION OF MULTISPECTRAL DIGITAL REMOTE SENSING IMAGES BASED ON THEIR ANALYTICAL SIGNALS .....	156
<b>KUZ'MICH V.I., KUZMICH L.V., SAVCHENKO O.G.</b> SIMULATION OF RECTILINEAR AND FLAT PLACEMENT OF POINTS OF METRIC SPACE .....	165
<b>MIKHAILUTSA O.M., POZHUYEV A.V.</b> THE USE OF COMPUTER TECHNOLOGY IN THE EDUCATIONAL SYSTEM OF TEACHING PAINTING .....	174
<b>MYRHOROD V.F., HVOZDEVA I.M.</b> ASSESSMENT OF POWER OF SOME NON-PARAMETRIC TREND CRITERIA .....	184
<b>OSADCHY S.I., DJACHENKO M. M.</b> ACQUISITION AND PRIMARY PROCESSING OF DATA FROM THE ARDUPILOT SYSTEM FOR IDENTIFICATION OF THE QUADROPTER DYNAMICS MODEL .....	197
<b>OSADCHUK A.V., KRILIK L.V., OSADCHUK I.A.</b> MATHEMATICAL MODEL OF A PARAMETRIC HUMIDITY TRANSDUCER WITH A FREQUENCY OUTPUT .....	206
<b>PROLISKO E.E., SHUTS V.N., KOZINSKY A.A.</b> MANAGING THE TRANSPORTATION PROCESS IN THE CITY PASSENGER TRANSPORT SYSTEM .....	216
<b>REDCHYTS D.O., TARASOV S.V., TARASOV A.S., MOISEENKO S.V.</b> NUMERICAL SIMULATION OF UNSTEADY COLD PLASMA STREAMS OF DIELECTRIC BARRIER DISCHARGE IN AIR .....	224
<b>ROZHKOVA S., KHLOPENKO M., TIMOFEEV K., TERNOVA T., SOKOLOV A.</b> INFORMATION TECHNOLOGIES IN THEORY RECOGNITION OF IMAGES. METHOD OF CONSTRUCTING MODELS AT SCENE ANALYSIS .....	235
<b>SOKOLOVA N.O., BIELOV A.S.</b> DEVELOPMENT OF IOT-SYSTEM SOFTWARE ON ARDUINO HARDWARE PLATFORM .....	251
<b>STEGANTSEV E.V.</b> THE CLASSIFICATION OF THE CONICS ACCORDING TO THEIR INVERSE IMAGES IN THE STEREOGRAPHIC PROJECTION .....	260

<b>TROKHIMCHUCK P. P.</b> MODELLING OF THE DIRECT LASER-INDUCED OPTICAL BREAKDOWN IN SOLID .....	269
<b>USOV A.V., SIKIRASH Yu.Ye.</b> MODELING OF THERMOPHYSICAL PROCESSES AT THE MECHANICAL PROCESSING OF PRODUCTS FROM STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS MATERIALS .....	280
<b>CHOPOROVA O. V., LISNIAK A. O.</b> THE USE OF A GENETIC ALGORITHM FOR OPTIMIZING THE PARAMETERS OF THE NEURAL NETWORK IN PREDICTING THE STRESS-STRAIN STATE OF A SQUARED PLATE .....	290
<b>YARETSKA N.O., RAMSKY A.O.</b> INFLUENCE OF INITIAL STRESSES ON CONTACT INTERACTION OF PRE-STRESSED ANNULAR STAMP AND HALF SPACE .....	300



УДК: 514.13

В.І. КУЗЬМИЧ, Л.В. КУЗЬМИЧ, О.Г. САВЧЕНКО  
Херсонський державний університет

### МОДЕЛЮВАННЯ ПРЯМОЛІНІЙНОГО ТА ПЛОСКОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ

*У роботі розглядаються питання геометричної структуризації множин точок довільного метричного простору. Запропоновані методи побудови прямолінійно і плоско розміщених множин точок метричного простору. Такі множини є узагальненням понять, відповідно, прямої лінії і площини у класичній геометрії Евкліда. Побудова таких множин точок дає можливість моделювати різні геометричні образи у метричних просторах.*

