МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДЕЯКІ ЕЛЕМЕНТАРНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала студентка 2 курсу
Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Поліщук Анастасія Валентинівна
Керівник доцент, кандидат фізико-математичних наук
Кузьмич Валерій Іванович
Рецензент кандидат фізико-математичних наук, професор
Львов Михайло Сергійович

Херсон-2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Під час дослідження досить різних науково-методичних аспектів не складно отримати конкретну математичну модель, яка буде розв’язком певної математичної задачі. Також досить актуальним в наш час є завдання знайти різні методи розв’язання однієї й тієї ж самої задачі та вибір серед всіх можливих методів найоптимальніший. Саме таке завдання потрібно виконати під час виконання задач на підсумовування.

Дані задачі зустрічаються в таких предметах як дискретна математика, математичний аналіз, теорія ймовірності, тощо. Також завдання на знаходження скінченних сум розв’язують на різних математичних олімпіадах. Саме тому дослідження питання підсумовування скінченних послідовностей є дуже **актуальним** в наш час. В даному проєкті висвітлені методичні рекомендації до викладання даного матеріалу в школах та в вищих навчальних закладах.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами: дана робота пов’язана з темами дискретної математики, математичного аналізу, теорій ймовірності. Загалом тема «Знаходження сум скінченних послідовностей», на яку опирається даний кваліфікаційний проєкт, розглядається як і в шкільному курсі математики так і на перших курсах у вищих навчальних закладах.

У роботі було розглянуто такі методи розв’язання задач на знаходження скінченних сум послідовностей: метод зведення суми послідовності до вже відомої суми послідовності, метод елементарних перетворень сум послідовностей, метод інтегральних та диференціальних обчислень, метод у якому застосовується скінченні різниці та різницеві рівняння. Також описано обґрунтування доцільності вибору окремого методу під час розв’язання певної задачі.

Мета роботи: розглянути методи розв’язання задач на підсумовування послідовностей, перевірити та обґрунтувати доцільність вибору того чи іншого методу під час розв’язання математичних задач, оцінити переваги певного методу при вирішенні конкретної задачі.

Об’єктом дослідження є підручники, посібники, наукові праці, написані відомими математиками, в котрих розгорнуто описано методи знаходження скінченних сум послідовностей, а також розглянуто розв’язання задач за допомогою цих методів. Доцільність використання задач на підсумовування послідовностей на уроках, факультативах, олімпіадах, тощо.

Предметом дослідження є доречність використання певного методу розв’язання задач на знаходження скінченних сум послідовностей. Також визначити особливості використання методу під час розв’язання конкретної задачі.

Завдання кваліфікаційної роботи:

- розглянути методи знаходження скінченних сум послідовностей, які вивчаються як і в шкільному курсі математики так і на перших курсах вищих навчальних закладів;
- детально розглянути штучні методи підсумовування послідовностей;
- розглянути методи, які досить часто використовуються під час розв’язання олімпіадних математичних задач;
- розглянути методи, які використовуються під час факультативних занять з курсу математики та математичного аналізу в старшій школі;

- навчити застосовувати ймовірнісні міркування для знаходження певних типів сум.

Методи дослідження кваліфікаційної роботи: опрацювання та аналіз наукової літератури, порівняння та вибір оптимального методу підсумовування послідовностей.

Наукова новизна одержаних результатів: хоча по даній темі написано достатньо робіт, проте вона досі залишається актуальною. З кожним роком популяризація математики в школі та вищих навчальних закладах стає все меншою, тому вивчення теми «Підсумовування скінченних послідовностей» можна представити для учнів (студентів) у новому руслі, аби збільшити їх інтерес до точних наук.

Практичне значення одержаних результатів: дана робота буде корисна молодим вчителям, учням старшої школи та студентам фізико-математичних факультетів. Робота може бути використана під час пояснення матеріалу на лекційних та факультативних заняттях, а також під час підготовки учнів або студентів до олімпіад з математики.

Апробація результатів дослідження: дослідження, які висвітлені у статті «Метод зведення шуканої суми до відомої суми послідовності», були опубліковані в «Магістерській студії». В даній статті описується один з методів підсумовування, який досить часто використовується учнями та студентами під рас розв'язування задач не знаходження сум послідовностей.

Даний кваліфікаційний проєкт складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаної літератури та додатку. В першому розділі «Початкові відомості про підсумовування послідовностей» розкрито тему властивостей сум. Також дається означення та умовні позначення скінченних сум.

В другому розділі «Методи знаходження скінченних сум» розглянуто різні методи підсумовування скінченних послідовностей, а саме метод скінченних різниць, метод рекурентних послідовностей та різні штучні методи.

В розділі «Спеціальні числа та їх застосування до знаходження скінченних сум послідовностей» (третій розділ) наводяться приклади розв’язання задач методами, які можна використовувати в шкільному курсі математики під час пояснення даної теми. Розглянуто приклади задач на знаходження сум послідовностей, які можуть бути використані на факультативах, в класах з поглибленим вивченням математики та математичних олімпіадах.

Дана робота повинна бути цікавою для вчителів математики, які усвідомлюють важливість вивчення даної теми в шкільному курсі математики та студентів фізико-математичних факультетів, які прагніть підвищити свій рівень знань до світового рівня.

РОЗДІЛ 1
ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО ПІДСУМОВУВАННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ.

Теорія сумування послідовностей почала розвиватися в XVII-XVIII ст.. Досить багато математиків того часу працювали над вирішенням проблеми знаходження суми ряду [9].

У математичному аналізі суми позначають двома способами:

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ (1) - сигма-позначення, де a - загальний член суми, k - параметр підсумовування;

2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ - розгорнутий вигляд запису суми.

Розглянемо приклад запису суми квадратів перших n натуральних чисел:

1) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{k}^2$ (сигма-позначення);

2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ (розгорнутий вигляд)

Маємо $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{k}^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Запис (1) – це скорочене позначення суми всіх членів послідовності a_k, де k – порядковий номер, що змінюється від 1 до n.

Зазвичай в загальних випадках записують: $\sum_{Q(k)} a_k$, саме так позначають суму членів a_k, таку що k виконується при умові, що $Q(k)$ - певне висловлення стосовно k [14].

Розглянемо приклад:

1) $\sum_{\substack{k=2m-1 \\ k \le n, m \in N}} a_k$ - сума всіх a_k , де кожний порядковий номер – непарні числа, але вони менші за число n ;

2) $\sum\limits_{1\le k\le n} a_k$ - сума таких a_k, де кожний порядковий номер задовольняє нерівність $1\le k \le n$;

3) $\sum\limits_{n_1+n_2+\ldots+n_k} \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}\cdot a_1^{n_1}\cdot a_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot a_k^{n_k}$ - узагальнена формула бінома Ньютона, яка задовольняє рівність $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$;

3) $\sum\limits_{x\in\Omega} x^2$ - сума квадратів всіх значень x , які будуть належати множині Ω .

Звичайно, якщо ми будемо шукати значення суми (1) для кожного конкретного n, що буде йому відповідати, то це створює труднощі під час виконання досить таки громіздких операцій. Саме тому задача на знаходження суми скінченної послідовності можна вважати розв’язаною, коли $\sum\limits_{Q(k)} a_k$ можна виразити як функцію у замкненому вигляді від членів a_k та кількості n. Хоча інколи трапляється, що суму не можна виразити у скінченному вигляді. Тоді задачу вважають розв’язаною, якщо знайшли не точний вираз суми, а наближений її вигляд [21].

Для прикладу розглянемо гармонійну суму $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ або суму $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k^2}$, що є аналогом інтеграла Пуассона. Дані суми не виражаються в скінченному вигляді, а тому розв’язком будемо вважати наближений вираз суми.

Саме ця причина спонукала до написання даної роботи, в якій будуть розглядатися наближені методи знаходження сум послідовностей.

Проте спочатку потрібно розглянути деякі досить важливі властивості сум, на які в подальшому ми зможемо опиратися під час розгляду різних методів знаходження сум послідовностей.

Властивості сум.

1. При множенні дійсного числа c та суми, їх добуток дорівнює сумі, при чому кожен член цієї суми буде помножено на число c, і навпаки, дійсне число c буде помножено на кожен член цієї суми.

$$c \cdot \sum_{Q(k)} a_k = \sum_{Q(k)} c \cdot a_k \ .$$

Це розподільна властивість, саме вона дозволяє вносити під знак суми та виносити за нього сталі величини.

3) Якщо кожен член суми $\sum_{Q(k)} a_k$ можна представити у вигляді $a_k = b_k + c_k$, тоді $\sum_{Q(k)} a_k = \sum_{Q(k)} (b_k + a_k) = \sum_{Q(k)} b_k + \sum_{Q(k)} c_k$.

Саме завдяки цій властивості можна згортати суму в одну, або розбивати її на декілька сум.

4) Нехай K - зліченна множина цілих чисел, де $p(k)$ – перестановка, що задана на цій множині.

Тоді $\sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)}$.

Третя властивість дозволяє переставляти члени суми в будь-якому порядку, якщо виконується умова: $p(k)$ – перестановка всіх елементів множини K , тобто $(\forall i \in K)\ (\exists! k)\colon p(k) = i$ [32].

Розглянемо приклад,

$$\sum_{Q(k)} a_k = \sum_{Q(i)} a_i = \sum_{\substack{Q(m-n) \\ m \in Z}} a_{m-n} \ .$$

Хоча формулювання даної властивості досить складне, проте саме цю властивість дуже часто використовують при розв’язанні задач на підсумовування. Розглянемо суму перших n натуральних чисел, яку можна виразити через перегрупування, це вдалося Гауссу 9-му [5]. Він міркував саме так:

$$1+2+\cdots+n=\frac{(1+2+\cdots+n)+(n+(n-1)+\cdots+1)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}((1+n)+\left(2+(n-1)+\cdots+(n+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left((1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)\right)=\frac{1}{2}n(n+1),$$

а потім це запишеться за допомогою таких позначень:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}k+\sum_{1\le n-k+1\le n}(n-k+1)=\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{1\le k\le n}(n-k+1))=.$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}(k+n-k+1)=\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

5) Об’єднання всіх індексів підсумовування.

Припустимо, що K і K' - скінченні довільні множини з цілими числами, тоді

$$\sum_{k\in K}a_k+\sum_{k\in K'}a_k=\sum_{k\in K\bigcup K'}a_k+\sum_{k\in K\bigcap K'}a_k\ . \qquad (*)$$

Розглянемо два випадки доведення:

1) $K\cap K'=\varnothing$.

Доведення слідує з кругів (діаграм) Ейлера-Венна.

2) $K\cap K'=K''\ne\varnothing$.

