МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

МЕТОД НАЙМЕНШИХ МОДУЛІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконав: студент 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: викладач математики
Шершень Дмитро Анатолійович

Керівник кандидат педагогічних наук, доцент
Кузьмич Л.В.
Рецензент кандидат технічних наук, доцент
Шишко Л.С.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

МНК – метод найменших квадратів

МНМ – метод найменших модулів

МНК-оцінки – оцінки, отримані за методом найменших квадратів

МНМ-оцінки – оцінки, отримані за методом найменших модулів

М.ОЧ. – математичне очікування

ВСТУП

Розвиток сучасної науки характеризується її математизацією, що виражається у використанні математичних методів і моделей не тільки у технічних та економічних дослідженнях, але й у менеджменті, соціології, педагогіці, біології, медицині. Обробка експериментальних даних для отримання достовірних результатів на основі проведених вимірювань — задача, з якою сучасний вчений та інженер зустрічаються майже повсякденно. Серед методів обробки експериментальних даних слід відмітити метод найменших модулів [21], використання якого доцільно в тих випадках, коли розподіл помилок вимірювань підпорядкований закону Лапласа, та метод найменших квадратів [4], який використовується, коли розподіл помилок вимірювань підпорядкований закону Гауса.

Актуальність дослідження. Як правило, у задачах математичного моделювання, де вхідними даними виступають дискретні точкові множини, число точок значно перевищує число параметрів моделюючої кривої, так що деякі точки мають ненульові відхилення (ухилення) від розрахункового значення. Методи отримання розв’язків в цих умовах є статистичними, коли вводиться деяка цільова функція, що встановлює залежність між відхиленнями (критерій розв’язання задачі). Цільова функція може носити екстремальний характер, коли відшукуються параметри моделюючої функції при екстремальних значеннях критерію; неекстремальний характер в інших випадках. Найбільш важливими аспектами математичного моделювання явищ і процесів є апроксимація, оптимізація, статистика. Цільові функції при цьому можуть бути як екстремальними, так і неекстремальними. Порівняльний аналіз означених аспектів дозволяє зробити висновок про пріоритет розробки напрямків і методів розв’язування екстремальних задач, що складають основу математичного моделювання у цій області. Цільові функції екстремальних задач можуть бути такими, що:

– диференціюються (пошук екстремуму цільової функції здійснюється методами математичного аналізу);

– не диференціюються (наприклад, критерій найменшого сумарного відхилення [12]).

Тут методи математичного аналізу неспроможні і потрібно шукати нові підходи. З математичної точки зору проблема розв'язання екстремальних задач з цільовими функціями, що диференціюються, в основному вирішена. В той же час проблема розв'язання екстремальних задач з цільовими функціями, що не диференціюються, в повній мірі не вирішена, в особливості при дискретному завданні вихідних даних. Тут, принаймні, можна вказати на метод найменших модулів, що являє собою різновид зважених середньоквадратичних наближень, запропонований Епішиним Ю.Г. метод найменших абсолютних відхилень [8], а також спроби Успенського А.К. реалізувати критерій найменших граничних відхилень [9]. Однак достатніх теоретичних положень і конструктивних алгоритмів розв'язання, виключаючи метод найменших модулів, не було отримано. Актуальність вирішення проблеми визначається її винятковою важливістю для практики, де самий зміст явища вимагає оцінок, відмінних від оцінок методу найменших квадратів (МНК-оцінок). Отримання ефективних і обгрунтованих оцінок впливає на рівень технічних рішень при проектуванні, на рівень прийняття управлінських рішень при економіко- та математичному моделюванні і розв'язанні задач оптимізації, на рівень прийняття прогнозних рішень, соціальних і господарських програм і т. ін.

Об'єктом дослідження виступають математичні методи обробки статистичної інформації, а **предметом** дослідження – метод найменших модулів.

Мета дослідження – розглянути суть методу найменших модулів та алгоритм отримання оцінок за даним методом.

Відповідно до мети дослідження визначені такі **завдання**:

1. Підбір та вивчення навчального матеріалу з різних джерел інформації, літератури з метою обґрунтування постановки задачі дослідження.

2. Розгляд основних положень, що стосуються розв'язання основної задачі статистичної обробки вимірювань.

3. Розгляд обчислювальних схем отримання оцінок за методом найменших квадратів та методом найменших модулів.

Основні **методи дослідження**, що використовувалися у роботі, – це математичні методи обробки статистичної інформації.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що було систематизовано та узагальнено основні відомості, які стосуються методу найменших модулів. **Практичне значення** роботи полягає у розв'язанні задачі доведення збіжності алгоритму квадратичних наближень.

Робота складається з трьох розділів. Перший розділ даної роботи містить основні відомості, які стосуються основної задачі статистичної обробки вимірювань. Положення цього розділу є допоміжними при розгляді основної задачі дослідження. В другому розділі розглянуто питання, що стосується суті методів найменших квадратів та найменших модулів. Зокрема, в ньому наведено обчислювальні схеми отримання оцінок за методом найменших квадратів та розглянуто деякі екстремальні властивості законів розподілу помилок вимірювань. Третій розділ присвячено методу найменших модулів. В цьому розділі розглянуто обчислювальні схеми отримання оцінок за методом найменших модулів, а також розв'язана задача стосовно збіжності алгоритму квадратичних наближень.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНА ЗАДАЧА СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ ВИМІРЮВАНЬ

Кожний крок по життю супроводжується якимись вимірами. Просинаючись вранці, ми дивимося на годинник і вимірюємо за їх допомогою тривалість сну. Зробивши зарядку і визирнувши за вікно, ми за допомогою термометру визначаємо температуру повітря. Готуючи сніданок, ми, можливо, скористаємося кулінарною книгою і за допомогою ваг відміримо необхідну кількість потрібних для приготування їжі компонентів. Рухаючись до найближчою станції метро, ми на око або кроками вимірюємо відстань до неї.

Усі перераховані вище приклади відносяться до категорії так званих безпосередніх вимірів. Не менш часто нам доводиться виконувати непрямі виміри [12]. Так, відстань до станції метро ми не можемо визначити за відрізком часу, який займає у нас рух до неї, а про те, яка зараз година в сонячний день, ми можемо судити за розміром та відстанню власної тіні. При непрямих вимірах спостерігаються не величини $a_1, a_2, \dots, a_n$, які нас цікавлять, а деяка функція $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ від них. За бажанням кожний безпосередній вимір величини a_k може розглядатися як непрямий вимір, коли

$$f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots a_n) \equiv a_k.$$

Незрівнянно більше, ніж в звичайному житті, безпосередніх і непрямих вимірів людині потрібно виконувати в ході виробничої діяльності. Необхідні приклади на цей рахунок легко знайде кожний.

Задача визначення невідомих параметрів за допомогою мінімальної кількості непрямих вимірів визначала з часом зміст великих розділів науки. Так, визначення сторін і кутів трикутника за даними вимірами його інших сторін і кутів породило тригонометрію. Так само визначення параметрів орбіти невідомої планети або комети за даними вимірами деякої кількості кутів на небесній сфері є одним з найбільших розділів астрономії.

Зі шкільного курсу тригонометрії відомо наступне: для того, щоб визначити будь-який елемент трикутника, достатньо зробити виміри довжини однієї з його сторін і величини прилеглих до цієї сторони кутів. Лише в окремому випадку, коли один з прилеглих кутів дорівнює 0°, а інший 180°, для визначення двох інших сторін трикутника необхідно виконати додаткові виміри (рис.1) [3].

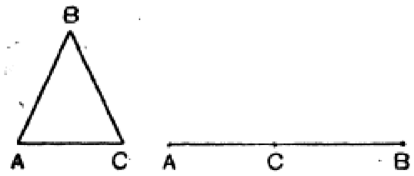


Рис. 1.

Аналогічно, теоретична астрономія показала, що виконуючи тричі виміри кутових координат світила і прив’язавши їх до часу, можна визначити всі шість параметрів його орбіти, знання яких дозволяє здійснити необхідні передбачення положення світила в достатньо віддалені моменти часу. Лише в частинному випадку, коли орбіта лежить в площині екліптики, трьох вимірів кутових координат виявляється недостатньо, і для знаходження параметрів орбіти треба зробити четвертий вимір.

Виникає питання: а що, якщо вимірів проведено більше, ніж мінімально необхідно для визначення невідомих параметрів? Відкинути «зайві» вимірі, які непотрібні? Навряд хтось погодиться вважати це розумним. Виміри зазвичай визначають ціною великих зусиль та не малих затрат часу, і таке «відкидання» вимірів виглядає марнотратним. Інтуїтивно зрозуміло, що надлишкові виміри можуть суттєво збільшити достовірність і точність визначення невідомих параметрів, отриманих за мінімальною кількістю даних, і все питання в тому, як найбільш раціональним способом використати їх для цієї мети. Наукою, що займається цим питанням, є теорія ймовірності, точніше, її розділ, який називається *статистичною обробкою вимірів*.

Теорія обробки вимірів виходить з того, що кожному виміру, як би ретельно він не був би виконаний, обов'язково притаманні похибки, які негативно позначаються на точності визначення параметрів, що нас цікавлять. Надлишкові виміри, знижуючи вплив похибок, підвищують цю точність.

Розрізняють систематичні, випадкові та грубі похибки.

Систематика похибка характеризується постійністю величини та знаку похибки. Вона називається зазвичай неправильною постановкою вимірів [21]. Так, до появи систематичної похибки в показаннях прибору приводить зміщення шкали.

До такого ж результату приводить не врахування так званої особистої похибки спостерігача, яка пов'язана з індивідуальними особливостями людини. (Наприклад, вимірюючи проміжки часу за допомогою секундоміру, люди не однаково швидко і своєчасно натискають на головку). До систематичних похибок приводять також відхилення параметрів довколишнього середовища від нормальних умов, за яких виконане градуювання приладу.

Випадковою похибкою називається похибка що змінюється від спостереження до спостереження. Причиною її виникнення може бути наявність великої кількості знакозмінних неврахованих факторів, що впливають на хід експерименту. Так, випадковими виявляються похибки, що виникають при знатті показання зі шкал і, зокрема, похибки δ за рахунок паралаксу і округлення.

Грубою похибкою називається випадкова похибка, що набагато перевищує задані (паспортні) характеристики приладу. Груба похибка виникає, наприклад, тоді, коли знімаючи показання зі шкал, спостерігач неправильно прочитає оцифрування шкали [21].

Основною задачею обробки вимірів є визначення невідомих параметрів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що характеризують об'єкт дослідження, за даними прямих і непрямих вимірів. В математичній формі задача виглядає так: визначити величини $a_1, a_2, \ldots, a_n$ із системи рівнянь

$$f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Delta_1 = x_1$$
$$f_2(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Delta_2 = x_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1.1)$$
$$f_N(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Delta_N = x_N,$$

де $f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – невідомі функції від невідомих параметрів,

Δ_i – похибка i-го виміру,

x_i – результат виміру,

N – число вимірів ($N \geq n$).

Якщо серед загального масиву присутні безпосередні виміри деяких параметрів a_k, то для цих вимірів, як все відмічалося раніше, слід покласти

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots a_n) \equiv a_k.$$

Якщо деяка група вимірів містить неврахована систематичну похибку, то її іноді доцільно включити в число визначних параметрів [10]. Відповідна група рівнянь має вигляд

$$f_i(a_1, a_2, \dots a_n) + a_{n+1} + \Delta_i = x_i \qquad i = 1,2, \dots, N_1; \;\; N_1 \leq N,$$

де a_{n+1} – величина систематичної похибки цієї групи вимірів. Покладаючи

$$f_i(a_1, a_2, \dots a_n) + a_{n+1} \equiv \widehat{f_i}(a_1, a_2, \dots a_n, a_{n+1}),$$

ми повертаємося до початкової постановки задачі з тим уточненням, що Δ_i вже не містить систематичної складової.

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1.1. Із точки *O* у напрямку оси *X* іде потяг. Потрібно визначити його швидкість a, якщо в моменти $t_1, t_2, \dots t_N$ деякими похибками визначається його положення на осі *X*, і результатами вимірів є $x_1, x_2, \dots x_N$ (рис. 3).

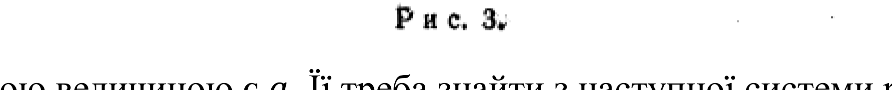


Рис. 3.

Невідомою величиною є a. Її треба знайти з наступної системи рівнянь:

$$at_1 + \Delta_1 = x_1,$$
$$at_2 + \Delta_2 = x_2, \qquad (1.2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$at_N + \Delta_N = x_N,$$

Приклад 1.2. Із точки O в невідомому напрямку з невідомою, але постійною швидкістю, вилетів літак. Потрібно визначити напрямок його руху та швидкість польоту за допомогою далекоміру, що розташований в точці з координатами (A, O), що здійснює виміри в моменти $t_1, t_2, \dots t_N$ (рис.4).