*Поняття прямолінійного розміщення точок базується на класичному понятті «лежати між», що широко використовується у сучасних геометричних системах. У роботі використовуються поняття кута, утвореного трьома точками метричного простору, та поняття кутової характеристики цього кута. Ці поняття є базовими для визначення плоского розміщення точок метричного простору. Крім того, факт прямолінійного розміщення точок можна отримати, також, з використанням понять кута та його кутової характеристики.*

*Для встановлення факту плоского розміщення точок метричного простору використовується формула Юнгіуса обчислення об'єму тетраедра через довжину його бічних ребер. Умова рівності нулю цього об'єму є ознакою плоского розміщення чотирьох вершин тетраедра. У роботі використовується модифікована формула Юнгіуса, в якій об'єм тетраедра обчислюється через довжини трьох його ребер, що виходять з однієї вершини, та косинуси плоских кутів при цій вершині. Оскільки такі обчислення досить трудомісткі, то в роботі пропонується проводити їх із використанням програмного засобу «Калькулятор». За допомогою цього калькулятора можна встановити: чи існує тетраедр із заданими ребрами, і якщо так, то обчислити об'єм такого тетраедра.*

*У роботі наведені приклади прямолінійно та плоско розміщених множин точок у різних класичних метричних просторах. Зокрема, розглянуті приклади таких множин у просторі неперервних на відрізку функцій та у просторі інтегрованих за Ріманом на відрізку функцій. Деякі приклади вказують на «неевклідовість» понять прямолінійного та плоского розміщення точок. Це дає змогу моделювати у метричних просторах основні поняття та властивості неевклідових геометрій.*

*Ключові слова: пряма лінія; площина; кут; метричний простір; прямолінійно розміщена множина точок; кутова характеристика; плоско розміщена множина точок.*

В.И. КУЗЬМИЧ, Л.В. КУЗЬМИЧ, А.Г. САВЧЕНКО  
Херсонский государственный университет

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО И ПЛОСКОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

*В работе рассматриваются вопросы геометрической структуризации множеств точек произвольного метрического пространства. Предложены методы построения прямолинейно и плоско расположенных множеств точек метрического пространства. Такие множества являются обобщением понятий, соответственно,*

прямой линии и плоскости в классической геометрии Евклида. Построение таких множеств точек дает возможность моделировать различные геометрические образы в метрических пространствах.

Понятие прямолинейного размещения точек базируется на классическом понятии «лежать между», которое широко используется в современных геометрических системах. В работе используются понятие угла, образованного тремя точками метрического пространства, и понятие угловой характеристики этого угла. Эти понятия являются базовыми для определения плоского размещения точек метрического пространства. Кроме того, факт прямолинейного размещения точек можно получить, также, с использованием понятий угла и его угловой характеристики.

Для установления факта плоского размещения точек метрического пространства используется формула Юнгиуса вычисления объема тетраэдра через длину его боковых ребер. Условие равенства нулю этого объема является признаком плоского размещения четырех вершин тетраэдра. В работе используется модифицированная формула Юнгиуса, в которой объем тетраэдра вычисляется через длины трех его ребер, выходящих из одной вершины, и косинусы плоских углов при этой вершине. Поскольку такие вычисления достаточно трудоемки, то в работе предлагается проводить их с использованием программного средства «Калькулятор». С помощью этого калькулятора можно установить: существует ли тетраэдр с заданными ребрами, и если да, то вычислить объем такого тетраэдра.

В работе приведены примеры прямолинейно и плоско размещенных множеств точек в разных классических метрических пространствах. В частности, рассмотрены примеры таких множеств в пространстве непрерывных на отрезке функций и в пространстве интегрированных по Риману на отрезке функций. Некоторые примеры указывают на «неевклидовость» понятий прямолинейного и плоского размещения точек. Это позволяет моделировать в метрических пространствах основные понятия и свойства неевклидовых геометрий.

Ключевые слова: прямая линия; плоскость; угол; метрическое пространство; прямолинейно расположенное множество точек; угловая характеристика; плоско расположенное множество точек.