Множину K′ представимо як об’єднання множин $K'\setminus K$ та K''. Так як

$K'\setminus K\cap K''=\varnothing$, тоді з першого випадку маємо

$$\sum_{k\in K'}a_k=\sum_{k\in K'/K}a_k+\sum_{k\in K'''}a_k\ .$$

Звідси рівність (*) запишеться у такому вигляді:

$$\sum_{k\in K}a_k+\sum_{k\in K'}a_k=\sum_{k\in K}a_k+\sum_{k\in K'/K}a_k+\sum_{k\in K''}a_k\ .$$

Тоді $K\cap(K'\setminus K)=\varnothing$ та згідно з першим випадком:

$$\sum_{k\in K}a_k+\sum_{k\in K'\setminus K}a_k=\sum_{k\in K'\bigcup K}a_k\ .$$

Так як, $K'' = K \cap K'$ маємо рівність:

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\bigcup K'} a_k + \sum_{k\in K\bigcap K'} a_k \ .$$

Дану властивість доведено.

По аналогії дану рівність називають властивість адитивних сум. Найчастіше вона зустрічається саме в такому вигляді:

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ , де } m, n \text{ – цілі; при } 1 \le m \le n. \qquad (**)$$

Однозначно помітно, що наслідком рівності (*) є рівність (**), де $K = \{1, 2, \ldots ,m-1\}$, $K' = \{m, m+1, \ldots,n\}$, причому $K \cap K' = \varnothing$.

На основі даних властивостей вже можна вивести деякі методи знаходження скінченних сум послідовностей, проте ми будемо це робити у наступному розділі. Зараз же ми спробуємо розв’язати декілька задач, за допомогою відомих тотожностей, вивченого матеріалу і звичайно перегрупування членів суми [18].

Приклад 1.1. *Розгляньте арифметичну прогресію* $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *. Знайдіть формулу суми членів даної прогресії.*

Давайте згадаємо, що арифметична прогресія – це послідовність, в якій кожен наступний член відрізняється від попереднього на певне задане число

d ($a_k = a_{k-1} + d$), d називають різницею арифметичної прогресії. Тоді за формулою загального члена арифметичної прогресії маємо: $a_k = a_1 + (k-1)\cdot d$,

в якому a_1 - перший член арифметичної прогресії.

Маємо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = a_1 \sum_{k=1}^{n} 1 + d\sum_{k=1}^{n} k - d\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= a_1 n + \frac{1}{2} dn(n+1) - dn = n(a_1 + \frac{1}{2} d(n-1)\,.$$

Також пропонуємо до розгляду вправи, які можна розв'язати вивчивши досить різноманітні теми, це дозволить вчителю опиратись на знання учнів з інших предметів, тобто розкрити тему між предметних зв'язків [29].

Приклад 1.2. *$\varphi(n)$ - це кількість натуральних чисел, які є взаємно простими з n, та які не перевищують n. Доведіть, що сума чисел рівна* $\frac{n}{2}\varphi(n)$.

Потрібно довести, що

$\sum\limits_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} k = \frac{n}{2}\varphi(n)$, де (k, n) - НСД (найбільший спільний дільник) чисел n і k.

Пригадаємо, що φ(n) - це функція Ейлера, яку досить часто використовують в алгебрі й теорії чисел.

Під час розв'язання задачі треба пам'ятати, що якщо n і k взаємно прості числа, тоді числа n і n - k також будуть взаємно простими. Тому, якщо замінити k на n - k отримаємо:

$\sum\limits_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} k + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ (n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (n-k) = 2\cdot S$, де S - шукана сума.

Використавши другу властивість отримаємо:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} k + \sum_{\substack{k=1 \\ (n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (n-k) = \sum_{\substack{k=1 \\ (n-k,n)=1}}^{\varphi(n)} (k+n-k) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^{\varphi(n)} n = n\cdot\varphi(n) = 2\cdot S\,.$$

Отже, $S = \frac{n}{2}\varphi(n)$, що нам і треба було довести [35].

Приклад 1.3. *n - складене число, $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$ – дільники числа n. Доведіть, що* $\frac{2}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{m-1}\ln d_k$ *буде цілим числом.*

Зверніть увагу, що якщо перемножити рівновіддалені дільники, то отримаємо n:

$d_k \cdot\ d_{m-k} = n$.

Кількість даних рівностей стільки скільки дільників числа n, тобто (m+1). Маємо рівність:

$n^{m+1} = (d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_m)^2$.

Прологарифмуємо дану рівність взявши за основу e :

$(m+1)ln \cdot n = 1\ln(d_0 \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_m)$.

Знаючи те, що $\ln(N_1 \cdot N_2) = lnN_1 + lnN_2$, тому

$$(m+1)\ln n = 2\sum_{k=0}^{m} \ln d_k \quad .$$

Звідси: $\dfrac{2}{\ln n}\sum_{k=1}^{m-1} \ln d_k = (m-1)$.

Так як (m–1) – це ціле число, то можемо зробити висновок, що завдання розв’язане [15].

Матеріал, який був розглянутий в першому розділі досить зрозумілий навіть на інтуїтивному рівні, саме тому не потребує додаткового пояснення. Проте задачі, які можуть бути розв’язані опираючись на даний матеріал можуть зустрічатися як і в шкільному курсі математики (7-11 класи), так і на перших курсах фізико-математичних факультетів вищого навчального закладу.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ СУМ

2.1. Штучні методи

В цьому пункті буде розглянуто основні методи знаходження суми скінченних послідовностей. А саме методи, які опираються на штучні перетворення під час розв’язання задач на підсумовування послідовностей. Також в даному пункті представлено велику кількість прикладів розв’язання подібних завдань, що дозволить закріпити набути теоретичні знання на практиці.

2.1.1. Методи, що базуються на властивостях сум

Розглянувши основні властивості скінченних сум, можна прийти до висновку, що ефективно їх застосовувати саме при розв’язанні окремого класу задач. Не складно помітити, що в кожному з розв’язків завдань доцільно використати прийом перегрупування членів, щоб в подальшому вивчити поведінку окремих сум. Саме такий прийом поклали в основу одного з методів знаходження сум – *метод зведення*.

Тому, розглянемо його.

Нехай

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (*)$$

Розглянемо суму $S_n + a_{n+1}$:

$$S_n + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} .$$

Маємо,

$$S_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_{n+1}.$$

$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$ – сума, що була представлена в рівності вище, схожа на S_n.. Якщо використавши властивості 1-4 з першого розділу, вдається виразити $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}$ через S_n, то отримаємо замкнений вираз для нашої шуканої суми, звівши всі подібні доданки [24].

Приклад 2.1. *Знайдіть суму квадратів перших n натуральних чисел* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Позначимо $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ та розглянемо $S_n + (n+1)^3$.

$$S_n + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 =$$

$$= S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Отже, маємо

$$S_n + (n+1) = S_n + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Потім з даного прикладу виразимо суму квадратів перших n натуральних чисел:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Приклад 2.2. *Знайдіть* $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$.

Функція $f(x) = x \cdot 2^x$ – це квазімногочлен. Тобто, це функція, що є лінійною комбінацією добутків многочленів на показникові функцію.

Є декілька причин, чому квазімногочлен виділяють в окрему математичну структуру. Однією з них є можливість описати за їхньою допомогою різні реальні хімічні, біологічні, фізичні процеси. Саме тому часто трапляються суми, що містять квазімногочлени.

Запишемо, опираючись на загальну схему методу зведення:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k \ .$$

$$S_n + (n+1) = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 2^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \ 2^{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k + \frac{2^{n+2}-2}{2-1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2$$

.

Отже,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2 \quad [31].$$

2.1.2. Застосування диференціального та інтегрального числення до обчислення скінченних сум послідовностей.

Виявляється, що за допомогою похідних та інтегралів можна розв'язати немало елементарних задач: рівняння, нерівності, обчислення сум, тощо.

Розглянемо теорію, в якій знаходять скінченну суму послідовності за допомогою первісних та похідних.

Досить часто учням складно виконати певні тотожні перетворення. Тому вираз пропонують розглянути як функцію *f* від певної змінної *x*. Після даної заміни може виявитись, що $f\,'(x)$, або $F(x)$ – будуть легше піддаватися спрощенню. Потім, після виконання відповідних перетворень над первісною чи похідною, повертаються до початкової функції та до початкового значення незалежної змінної *x* [6].

Приклад 2.3. *Знайдіть суму* $\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$.

(*) Розглянемо дану суму як функцію $f(x)$.

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} \qquad (**)$$

Досить легко помітити, що

$$F(x) = x + x^2 + x^3 + ... + x^n \qquad (***)$$

є не чим іншим, як первісна функції *f (x).*

Також, стає зрозумілим, що вираз (***) є геометричною прогресією q=x. Маємо

$$F(x) = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}.$$

Знаючи зв'язок $F(x)$ та $f(x)$, отримаємо

$$1 + 2x + 3x^{2`} + ... + nx^{n-1} = f(x) = F'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, \ x \neq 1.$$

При $x = 1$ сума (*) перетвориться у вже відому нам “гауссівську суму”$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Якщо підставити в (*) інші значення x (крім 1), отримаємо досить певні суми [17].

Наприклад,

$x = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (\frac{1}{2})^{k-1} = 1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + ... + \frac{n}{2^{n-1}} = 4 - \frac{2+n}{2^{n-1}}$.

Перевірка:

n = 1 $1 = 4 - \frac{2+1}{1} = 1$;

n = 2 $2 = 4 - \frac{2+2}{2} = 2$;

n = 3 $2\frac{2}{3} = 4 - \frac{2+3}{4} = 2\frac{3}{4}$.

x = 2 : $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = 1 + 4 + 12 + 32 + ... + n \cdot 2^{n-1} = 2^n(n-1) + 1$.

Перевірка:

n = 1 $1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$;

n = 2 $5 = 2^2(2-1) + 1 = 5$;

n = 3 $17 = 2^3(3-1) + 1 = 17$.

Приклад 2.4. *(Наслідок). Обчисліть* $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + ... + n \cdot (2^n - 1)$.

Потрібно виконати наступні перетворення:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + ... + n \cdot (2^n - 1) = 1 \cdot (2^1 - 1) + 2 \cdot (2^2 - 1) + ... + n \cdot (2^n - 1) =$$

$$= (1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n) - (1+2+\ldots+n) = 2\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= 2(2^n(n-1)+1) - \frac{n(n+1)}{2} = 2^{n+1}(n-1) + \frac{4-n-n^2}{2}.$$

Тому,

$$1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 7 + \ldots + n\cdot(2^n - 1) = 2^{n+1}(n-1) + \frac{4-n-n^2}{2}.$$

У прикладі 2.3. розкривається основна суть методу, проте досить часто доводиться знаходити такі суми, у яких змінної немає. В такому разі потрібно правильно підібрати функцію *f (x)*, яка буде породжувати нашу шукану суму при певному значенні змінної [25].