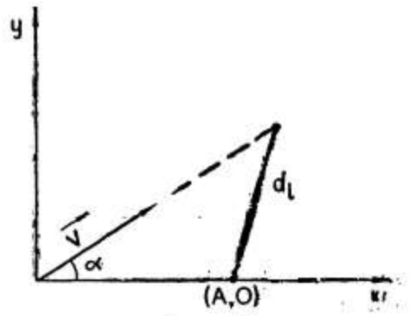


Рис. 4.

Невідомими параметрами є складові вектора швидкості a_1, a_2 за осями X та Y відповідно. Знаючи ці складові, можна легко визначити абсолютне значення вектора швидкості [8] і його орієнтацію відносно координатних осей

$$V = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \alpha = arctg\ \frac{a_2}{a_1}.$$

В моменти t_i літак знаходиться в точці з координатами

$$x_i = a_1 t_i, \qquad y_i = a_2 t_i.$$

Припускаючи, що висота польоту літака мала у порівнянні з дальністю, можна вважати, що відстань від цієї точки до точки (A, O), що вимірюється далекоміром, дорівнює

$$d_i = \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}.$$

Таким чином, системою рівнянь для визначення параметрів a_1, a_2 є:

$$\sqrt{(a_1 t_1 - A)^2 + (a_2 t_1)^2} + \Delta_1 = d_1$$
$$\sqrt{(a_1 t_2 - A)^2 + (a_2 t_2)^2} + \Delta_2 = d_2 \qquad (1.3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sqrt{(a_1 t_N - A)^2 + (a_2 t_N)^2} + \Delta_N = d_N$$

Приклад 1.3. За полярною круговою орбітою навколо Землі обертається штучний супутник. Спостерігач, поміщений на полюсі, в моменти $t_1, t_2, \dots t_N$ відмічає положення відносно зірок, але, щось же, виміряє кут α між лінією горизонту і напрямком супутника. Потрібно, використовуючи дані вимірів, визначити радіус орбіти супутника, його кутове положення на орбіті в момент $t = 0$ і полярний радіус Землі.

Дана задача насить досить штучний і , можливо, жартівливий характер, але в своїй основі вона містить всі елементи аналогічних задач на визначення фігури і розмірів Землі за спостереженнями штучних супутників Землі.

Візьмемо, як і раніше, для означення параметрів, що визначаються, букви a_1, a_2 і a_3. Таким чином, a_1 буде позначати радіус орбіти супутника, a_2 – його кутове положення на орбіті, відраховане від екватора в початковий момент часу, і a_3 – радіус Землі. Встановимо залежність вимірюваних величин від параметрів, що підлягають визначенню.

Для розв'язання цієї задачі нам доведеться скористатися відомим третім законом Кеплера [3] про те, що квадрат часу обернення небесного тіла навколо центру тяжіння пропорційний кубу більшої півосі, тобто

$$T^2 = mR^3,$$

де m – постійний коефіцієнт, для Землі він дорівнює $\frac{4\pi^2}{398600}$ (сек^2/км^3), або, в прийнятих позначеннях,

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 = ma_1^3,$$

де ω – кутова швидкість руху супутника навколо Землі.

З цієї формули отримуємо

$$\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{m}} a_1^{-\frac{3}{2}} = \frac{r}{\sqrt{a_1^3}}, \text{де } r = \frac{2\pi}{\sqrt{m}}.$$

На рис. 5 можна знайти прямокутні координати супутника в момент t_i

$$x_{\text{сп}}(t_i) = a_1 \cos(\omega t_1 + a_2) = a_1 \cos\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right)$$

$$y_{\text{сп}}(t_i) = a_1 \sin(\omega t_1 + a_2) = a_1 \sin\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right).$$

Далі з рис.6 видно, що

$$tg\,\alpha_i = \frac{y_{\text{сп}}(t_i) - a_3}{x_{\text{сп}}(t_i)} = \frac{a_1 \sin\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right) - a_3}{a_1 \cos\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right)}.$$

Таким чином,

$$\alpha_i = arctg \frac{a_1 \sin\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right) - a_3}{a_1 \cos\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right)}.$$

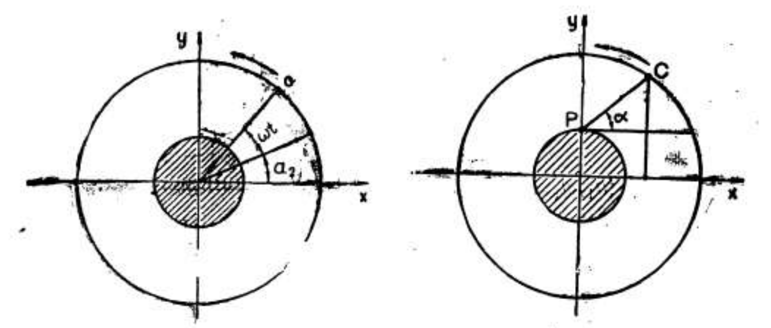


Рис. 5. Рис. 6.

Системою рівнянь для визначення невідомих параметрів a_1, a_2 і a_3 є

$$arctg\frac{a_1\sin\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)-a_3}{a_1\cos\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)}+\Delta_1=\alpha_1$$

$$arctg\frac{a_1\sin\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)-a_3}{a_1\cos\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)}+\Delta_2=\alpha_2 \qquad (1.4)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$arctg\frac{a_1\sin\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)-a_3}{a_1\cos\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)}+\Delta_N=\alpha_N.$$

В наведених прикладах всі функції $f(a_1,a_2,\dots,a_n)$ мали однаковий вигляд:

в першому випадку $f_i(\alpha)=at_i$,

в другому – $f_i(a_1,a_2)=\sqrt{(a_1t_i-A)^2+(a_2t_i)^2}$

в третьому – $f_i(a_1,a_2,a_3)=arctg\frac{a_1\sin\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)-a_3}{a_1\cos\left(\frac{rt_i}{\sqrt{a_1^3}}+a_2\right)}$

При розв’язуванні задачі у загальному вигляді ця умова, взагалі, не обов’язкова, та усі функції $f_i(a_1,a_2,\dots,a_n)$ можуть сильно відрізнятися не лише за числовими величинами, які входять у них, але і за зовнішнім виглядом. Так було б, наприклад, якщо для визначення параметрів a_1 і a_2 у другому прикладі ми використали б не тільки далекоміром, але і приладом, який вимірює кути.

Повернемося до системи (1.1). Ця система рівнянь характерна тим, що у ній кількість невідомих більше кількості рівнянь. Окрім параметрів $a_1,a_2,\dots,a_n$, невідомими є також похибки вимірювань $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_N$. Тому розв’язок системи неоднозначний. Можливо більш-менш довільним способом призначити значення величин $a_1,a_2,\dots,a_n$ і тоді $\Delta_1,\Delta_2,\dots,\Delta_N$

знайдуться із співвідношень

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= x_1 - f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
\Delta_2 &= x_2 - f_2(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1.5) \\
\Delta_N &= x_N - f_N(a_1, a_2, \dots, a_n)
\end{aligned}$$

У цьому випадку величина Δ_i називається *остаточною неув'язкою* i-го виміру.

З огляду на невизначеність систем типу (1.1) їх розв'язок шукають не в алгебраїчному, а у статистичному сенсі, а саме намагаються підібрати (призначити) значення невідомих параметрів $a_1, a_2, \dots, a_n$ так, щоб уся сукупність неув'язок володіла б якими-небуть мінімальними ознаками [19].

Якщо казати про практичну сторону справи, розв'язок задачі у статистичному сенсі передбачає побудову деякої функції $\Phi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$, що залежить від неув'язок, та її мінімізацію у області шуканих параметрів. Оскільки неув'язки $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ залежать не лише від величини визначених параметрів$a_1, a_2, \dots, a_n$, але і від результатів вимірювання $x_1, x_2, \dots, x_N$, то сукупність значень $\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \dots, \widetilde{a_n}$, які обумовлюють мінімум функції $\Phi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$, буде залежить як від вигляду цієї функції, так і від результатів вимірювань

$$\widetilde{a_\iota} = \widetilde{a_\iota}(\Phi, x_1, x_2, \dots, x_N) \qquad (1.6)$$

Змінюючи вигляд функції $\Phi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$, ми будемо отримувати різні набори $\widetilde{a_1}, \widetilde{a_2}, \dots, \widetilde{a_n},$. Кожне таке $\widetilde{a_\iota}$, обране у якості підходящого значення невідомого параметру a_i , називається *оцінкою* цього параметру.

Так як вимірювання є випадковими величинами, то і оцінка як деяка функція від вимірювань також є випадковою величиною, яка володіє такими характеристиками, як функція щільності $h(\tilde{a})$, розподільний закон

$$H = (\tilde{a}) = \int_{-\infty}^{\tilde{a}} h(\tilde{a}) \widetilde{da}$$

математичне очікування

$$\text{М. ОЧ.}\,\tilde{a} = \int_{-\infty}^{\tilde{a}} \tilde{a}h\,(\tilde{a})\,\widetilde{da}\,,$$

дисперсія

$$D\tilde{a} = \int_{-\infty}^{\tilde{a}} (\tilde{a} - \text{М. ОЧ.}\,\tilde{a})^2\, h(\tilde{a})\,\widetilde{da}.$$

Визначення усіх цих понять можна знайти у [15, 26].

Функціональних залежностей типу (1.6), які використовують для отримання оцінок у зв'язку з довільністю Φ, може бути знайдена нескінченно-велика кількість. Для того, щоб переконатися у цьому, розглянемо найпростіший приклад безпосереднього вимірювання деякої одновимірної величини a. Система рівнянь (1.1), що використовується для визначення величини a, має вигляд

$$a + \Delta_1 = x_1$$

$$a + \Delta_2 = x_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a + \Delta_N = x_N.$$

В якості оцінки величини a може бути запропонована півсума найбільшого й найменшого значення x_i

$$\tilde{a} = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}.$$

Неважко показати [4], що при такому виборі $\tilde{a}$ у мінімум перетворюється максимальна остаточна неув'язка, так що

$$\Phi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N) = max\,\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_t \dots, \Delta_N.$$

З не меншим правом в якості оцінки може бути середньоарифметичне значення

$$\tilde{a} = \frac{x_1, x_2, \dots, x_N}{N}.$$

При такому призначені $\tilde{a}$ у мінімум перетворюється сума квадратів неув'язок

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^{\,2}.$$

Перегрупувавши виміри $x_1, x_2, \dots, x_N$ та розставивши їх у порядку зростання, можна запропонувати в якості оцінки таке x_i, яке за своєю величиною більше однієї половини вимірювань, які залишилися, але менше другої її половини. При цьому у мінімум перетворюється сума абсолютних значень остаточних неув'язок

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} |\Delta_i|$$

і так далі.

Аналогічно і у багатовимірному випадку. Тут також для отримання оцінок спочатку може бути запропоновано нескінченно велике число функцій від виміряних величин. Кожна з оцінок породжує свою сукупність остаточних неув'язок. Яку ж сукупність остаточних неув'язок слід визнати найкращою у середньому і , отже, якій оцінці слід віддати перевагу іншим?

Для відповіді на це запитання проведемо деяку, не дуже деталізовану, класифікацію оцінок. Але спочатку нагадаємо декілька визначень з [17], які нам знадобляться для складання цієї класифікації.

Незмішаною називається така оцінка, для якої математичне очікування оцінки дорівнює самій визначеній величині, тобто М. ОЧ. $\tilde{a} = a$.

Ефективною називається незмішана оцінка з найменшою дисперсією, тобто оцінка максимально можливої точності. Для інших (неефективних) оцінок вводиться кількісна міра точності e, яку називають ефективністю оцінки, вона визначається як відношення дисперсії даної оцінки до дисперсії ефективної оцінки. Очевидно, що ефективність ефективної оцінки дорівнює 1, а для інших оцінок < 1.

На основі цих означень можна виконати первісну класифікацію оцінок, представимо її на рис.7.