V.I. KUZ'MICH, L.V. KUZMICH, O.G. SAVCHENKO  
Kherson State University

## **SIMULATION OF RECTILINEAR AND FLAT PLACEMENT OF POINTS OF METRIC SPACE**

*The paper deals with the issues of geometric structuring of sets of points of an arbitrary metric space. Methods for constructing rectilinear and flat sets of points of metric space are proposed. Such sets are a generalization of the concepts, respectively, of a straight line and a plane in the classical geometry Euclid. The construction of such sets of points makes it possible to model various geometric images in metric spaces.*

*The concept of rectilinear placement of points is based on the classical concept of 'lie between', which is widely used in modern geometric systems. The work uses the concept of an angle formed by three points of the metric space, and the concept of the angular characteristic of this angle. These concepts are basic for the definition of a flat placement of points in a metric space. In addition, the fact of the rectilinear placement of points can also be obtained using the concepts of angle and its angular characteristic.*

*For establish the fact that the points of the metric space are flat placement, the Jungius formula is used to calculate the volume of a tetrahedron in terms of the length of its lateral edges. The condition for this volume to be zero is a sign of the flat placement of the four vertices of the tetrahedron. The paper uses a modified Jungius formula, in which the volume of a tetrahedron is calculated in terms of the lengths of its three edges emerging from one vertex and the cosines of plane angles at this vertex. Since such calculations are rather laborious, it is proposed to carry out them using the 'Calculator' software tool. With the help of this calculator, you can determine whether there is a tetrahedron with given edges, and if so, calculate the volume of such a tetrahedron.*

*The paper gives examples of rectilinear and flat placement sets of points in different classical metric spaces. In particular, examples of such sets are considered in the space of continuous functions on an segment and in the space of Riemann-integrated functions on an segment. Some examples point to the 'non-Euclidean' concepts of rectilinear and flat placement of points. This allows modeling the basic concepts and properties of non-Euclidean geometries in metric spaces.*

*Key words: straight line; plane; angle; metric space; rectilinear placement set of points; angular characteristic; flat placement set of points.*

### **Постановка проблеми**

При обробці статистичних даних, при математичному моделюванні фізичних, економічних, соціологічних явищ та процесів виникає необхідність структуризації масивів числових даних, отриманих в результаті експериментів, спостережень, вимірювань. У останні роки значного розвитку та застосувань у різноманітних галузях науки та інженерії набули методи метричної геометрії. Метрична геометрія вивчає геометричні властивості та співвідношення між точками метричного простору. Ці властивості та співвідношення значною мірою залежать від метрики простору, тобто, від способу задання відстані між точками цього простору. Однак, є певні співвідношення, які несуть у собі геометричний зміст, і можуть бути однаково інтерпретовані у просторах з різною метрикою. До таких співвідношень можна віднести, наприклад, співвідношення «лежати між», «прямолінійне розміщення точок» або «плоске розміщення точок». Причому, ці співвідношення у метричній геометрії можна описати аналітично, за допомогою конкретних рівностей. Це дає можливість використовувати їх для структуризації даних і моделювання багатьох явищ та процесів за допомогою електронно-обчислювальної техніки.

У даній роботі будуть описані деякі методи побудови прямолінійно та плоско розміщених множин точок довільного метричного простору, а також наведені приклади побудови таких множин у конкретних класичних просторах з відомою метрикою.

### **Аналіз останніх досліджень і публікацій**

З основними поняттями метричної геометрії можна ознайомитись по ряду монографій та посібників, написаних такими відомими математиками як Буземан [1], Берже [2], Бураго [3], а також, частково, по оглядовій статті Сабітова [4]. Властивості відношення «лежати між» для точок метричного простору досліджувались у роботах [5, 6]. Прямолінійне та плоске розміщення точок метричного простору вивчалось у роботах [7, 8].