Приклад 2.5. *Визначте суму в замкненому вигляді* $1 + 2^2\cdot 3 + 2^4\cdot 5 + \ldots + 2^{2n-2}(2n-1)$.

Так як x має бути вираз, який не змінюється, то спочатку треба знайти інваріанту, яка буде притаманна всім доданкам. Досить легко помітити, що 2 є у всіх доданках шуканої суми. Отже, можемо зробити висновок, що дана сума це окремий випадок функції

$f(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2}$, при $x \neq 2$.

Відшукаємо первісну функції *f (x)*

$F(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1}$,

що є геометричною прогресією зі знаменником $q = x^2 > 1$. Згорнемо дану первісну *F(x)*

$$F(x) = \frac{x(x^{2n}-1)}{x^2-1}.$$

При поверненні до *f (x)*, маємо

$$f(x) = F'(x) = \frac{(2n-1)x^{2n+2} - (2n+1)x^{2n} + x^2 + 1}{(x^2-1)^2},\ x \neq \pm 1.$$

Виразимо значення суми при $x = 2$

$$1 + 2^2\cdot 3 + 2^4\cdot 5 + \ldots + 2^{2n-2}(2n-1) = \frac{(2n-1)x^{2n+2} - (2n+1)x^{2n} + 5}{9} = \frac{2^{2n}(6n-3)+5}{9}.$$

Також є випадки в яких, щоб розв'язати задачу на знаходження суми послідовностей требя знайти не первісну $F(x)$, а похідну $f'(x)$. Після того, як виконали перетворення функції $f'(x)$, треба повернутися до $f(x)$, так як $f(x)$ – первісна $f'(x)$. Треба пам'ятати, що $f(x)$ підраховується з точністю до сталої, яка задається ще в початковій умові [3].

Тому, використання диференційного та інтегрального числення до задач на знаходження скінченних сум послідовності передбачає:

1) дослідити функцію $f(x)$, що буде породжувати дану суму за певного значення незалежної змінної;

2) проаналізувати доцільність використання похідної $f'(x)$ чи первісної $F(x)$, при можливому виконанні тотожних перетворень;

3) повернутися назад до функції $f(x)$, при цьому скориставшись одним із співвідношень: а) $f(x) = F'(x)$; б) $f(x) = \int f'(x)dx + c$;

4) знайти значення сталої c, за відомими початковими умовами;

5) знайдене значення змінної x, підставити в одержаний вираз функції $f(x)$, що відповідає першій умові;

6) одержаний результат записати як відповідь.

2.1.3. Методи, які допускають геометричну інтерпретацію.

Цим розділом можуть скористатися вчителі під час пояснення тем «Арифметична прогресія» та «Геометрична прогресія», а також використовувати на факультативних заняттях, як дослідницька робота.

Методи, які допускають геометричну інтерпретацію завжди опираються на властивості адитивності сум. Так як саме ця властивість використовується і при розкритті поняття площі, то сало можливим розв'язати алгебраїчні задачі за допомогою геометричних об'єктів.

Саме тому вивчаються дані суми під час пізнавальної діяльності учнів, такий вид роботи завжди дуже цікавить учнів, розвиває творчу уяву, бажання відкрити нові закономірності, поглибити знання з алгебри та геометрії [7].

Приклад 2.6. *Знайдіть суму* $1^2+2^2+\ldots+n^2$.

Відомо, що $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Отримаємо тепер даний результат використовуючи властивість адитивності сум. Для цього потрібно розглянути прямокутники зі сторонами $a = 1$, $b = k^3$, $k = \overline{1 \ldots n+1}$ (Рис. 2.1).

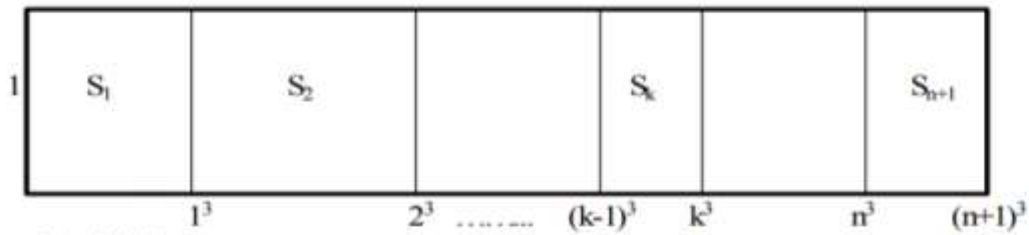

Рис. 2.1 Геометричне тлумачення суми квадратів перших n натуральних чисел.

С

тає зрозумілим, що

$$S_1+S_2+\ldots+S_{n+1}=(n+1)^2\cdot 1. \qquad (*)$$

Тому за побудовою

$$S_k = k^3-(k-1)^3.$$

Тобто, рівність (*) буде мати вигляд

$$1+(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+\ldots+((n+1)^3-n^3)=(n+1)^3\cdot 1\cdot$$

Так як $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$, то з (**) маємо

$$1+(3\cdot 1^2+3\cdot 1+1)+(3\cdot 2^2+3\cdot 2+1)+\ldots+(3\cdot n^2+3\cdot n+1)=(n+1)^3.$$

З останньої рівності перегрупуємо її члени

$$3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1)=(n+1)^3.$$

Звідси маємо

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{3}((n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1))=(n+1)(n^2+\frac{1}{2}n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

.

Саме за такою аналогією можемо знайти суми інших степенів (кубів, четвертих, п’ятих і т.п.) чисел натурального ряду [13].

Разом з цим геометричну інтерпретацію можна допустити і з іншими сумами. В такому випадку найважливішим буде підібрати площі S_k, які перетворюються в один з доданків шуканої суми, при присвоєнні k певного конкретного значення.

Приклад 2.7. *Побудуйте геометричну інтерпретацію суми* $1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!$.

Ми вже знаходили дану суму в прикладі 2.3. за допомогою математичної індукції. Ця сума буде рівна $(n+1)!-1$. Тепер же потрібно отримати даний результат геометрично, аналогічно тому, як ми виконували попереднє завдання.

Тому, розглянемо прямокутник, сторони яких дорівнюють a = 1 і b_k = k · k!= (k +1)!–k!, $k=\overline{1..n+1}$ (див. рис. 2.2)

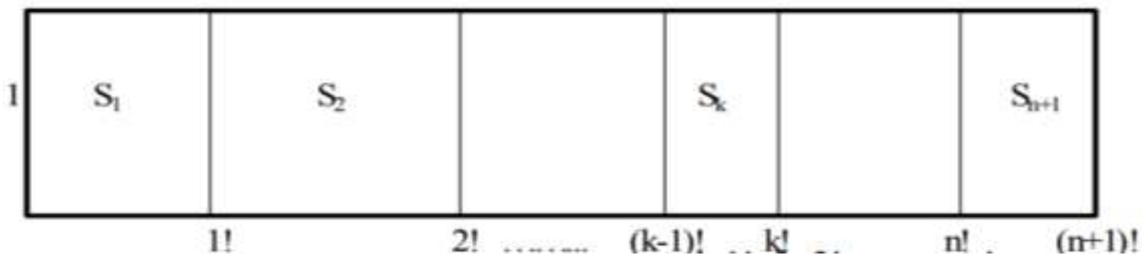

Рис.2.2. Геометричне тлумачення суми

Знайдемо площу кожного прямокутника: $S_k = k\cdot k!\cdot 1$, а $S_1+S_2+...+S_{n+1}=(n+1)!$. Так як S_2 – це перший доданок суми, S_3 – другий доданок і т.д., можемо записати

$$S_2+...+S_{n+1}=1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-S_1=(n+1)!-1 \quad [1].$$

І на завершення ознайомимося з геометричною інтерпретацією суми геометричної прогресії, знаменник якої $|q|<1$

$$1+q+q^2+...+q^n+... . \qquad (*)$$

Розглянемо рисунок 2.3.

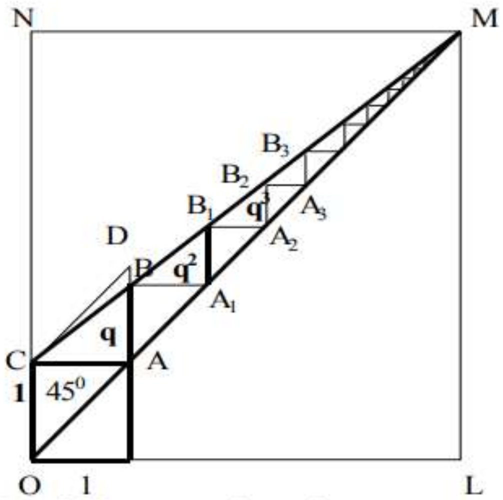

Рис. 2.3 Інтерпретація нескінченної спадної геометричної прогресії

Маємо відрізки $OC=1,\ AB=q,\ A_1B_1=q^2$, $A_2B_2=q^3$ і т.д., вони графічно забражають члени геометричної прогресії (*). Це буде слідувати з подібності відповідних трикутників.

Наприклад, $\Delta ACB \sim \Delta A_1BB_1$:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1B}{AC};\quad \frac{A_1B_1}{q}=\frac{q}{1}\Rightarrow A_1B_1=q^2.$$

Аналогічно доведемо, що

$A_kB_k=q^k,\ k=2,3,\ldots$

Якщо $OC+AB+A_1B_1+\ldots+A_nB_n+\ldots=ML$. З цього випливає, що ML – це графічне зображення суми (*). Знайдемо ML . Скористаємося тим, що

$\Delta CBD \sim \Delta OCM$, а $\Delta ACD \sim \Delta LOM$. Запишемо відповідні пропорції:

$$\frac{BD}{OC}=\frac{CD}{OM}=\frac{AD}{ML};\quad \frac{BD}{OC}=\frac{AD}{ML}\Rightarrow ML=\frac{OC\cdot AD}{BD}=\frac{1}{1-q}\ ,$$

що буде відповідати результатам, які були отримані алгебраїчним шляхом.

Отже,

$1+q+q^2+...+q^n+...=\frac{1}{1-q}$, де |q| <1 [16].

Якщо опиратися на дослідження, які були проведені на педагогічній практиці, то можемо прийти до висновку, що учням цікаво відшукувати геометричну інтерпретацію сум. Проте від вчителя це вимагає додаткових знань вмінь та навичок, тому що досить часто учні пропонують такі вираження своїх ідей, які не зустрічаються в ніякому підручнику.