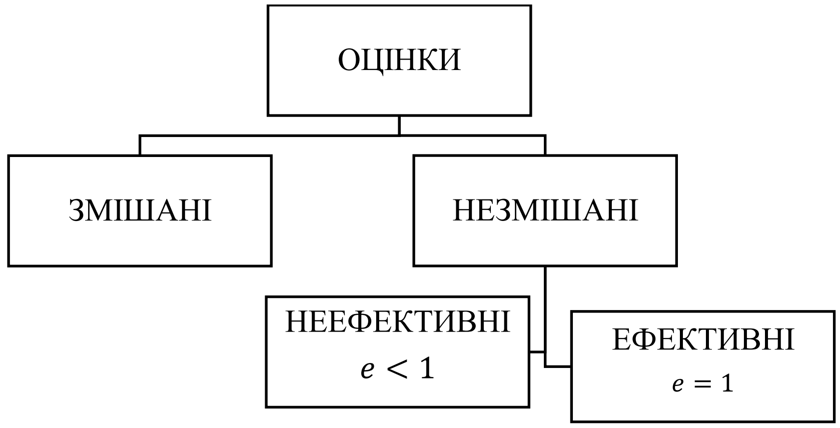
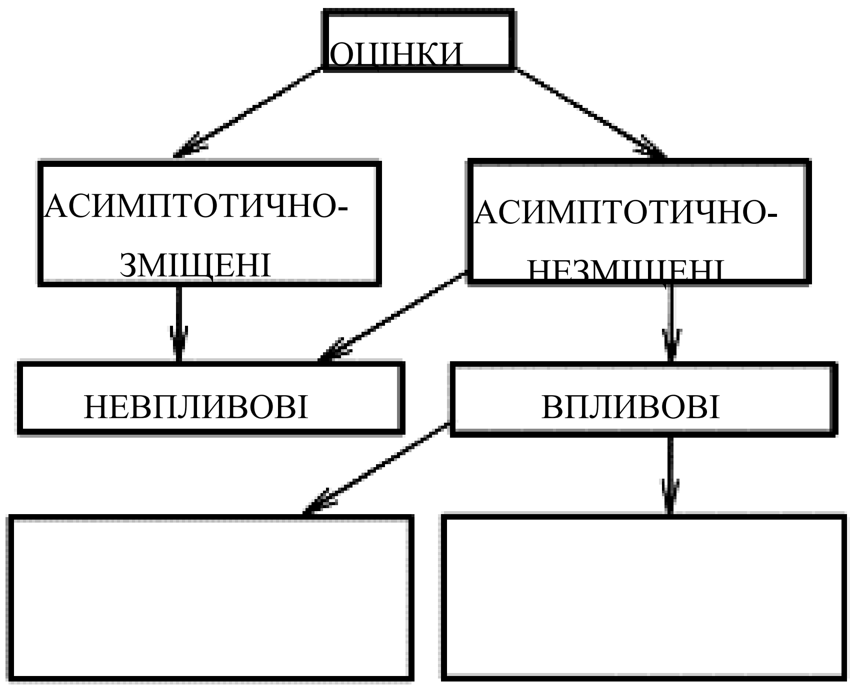


Рис.7.

Ця класифікація має місце, коли розглядаються малі вибірки, тобто коли число вимірів мале. Коли ж число вимірів велике, то класифікацію дещо видозмінюють, вводять поняття асимптотично-незміщених, впливових та асимптотично-ефективних оцінок.

Асимптотично-незмішаною називають ту оцінку, для якої М. ОЧ. $\tilde{a} = a$ при $N \to \infty$. *Впливовою* називається оцінка, для якої $D(\tilde{a}) \to 0$ при $N \to \infty$. *Асимптотично-ефективною* називається оцінка, для якої $e \to 1$ при $N \to \infty$.

Уточнена, яка застосовується до великих вибірок, класифікація оцінок зображена на рис.8.



ОЦІНКИ З АСИМПТОТИЧНОЮ ЕФЕКТИВНІСТЮ	АСИМПТОТИЧНО ЕФЕКТИВНІ
$0 < e < 1$	$e = \lim_{n\to\infty} e_n = 1$

Рис.8.

Ця зміна класифікацій знадобилася нам для наступних цілей. Теорія [28] підказала один з найбільш вигідних шляхів розв'язування системи (1.1). Нехай з яких-небудь умовиводів вдалося виявити закон розподілу похибок виміру Δ_i. Позначимо за допомогою $g_i(\Delta_i)$ функцію щільністі i-ої похибки та за допомогою $G(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$ – багатовимірну функцію щільності усієї сукупності помилок $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$. У випадку, коли похибки вимірів незалежні

$$G(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N) = g_1(\Delta_1) \cdot g_2(\Delta_2), \dots, g_N(\Delta_N) = \prod_{t=i}^{N} g_i(\Delta_i) \quad (1.7)$$

Функція $G(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$ щільності спільного розподілу похибок вимірювання носить назву *функції правдоподібності.*

З виразу (1.5) випливає, що кожна неув'язка є функцією визначених параметрів та наявних змін. Той набір $a_1, a_2, \dots, a_n$, який при зазначених змінах максимізує функцію правдоподібності, називається *оцінкою максимальної правдоподібності.*

Доведено [2], що оцінка максимальної правдоподібності при деяких досить загальних умовах є асимптотично-несуміщеною, впливовою та асимптотично-ефективною оцінкою. Тобто для великих вибірок оцінки максимальної правдоподібності мають найбільш можливу точність.

РОЗДІЛ 2
МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ І МЕТОД НАЙМЕНШИХ МОДУЛІВ

2.1. Суть методів найменших квадратів та найменших модулів

З виразу (1.7) видно, що вид функції правдоподібності залежить від функції щільності, тобто від розподілу похибки вимірювання. Припустимо, що похибка вимірювання у (1.7) підпорядковані нормальному закону [11], тобто

$$g_i(\Delta_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta_i{}^2}{2\sigma_i{}^2}},$$

та припустимо, що середньо квадратична похибка σ_i кожного виміру однакова для усіх вимірів.

У цьому випадку функція правдоподібності має вигляд

$$G = \prod_{t=i}^{N} g_i(\Delta_i) = \left(\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{\Delta_i{}^2}{2\sigma_i{}^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i{}^2}$$

Очевидно, що G досягає максимуму, коли $\sum_{i=1}^{N}\Delta_i{}^2$ достигає мінімуму. Таким чином, у даному випадку, щоб отримати оцінку максимальної точності, потрібно мінімізувати суму квадратів неув’язок.

Якщо точності окремих вимірів різні, так що

$$G = \frac{1}{\prod_{t=i}^{N}\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_i{}^2}{2\sigma_i{}^2}},$$

то для знаходження максимально-правдоподібної оцінки необхідно мінімізувати зважену сума квадратів неув’язок

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} p_i\Delta_i{}^2,$$

де $p_i = 1/\sigma_i{}^2$ називають *вагою* i-го виміру.

Оцінки, отримані в результаті мінімізації зваженої суми квадратів неув’язок, носять назву *оцінок методу найменших квадратів* (оцінки МНК).

Але розподільний закон похибок вимірювання може в силу різних причин і не бути нормальним законом. Наприклад, при деяких умовах (ми їх розглянемо нижче) похибки вимірювання можуть підпорядковуватися закону Лапласа [7]:

$$g_i(\Delta_i) = \frac{1}{2\beta_i} e^{-\frac{|\Delta_i|}{\beta_i}}.$$

У цьому випадку функція правдоподібності для рівноточних вимірів набуває вигляду

$$G = \left(\frac{1}{2\beta_i}\right)^N e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{N}|\Delta_i|}.$$

Її максимум досягає у точці, в якій

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} |\Delta_i| = min.$$

Якщо для різних вимірів величини β_i відрізняються, то мінімізації підлягає вираз

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} g_i |\Delta_i|,$$

де $g_i = 1/\beta_i$. Оцінки, отримані в результаті мінімізації зваженої суми модулей неув’язок, носять назву *оцінок методу найменших модулів* (оцінок МНМ).

В силу вище зазначеного, рекомендуючи той чи інший спосіб статистичного розв’язку системи рівнянь (1.1), ми повинні почати з аналізу похибок вимірів.

Зазвичай вважають, що похибки вимірювання підпорядковані нормальному закону (закону Гауса [13]). Підстав для цього достатньо багато. Зокрема, вельми вагомим доказом на користь припущень про нормальний закон розподілу похибок є так звана центральна гранична теорема, яка стверджує, що сума нескінченно великого числа незалежних випадкових величин з однаковими математичними очікуваннями, розподілених за довільним законом з рівномірно обмеженими («приблизно» рівними) дисперсіями, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом [14]. Бессель запропонував гіпотезу про те, що у багатьох випадках, особливо в астрономічних дослідженнях, похибка вимірювання як раз і утворюється як сума великої кількості малих випадкових величин, які мають різне походження та приблизно однакові за величиною. У силу цього метод найменших квадратів як наслідок методу максимальної правдоподібності і нормального закону похибок вимірювання повинен був отримати дуже широке використання.

2.2. Обчислювальні схеми отримання оцінок за методом найменших квадратів

Широкому поширенню методу найменших квадратів сприяла одна обставина. Виявляється, що сума квадратів неув'язок як функція невідомих параметрів $a_1, a_2, \dots, a_n$ має найкращу аналітичну форму, яку собі тільки можна уявити. Це полегшує знаходження мінімуму цієї функції і, отже, отримання оцінки. Обчислення стають особливо простими, коли вимірювана величина лінійним чином пов'язана з визначеними параметрами.

Звернімося, наприклад, до системи рівнянь (1.2). Припускаючи, що закон розподілу помилок вимірювання нормальний, тут для отримання оцінки невідомої величини a потрібно знайти мінімум наступної функції

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - a t_i)^2.$$

Користуючись правилами диференціального числення для знаходження мінімуму, обчислимо похідну $d\Phi \,/\, da$ та прирівняємо її до нуля. Маємо:

$$\frac{d\Phi}{da} = -\sum_{i=1}^{N} 2(x_i - a t_i) t_i = -2\sum_{i=1}^{N} x_i t_i + 2a \sum_{i=1}^{N} t_i^2 = 0$$

Зауважимо на майбутнє, що рівняння такого типу називаються *рівняннями правдоподібності*. З рівняння правдоподібності негайно отримуємо найкращу оцінку

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i t_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i^2}.$$

Якщо точності окремих вимірювань розрізняються, то для отримання оцінки максимальної правдоподібності потрібно мінімізувати вираз

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} p_i \Delta_i^2, \text{ де } p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

У цьому випадку найкращою оцінкою є

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i\, x_i t_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i t_i^2}$$

Звернімося тепер до системи рівнянь (1.3). Тут для отримання оцінки найменших квадратів потрібно знайти мінімум наступної функції

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} [d_i - \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}]^2.$$

Для відшукання мінімуму Ф знайдемо похідні $\partial\Phi \,/\, \partial a_1$ і $\partial\Phi \,/\, \partial a_2$ та прирівняємо їх до нуля. Маємо:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{N} [d_i - \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}]^2 \frac{(a_1 t_i - A)t_i}{\sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{N} [d_i - \sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}]^2 \frac{(a_2 t_i)t_i}{\sqrt{(a_1 t_i - A)^2 + (a_2 t_i)^2}} = 0$$

Отримана система рівнянь відносно a_1і a_2 носить нелінійний характер і не розв'язується в скінченому вигляді. Тому для отримання необхідних оцінок зазвичай застосовується обчислювальна процедура такого роду.

Використовуючи мінімум даних, тобто в даному випадку два виміри, зроблені в моменти t_1 і t_2, нехтуючи помилками вимірювань, легко отримаємо наступну систему рівнянь щодо a_1і a_2.

$$\sqrt{(a_1 t_1 - A)^2 + (a_2 t_1)^2} = d_1; \qquad (2.1)$$

$$\sqrt{(a_1t_2 - A)^2 + (a_2t_2)^2} = d_2.$$

Таку систему рівнянь можна розв'язати елементарними засобами. Для цієї мети обидва рівняння слід піднести до квадрату, потім помножити перше рівняння на t_1^2, а друге на t_2^2 і відняти одне рівняння з іншого. В результаті вийде рівняння першого степеня щодо a_1, яке і розв’язується елементарно. Підставляючи отримане значення a_1 в одне з рівнянь (2.1), отримаємо квадратне рівняння щодо a_2, яке також розв’язується елементарно. Обидва отримані розв’язки мають фізичний сенс. Для отримання однозначної відповіді слід залучити будь-які додаткові відомості, наприклад, напрямок обертання далекоміра у випадку літака, що летить.

Використовуючи мінімум даних, значення a_1і a_2 назвемо *початковим наближенням* і позначимо $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}$. Знаючи початкове наближення, поставимо завдання про відшукання поправок δa_1і δa_2 до $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}$ маючи на увазі за допомогою цих поправок задовольнити умову $\sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = min$. З цією метою попередньо зведемо вихідну систему рівнянь (1.3) щодо a_1і a_2 до системи рівнянь в поправках δa_1і δa_2, провівши так звану лінеаризацію [4] рівнянь (1.3) в околі значень $a_1^{(0)}$і $a_2^{(0)}$.