Оскільки поняття метричного простору є базовим у математиці, то поряд з метричними просторами також активно вивчаються їх спеціальні класи та модифікації, що мають застосування у різних галузях сучасної науки. У зв'язку з цим відзначимо ультраметричні або неархімедові простори. Так, у [9] запропонована конструкція інваріантної метрики на вільній групі ультраметричного простору, яка є

функторіальною на категорії ультраметричних просторів діаметра не більше одиниці і не розтягуючих відображень. Ця конструкція визначає монаду на цій категорії. Наведено, також, опис категорії алгебр цієї монади як категорії лівоінваріантних ультраметричних груп діаметра не більше одиниці і нерозтягуючих гомоморфізмів.

Такими, що заслуговують особливої уваги, є розмиті метричні простори, зокрема, стаціонарні розмиті метричні простори та пов'язані з ними функторіальні конструкції [10], [11]. Так, в роботі [12] утворений за допомогою певної ультраметризації функтор ймовірнісних мір утворює монаду на категорії розмитих ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень. Встановлено, що функтор гіперпростору допускає продовження на категорію Клейслі монади гіперпростору.

Інтенсивно досліджуваними у теперішній час є метричні простори, які виникають на межі теоретичної інформатики та прикладної математики. Це так звані простори діаграм стійкості. Відстань між діаграмами стійкості є кількісною характеристикою віддаленості між собою великих масивів даних, тому такий метричний простір є об'єктом вивчення багатьох дослідників. Зокрема, в [13] доведено, що множина діаграм стійкості тісно пов'язана з однією з добре відомих конструкцій алгебраїчної топології — нескінченним симетричним добутком у сенсі Дольда і Тома.

### Мета дослідження

Метою цієї роботи є опис методів геометричної структуризації метричних просторів, шляхом побудови прямолінійно та плоско розміщених множин точок у цих просторах. При побудові плоско розміщених множин точок використовується програмний засіб «Калькулятор», за допомогою якого можна встановити факт плоского розміщення чотирьох точок метричного простору.

### Викладення основного матеріалу дослідження

У подальшому будемо користуватись наступним означенням метричного простору [14, с. 41].

**Означення 1.** *Метричним простором називається пара  $(X, \rho)$ , що складається з деякої множини (простору)  $X$  елементів (точок) і відстані, тобто однозначної, невід'ємної, дійсної функції  $\rho(x; y)$ , визначеної для будь-яких  $x$  і  $y$  з  $X$ , і яка задовольняє таким трьома аксіомам:*

- 1)  $\rho(x; y) = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $x = y$  ( $x$  і  $y$  співпадають);
- 2)  $\rho(x; y) = \rho(y; x)$  (аксіома симетрії);
- 3)  $\rho(x; y) \leq \rho(x; z) + \rho(z; y)$  (аксіома трикутника).

Надалі будемо вважати, що всі розглядувані точки метричного простору різні (не співпадають), тому відстані між точками невід'ємні. Будемо використовувати, також, поняття кута, утвореного трьома точками метричного простору, та його кутової характеристики [7, с. 383]

**Означення 2.** *Нехай  $a, b, c$  – довільні точки метричного простору  $(X, \rho)$ . Упорядковану трійку  $(a, b, c)$  цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці  $b$ , і позначати:  $\angle(a, b, c)$ . Пари точок  $(a, b)$  і  $(b, c)$ , при цьому, будемо називати сторонами кута.*

**Означення 3.** *Нехай  $a, b, c$  – довільні точки метричного простору  $(X, \rho)$ . Характеристикою кута  $\angle(a, b, c)$ , або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число  $\varphi(a, b, c)$ , що знаходиться за формулою:*

$$\varphi(a, b, c) = \frac{\rho^2(a, b) + \rho^2(b, c) - \rho^2(a, c)}{2\rho(a, b)\rho(b, c)}.$$

Надалі будемо використовувати зручніші позначення:

$$\rho(x_i, x_j) = \rho_{ij}, \quad \varphi(x_i, x_j, x_k) = \frac{\rho_{ij}^2 + \rho_{jk}^2 - \rho_{ik}^2}{2\rho_{ij}\rho_{jk}} = \varphi_{ijk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \dots).$$

Тепер наведемо означення прямолінійного розміщення точок метричного простору.