2.1.4. Метод зведення шуканої суми до відомих сум послідовностей.

Вважається, що саме цей метод найчастіше використовується під час розв'язання складних та нетипових завдань. Проте описати алгоритм роботи даного методу неможливо, саме тому доцільніше буде розглянути приклади нестандартних задач, які розв'язуються методом шуканої суми до відомої.

Приклад 2.8. *Знайти сумму* $\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+...+\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n}$.

Очевидно, що чисельник k -го доданку є сумою квадратів k перших натуральних чисел, тому, за отриманим вище співвідношенням, k -й доданок можна подати у вигляді:

$$a_k=\frac{1^2+2^2+...+k^2}{k}=\frac{1}{k}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k^2+3k+1}{6}=\frac{k^2}{3}+\frac{k}{2}+\frac{1}{6}.$$

$$a_1+a_2+...+a_n=(\frac{1^2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})+(\frac{2^2}{3}+\frac{2}{2}+\frac{1}{6})+...+(\frac{n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{6})$$

$$a\ +a_2+...+a_n=\frac{1}{3}(1^2+2^2+...+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+...+n)+n\frac{1}{6}=$$

$$a_1+a_2+...+a_n=\frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n}{36}(4n^2+15n+17)\ [3].$$

Приклад 2.9. *Знайти суму* $1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+...+100\cdot2^{99}$.

Позначимо через S шукану суму та виконаємо наступні тотожні перетворення:

$$S = 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + ... + 100\cdot 2^{99} = 1 + (1+1)\cdot 2 + (1+2)\cdot 2^2 + ... + (1+99)\cdot 2^{99} =$$

$$= (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{99}) + 2(1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + ... + 99\cdot 2^{98}) =$$

$$= 2^{100} - 1 + 2(S - 100\cdot 2^{99})$$

Потім переходимо до рівняння S:

$$S = 2^{100} - 1 + 2(S - 100\cdot 2^{99}),$$

і знаходимо, що $S = 99\cdot 2^{100} + 1$[3].

Метод зведення суми до відомої суми послідовності також використовують під час розв’язання будь-яких завдань на знаходження сум послідовностей.

В цьому пункті описані штучні методи знаходження скінченних сум послідовностей, що опираються на математичний апарат, це дозволяє досить вдало поєднувати даний матеріал зі шкільною програмою.

Також використовуються звичні для учнів та студентів методи розв’язання досить нетипових завдань, що дозволяє розкрити глибокий зміст матеріалу, який вивчається. Також дані штучні методи будуть корисні під час розв’язання олімпіад них задач різної складності.

На цих прикладах випадки знаходження скінченних сум не закінчуються, проте вони найчастіше зустрічаються під час пояснення матеріалу в курсі математики.

2.2. Суми та рекурентні послідовності

Нехай дано деяку послідовність чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Треба знайти суму

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad (*)$$

Щоб знайти суму цієї послідовності потрібно до a_1 додати a_2, потім до цієї суми додати a_3 і т.д. Отже маємо, що обчислення суми (*) зводиться до таких міркувань:

$$S_1 = a_1;$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2;$$
$$S_3 = (a_1 + a_2) + a_3 = S_2 + a_3;$$
$$S_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = S_3 + a_4;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + a_k = S_{k-1} + a_k;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n;$$

Кожен раз шукаємо S_k через S_{k-1}. В такому випадку дану послідовність, кажуть, що задано рекурентно.

Означення 2.1. Послідовність називають заданою рекурентно, якщо кожен наступний член послідовності можна виразити через попередні члени цієї ж таки послідовності.

Отже, можемо вважати суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

еквівалентну рекурентності

$$\begin{cases} S_1 = a_1, \\ S_k = S_{k+1} + a_k, k > 0 \end{cases} \qquad (**)$$

тому поставлене завдання у вступі кваліфікаційної роботи з підсумовування зводиться розв’язання рекурентного співвідношення (**).

Наприклад, щоб утворити геометричний ряд можна виокремити 2 види рекурентних співвідношень:

1) $\begin{cases} S_1 = a_1, \\ S_k = S_{k+1} + aq^{k-1} \end{cases}$

2) $\begin{cases} S_1 = a\ , \\ S_2 = aq, \\ S_{k+2} = (1+q)S_{k+1} + qS_k \end{cases}$

Легко помітити, що у першому випадку в ролі параметра виступає *K* (номер деякого елемента суми), а в другому випадку цей параметр відсутній. Саме це змушує нас розглянути два способи розв'язання рекурентних рівнянь: репертуарний (перший випадок) та метод різницевих рівнянь (другий випадок) [2].

Репертуарний метод. Найчастіше використовується при сумі, що породжена многочленом до 5-ї степені, та зводить до методу невизначених коефіцієнтів дане рекурентне співвідношення.

Нехай a_k – це загальний члени суми, який рівний деякій сталій та кратний певному k.

Тоді система рівнянь (**) буде виглядати:

$$\begin{cases} S_0 = \alpha, \\ S_k = S_{k+1} + \beta + \gamma k, k > 0 \end{cases} \qquad (***)$$

Тому загальній розв'язок системи (***) буде виражатися формулою:

$S_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$, де $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ – це невизначені коефіцієнти. Давайте їх знайдемо, використавши підстановку $S_n = 1$ дає $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0 \Rightarrow A(n) = 1$.

З підстановкою $S_n = n$ отримаємо, що $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0 \Rightarrow B(n) = n$.

З підстановкою $S_n = n^2$ отримаємо, що $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 2 \Rightarrow C(n) = \frac{n^2 + n}{2}$ [14].

Приклад 2.10. *Знайдіть суму* $\sum_{k=0}^{n}(a + bk)$, *використавши репертуарний метод.*

Рекурентна система (***) за даних умов буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} S_0 = a_1, \\ S_k = S_{k-1} + a + bk. \end{cases}$$

Тоді, $\alpha = a$, $\beta = a$, $\gamma = b$.

Знаючи чому дорівнюють коефіцієнти $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, знайдемо значення шуканої суми.

$$A(n)\cdot a + B(n)\cdot a + C(n)\cdot b = a + na + \frac{n^2+n}{2}b = \frac{(n+1)(2a+nb)}{2} \text{ [29].}$$

Приклад 2.11. *Виразіть в замкненому вигляді суму* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$ *за допомогою репертуару.*

Проаналізувавши завдання, можна відмітити недолік репертуарного методо, а саме його не універсальність, тобто рекурентність (***) потребує суттєвих доповнень:

$$S_0 = a,$$
$$S_k = S_{k-1} + (-1)^k(\beta + \gamma k + \delta k^2), k > 0$$

Маємо загальний розв’язок:

$Sn = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta$, де $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ – це невизначені коефіцієнти. Давайте обчислимо значення коефіцієнтів використавши допоміжні підстановки:

$$S_n = 1 \Rightarrow A(n) = 1;$$
$$S_n = (-1)^n \Rightarrow A(n) + 2B(n) = (-1)^n;$$
$$S_n = (-1)^n \cdot n \Rightarrow -B(n) + 2C(n) = (-1)^n n;$$
$$S_n = (-1)^n n^2 \Rightarrow B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2.$$

Тому, $D(n) = (-1)^n \dfrac{n^2+n}{2}$ і буде нашою шуканою сумою [37].

Отже, розглядаючи репертуарний метод та його застосування під час знаходження сум скінченних послідовностей, важливо зазначити, що учень або студент, який буде користуватися даним методом повинен мати глибокі математичні знання та творчий підхід під час побудови рекурентності та обчисленні невизначених коефіцієнтів.

В той же час постає питання: чи не можна якимось чином узагальнити репертуарний метод так, щоб він міг бути застосований до широкого класу сум. Відповідь на це запитання дає наступна теорема [20].

Теорема. Нехай дана послідовність a_1, a_2,...,a_n,... Якщо існує натуральне k і числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ такі, що

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + ... + \alpha_k a_n \tag{1}$$

$(n \geq k \geq 1)$,

то

$$S_{n+k} = (1+\alpha_1)S_{n+k} + (a_2 - a_1)S_{n+k-1} + ... + (a_k - a_{k-1})S_{n+1} - a_k S_n, , \tag{2}$$

де $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$.

Доведення.

Знайдемо n-часткові суми:

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2, \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ &.........................\,. \\ &S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \end{aligned}$$

Нескладно помітити, що

$$\begin{aligned} &a_1 = S_1, \\ &a_2 = S_2 - a_1 = S_2 - S_1, \\ &a_3 = S_3 - (a_1 + a_2) = S_3 - S_2, \\ &.................................... \\ &a_n = S_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S_n - S_{n-1}. \end{aligned}$$

Отримані значення a_1, a_2,...,a_n підставимо у рівність (1)

$$S_{n+k} - S_{n+k-1} = \alpha_1(S_{n+k-1} - S_{n+k-2}) + \alpha_2(S_{n+k-2} - S_{n+k-3}) + ... + \alpha_k(S_n - S_{n-1}),$$

отримаємо

$$S_{n+k} = (1-\alpha_1)S_{n+k-1} + (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+k-2} + ... + (\alpha_k - \alpha_{k-1})S_n + (\alpha_{k+1} - \alpha_k)S_{n-1}, \alpha_{k+1} = 0$$

якщо змінити n на $(n+1)$, то отримаємо рівність (2).

Теорему доведено [4].

Отже, в теоремі говориться, що якщо послідовність (a_n) задана рекурентно (1), то послідовність n-часткових сум буде задовольняти рівняння (2), що не містить в явному вигляді членів послідовності.

Для розв'язку подібних рівнянь потрібно використати теорію скінченних різниць, про яку детальніше буде висвітлено у наступному пункті.

2.3. Метод скінченних різниць

Приклад 2.12. (Всеукраїнська студентська олімпіада, м. Вінниця, 2002 рік). Доведіть, що число $\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot(k^2+k+1)$ не має дільників менших за 2002.

Головною проблемою під час розв’язання даного завдання є вираження числа в скінченному вигляді, яке представлене у вигляді суми.

Виконавши деякі тотожні перетворення над членом суми, отримаємо такий результат:

$a_k = k!(k^2+k+1) = k!((k+1)^2 - k) = (k+1)!\cdot(k+1) = k!\cdot k$.