Для складання лінеаризованої системи покладемо

$$d_i^{(0)} = \sqrt{(a_1^{(0)}t_i - A)^2 + (a_2^{(0)}t_i)^2}; \qquad (2.2)$$

$$d_i = d_i^{(0)} + \delta d_i \qquad (2.3)$$

$$a_1 = a_1^{(0)} + \delta a_1 \qquad (2.4)$$

$$a_2 = a_2^{(0)} + \delta a_2 \qquad (2.5)$$

Підставляючи вирази (2.2.-25) у співвідношення

$$d_i = \sqrt{(a_1t_i - A)^2 + (a_2t_i)^2} + \Delta_i,$$

розкладаючи праву частину в околі точки $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$ в степеневий ряд і відкидаючи старші члени розкладу, отримаємо шукані рівняння в поправках

$$\frac{(a_1^{(0)}t_i - A)t_i}{d_i^{(0)}}\delta a_1 + \frac{a_2^{(0)}t_i^2}{d_i^{(0)}}\delta a_2 + \Delta_i = \delta d_i \qquad i = 1,2,\dots,N. \qquad (2.6)$$

Отриману систему рівнянь (2.6) відносно δa_1і δa_2, будемо розв’язувати в статистичному сенсі, мінімізуючи суму квадратів неув'язок

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N}\Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\delta d_i - \frac{(a_1^{(0)}t_i - A)t_i}{d_i^{(0)}}\delta a_1 - \frac{a_2^{(0)}t_i^2}{d_i^{(0)}}\delta a_2\right].$$

Якщо тепер взяти похідні $\partial\Phi/\partial(\delta a_1)$ і $\partial\Phi/\partial(\delta a_2)$ та прирівняти їх до нуля, то ми прийдемо до лінійної системи алгебраїчних рівнянь щодо δa_1і δa_2, яку вже можна розв’язати легко.

Підставляючи δa_1і δa_2 у вирази (2.4) і (2.5), отримуємо значення a_1і a_2, які більшою мірою задовольняють вихідній системі рівнянь (1.3) в статистичному сенсі, ніж $a_1^{(0)}$і $a_2^{(0)}$. Для знаходження ще більш точної оцінки описану операцію доцільно повторити кілька разів, беручи в якості початкового наближення останні значення a_1і a_2.

Такого роду процедури послідовного поліпшення оцінок в математиці носять назву *ітераційних* [7].

Якби вимірювання, розподілені за нормальним законом, здійснювалися з різною точністю, то метод максимуму правдоподібності, застосований до цього завдання, привів би до необхідності відшукання мінімуму наступної функції

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\left[\delta d_i - \frac{(a_1^{(0)}t_i - A)t_i}{d_i^{(0)}}\delta a_1 - \frac{a_2^{(0)}t_i^2}{d_i^{(0)}}\delta a_2\right]^2$$

подібно до того, як це мало місце при розв'язанні першого завдання. Додаткових обчислювальних складнощів при цьому не виникає.

Отже, і в другому прикладі, вдавшись до допомоги ітераційної процедури, нам вдалося побудувати алгоритм знаходження оцінок. При цьому процес обчислень, пов'язаних із знаходженням оцінок методу найменших квадратів, став, правда, набагато більш складним.

Розгляд другого прикладу вже говорить про те, що розв’язати третій приклад за методом найменших квадратів простими засобами навряд чи вдасться. Тут у кілька разів зростають труднощі і при отриманні початкового наближення, й при відшуканні поправок до цього початкового наближення.

Отримання початкового наближення можна спростити, якщо брати не будь-які вимірювання кутового положення супутника на небесній сфері, а підбирати їх особливо, намагаючись, щоб їх сукупність дозволяла б отримати перше наближення без особливих обчислювальних труднощів.

Так, для наближеного обчислення періоду вигідно використовувати, i_1-ше і i_2-ге спостереження в моменти часу t_{i_1} і t_{i_2}, що знаходяться на різних витках, для яких α_{i_1}, приблизно дорівнює α_{i_2}. Тоді період в першому наближенні можна визначити допомогою формули.

$$\frac{2\pi}{T} \approx \frac{\alpha_{i_2} + \rho 2\pi - \alpha_{i_1}}{t_{i_2} - t_{i_1}}$$

звідки

$$T = 2\pi \frac{t_{i_2} - t_{i_1}}{\alpha_{i_2} + \rho 2\pi - \alpha_{i_1}}$$

Тут ρ – число повних витків, зроблених супутником за час $t_{i_2} - t_{i_1}$. Наближене значення $a_1^{(0)}$ радіуса орбіти тепер можна визначити за формулою

$$a_1^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{T^2}{m}}.$$

Для визначення $a_2^{(0)}$ виберемо спостереження кута α_{i_2}, здійснене на першому витку і близьке до $\pi/2$. Нехай це спостереження відповідає моменту часу t_{i_3}. Кутове положення супутника на орбіті в цей момент визначається кутом, рівним $\frac{2\pi t_{i_3}}{T} + a_2$. Тоді можна $a_2^{(0)}$ наближено визначити за формулою

$$\alpha_{i_3} = \frac{2\pi}{T} t_{i_3} + a_2^{(0)};\ a_2^{(0)} \approx \alpha_{i_3} - \frac{2\pi}{T} t_{i_2}$$

Знаючи наближене значення a_1і a_2, можна визначити початкове значення $a_3^{(0)}$ із співвідношення

$$tg\ \alpha_{i_3} = \frac{a_1 \sin\left(\frac{rt_{i_3}}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right) - a_3}{\cos\left(\frac{rt_{i_3}}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right)}.$$

Так як при цьому ми використовували всього три значення α в моменти часу t_{i_1}, t_{i_2}, і t_{i_3}, то вийшло, що грубі значення $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}$ і $a_3^{(0)}$ були отримані по мінімуму даних.

Уточнення грубого наближення будемо здійснювати, як і раніше, перетворюючи вихідну систему рівнянь в систему рівнянь в поправках. Вона має вигляд

$$\delta\alpha_1 = \frac{\partial f_1}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial f_1}{\partial a_2}\delta a_2 + \frac{\partial f_1}{\partial a_{33}}\delta a_3 + \Delta_1$$

$$\delta\alpha_2 = \frac{\partial f_2}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial f_2}{\partial a_2}\delta a_2 + \frac{\partial f_2}{\partial a_{33}}\delta a_3 + \Delta_2 \qquad (2.7)$$

$$. \ .$$

$$\delta\alpha_N = \frac{\partial f_N}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial f_N}{\partial a_2}\delta a_2 + \frac{\partial f_N}{\partial a_{33}}\delta a_3 + \Delta_N,$$

де $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ $(i = 1,2,\ldots,N;\ j = 1,2,3)$ - частинні похідні [11] функції f, що встановлює залежність вимірюваної величини від визначених параметрів. Їх можна обчислити аналітично, але при цьому виходять досить громіздкі формули, або чисельно, надаючи по черзі визначальним параметрам малі збільшення і визначаючи, наскільки при цьому змінюється вимірювана величина. Відношення цих приростів є наближеними значеннями частинних похідних, що входять до системи (2.7).

Відзначимо, що всі ці частинні похідні обчислюються при значеннях визначених параметрів, отриманих в результаті першого наближення. Тепер завдання, як і раніше, полягає у визначенні поправок δa_1, δa_2 і δa_3 до початкового наближення, при яких мінімізується сума квадратів неув'язок, яка обчислюється наступним чином

$$\Phi(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N) = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (\delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \delta a_j)^2$$

Продиференціювавши Φ по δa_j, і прирівнявши до нуля похідні, отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження поправок δa_j, яка легко вирішується.

Уточнені значення параметрів визначаються за формулами

$$a_1^{(1)} = a_1^{(0)} + \delta a_1$$

$$a_2^{(1)} = a_2^{(0)} + \delta a_2$$

$$a_3^{(1)} = a_3^{(0)} + \delta a_3$$

Далі, якщо необхідно, проводиться кілька аналогічних інтерацій.

Отже, припускаючи, що вимірювання підпорядковані закону Гауса, і використовуючи метод максимальної правдоподібності, ми прийшли до задачі мінімізації зваженої суми квадратів [26]. Мінімізація суми квадратів є однією з найпростіших задач, що виникають у зв'язку з отриманням оцінок. Ми описали методи, що дозволяють знайти мінімум цієї суми, і відзначили, що складність розрахунків швидко наростає зі збільшенням числа уточнюваних параметрів.

Дослідимо тепер більш детально питання про те, чому ж зазвичай віддають перевагу закону Гауса і за яких умов доцільно зробити інше припущення про закон розподілу помилок вимірювання.

2.3. Деякі екстремальні властивості законів розподілу помилок вимірювань

Вище було відзначено, що до припущення про нормальний закон розподілу помилок можна було б прийти, спираючись на гіпотезу Бесселя і центральну граничну теорему. Але до цього ж припущенню можна було б прийти з дещо інших міркувань.

Нехай розташування вимірюваної величини на числовій осі нам невідомо і немає ніяких даних, що дозволяють віддати перевагу якомусь одному її значенню іншому. Через нестачу таких даних ми змушені припустити, що з рівною ймовірністю ця вимірювана величина розташовується в будь-якій точці числової осі. Саме в цьому випадку система, що вивчається, є для спостерігача максимально невизначеною. В результаті вимірювання ймовірність знаходження вимірюваної величини в окремих точках змінюється і, якщо помилка вимірювання підпорядковується закону розподілу $g\,(\Delta)$, то точне значення вимірюваної величини розташовується в деякій околиці отриманого виміру, причому ймовірність його знаходження в конкретній точці характеризується тим же законом розподілу [21].

Нехай ми за допомогою будь-якого приладу вимірюємо відстань між пунктами A і C. До знаходження вимірювання ми припускаємо, що з рівною ймовірністю воно може прийняти будь-які значення. Нехай результатом вимірювання, виробленого з помилкою Δ_i, є x_i, так що

$$r + \Delta_i = x_i.$$

Якщо помилка має щільність розподілу $g\,(\Delta)$, то щільність розподілу результату вимірювання має вигляд $g\,(x_i - r)$. За таким же законом $g\,(r - x_i)$ розподіляється і r відносно x_i (рис. 9). Будемо вважати, що стосовно зробленого виміру нам відомо тільки те, що у нього відсутня систематична

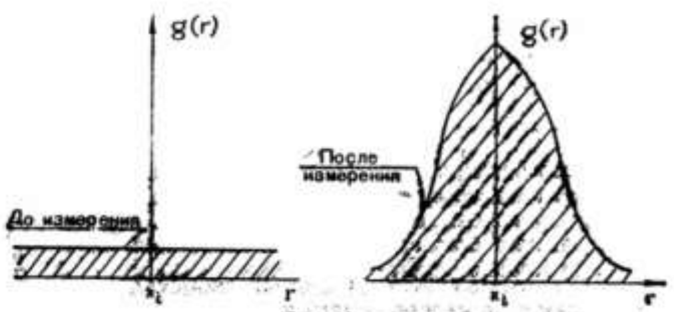


Рис. 9.

помилка і що його дисперсія дорівнює D. Отже, які положення нам треба зробити про закон розподілу помилок.

Оскільки нам нічого іншого не повідомлено про вимірювану величину, ми повинні припустити, що її розташування на числовій осі в максимальному ступені невизначено. Степінь невизначеності фізичної системи прийнято характеризувати величиною ентропії *H*, яка в даному випадку може бути обчислена за формулою

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} g(r)\log g\,(r)dr. \tag{2.8}$$

Основа логарифма при цьому не відіграє принципової ролі. У теорії інформації [30], звідки, власне кажучи, і взяли вираз (2.8), в якості основи логарифма беремо число *2*. Нам зручніше в якості основи логарифма взяти число *e*, а змінну інтегрування позначити Δ, так що

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta)\ln g\,(\Delta)d\Delta. \tag{2.9}$$

Питання далі ставиться так. При якому вигляді функції $g\,(\Delta)$ вираз (2.9) досягає максимуму, якщо у відношенні цієї функції відомо тільки, що

$$g\,(\Delta) \geq 0 \text{ для } -\infty < \Delta < \infty; \tag{2.10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta)d\Delta = 1; \tag{2.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(\Delta)d\Delta = 0; \tag{2.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 g(\Delta)d\Delta = D; \tag{2.13}$$

Всі ці співвідношення безпосередньо випливають із визначення функції щільності, математичного очікування і дисперсії та з припущення про незміщеність результату вимірювання.

Для відповіді на поставлене питання, уявимо всі виписані вище інтеграли у вигляді сум. Маємо

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta)\ln g\,(\Delta) d\Delta \approx$$

$$\approx -\int_{-M}^{M} g(\Delta)\ln g\,(\Delta) d\Delta \approx -\frac{M}{K}\sum_{j=-K}^{K} g\left(\frac{M}{K}j\right)\ln g(\frac{M}{K}j) =$$

$$= -\frac{M}{K}\sum_{j=-K}^{K} y_j \ln y_j \qquad (2.14)$$

де M і ціле K до досить великі числа й, крім того позначено

$$y_j = g(\Delta_j), \Delta_j = \frac{M}{K}j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K.$$

При достатньо великих М та К вираз (2.14) дотримується з малою погрішністю.