**Означення 4.** Три точки  $a, b, c$  метричного простору  $(X, \rho)$  називають прямолінійно розміщеними у цьому просторі, якщо виконується рівність:

$$\rho(a, c) = \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

Поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору увів В.Ф. Каган [15, с. 527]. Це означення можна переформулювати, використовуючи кутову характеристику [7, с. 384].

**Означення 5.** Три точки  $a, b, c$  метричного простору  $(X, \rho)$  називають прямолінійно розміщеними у цьому просторі, якщо хоча б для однієї з них (наприклад, для точки  $b$ ) виконується рівність:  $\varphi^2(a, b, c) = 1$ .

Множину точок метричного простору природно вважати прямолінійно розміщеною, якщо будь-які три її точки прямолінійно розміщені у цьому просторі.

Найпростішим прикладом прямолінійно розміщеної множини точок є множина дійсних чисел (точки одновимірного евклідового простору  $R^1$ ). Відстань між двома точками  $x_1$  і  $x_2$  у цьому просторі знаходять за формулою:  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

Більш складнішим прикладом прямолінійно розміщеної множини точок є множина лінійних функцій виду  $y = kx$ , якщо розглядати їх як точки метричного простору  $C_{[0;1]}$  неперервних на відрізку  $[0; 1]$  функцій. У цьому просторі відстань між двома функціями (точками простору)  $f(x)$  і  $g(x)$  знаходиться за формулою:  $\rho(f, g) = \max_{x \in [0;1]} |f(x) - g(x)|$ . Отже, відстань між функціями  $y_1 = k_1x$  та  $y_2 = k_2x$  у просторі  $C_{[0;1]}$  буде:  $\rho(y_1, y_2) = \max_{x \in [0;1]} |k_1x - k_2x| = |k_1 - k_2|$ . Прямолінійне розміщення цієї множини точок у просторі  $C_{[0;1]}$  впливає з властивостей множини дійсних чисел [7, с. 384; 16, с. 32].

Тепер розглянемо поняття плоского розміщення точок метричного простору. За аналогією з випадком прямолінійного розміщення точок, за характеристичну властивість плоского розміщення чотирьох точок  $x_1, x_2, x_3, x_4$  візьмемо умову рівності нулю об'єму тетраедра, утвореного цими точками. Його можна обчислити, використовуючи формулу Юнгіуса [17, с. 99-100] об'єму тетраедра за довжинами його ребер  $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{23}, \rho_{24}, \rho_{34}$ . Для проведення таких розрахунків можна використати програмний засіб «Калькулятор» [18, с. 63; 19, с. 68], який знаходиться за адресою: <http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645>.

Рівність:

$$\begin{aligned} & \rho_{12}^2 \rho_{34}^2 (\rho_{13}^2 + \rho_{14}^2 + \rho_{23}^2 + \rho_{24}^2 - \rho_{12}^2 - \rho_{34}^2) + \\ & + \rho_{13}^2 \rho_{24}^2 (\rho_{12}^2 + \rho_{14}^2 + \rho_{23}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{24}^2) + \\ & + \rho_{14}^2 \rho_{23}^2 (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{24}^2 + \rho_{34}^2 - \rho_{14}^2 - \rho_{23}^2) - \\ & - \rho_{13}^2 \rho_{14}^2 \rho_{34}^2 - \rho_{12}^2 \rho_{14}^2 \rho_{24}^2 - \rho_{12}^2 \rho_{13}^2 \rho_{23}^2 - \rho_{23}^2 \rho_{24}^2 \rho_{34}^2 = 0 \end{aligned}$$

забезпечує рівність нулю тетраедра з вершинами у точках  $x_1, x_2, x_3, x_4$  [18, с. 62].

Якщо використати кутові характеристики плоских кутів при вершині  $x_1$  тетраедра, то останню рівність можна переписати у формі [7, с. 387; 18, с. 61]:

$$1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0.$$

Тепер можна дати означення плоского розміщення чотирьох точок метричного простору [7, с. 387; 20, с. 42; 21, с. 11-12; 22, с. 63].