Саме тому

$$\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{2001}[(k+1)!\cdot(k+1) - k!\cdot k] = (2!\cdot 2 - 1!\cdot 1) + (3!\cdot 3 - 2!\cdot 2) + (4!\cdot 4 - 3!\cdot 3) + \ldots +$$
$$+ (2001!\cdot 2001 - 2000!\cdot 2000) + (2002!\cdot 2002 - 2001!2001) = 2002!\cdot 2002 - 1$$

Маємо, що

$$\sum_{k=1}^{2001} k!\cdot(k^2+k+1) = 2002!\cdot 2002 - 1.$$

До цієї послідовності (a_k) дописано ще одну послідовність (b_k), де

$b_k = k!\cdot k$ таку, що a_k=b_{k+1}-b_k. Тоді маємо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \text{ [35].}$$

Саме цей прийом лежить в основі метода підсумовування за допомогою скінченних різниць. Але, перед тим як почати розв'язувати задачі за допомогою цього методу коротко розглянемо деякі теоретичні відомості з даного питання.

2.3.1. Різницеве числення.

Нехай $F(x)$ – функція, що визначена в точці x, нехай h – число, що $F(x)$ визначена а точці $x+h$.

Означення 2.2. Операція переходу від $F(x)$ до $F(x+h)$ - $F(x)$ називається різнецевим оператором або оператором знаходження різниці та позначається $\Delta_h f = f(x+h) - f(x)$.

Нехай $h = 1$. Якщо змінити $F(x)$ на g(t) , де g(t) = $F(hx)$, $t = \frac{x}{h}$, тоді отримаємо

$$\Delta g = g(t+1) - g(t) = f(h(t+1)) - f(ht) =$$
$$= f(h(\frac{x}{h}+1)) - f(h\frac{x}{h}) = f(x+h) - f(x) = \Delta_h f.$$

Тоді оператор знаходження різниці визначається так:

$\Delta f = f(x+1) - f(x)$ [19]. (1)

Властивості оператора знаходження різниці:

1. Нехай c – стала, тоді $\Delta(cF) = c\Delta F$;
2. Нехай F та g є визначеними в точках x і $x+1$. Тоді маємо $\Delta(F+g) = \Delta F + \Delta g$ (властивість адитивності);
3. Якщо F і g – функції, що визначені в точках x та $x+1$, а c_1 , c_2 – сталі, то маємо $\Delta(c_1 F + c_2 g) = c_1\Delta F + c_2\Delta g$ (властивість лінійності);
4. $\Delta(F \cdot g) = g \cdot \Delta F + F \cdot \Delta g + \Delta F \cdot \Delta g$ (аналог похідної добутку).

Доведення. За означенням

$$\Delta(f \cdot g) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x+1)g(x) =$$
$$= f(x+1)(g(x+1) - g(x)) + g(x)(f(x+1) - f(x)) = f(x+1)\Delta g + g(x)\Delta f = f(x+1)\Delta g - f(x)\Delta g +$$
$$+ f(x)\Delta g + g(x)\Delta f = \Delta g(f(x+1) - f(x)) + f(x)\Delta g + g(x)\Delta f = f(x)\Delta g + g(x)\Delta f + \Delta g\Delta f.$$

Що і треба було довести.

Зазначимо, що аналогом похідної при $\Delta x = 1$ (приріст аргументу) є саме різницевий оператор, а аналогом диференціювання – є операція знаходження різниці. Але давайте дізнаємось, що є аналогом операції інтегрування [22].

Означення 2.3. Антирізниця функції $F(x)$ – це така функція $F(x)$, що $\Delta F(x) = F(x)$ (2) і має таке позначення

$$\Delta^{-1} F(x) = F(x) \qquad (3)$$

Властивості антирізницевого оператора.

1. $\Delta^{-1}(\Delta F(x)) = F(x);$
2. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – це дві різні антирізницеві функції $F(x)$, тоді

   $F_1(x) = F_2(x) + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – це довільна періодична функція з $T = 1$ періодом.

Наприклад,

І. *Різниці:*

1) $\Delta(ax+b)=[a(x+1)+b]-[ax+b]=a$;

2) $\Delta x^2=(x+1)^2-x^2=2x+1$;

3) $\Delta x^{(k)}=kx^{(k-1)}$, де

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)}&=x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)\\ x^{(-k)}&=\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+k-1)}\end{aligned}\right\}\text{ узагальнений степінь, } k\in N;$$

4) $\Delta a^x=a^{x+1}-a^x=(a-1)a^x$;

При $a=2$ $\Delta 2^x=2^x$ - аналог експоненціальної функції;

5) $\Delta\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(x+1)}$;

6) $\Delta arctgx=arctg\frac{1}{1+x(x+1)}$;

7) $\Delta\sin(\alpha x)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\alpha x+\frac{\alpha}{2}\right)$;

8) $\Delta tg(\alpha x)=\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha x)\cos(\alpha x+\alpha)}$, або $\frac{1}{\cos(\alpha x)\cos(\alpha x+\alpha)}=\Delta\frac{tg(\alpha x)}{\sin\alpha}$.

II. Антирізниці.

1) $\Delta^{-1}a^x=\frac{a^x}{a-1}$;

2) $\Delta^{-1}x^{(k)}=\frac{x^{(k+1)}}{k+1}$;

3) $\Delta^{-1}\cos\alpha x=\frac{\sin\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\Delta^{-1}\frac{1}{\cos\alpha x\cos\alpha(x+1)}=\frac{tg\alpha x}{\sin\alpha}$;

5) $\Delta^{-1}arctg\frac{1}{1+x+x^2}=arctgx$.

Ознайомившись з новим матеріалом, можна повернутися до задач на знаходження скінченних сум послідовностей. Нехай x послідовно рівний 1, 2, 3, 4, ... , $(n-1)$ в рівності (2) .

Одержемо систему

$$\begin{cases} F(2)-F(1)=f(1), \\ F(3)-F(2)=f(2), \\ F(4)-F(3)=f(3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F(n)-F(n-1)=f(n-1), \end{cases}$$

з якої знайдемо:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)=F(n)-F(1) \quad (4)$$

В випадку, якщо $F(x)$ і $F(x+n)$ відомі функції, рівняння (4) можна використовувати для обчислення сум:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)=f(x)+f(x+1)+\ldots+f(x+n-1)=F(x+n)-F(x),$$

або, за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)=F(x+k)\,|_0^n=F(x+n)-F(x).$$

Звичайно частіше трапляється випадок, коли $x = 0$. В такому випадку маємо:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k)=F(k)\,|_0^n=F(n)-F(0) \quad [7]. \quad (5)$$

Приклад 2.13. *Знайдіть суму n доданків*

$$arctg\frac{1}{1+1+1^2}+arctg\frac{1}{1+2+2^2}+\ldots+arctg\frac{1}{1+n+n^2}.$$

За формулою (5):

$$\sum_{k=1}^{n} arctg\frac{1}{1+k+k^2}=\Delta^{-1}arctg\frac{1}{1+k+k^2}\Bigg|_1^{n+1}=arctgk\Big|_1^{n+1}=arctg(n+1)-arctg1=arctg(n+1)-\frac{\pi}{4}.$$

Дана задача на знаходження суми породженою функцією $F(x)$, повністю розв'язана. Скориставшись формулою (5) знайдемо антирізницю $\Delta^{-1} F(x)$.

З попередньої глави ми дізналися, що обчислення деяких сум може бути зведено до розв'язування рекурентного рівняння (k +1) - го порядку

$$S_{n+k+1} = (1+\alpha_1)S_{n+k} + (\alpha_2 - \alpha_1)S_{n+k-1} + \ldots + (\alpha_k - \alpha_{k-1})S_{n+1} - \alpha_k S_n, \tag{6}$$

де α_1 , α_2 , …, α_k- дійсні числа.

Щоб розв'язати рівняння (6) ми скористаємося теорією різницевих *рівнянь.*

Якщо *x* буде приймати тільки натуральні значення, тоді $\varphi(x)$ – послідовність $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), ..., \varphi(n), ...$ [16].

Означення 2.4. Лінійне однорідне різницеве рівняння першого роду (ЛОРР) – це рівняння, що можна записати у вигляді

$$\Delta\varphi(x) - g(x)\varphi(x) = 0 \tag{7}$$

відносно невідомої функції $\varphi(x)$.

Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$\varphi(x) = c\prod_{k=0}^{x-1}(g(k)+1), \text{ де } c \in R .$$

Але, так як рівняння (6) зазвичай другого і більше порядку, то ЛОРР (7) для нас є неактуальним [9].

Означення 2.5. Рівняння виду

$$\Delta^2\varphi(x) + a\Delta\varphi(x) + b\varphi(x) = 0, \tag{8}$$

називається ЛОРР другого порядку, де $\Delta^n F$ - різниця n-го порядку функції F .

В загальному вигляді розв'язок даного рівняння запишеться так:

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - деякі часткові лінійно незалежні розв'язки, тобто

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_1(1) \\ \varphi_2(0) & \varphi_2(1) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (*)$$

Зазвичай, сталі c_1 , c_2 вже з початкової умови задачи є всже визначиними.

Рівняння (8) та рекурентність (6) буде зручно записати у такому вигляді:

$$\varphi(x+2)+p\varphi(x+1)+q\varphi(x)=0\ , \qquad (9)$$

де $p=a-2$, $q=a+b+1$.

Наша основна задача – треба знайти з рівняння (9) часткові розвязки $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ [24].

Означення 2.6. Характеристичним рівнянням лінійного однорідного різницевого рівняння (9) другого порядку називається рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + \mathrm{q} = 0 \qquad (10)$$

Заложно від того, якими будуть корені рівняння (10) розглядають такі випадки:

1) λ_1 , $\lambda_2 \in$ R і $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Якщо умова (*) виконується, то функція
$$\varphi(x) = c_1\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x \qquad (11)$$
буде загальним розв’язком рувняння (9).

2) λ_1 , $\lambda_2 \in$ R і $\lambda_1 = \lambda_2$. В даному випадку функції $\varphi_1(x) = x\lambda^x$ та $\varphi_2(x) = \lambda^x$ будуть частковими розв'язками рівняння (9). Тому загальний розв'язок буде мати вигляд:
$$\varphi(x) = c_1 x\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x. \qquad (12)$$

3) Якщо λ_1 , λ_2 – комплексні числа. Тоді загальний розв'язок буде мати вигляд:
$$\varphi(x) = \rho^x (c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x)\,, \qquad (13)$$
де ρ - модуль, α - аргумент одного коренів характеристичного рівняння (10) [12].

Більш деталь з поданим матеріалом можна познайомитися в [5, 12, 19].

Можемо зробити висновок, що різницеві рівняння допомагають виразити функцію в скінченному вигляді, що задовольняє певне рекурентне співвідношення. Отже спробуємо розв'язати такі рекурентні співвідношення.