Перепишемо вираз (2.14) ще раз, опускаючи для простоти записи границі підсумовування,

$$H = -\frac{M}{K}\sum y_j \ln y_j \qquad (2.15)$$

Аналогічним чином можуть бути представлені співвідношення з (2.10) по (2.13)

$$y_j \geq 0, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K, \qquad (2.16)$$

$$\frac{M}{K}\sum y_j = 1, \qquad (2.17)$$

$$\frac{M}{K}\sum \Delta_j y_j = 0, \qquad (2.18)$$

$$\frac{M}{K}\sum {\Delta_j}^2 y_j = D, \qquad (2.19)$$

Для відшукання максимуму функцій при наявності обмежень зазвичай застосовується метод невизначених множників Лагранжа [5]. Відповідна теорема (теорема Лагранжа) стверджує зокрема, що максимум функції $H(y_{-K}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_K)$ при наявності обмежень (2.17-2.19) збігається з сідловою точкою.

Функції

$$L(y_{-k},\dots,y_{-1},y_0,y_1,\dots,y_k,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=-\frac{\text{М}}{\text{К}}\big(\sum y_j\ln y_j+\lambda_1\sum y_j+\lambda_2\sum\Delta_j\,y_j+$$
$$+\lambda_j\sum\lambda_3\,\Delta_j^2y_j\big),$$

де $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$- довільні речові величини.

Необхідними умовами екстремуму функції L від змінних y_j і λ_S є

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}=0, j=0,\pm1,\pm2,\dots,\pm K,\qquad \frac{\partial L}{\partial\lambda_S}=0, s=1{,}2{,}3.$$

Для перевірки характеру точки, підозрюваної на екстремум (максимум, мінімум, сідлова точка), потрібно провести досить складний аналіз, яким ми займатися не будемо.

Запишемо першу групу необхідних умов максимуму

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}==-\frac{\text{М}}{\text{К}}\big(\ln y_j+1+\lambda_1+\lambda_2\Delta_j+\lambda_3\Delta_j^2\big)=0, j=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

або

$$\ln y_j=-\big(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta_j+\lambda_3\Delta_j^2\big),$$

або

$$y_j=e^{-\left(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta_j+\lambda_3\Delta_j^2\right)}.\qquad(2.20)$$

Оскільки M і K довільні числа, то відношення (2.20) має дотримуватися для будь-яких Δ, тобто умова

$$g(\Delta)=e^{-\left(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta_j+\lambda_3\Delta_j^2\right)}.\qquad(2.21)$$

має дотримуватися взагалі. При цьому автоматично дотримується умова (2.10).

Невизначені множники $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ знайдемо з умови

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda_S}=0, s=1{,}2{,}3,$$

яке зводиться до співвідношень (2.17)-(2.19) або в інтегральній формі до співвідношень (2.11)-(2.20). Маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta_j+\lambda_3\Delta_j^2\right)}d\Delta=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta e^{-\left(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta_j+\lambda_3\Delta_j^2\right)} d\Delta = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 e^{-\left(1+\lambda_1+\lambda_2\Delta_j+\lambda_3\Delta_j^2\right)} d\Delta = D.$$

Неважко перевірити, що ці умови задовольняються при

$$\lambda_1 = -1 + \ln\sqrt{2\pi D}, \quad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2D}.$$

Підставляючи значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в (28), остаточно отримуємо

$$\mathrm{g}(\Delta, D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{\Delta^2}{2D}} \qquad (2.22)$$

що якраз і є функцією щільності нормального закону розподілу.

Отже, при наявності незміщеної вимірювання, виробленого зі середньоквадратичної помилки σ (тобто з дисперсією *D*), якщо не робиться ніяких інших припущень, необхідно вважати, що вимірювання підпорядковані нормальному розподілу.

Тепер зробимо таке додаткове припущення. А саме будемо вважати, що сама дисперсія в кожному конкретному випадку не відома, а відомо лише її середнє для всієї сукупності вимірювань значень. Така модель самого процесу вимірів в певних умовах має право на існування, так як у багатьох випадках точність кожного конкретного вимірювання визначається принципово непередбачуваними зовнішніми умовами і основна точна характеристика приладу – дисперсія вимірювань – в цьому випадку буває відома лише в середньому. Наприклад, точність візуальних вимірювань, вироблених в похідних умовах, визначається станом погоди, степенем запиленості атмосфери, ступенем стомленості персоналу та т. п.

Щоб вирішити задачу про закон розподілу помилок вимірювання в цьому випадку, ми повинні спочатку знайти закон розподілу дисперсії *s(D).* Дотримуючись тієї ж концепції про максимальну невизначеність досліджуваної фізичної системи, ми повинні знайти максимум ентропії

$$H_1 = -\int_0^{\infty} s(D)\ln s(D)dD$$

при обмеженнях

$$s(D) \geq 0 \quad 0 \leq D \leq \infty, \ \int_0^{\infty} s(D)dD = 1, \ \int_0^{\infty} Ds(D)dD = D_{cp}.$$

Знову замінюючи інтеграли сумами і використовуючи метод невизначених множників Лагранжа, ми прийдемо до висновку, що найбільш правильним судженням про закон розподілу дисперсій буде

$$S(D) = \frac{1}{D_{cp}} e^{-\frac{D}{D_{cp}}} \qquad D \geq 0. \qquad (2.23)$$

Оскільки при заданій дисперсії найбільш правильним припущенням про закон розподілу помилок вимірювання є припущення про нормальний закон, але сама дисперсія є випадковою величиною, розподіленою за законом (2.23), то для знаходження закону розподілу помилок в цьому випадку необхідно провести осереднення множини функцій $g(\Delta, D)$ по формулі

$$g(\Delta) = \int_0^{\infty} g(\Delta, D)s(D)dD, \qquad (2.24)$$

де $g(\Delta, D)$ та $s(D)$ визначаються за формулами (2.22) і (2.23).

Інтеграл (2.24) обчислюється досить складно, тому ми наведемо лише кінцевий результат, що складається у тому, що

$$g_1(\Delta, D_{cp}) = \frac{1}{2\sqrt{D_{cp}}} e^{-\frac{|\Delta|}{\sqrt{D_{cp}}}}, -\infty < \Delta < \infty. \qquad (2.25)$$

З формули (2.25) видно, що при зроблених припущеннях закон розподілу помилок вимірювання є законом Лапласа.

Підіб'ємо деякі підсумки. У тому випадку, коли дисперсія кожного вимірювання відома точно і не повідомлено нічого другого про характер помилки вимірювання, найбільш природним припущенням про закон розподілу помилок є припущенням про нього, як про закон Гаусса, і найбільш правильним методом обробки є обробка вимірювань за методом найменших квадратів.

Коли ж дисперсія будь-якої групи вимірювань відома лише в середньому, найбільш природним припущенням про закон розподілу помилок вимірювання цієї групи є припущення про нього як про закон Лапласа, і найбільш правильним методом обробки в цьому випадку є обробка вимірювань за методом найменших модулів. Відзначимо, що останнє висловлювання абсолютно справедливо тільки по відношенню до великих вибірок.

РОЗДІЛ 3
ОТРИМАННЯ ОЦІНОК ЗА МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ МОДУЛІВ

3.1. Обчислювальні схеми отримання оцінок за методом найменших модулів

Розглянемо тепер обчислювану сторону питання отримання оцінок за методом найменших модулів.

Алгоритми отримання оцінок МНМ в разі безпосередніх вимірювань одного параметра дуже прості і мабуть, простіше, ніж будь-який інший алгоритм, призначений для отримання оцінок. Для цього треба тільки розташувати результати вимірювань в порядку їх зростання і взяти середній член отриманого ряду, якщо число вимірювань непарне, і півсуму середніх членів, якщо число вимірювань парне. Зовсім інакше йде справа в багатовимірному випадку. Тут внаслідок складного неаналітичного характеру багатовимірної функції

$$\Phi(a_1, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - f_i(a_1, a_1, \dots, a_n)|$$

знаходження мінімуму зустрічає значні труднощі. Ці труднощі виявилися настільки великими, що до появи електронних обчислювальних машин ніхто і не намагався отримувати оцінки МНМ в мало-мальськи складних задачах. Положення кореним чином змінилося, коли з’явилась й отримала достатньо широке поширення нова обчислювальна техніка.

Першими алгоритмами, призначеними для знаходження мінімуму суми модулів відхилень для випадку лінійної залежності вимірюваних величин від невідомих параметрів, виявились алгоритми, які спираються на ідеї лінійного програмування. Виявилося. [4], [5], що задача мінімізація суми модулів неув’язок

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \left| x_i - \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \delta a_j \right|; \; y_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}$$

є завданням так званого кусочно-лінійного програмування, яка за рахунок введення деякого числа допоміжних змінних може бути зведена до загальної задачі лінійного програмування з досить приватним видом мінімізуючої в задачі функції і які обмежують умови. Отже, це завдання можна було б вирішувати за допомогою будь-якого алгоритму, призначеного для вирішення задач лінійного програмування загального вигляду, маючи на увазі, що відповідні програми до теперішнього часу є в більшості організацій.

При цьому є можливість придумати алгоритми, призначення спеціально для мінімізації суми модулів, оскільки кожна задача лінійного програмування, що має обмеження строго певного виду, допускає більш-менш серйозне спрощення універсального алгоритму, який призначений для розв'язання завдання в загальному вигляді. Наприклад, алгоритми розв'язання так званої «транспортної задачі» або «задачі призначення» [6] набагато простіше універсального алгоритму розв'язання задачі лінійного програмування загального вигляду, хоча вони могли б бути вирішені і за допомогою такого універсального алгоритму. Аналогічно йде справа з мінімізацією суми модулів. Спеціальні алгоритми, призначені для її розв'язання виявляються набагато простіше алгоритму розв'язання задач лінійного програмування загального вигляду. Різні пропозиції на цей рахунок містяться в [3], [4], [7], [8].

Алгоритми розв'язання задачі мінімізації суми модулів неув'язок спираються на ідеї лінійного програмування. Алгоритми розв'язання задачі мінімізації суми модулів неув'язок, що спираються на ідеї лінійного програмування, зручні тим, що не змінюючи алгоритму, можна легко вводити в число умов задачі додаткові обмеження типу нерівностей. Наприклад, визначаючи елементи майже кругової орбіти супутника Землі за сукупністю вимірів, ми вправі накласти обмеження $E \geq 0$ на ексцентриситет. Виробляючи тріангуляційні вимірювання на площині [24], ми маємо право накласти, обмеження типу $d_1 d_2 \geq d_3$(«правило трикутника») і т.п. Разом з тим ці алгоритми володіють одним великим недоліком, так як змушують розміщувати і зберігати в пам'яті ЕВМ досить об'ємні симплексні таблиці, що містять проміжні результати, що виникають при розв’язанні задач лінійного програмування, що ускладнює практичне використання алгоритмів, заснованих на ідеях лінійного програмування в складних задачах.

Дана обставина змусила шукати інші методи отримання оцінок. Зокрема досить добре показали себе нераціональні методи отримання оцінок МНМ, на яких: ми зупинимось більш докладно.

Розв’язуючи приклад на виявлення складових вектора швидкості літака, що вилетів із точки О в невідомому напрямку, та інший приклад на визначення радіусу Землі за результатами спостережень штучного супутника за методом найменших квадратів, ми вимушені вдатися до ітераційної процедури внаслідок того, що вимірювана величина нелійним образом залежна від визначених параметрів. Сутність цієї процедури зводиться до того, що маючи деяке початкове наближення і користуючись зв’язком між малими змінами визначених і вимірюваних величин, що задається рівнянням в поправках, ми в змозі поліпшити це перше наближення, домагаючись на кожному кроці мінімальності неув’язок в тому сенсі, що нас цікавить, в даному випадку в сенсі найменших квадратів.

Аналогічну ітераційну процедуру можна запропонувати і для отримання оцінок за методом найменших модулів. Відмінність буде полягати лише в способі призначення вагових характеристик на кожному кроці ітераційного процесу. Якщо в розглянутому прикладі вагові характеристики вимірювань в кожній ітерації залишались незмінними, то тепер ми їх будемо змінювати кожен раз при переході до наступної ітерації за певними нескладними правилами. В іншому ж будемо діяти в точності, як і раніше, і хоча кінцевою ціллю є мінімізація сукупності неув’язок в сенсі найменших модулів, на кожному кроці ітераційного процесу поправки будемо шукати за методом найменших квадратів.

В основі цієї ітераційної процедури лежить один примітний математичний факт, який ми детально розберемо на випадку безпосередніх рівноточних вимірювань одновимірної величини α.

Нехай результатами вимірювань є числа $x_1, x_2, \dots, x_N$ і потребується їх обробити за методом найменших модулів, для чого в свою чергу, треба знайти мінімум функції

$$\phi(\alpha) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} |x_i - \alpha|$$

Нехай, далі, в нашому розпорядженні є деяке початкове наближення $\alpha^{(0)}$, отримане, наприклад, шляхом розв'язування задачі за мінімумом даних. Слідуючи методу найменших квадратів, ми повинні були би мінімізувати функцію

$$W(a) = \sum_{r=1}^{N} p_i (x_i - a)^2$$

(3.1)

де p_i –«вага» i-го вимірювання.