**Означення 6.** Будемо казати, що точки  $x_1, x_2, x_3, x_4$  простору  $(X, \rho)$  плоско розміщені у цьому просторі, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки  $x_1$ ) виконується рівність

$$1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0.$$

Множину точок метричного простору природно вважати плоско розміщеною, якщо будь-які чотири її точки прямолінійно розміщені в цьому просторі.

Співвідношення між прямолінійним і плоским розміщенням точок набагато складніше, ніж відношення між прямою лінією і площиною у геометрії Евкліда. «Неевклідовість» цих понять можна продемонструвати наступним прикладом.

У метричному просторі  $R_0^2$ , де точками є пари дійсних чисел  $a(a_1, a_2)$ , відстань між двома точками  $a(a_1, a_2)$  і  $b(b_1, b_2)$  простору визначається формулою:  $\rho(x, y) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$ . Чотири точки  $a(1,0)$ ,  $b(0,1)$ ,  $c(-1,0)$ ,  $d(0, -1)$  простору  $R_0^2$  прямолінійно розміщені у цьому просторі [7, с. 387]. Кутові характеристики дванадцяти усіх можливих кутів, утворених цими точками, прийматимуть такі значення:

$$\varphi(b, a, c) = 1, \varphi(b, a, d) = -1, \varphi(c, a, d) = 1, \varphi(a, b, c) = -1, \varphi(a, b, d) = 1,$$

$$\varphi(c, b, d) = 1, \varphi(a, c, b) = 1, \varphi(a, c, d) = 1, \varphi(b, c, d) = -1, \varphi(a, d, b) = 1,$$

$$\varphi(a, d, c) = -1, \varphi(b, d, c) = 1.$$

З цих значень випливає, що усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі  $R_0^2$  (квадрати кутових характеристик дорівнюють одиниці). Крім того, кожна з чотирьох точок лежить між деякими двома з них, тобто, крайніх точок серед них нема. Більше того, легко перевірити, що ці точки не є плоско розміщеними в цьому просторі. Наведені факти не можуть виконуватись у геометрії Евкліда.

### Висновки

За допомогою засобів геометризації метричних просторів можливо провести структурування цих просторів, моделюючи геометричні образи основних понять геометрії Евкліда. Достатньо прості аналітичні перетворення при такому моделюванні дають можливість застосувати електронно-обчислювальні засоби при побудові відповідних геометричних образів.

У подальшому дослідження слід спрямувати на побудову аналогів класичних співвідношень між елементами геометричних фігур у геометрії Евкліда.

### Список використаної літератури

1. Буземан Г. Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962. 503 с.
2. Берже М. Геометрия. Том 1. М.: Мир, 1984. 559 с.
3. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 512 с.