Приклад 2.14. *Знайдіть суми*

a) $a, a + d, a + 2d, ..., a + (n - 1)d$ (арифметичної прогресії);

b) 2 3 *n* 1, q, q , q , ..., q (геометричної прогресії);

с) 0, 1, 1, 2, 3, 5, ... (послідовності чисел Фібоначчі),

якщо відомо, що вони (суми) задовольняють наступні рекурентні рівняння:

a) $S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n$; (*)

b) $S_{n+2} = (1+q)S_{n+1} - qS_n$; (**)

c) $S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n$. (***)

Розпочнемо з *геометричної прогресії*. Перепишемо рівняння (**) у вигляді

$$S_{n+2} - (1+q)S_{n+1} + qS_n = 0$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (1+q)\lambda + q = 0,\ |q| > 1.$$

Звідси $\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = 1$. Оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$ при $|q| > 1$, то

$$S_n = c_1 q^n + c_2.$$

З початкових умов ($S_1 = 1, S_2 = 1 + q$) випливає, що $c_1 = \dfrac{q}{q-1}, c_2 = \dfrac{1}{1-q}$.

Тоді

$$S_n = \frac{q^{n+1}}{q-1} + \frac{q}{q-1} = \frac{q^{n-1} - 1}{q-1}.$$

Для *арифметичної прогресії* характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Тобто,

$$S_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2) \cdot 1^n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2.$$

Враховуючи, що

$$\begin{cases} S_1 = a, \\ S_2 = 2a + d, \\ S_3 = 3a + d \end{cases}$$

отримуємо значення сталих: $c_1 = 0$, $c_2 = a - \frac{1}{2}d$, $c_3 = \frac{d}{2}$.

$$S_n = \left(a - \frac{1}{2}d\right)n + \frac{1}{2}d \cdot n^2 = \frac{2a + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Суму чисел *послідовності Фібоначчі* пропонуємо знайти самостійно. Врахувати, що коренями характеристичного рівняння є числа 1, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.3.2. Підсумовування методом скінченних різниць

За допомогою даної теорії, що розглянута вище, можна знайти загальні формули для сум, які були породжені функціями, та в яких антирізниці будуть виражатися в скінченному вигляді.

1. Нехай $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(k)$ – це сума, що є породженою многочленом

$f(m) = b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0$,

де b_{m-1}, b_{m-2}, ... b_1, $b_0 \in \mathrm{R}$, $b_{m-1} \neq 0$. Якщо опиратися на матеріал зазначений вище (з попереднього пункту), то будемо мати

$$\sum_{x=0}^{n-1}(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0) = \Delta^{-1}(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0)\Big|_0^n.$$

Ставимо завдання відшукати всі антирізниці для (m-1)-го порядку многочлена. Але спочатку знайдемо

$\Delta(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$.

Якщо виконати подібні вправи з конкретними коефіцієнтами та з конкретним значенням степені многочлена, можна прийти до висновку:

$$\Delta(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = x^{m-1}C_m^1 a_m + \\ + x^{m-2}(C_m^2 a_m + C_{m-1}^1 a_{m-1}) + \ldots + x \cdot \sum_{i=2}^{m} C_i^{i-1} a_i + \sum_{i=1}^{m} C_i^i a_i, \qquad (1)$$

Його можна довести за допомогою метода математичної індукції по значенню m [8].

Нехай:

$$\begin{cases} b_{m-1} = C_m^1 a_m, \\ b_{m-2} = C_m^2 a_m + C_{m-1}^1 a_{m-1}, \\ b_{m-3} = C_m^3 a_m + C_{m-1}^2 a_{m-1} + C_{m-2}^1 a_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 = C_m^{m-1} a_m + C_{m-1}^{m-2} a_{m-1} + \ldots + C_2^1 a_2, \\ b_0 = C_m^m a_m + C_{m-1}^{m-1} a_{m-1} + \ldots + C_1^1 a_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Тоді, за означенням атирізниці:

$$\Delta^{-1}(b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

де $a = \tau(x)$ - довільна періодична функція з періодом $T = 1$.

Скориставшись методом Крамера виразимо коефіцієнти з системи (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_m^1 & 0 & \ldots & 0 \\ C_m^2 & C_{m-1}^1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_m^m & C_{m-1}^{m-1} & \ldots & C_1^1 \end{vmatrix} = C_m^1 \cdot C_{m-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_1^1 = m! \neq 0$$

Так як визначник зазначеної вище матриці не дорівнює нулю при будь-якому *m*, тоді існує єдиний розв'язок.

$$\Delta_{a_m}=\begin{vmatrix} b_{m-1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{m-2} & C_{m-1}^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 & C_{m-1}^{m-1} & \dots & C_1^1 \end{vmatrix};\ \Delta_{a_{m-1}}=\begin{vmatrix} C_m^1 & b_{m-1} & \dots & 0 \\ C_m^2 & b_{m-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^m & b_0 & \dots & C_1^1 \end{vmatrix};\ \dots\ \Delta_{a_0}=\begin{vmatrix} C_m^1 & 0 & \dots & b_{m-1} \\ C_m^2 & C_{m-1}^1 & \dots & b_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_m^m & C_{m-1}^{m-1} & \dots & b_0 \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$\Delta^{-1}\left(b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\dots+b_1x+b_0\right)=\frac{\Delta_{a_m}}{\Delta}x^m+\frac{\Delta_{a_{m-1}}}{\Delta}x^{m-1}+\dots+\frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}x+\tau(x)$$

Отже,

$$\sum_{0}^{n-1}\left(b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\dots+b_1x+b_0\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_m}x^m+\Delta_{a_{m-1}}x^{m-1}+\dots+\Delta_{a_1}x\right)\Big|^n. \quad (3)$$

Приклад 2.15. *Знайдіть суму* $\sum_{k=0}^{n-1}(k^3+2k^2+1)$

Тоді маємо: $b_0=1$; $b_1=0$, $b_2=2$, $m=4$.

Тому,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3+2k^2+1\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{a_4}k^4+\Delta_{a_3}k^3+\Delta_{a_2}k^2+\Delta_{a_1}k\right)\Big|_0^n, \text{ де}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} C_4^1 & 0 & 0 & 0 \\ C_4^2 & C_3^1 & 0 & 0 \\ C_4^3 & C_3^2 & C_2^1 & 0 \\ C_4^4 & C_3^3 & C_2^2 & C_1^1 \end{vmatrix}=4!;\ \Delta_{a_4}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & C_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & C_3^2 & C_2^1 & 0 \\ 1 & C_3^3 & C_2^2 & C_1^1 \end{vmatrix}=6;\ \Delta_{a_3}=\begin{vmatrix} C_4^1 & 1 & 0 & 0 \\ C_4^2 & 2 & 0 & 0 \\ C_4^3 & 0 & C_2^1 & 0 \\ C_4^4 & 1 & C_2^2 & C_1^1 \end{vmatrix}=4;$$

$$\Delta_{a_2}=\begin{vmatrix} C_4^1 & 0 & 1 & 0 \\ C_4^2 & C_3^1 & 2 & 0 \\ C_4^3 & C_3^2 & 0 & 0 \\ C_4^4 & C_3^3 & 1 & C_1^1 \end{vmatrix}=-18;\ \Delta_{a_3}=\begin{vmatrix} C_4^1 & 0 & 0 & 1 \\ C_4^2 & C_3^1 & 0 & 2 \\ C_4^3 & C_3^2 & C_2^1 & 0 \\ C_4^4 & C_3^3 & C_2^2 & 1 \end{vmatrix}=32.$$

Одже,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^3+2k^2+1\right)=\frac{1}{24}\left(6k^4+4k^3-18k^2+32k\right)\Big|_0^n=\frac{1}{24}\left(6n^4+4n^3-18n^2+32n\right).$$

Зауваження: При обчисленні суми, породженої многочленом користуйтеся методом невизначених коефіцієнтів, проте якщо степінь многочлена зростає краще скористатися формулою (3) [12].

2. Нехай $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ **– сума, що є породженою квазімногочленом, тобто**

$f(x) = ((b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0) \cdot \lambda^x)$, де $\lambda > 0, \lambda \neq 1$.

З даного виразу випливає, що квазімногочленом є різниця від квазімногочлена. Що дає змогу скористатися методом невизначених коефіцієнтів, щоб знайти антирізницю

$\Delta^{-1}((b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0) \cdot \lambda^x)$ [36].

Приклад 2.16. *Знайдіть суму* $\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+1)\cdot 2^k$.

Запишемо:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+1)\cdot 2^k = \Delta^{-1}((k^2+1)\cdot 2^k).$$

Так як антирізниця квазімногочлена є квазімногочлен, то маємо

$$\Delta^{-1}((k^2+1)\cdot 2^k) = (ak^2 + bk + c)\cdot 2^k,$$

де a, b, c – це невизначені коефіцієнти.

За означенням:

$$\Delta((ak^2 + bk + c)\cdot 2^k) = (k^2+1)\cdot 2^k.$$

Знайдемо

$$\Delta((ak^2 + bk + c)\cdot 2^k) = 2^k(ak^2 + (4a+b)k + 2a + 2b + c).$$

З рівності многочленів, маємо

$$ak^2 + (4a+b)k + 2a + 2b + c = k^2 + 1$$

Тоді будемо мати: $a = 1, b = -4$, $c = 7$.

Отже,

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+1)\cdot 2^k = \Delta^{-1}((k^2+1)\cdot 2^k) = (k^2 - 4k + 7)\cdot 2^k \Big|_0^n = (n^2 - 4n + 7)\cdot 2^n - 7$$

Узагальнимо даний результат.

$$\Delta\left(\left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)\cdot \lambda^x\right) = \lambda^x \cdot \left(C_m^0 a_m(\lambda-1)x^m + \left(C_m^1 \lambda a_m + C_{m-1}^0 a_{m-1}(\lambda-1)\right)x^{m-1} + \right.$$
$$+\left(C_m^2 \lambda a_m + C_{m-1}^1 \lambda a_{m-1} + C_{m-2}^0 a_{m-2}(\lambda-1)\right)x^{m-2} + \ldots + \left(C_m^{m-1}\lambda a_m + C_{m-1}^{m-2}\lambda a_{m-1} + \ldots + C_1^0 a_1(\lambda-1)\right)x +$$
$$\left. + C_m^m \lambda a_m + C_{m-1}^{m-1}\lambda a_{m-1} + \ldots + C_1^1 \lambda a_1 + C_0^0 a_0(\lambda-1)\right),$$

Будемо мати

$$\Delta^{-1}\left(\left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right)\cdot \lambda^x\right) = \left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)\cdot \lambda^x, \text{ де}$$

а) λ можна надати комплексне значення.

Тому виведемо такі вирази для сум

$\sum_{x=0}^{n-1} \rho^x f(x)\cos\alpha x$ та $\sum_{x=0}^{n-1} \rho^x f(x)\sin\alpha x$

де $F(x)$ - многочлен, $\lambda = \rho e^{\alpha i}$.