Мінімум $W(a)$, як нескладно перевірити, досягається в точці

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}.$$

Починаючи з цього моменту, далі для спрощення запису ми будемо опускати границі підсумовування.

Допустимо, що «ваги» є функцією початкового наближення такого виду

$$p_i\left(a^{(0)}\right) = \frac{1}{|x_i - a^{(0)}|}. \tag{3.2}$$

Тепер функція (3.2) залежить не тільки від шуканого параметру a, але и від значення початкового наближення $a^{(0)}$.

$$W\left(a, a^{(0)}\right) = \sum \frac{1}{|x_i - a^{(0)}|} (x_i - a)^2$$

Функція від двох аргументів $W\left(a, a^{(0)}\right)$ наділена наступними важливими властивостями:

а. Значення $W\left(a, a^{(0)}\right)$ за $a = a^{(0)}$ дорівнює

$$\Phi\left(a^{(0)}\right) = \sum \left|x_i - a^{(0)}\right|$$

Тобто сума модулів неув'язок в точці $a^{(0)}$.

б. Якщо позначити $a^{(1)}$ значення аргумента, за якого досягається мінімум $W\left(a, a^{(0)}\right)$ так, що

$$W\left(a^{(1)}, a^{(0)}\right) \leq W\left(a, a^{(0)}\right), \tag{3.3}$$

то $\Phi\left(a^{(1)}\right) \leq \Phi\left(a^{(0)}\right)$.

Перша властивість не потребує пояснень, а друга потребує посилання на добре відому в аналізі нерівність Буняковського-Шварца [18]

$$\left(\sum c_i d_i\right)^2 \leq \left(\sum c_i^2\right)\left(\sum d_i^2\right).$$

Розглянемо вираз

$$\sum (c_i x + d_i)^2 = x^2 \sum c_i^2 + 2x \sum c_i d_i + \sum d_i^2 = Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,$$

Так як отриманий квадратичний вираз завжди більше або дорівнює нулю, то зі шкільного курсу алгебри випливає, що дискримінант цього виразу

$$D = AC - B^2 = \left(\sum c_i^2\right)\left(\sum d_i^2\right) - \left(\sum c_i d_i\right)^2$$

Завжди ≥ 0, звідки безпосередньо випливає нерівність Буняковського-Шварца. Відмітимо, що знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли всі $c_i = d_i$. Напишемо очевидні співвідношення

$$\Phi\left(a^{(1)}\right) = \sum \left|x_i - a^{(1)}\right| = \sum \frac{\left|x_i - a^{(1)}\right| \cdot \left|x_i - a^{(0)}\right|^{0.5}}{\left|x_i - a^{(0)}\right|^{0.5}}$$

$$= \left[\left(\sum \frac{\left|x_i - a^{(1)}\right| \cdot \left|x_i - a^{(0)}\right|^{0.5}}{\left|x_i - a^{(0)}\right|^{0.5}}\right)^2\right]^{0.5}.$$

Застосовуючи до виразу, що стоїть в квадратних скобках, нерівність Буняковського-Шварца, отримаємо

$$\Phi\left(a^{(1)}\right) \le \left[\left(\sum \frac{\left|x_i - a^{(1)}\right|^2}{\left|x_i - a^{(0)}\right|}\right)\left(\sum\left|x_i - a^{(0)}\right|\right)\right]^{0,5}$$

$$= \left[W\left(a^{(1)}, a^{(0)}\right) W\left(a^{(0)}, a^{(0)}\right)\right]^{0,5}.$$

За самим означення мінімуму

$$W\left(a^{(1)}, a^{(0)}\right) = \min_a W\left(a, a^{(0)}\right) \le W\left(a^{(0)}, a^{(0)}\right),$$

тому

$$\Phi\left(a^{(1)}\right) \le \left[W\left(a^{(1)}, a^{(0)}\right) \cdot W\left(a^{(0)}, a^{(0)}\right)\right]^{0,5} \le W\left(a^{(0)}, a^{(0)}\right) = \Phi\left(a^{(0)}\right).$$

(3.4)

Шляхом більш тонких міркувань можна показати, що нерівність (3.4) несе строгий характер всюди за винятком шуканої точки мінімуму. Для ліквідації складностей при доведенні співвідношень (3.4), пов'язаних з неможливістю обчислення вагових характеристик за $a^{(0)} = x_i$ і для беззбійного хода вимірювань, здійснюваних за формулою (3.3), доцільно вагову функцію (3.2) побудувати наступним образом

$$p_i\left(a^{(0)}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\left|x_i - a^{(0)}\right|}, & \text{якщо} \left|x_i - a^{(0)}\right| \ne 0 \\ c_i, \text{якщо} \left|x_i - a^{(0)}\right| = 0 & \end{cases} \qquad (37)$$

Де с-довільне додатне число (бажано велике, оскільки це пришвидшує процес обчислення).

В результаті мінімізації виразу (3.2) нам вдалося вказати точку $a^{(1)}$, в якій значення суми модулів нев'язок менше, ніж в точці $a^{(0)}$.

Використовуючи точку $a^{(1)}$ в якості нового початкового наближення, ми можемо обчислити нові значення ваг і, поступаючи з ними аналогічним способом, побудувати квадратичну функцію $W\left(a^{(1)}, a^{(0)}\right)$. Мінімізуючи функцію, можна відшукати точку $a^{(2)}$, для якої

$$\Phi\left(a^{(2)}\right) \le \Phi\left(a^{(1)}\right)$$

і т.д.

Можна довести, що границею послідовністю величин $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ є точка $\hat{a}$, в якій сума модулів не зв'язок обертається в мінімум [7].

Для одновимірного випадку, коли до того ж виміри носять безпосередній характер, вся описана процедура виглядає зверх складною, і шуканий мінімум можна було б знайти і більш простим шляхом. Наприклад, як вже зазначалося, його можна визначити, розташовуючи $x_1, x_2, \dots, x_N$ у порядку зростання і беручи півсуму центральних членів за N парному і сам центральний член за N непарному.

Однак для багатовимірного випадку і особливо, коли виміри носять непрямий характер, при чому залежність вимірюваних величин від шуканих параметрів носить нелінійних характер, вказана процедура за своєю трудомісткістю і витратам часу зближається з процедурою отримання оцінок за методом найменших квадратів.

Великою перевагою алгоритму, що розглядається є те, що він робить метод найменших квадратів і метод найменших модулів частинними випадками однієї більш загальної вимірювальної схеми. Ця ж схема придатна для отримання максимально-правдоподібних оцінок і тоді, коли у однієї частини вимірювань добре відомі індивідуальні точкові характеристики приладів, а у другої їх частини ці точкові характеристики відомі лише в середньому.

В даному випадку метод максимальної правдоподібності приводить до необхідності відшукання мінімуму функції такого роду

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \frac{1}{\sigma_i^2} [x_i - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)]^2 + \sum_{i=N_1}^{N} \frac{1}{\sqrt{D_{cp\,i}}} |x_i - -f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)| .$$

Визначаючи за мінімумом даних початкове наближення $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}$ і позначаючи «ваги» окремим вимірюванням за формулою

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_i^2} & i = 1,2, \dots, N_1 - 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{D_{cp\,i}} |x_i - f_i(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)})|}, & i = N_1, N_1 + 1, \dots, N \end{cases}$$

Ми за допомогою описаної методики в змозі організувати ітераційний процес, що приводить до відшукання мінімуму W і, отже, до отримання асимптотично-ефективної оцінки.

Цікавий також випадок, коли помилка вимірювань включає в себе випадкову складову, що підпорядковується нормальному закону, до якої з визначеною (ненульовою) ймовірністю додається груба помилка, за своєї величиною набагато перевищуюча цю випадкову складову. Така модель помилок добре апроксимується функцією розподілення такого виду

$$g_i(\Delta_i) = A_i e^{-\psi_i(\Delta_i)}.$$

де $\phi_i(\Delta_i)$ – деяка достатньо гладка опукла вниз функція, що залежить від невеликого числа параметрів, а A_i- нормуючий множник, що визначається із умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(\Delta_i) d\Delta_i = 1.$$

І в цьому випадку, позначаючи «вагові» характеристики за формулою

$$p_i = \frac{\left|\psi'\left(\Delta_i{}^{(0)}\right)\right|}{2\left|\Delta_i{}^{(0)}\right|}, \qquad (3.6)$$

де $\Delta_i{}^{(0)} = x_i - f_i\left(a_1{}^{(0)}, a_2{}^{(0)}, \dots, a_n{}^{(0)}\right)$,

І мінімізуючи зважену суму квадратів неув'язок

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum p_i \Delta_i{}^2,$$

Ми також можемо організувати ітераційну процедуру, що приводить до самостійної, асимптотично-незміщенної і асимптотично-ефективної оцінки.

Оскільки в описаному алгоритмі на кожному кроці ітераційного процесу мінімізується зважена квадратична форма, причому вагові характеристики змінюються при переході до чергового кроку, то вказаний алгоритм домовимося називати *алгоритмом варіаційно-зважених квадратичних наближень*.

3.2. Збіжність алгоритму квадратичних наближень

В даному пункті коротко викладемо ті ідеї, які покладені в основу мінімізації суми гладких випуклих вниз функцій за допомогою варіаційно-зважених квадратичних наближень і які визначають порядок призначення вагових характеристик в кожній ітерації в загальному випадку.

Нехай мінімізується сума функцій

$$\Phi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{\mathrm{N}}) = \sum \psi_{\mathrm{i}}(\Delta_i)$$

де кожне $\Delta_i = x_i - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$ є функцією від невідомих параметрів і від вимірювань.

У відношенні функцій $\psi_{\mathrm{i}}(\Delta_i)$ будемо припускати, що вони симетричні, неперервні разом зі своєю першою похідною всюди, окрім, можливо, точки Δ_i, і випуклі вниз. Окрім того, будемо припускати, що вони володіють неспадною за $|\Delta_i| \to 0$ додатній другій похідній, що за своєю величиною не перевершує 2. Всі функції $\psi_{\mathrm{i}}(\Delta_i)$ можуть відрізнятися між собою.

Нехай графік будь-якої функції $\psi_{\mathrm{i}}(\Delta_i)$, що задовольняє вказаним вище вимогам, має вигляд, зображений на мал.10 жирною лінією.

Відмітимо на цьому графіку точку

$$\Delta_i^{(0)} = x_i - f_i\left(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}\right)$$

Через точку А з координатами $\Delta_i^{(0)}, \psi_{\mathrm{i}}(\Delta_i)$ проведемо параболу,

$$w_i = A_i + B_i \Delta_i^{\,2}$$

Симетричну відносно осі ординат і таку, що має в точках M і M' спільну дотичну з лінією $\psi_{\mathrm{i}} = \psi_{\mathrm{i}}(\Delta_i)$ так, що

$$w'_i \Delta_i^{(0)} = \psi'_{\mathrm{i}}(\Delta_i).$$

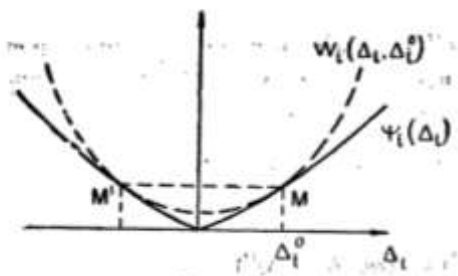


Рис. 10.

Із обмеження, накладеного на другу похідну, можна вивести, що така парабола буде цілком укладена всередині області, обмеженої кривою $\psi_{\mathrm{i}} = \psi_{\mathrm{i}}(\Delta_i)$.

Для визначення A_i і B_i маємо наступну систему рівнянь:

$$A_i + B_i\left(\Delta_i^{(0)}\right)^2 = \psi_\mathrm{i}\left(\Delta^{(0)}\right),\ 2B_i\Delta_i^{(0)} = \psi'_\mathrm{i}(\Delta^{(0)}).$$

Звідки негайно отримуємо

$$B_i = \frac{\psi'_\mathrm{i}(\Delta^{(0)})}{2\Delta^{(0)}}$$

$$A_i = \psi_\mathrm{i}\left(\Delta^{(0)}\right) - \frac{\psi'_\mathrm{i}(\Delta^{(0)}) \cdot \Delta^{(0)}}{2}$$

Звернемо увагу на те, що A_i і B_i є деякими функціями початкового наближення і, таким чином, w_i є функцією не тільки Δ_i, але й $\Delta^{(0)}$.