4. Сабитов И. Х. Московское математическое общество и метрическая геометрия: от Петерсона до современных исследований. *Труды Московского математического общества*. 2016. Том 77. Вып. 2. С. 185–218.
5. Довгошей А. А., Дордовский Д. В. Отношение лежат между и изометрические вложения метрических пространств. *Укр. мат. журн.* 2009. № 10(61). С. 1319–1328.
6. Галушак С. І. Деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка. *Прикарпатський вісник НТШ. Число*. 2016. № 1(33). С. 157–166.
7. Кузьмич В. І. Геометричні властивості метричних просторів. *Укр. мат. журн.* 2019. № 3(71). С. 382–399. DOI: 10.1007/s11253-019-01656-1
8. Kuz'mych, V. I., Savchenko A. G. Geometric Relations in an Arbitrary Metric Space. *Matematychni Studii*. 2019. № 1(52). С. 86–95. DOI: 10.30970/ms.52.1.76-85
9. Savchenko A., Zarichnyi M. Metrization of Free Groups on Ultrametric Spaces. *Topol. and Appl.* 2010. № 4(157). С. 724–729. <https://doi.org/10.1016/j.topol.2009.08.015>
10. Savchenko O. A Remark on Stationary Fuzzy Metric Spaces. *Carpathian Mathematical Publications*. 2011. № 1(3). С. 124–129. <http://journals.pu.if.ua/index.php/cmp/article/view/85>
11. Savchenko A. Fuzzy hyperspace monad. *Matematychni Studii*. 2010. № 2(33). С. 192–198. URL: [http://matstud.org.ua/texts/2010/33\\_2/192-198.pdf](http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/192-198.pdf)
12. Savchenko A., Zarichnyi M. Probability Measure Monad on the Category of Fuzzy Ultrametric Spaces. *Azerb. J. Math.* 2011. № 1(1). 114–121. <https://www.azjm.org/volumes/0101/0101-6.pdf>
13. Kiosak V., Savchenko A., Zarichnyi M. Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conference Proceedings*. 2019. № 1(2164). С. 040006-1–040006-4. DOI:10.1063/1.5130798
14. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Київ: Вища школа, 1974. 456 с.
15. Каган В.Ф. Очерки по геометрии. М.: Издательство Московского университета, 1963. 571 с.
16. Кузьмич В., Кузьмич Л. Побудова прямолінійно розміщених множин при вивченні метричних просторів. *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки. Серія: Педагогічні науки*. 2018. № 9(382). С. 30–36.
17. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Том 2: Стереометрия, преобразования пространства. М.: МЦНМО, 2006. 256 с.
18. Кузьмич В. І., Кузьмич Ю. В. Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. 2012. № 36(249). С. 55–64.
19. Kuzmich V. I., Kuzmich Y. V. Software Tool for Calculating the Volume of the Tetrahedron on the Lengths of its Edges. *Інформаційні технології в освіті*. Херсон: Видавництво Херсонського державного університету. 2012. Вип. 12. С. 67–72.
20. Кузьмич В. І. Побудова плоских образів у довільному метричному просторі. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*. 2017. № 11. С. 40–46.
21. Кузьмич В. І. Кутова характеристика у метричному просторі. *Algebraic and Geometric Methods of Analysis: International Scientific Conference: book of abstracts*. (Ukraine, Odessa, May 31 – June 5, 2017). Odessa, 2017. С. 11–12. URL: [https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017\\_abstracts.pdf](https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf)
22. Кузьмич В. І. Плоско розміщені множини точок у метричному просторі. *Вісник Львівського університету. Серія: механіко-математична*. 2017. Вип. 83. С. 58–71.