Пересвідчимося, що дані функції

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \rho^x(\Phi_0(x)\cos\alpha x + \Phi_1(x)\sin\alpha x) \\ F_2(x) &= \rho^x(\Phi_0(x)\sin\alpha x - \Phi_1(x)\cos\alpha x) \end{aligned} \qquad (6)$$

будуть задовольняти рівняння

$$\begin{aligned} \Delta F_1(x) &= \rho^x f(x)\cos\alpha x \\ \Delta F_2(x) &= \rho^x f(x)\sin\alpha x \end{aligned} \qquad (7)$$

де $\Phi_0(x)$ і $\Phi_1(x)$ - многочлени такої ж, що й $F(x)$. Щоб їх визначити використовують спосіб невизначених коефіцієнтів.

Якщо підбирати функцію $F(x)$ та параметри ρ і α, ми отримаємо суми, що містять тригонометричні вирази [27].

Приклад 2.17. *Знайдіть суми*

а) $1 + \rho\cos\alpha + \rho^2\cos 2\alpha + \ldots + \rho^{n-1}\cos(n-1)\alpha$ *;*

б) $\rho\sin\alpha + \rho^2\sin 2\alpha + \ldots + \rho^{n-1}\sin(n-1)\alpha$.

Якщо в рівності (6) і (7) покладемо, що $F(x) = 1$. Тоді $\Phi_0(x)$ і $\Phi_1(x)$ будуть многочленами 1-го степеня.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \rho^x(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x) \\ F_2(x) &= \rho^x(A\sin\alpha x - B\cos\alpha x) \end{aligned}.$$

Звідси знайдемо $\Delta F_1(x)$ та $\Delta F_2(x)$. Якщо прирівняти вирази (6) та (7), то отримаємо систему:

$$\begin{cases} A(\rho\cos\alpha x - 1) + B\rho\sin\alpha x = 1 \\ B(\rho\cos\alpha x - 1) + A\rho\sin\alpha x = 0 \end{cases},$$

з неї виведемо

$$A=-\frac{1-\rho\cos\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}\ ;\ B=-\frac{\rho\sin\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}\ .$$

Отже маємо,

$$1+\rho\cos\alpha+\rho^2\cos 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\cos(n-1)\alpha=\frac{(1-\rho\cos\alpha)(1-\rho^n\cos^n\alpha)+\rho^{n+1}\sin\alpha\sin n\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}\ ;$$

$$\rho\sin\alpha+\rho^2\sin 2\alpha+\ldots+\rho^{n-1}\sin(n-1)\alpha=\frac{\rho\sin\alpha(1-\rho^n\cos n\alpha)-(1-\rho\cos\alpha)\rho^n\sin n\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}\ .$$

При $\rho=1$ отримуємо раніше обчислені суми.

б) сума $\sum_{x=0}^{n-1} f(x)$ **виражається, коли** $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}$**,**

де φ(x) – многочлен степені не вище (m –1)-го [33].

Приклад 2.18. *Знайдіть границю*

$$\Delta^{-1}\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=\Delta^{-1}x^{(-m)}=\frac{x^{(-m+1)}}{-m+1},\ \text{то}$$

$$\sum_{x=1}^{n-1}\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=\frac{x^{(-m+1)}}{-m+1}\Bigg|_1^n=\frac{1}{-m+1}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)}-\frac{1}{(m-1)!}\right). \quad (8)$$

З іншого боку $\varphi(x)$ можна представити у вигляді

$$\varphi(x)=A_0+A_1(x+m)+A_2(x+m)(x+m-1)+\ldots+A_{m-1}(x+m)(x+m-1)\cdot\ldots\cdot(x+2).$$

Тоді, за властивістю адитивності сум

$$\sum_{x=1}^{n-1}\frac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}=A_0\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-m)}+A_1\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-m+1)}+\ldots+A_{m-1}\sum_{x=1}^{n-1}x^{(-2)}\ , \quad (9)$$

де кожна з сум обчислюється по формулі (8).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right).$$

Спочатку знайдемо суму

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}k^{(-3)}=-\frac{1}{2}k^{(-2)}\Bigg|_1^{n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}.$$

2.3.3. Підсумовування частинами

Розв'язуючи задачі на знаходження сум часто користуються перетворення Абеля, це такий собі дискретний аналог інтегрування частинами.

Для наочності розв'яжемо задачі саме цим методом.

Приклад 2.19. *Доведіть рівність*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k) \qquad (1)$$

Доведення.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k = \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k - \sum_{k=0}^{n-1}a_k b_k \overset{k\to k+1}{=} \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k - \sum_{k=-1}^{n-2}a_{k+1}b_{k+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_k - a_0 b_0 + a_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}b_{k+1} = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k).$$

Рівність (1) часто може виражатися такою тотожністю:

$$\sum_{k=m}^{n}u(k+1)v(k+1) = U(n+1)v(n+1) - U(m)v(m) - \sum_{k=m}^{n}U(k)\Delta v(k), \qquad (2)$$

де $\mathrm{U}(\mathrm{k}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{u}(\mathrm{i})$ носить назву перетворення Абеля скінченних сум.

Формула підсумовування частинами спрощує підрахунки сум виду

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\lambda^{k-1}; \ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\cos k\alpha; \ \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\sin k\alpha; \ \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k-1}\cos k\alpha; \ \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{k-1}\sin k\alpha.$$

Оскільки вправи такого типу ми вже навчилися розв'язувати, то в даному пункті обмежимося лише демонстрацією можливостей перетворення Абеля.

Приклад 2.20. *Знайдіть суму* $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k$

Покладемо в (2) $\mathrm{u}(\mathrm{k}) = 3^{\mathrm{k}-1}$; $v(\mathrm{k}) = k-1$. Тоді

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{k}\cdot 3^{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)\cdot n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(3^k-1\right) = \frac{n3^{n+1}}{2} - \frac{3}{4}\left(3^n-1\right).$$

Загалом, за допомогою перетворень Абеля можна знайти складні суми, не використовуючи теорію з різницевого числення або комплексних чисел. Саме тому цим методом зручно користуватись при підготовці учнів до олімпіад, або може бути розглянута як окрема тема факультативного заняття [37].

РОЗДІЛ 3

СПЕЦІАЛЬНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ СУМ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ.

Часто в математиці зустрічаються завдання з послідовностями, в яких відображено певні властивості та закономірності. Ми ж, в свою чергу, розглянемо числа Бернулі та числа Стірлінга, які будуть доповненням до теорії різницевого числення.

Дані числа зявилися в теорії множин та математичному аналізі, зараз широко застосовуються в дискретній математиці. Тому пропонуємо ознайомитися з числами, які спрощують обчислення деяких видів сум.

3.1. Чиста Стірлінга

Якщо розглянути суми, які були породжені квазімногочленами, многочленами та дробами виду $\frac{\varphi(x)}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m)}$, де φ($x$) – це ціла функція, степінь якої більший або менший m, також можна спростити задачу, якщо $F(x)$ та φ(x) будуть представлені у вигляді суми узагальнених степенів

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x(x-1) + \ldots + A_m x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1) \quad (1)$$

Враховуючи, що $\Delta^{-1}x^{(m)} = \frac{x^{(m+1)}}{m+1}$, зведемо задачу на знаходження суми до тривіального вигляду. Потім розглянемо обернену задачу:

$$x^{(n)} = B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n . \quad (2)$$

Отже, числа $B_1, B_2, ..., B_n, A_0, A_1, ..., A_m$ крім того, що пов'язані між собою, ще мають певні властивості та закономірності. Дані числа називаються числами Стірлінга першого та другого роду, в яких n - степінь многочлена, K - степінь в розкладі (1) чи (2), з коефіцієнтом S_{nK} чи S_{nK} [10].

Для кращого відображення вище сказаного, розглянемо такі основні теореми.

Теорема 1. *Числа Стірлінга першого роду – це коефіцієнти розкладу узагальненого степеня за многочленами виду* x^K

$$x^{(n)} = \sum_{k+1}^{n} s_{nk} x^k . \tag{3}$$

Теорема 2. *Числа Стірлінга другого роду – це коефіцієнти розкладу многочлена виду* x^n *за узагальненими степенями виду* $x^{(K)}$

$$x^n = \sum_{k+1}^{n} S_{nk} x^k . \tag{4}$$

Теореми доводять за допомогою математичної індукції [5, 13].

Числа Стірлінга першого роду будуть задовольняти таке рекурентне рівняння:

$$\begin{cases} s_{11} = 1, \\ s_{nk} = s_{(n-1)(k-1)} - (n-1)s_{(n-1)k}, \quad n \geq 2, \ k = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Що дає змогу побудувати для чисел першого роду трикутник Стірлінга [25].

Таблиця 1. Числа Стірлінга першого роду

n	s_{n0}	s_{n1}	s_{n2}	s_{n3}	s_{n4}	s_{n5}	s_{n6}	s_{n7}
0	1							
1	0	1						
2	0	-1	1					
3	0	2	-3	1				
4	0	-6	11	-6	1			
5	0	24	-50	35	-10	1		
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1

Приклад 2.20. *Представте многочлен* $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ *у канонічному вигляді.*

Маємо $f(x) = x^{(5)}$. Запишемо вираз, користуючись співвідношенням (3)

$$x^{(5)} = \sum_{k=1}^{5} s_{5k} x^k = s_{51}x + s_{52}x^2 + s_{53}x^3 + s_{54}x^4 + s_{55}x^5 .$$

З таблиці 1 підставимо значення S_{5K}, $K = 1, ..., 5$.

Будемо мати

$f(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24$ [17].

Числа Стірлінга другого роду будуть задовольняти таке рекурентне рівняння:

$$\begin{cases} S_{11} = 1, \\ S_{(n+1)k} = S_{n(k-1)} + kS_{nk}, \quad n \geq 1, \ k = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Тоді таблиця з числами S_{nK} буде виглядати:

Таблиця 2. Числа Стірлінга другого роду

n	S_{n0}	S_{n1}	S_{n2}	S_{nk}	S_{nk}	S_{nk}	S_{nk}	S_{nk}
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Приклад 2.21. *Знайдіть суму* $\sum_{k=0}^{n-1}(k^4+2k+4)$.

Щоб розв'язати дану задачу скористаємося числами Стірлінгі.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^4+2k+4\right)=\sum_{k=0}^{n-1}k^4+2\sum_{k=0}^{n-1}k+\sum_{k=0}^{n-1}4=\sum_{k=0}^{n-1}k^4+n(n-1)+4n=\sum_{k=0}^{n-1}k^4+n(n+3).$$

Спочатку знайдемо суму $\sum_{k=0}^{n-1}k^4$. Представимо через узагальнений степінь многочлен $f(x)=x^4$. Для цього скористаємось таблицею 2. $x^4=x+7x^{(2)}+6x^{(3)}+x^{(4)}$.