Тепер будемо поряд з функцією, що мінімізується

$$\Phi(\mathrm{a}) = \sum \psi_\mathrm{i}(\Delta_i)$$

Розглядати суму

$$W\left(a, a^{(0)}\right) = \sum w_i\left(\Delta_i, \Delta^{(0)}\right)$$

Перед усім звернемо увагу на те, що при будь-якому $\Delta^{(0)}$

$$\psi_\mathrm{i}(\Delta_i) \leq w_i\left(\Delta, \Delta^{(0)}\right)$$

І, отже,

$$\sum \psi_\mathrm{i}(\Delta_i) \leq \sum w_i\left(\Delta_i, \Delta_i^{(0)}\right). \qquad (3.7)$$

Звернемо увагу також на те, що в точці $\Delta_i^{(0)}$ $w_i\left(\Delta^{(0)}, \Delta^{(0)}\right)$ в точності дорівнює $\psi\left(\Delta^{(0)}\right)$ і тому

$$\sum w_i\left(\Delta_i^{(0)}, \Delta_i^{(0)}\right) = \sum \psi_\mathrm{i}\left(\Delta_i^{(0)}\right).$$

Позначимо $\vec{a}^{(1)} = \left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}\right)$ сукупність параметрів, що залишають мінімум функції $\sum \omega_i(\Delta_i, \Delta_i^{(0)})$, і позначимо отримані при цьому неув'язки за допомогою $\Delta_i^{(1)}$, так що

$$\Delta_i^{(1)} = x_i - f_i\left(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}\right),$$

В точці $\vec{a}^{(1)}$, як і всюди,

$$\sum \psi_i(\Delta_i^{(1)}) \leq \sum \omega_i(\Delta_i^{(1)}, \Delta_i^{(1)})$$

В силу відношення (3.7), в свою чергу, за означенням мінімуму

$$\sum \omega_i(\Delta_i^{(1)}, \Delta_i^{(0)}) = \min_{\vec{a}} \sum \omega_i(\Delta_i, \Delta_i^{(0)}) \leq \sum \omega_i(\Delta_i^{(1)}, \Delta_i^{(0)}) = \sum \psi_i(\Delta_i^{(0)})$$

і тому

$$\sum \psi_i(\Delta_i^{(1)}) = \sum \psi_i(\Delta_i^{(0)}),$$

якщо.

$$\vec{a}^{(1)} \neq \vec{a}^{(0)}.$$

Таким чином, мінімізуючи умову $\sum \omega_i(\Delta_i, \Delta_i^{(0)})$ в області $a_1, a_2, \dots, a_n$, ми можемо вказати точку, в якій значення функції $\sum \psi_i(\Delta_i)$ загалом менше, ніж у початковій точці. Приймаючи $\vec{a}^{(1)}$ за нове початкове приближене і повторюючи всі описані вище дії, можна вказати точку $\vec{a}^{(2)}$, для якої

$$\sum \psi_i(\Delta_i^{(2)}) = \sum \psi_i(\Delta_i^{(1)}) \text{ і т. д.}$$

Оскільки

$$\sum \omega_i(\Delta_i, \Delta_i^{(0)}) = \sum(A_i + B_i\Delta_i^2) = \sum A_i + \sum B_i^2 \Delta_i^2,$$

то для мінімізації цієї функції достатньо обрати в мінімум зважену особливим чином суму квадратів неув’язок

$$\sum p_i \Delta_i^2 = \sum B_i \Delta_i^2,$$

в якій вагові характеристики визначені відповідно до формули (3.6), тобто

$$p_i = \frac{\psi(\Delta_i^{(0)})}{2\Delta_i^{(0)}}$$

Так як знак похідної функції завжди співпадає зі знаком, то цю формулу можна спростити, переписавши її так

$$p_i = \frac{\left|\psi(\Delta_i^{(0)})\right|}{2\left|\Delta_i^{(0)}\right|}$$

Залишилося показати, що границею послідовності векторів $\overrightarrow{a^{(0)}}, \overrightarrow{a^{(1)}}, \dots, \overrightarrow{a^{(s)}}$, буде точка $\overrightarrow{a^*}$,   , що є точкою мінімуму $\sum \psi_i(\Delta_i)$. Доведемо для одновимірного випадку, коли $\Delta_i = x_i - a$. Дійсно, в точці a^* дотримуючись умови

$$a^* = \frac{\sum p_i(\Delta^*)x_i}{\sum p_i(\Delta^*)},$$

Свідчить, що процес подальшого зменшення функції $\Phi(a)$ за допомогою квадратичних наближень припинився.

Цю умову можна записати так:

$$\sum p_i(\Delta^*) \cdot a^* = \sum p_i(\Delta^*)x_i$$

Або

$$\sum p_i(\Delta^*)(x_i - a^*) = 0$$

або ж

$$\sum p_i(\Delta^*) \cdot \Delta^* = 0. \qquad (3.8)$$

Враховуючи, що вагомі характеристики в кожній точці інтерації призначаються відповідно до формули

$$p_i(\Delta^*) = \frac{\psi'(\Delta^*)}{2\Delta^*},$$

і підставляючи даний вираз в умову (3.8), отримаємо

$$\sum \frac{\psi'(\Delta^*)}{2}, = 0$$

або, те саме,

$$\Phi'(a^*) = 0,$$

Остання умова є необхідною умовою мінімуму функції $\Phi(a)$. В тому ж випадку, коли цей мінімум єдиний, дана умова є також і достатньою. Якщо, наприклад і-м доданком, що входить в $\sum \psi_i(\Delta_i)$ є квадратична функція $\psi_i(\Delta_i) = \Delta_i^2$тоді в якості вагової характеристики на всіх кроках ітераційного процесу мають виступати $p_i = 1$; якщо таким доданком є модуль неув'язки $|\Delta_i|$, то

$$p_i = \frac{1}{2\left|\Delta_i^{(0)}\right|}.$$

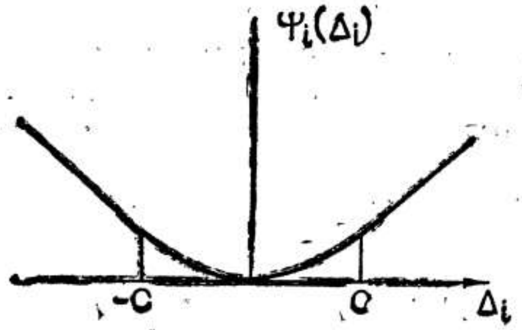


Рис. 11.

Якщо i-й доданок є лінійно-квадратичною функцією виду

$$\psi_i(\Delta_i) = \begin{cases} \Delta_i^2 & \text{якщо} \quad |\Delta_i| \le c \\ 2c|\Delta_i| - c^2, & \text{якщо} \quad |\Delta_i| > c, \end{cases}$$

де c – деяке додатне число (см. рис. 11), то в якості вагової характеристики варто взяти величину

$$p_i\left(\Delta_i^{(0)}\right) = \begin{cases} \frac{1}{c} & \text{якщо} \quad \left|\Delta_i^{(0)}\right| \le c \\ \frac{1}{\left|\Delta_i^{(0)}\right|}, & \text{якщо} \quad \left|\Delta_i^{(0)}\right| > c \end{cases}$$

і так далі.

Ще раз підкреслимо, що значення алгоритму варіаційно-зважених квадратичних наближень полягає в тому, що при його застосуванні і метод найменших квадратів, і метод найменших модулів, і багато інших методів стають частинним випадком однієї загальної обчислюваної схеми.

3.3. Числові приклади

Розглянемо числові приклади отримання оцінок за методом найменших модулів за допомогою алгоритму варіаційно-зважених квадратичних наближень.

Приклад 1. Нехай в задачі про визначення швидкості потяга результати виміру мають наступний вигляд (табл. 1).

Таблица 1

i	t_i, мин	x_i, км/мин
1	1	0,1499
2	2	2,03
3	3	3,296
4	4	4,783
5	5	4,815
6	6	6,765
7	7	8,229
8	8	9,263
9	9	10,77
10	10	11,92

Використовуючи мінімум даних (в розглянутому випадку один, нехай перший вимір), знайдемо початкове значення наближення

$$a^{(0)} = \frac{x_1}{t_1}.$$

Починаємо ітераційний процес. В першій ітерації вагові характеристики окремим вимірам позначимо у відповідності з формулою[1]

$$p_i = \frac{1}{|x_i - a^{(0)}t_i|}$$

Уточнені порівняно з $a^{(0)}$ значення $a^{(1)}$ знайдеться за формулою

$$a^{(1)} = \frac{\sum p_i\, t_i x_i}{\sum p_i\, t_i^2}$$

Воно дорівнює $a^{(1)} = 0{,}155.$ Вагові характеристики в першій і подальших ітераціях та послідовно уточнені значення показано у таб. 2.

Таблица 2

Номер измерения	p_i			
	1-я итерация	2-я итерация	3-я итерация	4-я итерация
1	10^4	$0{,}186\cdot10^3$	4,44	1,07
2	0,578	0,58	0,78	7,72
3	0,351	0,353	0,46	17,38
4	0,239	0,24	0,305	2,15
5	0,246	0,248	0,34	1,71
6	0,17	0,171	0,22	3,48
7	0,139	0,14	0,178	1,49
8	0,124	0,125	0,16	1,6
9	0,106	0,107	0,135	0,95
10	0,096	0,096	0,122	0,89
a	0,15527	0,37517	1,0796	1,1328

У підсумку отримаємо оцінку $a = 1{,}1756$ км/мин. Ця ж оцінка, отримується за методом найменших квадратів, рівна $\tilde{a} = 1{,}1576$ км/мин, а «істинне» значення невідомого параметру, використане при моделюванні вимірів, складає $\tilde{a} = 1{,}2$ км/мин

У цьому випадку спостерігається значний програш у часі порівняно з методом найменших квадратів, тому що розглядається лінійний випадок залежності вимірюваних величин at_i від вихідного параметру a.

Перейдемо до нелінійного випадку.

Таблиця 3

i	t_i, мин	d_i, км
1	1	86,5
2	2	85,28
3	3	92,4
4	4	107,67
5	5	125,1
6	6	149,46
7	7	174,73
8	8	200,3
9	9	227,64
10	10	257,78

Приклад 2. Визначення складових векторів швидкості літака.

Припустимо, що вимірювання відстані до літака, зроблені з точки (O,O) в момени $t_1, t_2, \ldots, t_{10}$, далі наступні результати (табл.. 3).

Використовуючи мінімум даних (у розглянутому випадку два, нехай перший і другий виміри), знайдемо початкове наближення

$$a_1^{(0)} = 18{,}36,\, a_2^{(0)} = 28{,}587.$$

Приступаємо до інтераційного процесу. На першому етапі вагові характеристики окремим вимірам позначимо у відповідності до формули

$$p_i = \frac{1}{\left| d_i - \sqrt{(a_1^{(0)} t_i - 100)^2 + (a_2^{(0)} t_i)^2} \right|}.$$

Використовуючи рівняння у виправленнях і застосовуючи метод найменших квадратів для рішення цього рівняння в статистичному сенсі, знайдемо виправлення $\delta a_1^{(0)}$ і $\delta a_2^{(0)}$ до нульового наближення. Маємо

$$\delta a_1^{(0)} = -0{,}01172,\delta a_2^{(0)} = -0{,}0136.$$

Таким чином, нове початкове наближення рівне

$$a_1^{(1)} = +\delta a_1^{(0)} = 18{,}349, a_2^{(1)} = a_2^{(0)} + \delta a_2^{(0)} = 28{,}57.$$

Далі, знову повторюємо всі описані вище дії. Послідовно вирахувані вагові характеристики і уточненні значення a_1 і a_2 показані у табл. 4.

Таблица 4

Номер измерения	p_i			
	1-я итер.	2-итер.	3-я итер.	4-я итер.
1	$0{,}163 \cdot 10^5$	$0{,}154 \cdot 10^3$	1,98	0,56
2	$0{,}7 \cdot 10^5$	$0{,}11 \cdot 10^4$	$0{,}9 \cdot 10^3$	3,95
3	0,226	0,227	0,328	6,41
4	0,102	0,103	0,149	4,4
5	0,055	0,055	0,0746	0,422
6	0,044	0,0448	0,062	0,87
7	0,036	0,0366	0,0508	1,12
8	0,031	0,0303	0,0418	0,668
9	0,026	0,0266	0,0368	0,669
10	0,023	0,0233	0,0322	0,658
$\delta a_1^{(j)}$	−0,0117	−0,865	−2,136	−0,0985
$\delta a_2^{(j)}$	−0,0136	−0,989	−2,518	−0,1269
$a_1^{(j)}$	18,348	17,483	15,347	15,249
$a_2^{(j)}$	28,573	27,584	25,066	24,939

Тепер для порівняння опрацюємо ті ж дані за методом найменших квадратів. Отримаємо $\tilde{a}_1 = 15{,}493, \tilde{a}_2 = 24{,}887$. «Вірні» значення цих параметрів такі:

$$a_1 = 15{,}0, a_1 = 25{,}0.$$

Приклад 3. Нехай в задачі про визначення параметрів руху супутника і радіуса Землі результати вимірів мають вигляд (табл. 5).

На підставі викладеного вище, для визначення початкових наближених значень були обрані 1, 2 і 13 спостереження.