### References

1. Buzeman, G. (1962). *Geometriya geodezicheskikh*. M.: Fizmatgiz.
2. Berzhe, M. (1984). *Geometriya*. Tom 1. M.: Mir.
3. Burago, D. Yu., Burago Yu. D., & Ivanov S. V. (2014). *Kurs metriceskoy geometrii*. Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.
4. Sabitov, I. Kh. (2016). Moskovskoye matematicheskoye obshchestvo i metriceskaya geometriya : ot Petersona do sovremennykh issledovaniy. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*. **77**, 2, 185–218.
5. Dovgoshey, A. A., & Dordovskiy, D. V. (2009). Otnosheniye lezhat' mezhdru i izometricheskiye vlozheniya metriceskikh prostranstv. *Ukr. mat. zhurn.* **61**, 10, 1319–1328.
6. Halushchak, S. I. (2016). Deyaki heometrychni kryvi u sensi d-vidrizka. *Prykarpat-s'kyy visnyk NTSH. Chyslo.* **33**, 1, 157–166.
7. Kuz'mych, V. I. (2019). Heometrychni vlastyivosti metrychnykh prostoriv. *Ukr. mat. zhurn.* **71**, 3, 382–399. DOI: 10.1007/s11253-019-01656-1
8. Kuz'mych, V. I., Savchenko, A. G. (2019). Geometric Relations in an Arbitrary Metric Space. *Matematychni Studii.* **52**, 1, 86-95. DOI: 10.30970/ms.52.1.76-85
9. Savchenko, A., Zarichnyi, M. (2010). Metrization of free groups on ultrametric spaces, *Topol. and Appl.* **157**, 4, 724–729. DOI: 10.1016/j.topol.2009.08.015
10. Savchenko, O. (2011). A remark on stationary fuzzy metric spaces. *Carpathian Mathematical Publications.* **3**, 1, 124–129.  
Retrieved from <http://journals.pu.if.ua/index.php/cmp/article/view/85>
11. Savchenko, A. (2010). Fuzzy hyperspace monad. *Matematychni Studii.* **33**, 2, 192–198.  
Retrieved from [http://matstud.org.ua/texts/2010/33\\_2/192-198.pdf](http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/192-198.pdf)
12. Savchenko, A., Zarichnyi, M. (2011). Probability measure monad on the category of fuzzy ultrametric spaces. *Azerb. J. Math.* **1**, 1, 114–121.  
Retrieved from <https://www.azjm.org/volumes/0101/0101-6.pdf>
13. Kiosak, V., Savchenko, A., Zarichnyi, M. (2019). Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conference Proceedings.* **2164**, 1, 040006-1–040006-4. DOI:10.1063/1.5130798.
14. Kolmogorov, A. M., Fomin, S. V. (1974). *Elementy teorii funktsiy i funktsional'noho analizu*. Kyiv: Vyshcha shkola,.
15. Kagan, V. F. (1963). *Ocherki po geometrii*. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta.
16. Kuz'mych, V., Kuz'mych, L. (2018). Pobudova pryamoliniyno rozmishchenykh mnozhyn pry vyvchenni metrychnykh prostoriv. *Naukovyy visnyk Skhidnoyevropeys'koho natsional'noho universytetu imeni Lesi Ukrayinky. Seriya: Pedagogichni nauky.* **382**, 9, 30–36.
17. Ponarin, Ya. P. (2006). *Elementarnaya geometriya*. Tom 2: Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva. M.: MTSNMO.
18. Kuz'mych, V. I., Kuz'mych, Yu. V. (2012). Analohy formuly Yunhiusa ob"yemu tetraedra. *Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: Pedagogichni nauky.* **249**, 36, 55–64.
19. Kuzmich, V. I., Kuzmich, Y. V. (2012). Software tool for calculating the volume of the tetrahedron on the lengths of its edges. *Informatsiyeni tekhnolohiyi v osviti: Kherson: Vydavnytstvo Khersons'koho derzhavnoho universytetu.* **12**, 67-72.
20. Kuz'mych, V. I. (2017). Pobudova ploskykh obraziv u dovil'nomu metrychnomu prostori. *Visnyk Cherkas'koho universytetu. Seriya: Pedagogichni nauky.* **11**, 40–46.
21. Kuz'mych, V. I. (2017). Kutova kharakterystyka u metrychnomu prostori. *Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference: book of abstracts.* (Ukraine, Odessa, May 31 – June 5, 2017), pp. 11–12.



22. Kuz'mych, V. I. (2017). Plosko rozmishcheni mnozhyny tochok u metrychnomu prostori. *Visnyk L'vivs'koho universytetu. Seriya: mekhaniko-matematychna*. **83**, 58–71.

Кузьмич Валерій Іванович – к.ф.-м.н., доцент, професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, e-mail: kuzmich121251@ukr.net, ORCID: 0000-0002-8150-3456.

Кузьмич Людмила Василівна – к.пед.н., доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, e-mail: kuzmich121251@ukr.net, ORCID: 0000-0002-6727-9064.

Савченко Олександр Григорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, e-mail: savchenko.o.g@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4687-5542.

# ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук Антон Анатолійович

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –  
серія КВ № 23529-13369Р от 03.08.2018

Підписано до друку 29.08.2020 р. Формат 60x84/8 Папір офсетний.  
Ум. друк. аркушів 36,1. Замовлення № 9/0820. Наклад 120 прим.

© Херсонський національний технічний університет 2020

---

Адреса редакції: 73008, м. Херсон, Бериславське шосе, 24, корп. 3,  
каб. 425, тел. (0552) 32-69-95. E-mail: aqmm@kntu.net.ua

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»  
73034, м. Херсон, вул. Паровозна, 46-а  
E-mail: office@oldiplus.com  
Свід. ДК № 6532 від 13.12.2018 р.