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^4=\Delta^{-1}k^4\Big|_0^n=\left(\frac{k^{(2)}}{2}+\frac{k^{(3)}}{7\cdot 3}+\frac{k^{(4)}}{6\cdot 4}+\frac{k^{(5)}}{5}\right)\Bigg|_0^n=\frac{n^{(2)}}{2}+\frac{n^{(3)}}{21}+\frac{n^{(4)}}{24}+\frac{n^{(5)}}{5}.$$

Для одержання кінцевого результату скористаємось теоремою 1 та таблицею 1.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(k^4+2k+4\right)=\frac{1}{30}n\left(6n^4-15n^3+10n^2+30n+89\right).$$

3.2. Числа Бернулі

Числа Бернулі дуже широко використовуються в дискретній математиці, математичному аналізі, в різних інженерних розрахунках та в теорії комплексних функцій.

Так як основною нашою задачею є впровадження методів знаходження сум послідовностей в шкільний курс математики, тому розглянемо один з найпростіших шляхів розуміння поняття «числа Бернулі». Даний підхід є одним з найпродуктивніших та краще сприймається учнями та студентами.

Нехай

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + (n-1)^m. \qquad (5)$$

Розглянемо формули для декількох перших сум:

$$S_0(n) = n;$$
$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n;$$
$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;$$
$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2;$$
$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n;$$
$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2;$$
$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n;$$
$$S_7(n) = \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2.$$

Визначимо такі умови:

а) у виразі $S_m(n)$ коефіцієнт рівний $\frac{1}{m+1}$, при n^{m+1};

б) коефіцієнт при n^m завжди рівний - $\frac{1}{2}$;

в) коефіцієнт при n^{m-1} буде рівний $\frac{m}{12}$;

г) коефіцієнт при n^{m-2} буде рівний 0 і т.д.

В загальному випадку маємо:

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1}+C_{m+1}^1 B_1 n^m+\ldots+C_{m+1}^m B_m n\right). \quad (6)$$

Коефіцієнти B_0 , B_1 , ..., B_m називаються числами Бернулі або бернулієвими числами і визначаються так [40]:

Таблиця 3. Числа Бернуллі.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$-1/30$	0	$5/66$

Приклад 2.22. *Знайдіть суму* $\sum_{k=1}^{n-1} k^6$.

Коримтуючись числами Бернулі та формулою (6) отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6=\frac{1}{7}\left(B_0 n^7+C_7^1 B_1 n^6+C_7^2 B_2 n^5+C_7^3 B_3 n^4+C_7^4 B_4 n^3+C_7^5 B_5 n^2+C_7^6 B_6 n\right).$$

Кінцевий результат:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^6=\frac{1}{7}\left(n^7-\frac{7}{2}n^6+\frac{21}{6}n^5-\frac{7}{6}n^3+\frac{1}{6}n\right).$$

Перевірка:

$$n=4 \quad \sum_{k=1}^{3} k^6=1^6+2^6+3^6=794;$$

з другого боку $\frac{1}{7}\left(4^7-\frac{7}{2}4^6+\frac{21}{6}4^5-\frac{7}{6}4^3+\frac{1}{6}4\right)=794$.

Даний метод є ефективнішим за використання чисел Стірлінга та за метод невизначених коефіцієнтів [33].

Так як в шкільному курсі математики супи степенів перших n-натуральних чисел зустрічаються досить часто, вчитель повинен володіти та з легкістю пояснити матеріал учням доступною математичною мовою.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було розглянуто основні властивості скінченних сум, їх використання під час розв'язання задач, також описані методи підсумовування, а саме досить обширно розглянуто штучні методи, за допомогою яких можна розв'язати завдання з шкільного курсу математики або молодших курсів вищих навчальних закладів, досить детально розглянуто метод скінченних різниць та спеціальні числа, такі як числа Стірлінга та числа Бернулі.

Також, розглянуто застосування ймовірнісних міркування під час знаходження сум послідовностей. Описані методи наближеного обчислення підсумовування, а також їх застосування. Висвітлені методичні рекомендації до викладання даного матеріалу в школах та в вищих навчальних закладах.

У даному кваліфікаційному проєкті розглянуто: методи знаходження скінченних сум послідовностей, які вивчаються як і в шкільному курсі математики так і на перших курсах вищих навчальних закладів; штучні методи підсумовування послідовностей; методи, які досить часто використовуються під час розв'язання олімпіадних математичних задач; методи, які використовуються під час факультативних занять з курсу математики та математичного аналізу в старшій школі. Також дана робота потрібна при застосовуванні ймовірнісних міркувань для знаходження певних типів сум. Тому завдання кваліфікаційного проєкту повністю виконані.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. В першому розділі «Початкові відомості про підсумовування послідовностей» розкрито тему властивостей сум. Також дається означення та умовні позначення скінченних сум.

В другому розділі «Методи знаходження скінченних сум» розглянуто різні методи підсумовування скінченних послідовностей, а саме метод скінченних різниць, метод рекурентних послідовностей та різні штучні методи.

В розділі «Спеціальні числа та їх застосування до знаходження скінченних сум послідовностей» (третій розділ) наводяться приклади розв'язання задач методами, які можна використовувати в шкільному курсі математики під час пояснення даної теми. Розглянуто приклади задач на знаходження сум послідовностей, які можуть бути використані на факультативах, в класах з поглибленим вивченням математики та математичних олімпіадах.

Під час написання даного кваліфікаційного проєкту було опрацьовано та систематизовано матеріал про обчислення сум скінченних послідовностей. Самостійно розв'язано ряд задач на підсумовування послідовностей із застосуванням розглянутих методів.

СПИСОК ВИКРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барон. Введение в теорию суммируемостирядов. Таллин: «Валгус», 1977. 280с.
2. Бевз Г.П. Алгебра: Проб. підр. для 7-9 кл. серед. шк. К.: Освіта, 1996. 303с.
3. Бевз Г.П. Математика: Проб. підр. для 11 кл. серед. шк. К.: Освіта, 1995. 91с.
4. Бекишев Г.А., Кратко М.І. Підсумовування послідовностей. К.: Вища школа, Головне видавництво, 1981. 64с.
5. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. 120с.
6. Воробьев Н.Н. Теория рядов. 6-е узд. стереотипное. СПб.: Издательство «Лань», 2002. 408с.
7. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. 176с.
8. Волков Ю.І. Додатні оператори. Наближення. Імовірність. К.: НМК ВО, 1992. 200с.
9. Волков Ю.І., Лигун А.А., Капустян В.Е. Специальные вопросы теории приближения и оптимального управления распределёнными системами. К.: Выща школа, 1990. 208с.
10. Вороний О.М. Кіровоградські олімпіади юних математиків (1991-2000 рр.): Методичний посібник. Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В.Винниченка. 140с.
11. Вышенский В.А. и др. Сборник задач киевских математических олимпиад. К.: Выща школа, 1984. 240с.
12. Гарднер М. Математические досуги. Пер. с англ. М.: Мир, 1972.

496с.
13. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М., 1967. 376с.
14. Гельфонд А.О. Числення скінченних різниць. К.: Науково-техн. вид-во України, 1935. 215с.
15. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. Пер. с англ. М.: Мир, 1998. 703с.
16. Демидович Б.П., Марон Ч.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М., 1967. 368с.
17. Давидов М.О. Курс математичногоаналізу. Ч.1. К: Вища школа, 1990. 384с.
18. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3ч. Ч1. Функції однієї змінної. –2-е вид. К.: Вища школа, 1990. 383 с.
19. Дубовик В.П. Юрик І.І. Вища математика: Навч. пос. К.:А.С.К. 2005. 648.
20. Еремов А.В, Математический анализ (специальные разделы). Ч1. Общие функциональные ряды и их приложение. М.: Выш. Шк.,1980. 436 с.
21. Зигмунд А. Тригонометрическиеряды. Том 1. М.: Мир. 1965. 616с.
22. Ильин и др. Математический анализ. Продолжение курса. М: МГУ, 1987. 358с.
23. Колосов А.А. Книга для внекласного чтения по математике в старших класах. М.: Госуд. учебно-педагогич. изд-во Министерствапросвещения РСФСР, 1963. 436с.
24. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. Главная ред. физ. – мат. лит., 1977. 832с.
25. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Гос. изд-во физ. – мат лит., 1959. 328с.
26. Кушнир И. Шедевры школьной математики в 2-х книгах. Книга 1. К.: Асторта, 1995. 576с.

27. Лотоцкий В.А. О ядрах регулярных положительных преобразований ограниченных последовательностей. К.: Киевский государственный педагогический институт им. А.М.Горького. 1978. 131с.
28. Марков А. Числення скінченних різниць. – Харків: Науково-техн. вид-во України, 1936. 236с.
29. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. М.: Гос. изд-во техн. – теорет. лит., 1951, 48с.
30. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 2.Дальнешеепостроениетеории. Санкт-Петербург: «Лань». 2009. 624с.
31. Маркушевич А.И. Ряды: Елементарный очерк. М.: Наука, 1957. 400с.
32. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Елемент. функц. М.: Наука, 1981. 67с.
33. Садовничий В.А., Подколозин А.С. Задачи студенческих математических олимпиадных задач по математике. М.: Наука, Главная ред. физ. – мат. лит., 1978. 208с.
34. Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во Мос. ун-та, 1987. 310с.
35. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 528с.
36. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II. М., 1969. 800с
37. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 7-е изд. стереотипное.Т2. М.: Наука, 1969. 845 с.
38. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. М.: Наука, 1969. 800с.

39. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегральногоисчислений, том II. М.: «Наука». 1970. 800с.
40. Харди Г. Расходящиеся ряды. М: Ил, 1951. 504с.
41. Шунда Н.М., Томусяк А.А, Практикум з математичного аналізу. Інтегральне числення. Ряди. К.: Вища школа, 1995. 541с.
42. Шефтель З.П. Теорія ймовірностей: Підручник. – 2-ге вид., пер. і допов. К.: Вища шк, 1994. 192с.
43. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Проб. підр. для 10-11 кл. серед. шк. К., 1995. 60с.

ДОДАТКИ

Додаток А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Поліщук Анастасія Валентинівна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традиційуніверситету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні йполітичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участів будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючуінформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг абоздійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальнідомагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базіуніверситету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністюуніверситету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальностей до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

30.10.2020  Поліщук Анастасія Валентинівна