За формулою

$$T = 2\pi \frac{t_{13} - t_1}{\alpha_{13} + 6\pi - \alpha_1}$$

визначається приближене значення періоду, а далі і наближене значення радіуса орбіти $a_1^{(0)}$

$$a_1^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{T^3}{m}} = 16\,055{,}88.$$

Використовуючи друге спостереження і значення T за формулою

$$a_1^{(0)} = \alpha_2 - \frac{2\pi}{T} t_2,$$

Знаходимо числове значення

$$a_2^{(0)} = 55{,}757129.$$

Таблица 5

i	t_i, *час*	α_i, *град*
1	0,0	39,994
2	0,5	87,7618
3	1,0	138,863
4	1,5	176,648
5	5,5	31,204
6	6,0	77,805
7	6,5	130,412
8	7,0	170,446
9	11,0	23,562
10	11,5	67,43
11	12,0	122,675
12	12,5	165,459
13	16,5	16,15
14	17,0	59,4
15	17,5	111,475

І нарешті, за формулою

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a_1 \sin\left(\frac{rt_1}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right) - a_3}{a_1 \cos\left(\frac{rt_1}{\sqrt{a_1^3}} + a_2\right)}$$

визначаємо $\quad a_2^{(0)} = 5693{,}2216.$

Опишемо хід ітераційного процесу, в якому вагомі характеристики окремим вимірюванням були призначені у відповідності з формулою

$$p_i = \frac{1}{\left|\alpha_i - \alpha_i(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)})\right|}.$$

Значення неув'язок, часткових похідних та $\sqrt{p_i}$ для початкових наближень наведені в табл. 6.

Таблиця 6

Номер измерения	$\delta\alpha_i$, *град*	$\frac{\partial\alpha_i}{\partial a_1}$	$\frac{\partial\alpha_i}{\partial a_2}$	$\frac{\partial\alpha_i}{\partial a_3}$	$\sqrt{p_i}$
1	$-0{,}329\cdot10^{-6}$	$0{,}13\cdot10^{-2}$	1,31	$-0{,}372\cdot10^{-2}$	$0{,}131\cdot10^{5}$
2	1,229	$-0{,}45\cdot10^{-2}$	1,548	$-0{,}334\cdot10^{-2}$	6,83
3	4,828	$-0{,}93\cdot10^{-2}$	1,356	$0{,}347\cdot10^{-2}$	3,44
4	3,301	$-0{,}108\cdot10^{-1}$	1,053	$0{,}39\cdot10^{-2}$	4,165
5	1,296	$-0{,}389\cdot10^{-1}$	1,228	$-0{,}399\cdot10^{-2}$	6,65
6	3,49	$-0{,}54\cdot10^{-1}$	1,52	$-0{,}147\cdot10^{-2}$	4,05
7	7,48	$-0{,}567\cdot10^{-1}$	1,435	$0{,}284\cdot10^{-2}$	2,77
8	6,72	$-0{,}483\cdot10^{-1}$	1,11	$0{,}407\cdot10^{-2}$	2,92
9	3,1	$-0{,}743\cdot10^{-1}$	1,15	$-0{,}408\cdot10^{-2}$	4,29
10	5,008	$-0{,}1$	1,468	$-0{,}246\cdot10^{-2}$	3,38
11	11,42	$-0{,}108$	1,499	$0{,}196\cdot10^{-2}$	2,24
12	10,96	$-0{,}905\cdot10^{-1}$	1,49	$0{,}405\cdot10^{-2}$	2,29

Система лінійних рівнянь для отримання поправок має вигляд

$$0{,}17484225 \cdot 10^3 \delta a_1^{(0)} + 0{,}30090952 \cdot 10^6 \delta a_2^{(0)} -$$

$$-0{,}85462994 \cdot 10^3 \delta a_3^{(0)} = -1{,}0047334.$$

$$0{,}30090952 \cdot 10^6 \delta a_1^{(0)} + 0{,}2988199 \cdot 10^9 \delta a_2^{(0)} - 0{,}84867263 \cdot 10^6 \delta a_3^{(0)} =$$

$$= 17{,}277843.$$

$$-0{,}85462994 \cdot 10^3 \delta a_1^{(0)} - 0{,}84867263 \cdot 10^6 \delta a_2^{(0)} +$$

$$+0{,}24103025 \cdot 10^4 \delta a_3^{(0)} = 0{,}0053842018.$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо значення поправок

$$\delta a_1^{(0)} = -52{,}1597; \qquad \delta a_2^{(0)} = 1{,}4725; \qquad \delta a_3^{(0)} = 499{,}975.$$

Після першої ітерації отримаємо

$$\delta a_1^{(1)} = 16\,003{,}721; \qquad \delta a_2^{(1)} = 57{,}2296; \qquad \delta a_3^{(1)} = 6193{,}197.$$

Поправки після другої ітерації мають значення

$$\delta a_1^{(1)} = 0{,}27246; \qquad \delta a_2^{(1)} = 0{,}1667; \qquad \delta a_3^{(1)} = 68{,}513.$$

В подальших ітераціях абсолютні значення цих поправок швидко спадають. В результаті обробки вихідної інформації за методом найменших модулів та за методом найменших квадратів отримаємо наступні оцінки шуканих параметрів.

МНМ	МНК	«істинне» значення параметрів
$a_1 = 16\,000{,}309$	$\widetilde{a_1} = 15995{,}597$	$\widehat{a_1} = 16000$
$a_2 = 57{,}123528$	$\widetilde{a_2} = 56{,}833631$	$\widehat{a_2} = 57{,}27$
$a_3 = 6351{,}0016$	$\widetilde{a_2} = 6404{,}6151$	$\widehat{a_3} = 6378{,}182$

Як видно, в даному випадку оцінка за методом найменших модулів вийшла значно краще, ніж оцінка за методом найменших квадратів. При цьому необхідно врахувати, що в даній задачі помилка в $1^{\bullet}$ у визначенні параметра a_2 приводить до помилки в положенні на орбіті близько $200\ км$.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто основні положення, що стосуються розв’язання основної задачі статистичної обробки вимірювань, а також наведено обчислювальні схеми отримання оцінок за методом найменших квадратів та методу найменших модулів. Зокрема, можна відмітити наступні важливі положення.

Основною задачею обробки вимірів є визначення невідомих параметрів $a_1, a_2, \dots, a_n$, що характеризують об’єкт дослідження, за даними прямих і непрямих вимірів. В математичній формі задача виглядає так: визначити величини $a_1, a_2, \dots, a_n$ із системи рівнянь

$$f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Delta_1 = x_1$$
$$f_2(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Delta_2 = x_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$
$$f_N(a_1, a_2, \dots, a_n) + \Delta_N = x_N,$$

де $f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – невідомі функції від невідомих параметрів,

Δ_i – похибка i-го виміру,

x_i – результат виміру,

N – число вимірів ($N \geq n$).

В результаті мінімізації зваженої суми квадратів неув’язок одержуємо оцінки за методом найменших квадратів. Алгоритми отримання оцінок методу найменших модулів в разі безпосередніх вимірювань одного параметра дуже. Для цього треба тільки розташувати результати вимірювань в порядку їх зростання і взяти середній член отриманого ряду, якщо число вимірювань непарне, і півсуму середніх членів, якщо число вимірювань парне. Зовсім інакше йде справа в багатовимірному випадку. Тут внаслідок складного неаналітичного характеру багатовимірної функції

$$\Phi(a_1, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - f_i(a_1, a_1, \dots, a_n)|$$

знаходження мінімуму зустрічає значні труднощі. В цьому випадку ми вимушені вдатися до ітераційної процедури внаслідок того, що вимірювана величина нелійним образом залежна від визначених параметрів. Сутність цієї процедури зводиться до того, що маючи деяке початкове наближення і користуючись зв'язком між малими змінами визначених і вимірюваних величин, що задається рівнянням в поправках, ми в змозі поліпшити це перше наближення, домагаючись на кожному кроці мінімальності неув'язок.

У тому випадку, коли дисперсія кожного вимірювання відома точно і не повідомлено нічого другого про характер помилки вимірювання, найбільш природним припущенням про закон розподілу помилок є припущенням про нього, як про закон Гауса, і найбільш правильним методом обробки є обробка вимірювань за методом найменших квадратів. Коли ж дисперсія будь-якої групи вимірювань відома лише в середньому, найбільш природним припущенням про закон розподілу помилок вимірювання цієї групи є припущення про нього як про закон Лапласа, і найбільш правильним методом обробки в цьому випадку є обробка вимірювань за методом найменших модулів. Відзначимо, що останнє висловлювання абсолютно справедливо тільки по відношенню до великих вибірок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абезгаус Г.Г. Справочник по вероятностным расчетам / Г.Г. Абезгаус, А.П Тронь, Ю.Н. Копенкин, И.А. Коровина. – М., 1970. – 536 с.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – Издание третье, перераб. – М.: Гостехиздат, 1953. – 608 с.
3. Бутник О. М. Економіко-математичне моделювання перехідних процесів у соціально-економічних системах: [монографія] / Бутник О. М. – Х.: Видавничий Дім „ІНЖЕК"; СПД Лібуркіна Л. М., 2004. – 304 с.
4. Бююль А. SPSS: искусство обработки информации. Platinum Edition, пер. с нем. / А. Бююль, П . Цёфель.− СПб.: ООО «ДиаСофтЮП», 2005. − 608 с.
5. Винн Р. Введение в прикладной эконометрический анализ / Р. Винн, К. Холден. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
6. Гренджер К. Спектральный анализ временных рядов в экономике / К. Гренджер, М. Хатанака. – М.: Статистика; Пер. с англ., 1972. – 312 с.
7. Грубер Й. Економетрія: Вступ до множинної регресії та економетрії: Навчальний посібник, Т. 2 / Й. Грубер. – К.: Нічлава, 1988. – 408 с.
8. Джонсон Дж. Эконометрические методы: Учебник / Дж. Джонсон. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
9. Диха М.В. Концептуальні засади макроекономічного моделювання соціально-економічних процесів / М.В. Диха // Вісник Хмельницького національного університету. – 2012. – № 6, Т. 1. – С. 215–223.
10. Дослідження операцій: Навч. посіб. / М. Г. Медведєв, О. В. Колодінська. – [2-ге вид., перер. і доп.]. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2006. – 158 с.
11. Екимов С. В. Нетрадиционные подходы в экономико-математическом моделировании: [монография] / Екимов С. В. – Днепропетровск: Наука и образование, 2004. – 240 с.

12. Елементи теорії ймовірностей/ В.М. Резанко. Навч. Посібник 3-тє вид., перероб. і доп. – К.: 2006. – 66с .

13. Иберла К. Факторный анализ / К. Иберла. – М.: Статистика, 1980. – 398 с.

14. Збірка завдань по теорії ймовірностей, математичній статистиці та теорії випадкових величин. Під ред. А. А. Свешнікова. –М.: Наука. –1970.

15. Карагодова О. О. Дослідження операцій: навч. посіб. / О. О. Карагодова, В. Р. Кігель, В. Д. Рожок. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.

16. Курс теории вероятностей: учебник для студентов вузов/ В.П. Чистяков. – 7-е изд., испр. и доп. –М: Дрофа, 2007. – 254 с.

17. Королев Ю. Г. Метод наименьших квадратов в социальноэкономических исследованиях / Ю. Г. Королев. – М.: Статистика, 1980. – 112 с.

18. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Изд. иностр. лит.; Пер. с англ., 1948. – 631 с.

19. Кулінич О. І. Економетрика: Навчальний посібник / О. І. Кулінич. – Хмельницький: Видавництво «Поділля», 2003. – 215 с.

20. Лапач С. Н. Статистика в науке и бизнесе / С. Н. Лапач, А. В. Чубенко , П. Н. Бабич. – К.: МОРИОН, 2002. – 640 с.

21. Ліщинський О.Л. Економетрія: Навчальний посібник / О.Л. Ліщинський, В.В. Рязанцева, О.О. Юнькова. – К.: МАУП, 2003. – 208 с.

22. Математика для психологов: Учебник /А.Н. Киричевец, Е.В. Шикин, А.Г. Дьячков / Под ред. А.Н. Киричевца. – М.:Флинта: Московский психолого-социальный институт, 2003. 376 с.

23. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. Учебное пособие. 3-е изд., стереотип. –СПб.: Речь, 2007.

24. Математична статистика та задачі оптимізації в алгоритмах і програмах: Навчальний посібник для студентів вузів/ Ю.А.Толбатов. –К.: Вища школа, 1994. – 399 с.

25. Математична статистика: Навчальний посібник для студентів вузів/ В.К. Гаркавий, В.В. Ярова. –К.: Профессионал, 2004. – 379 с.

26. Миллс Ф. Статистические методы / Ф. Миллс. – М.: Госстатиздат, Пер. с англ., 1958. – 799 с.

27. Минько А. А. Статистический анализ в MS Excel / Минько А. А. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 448 с.

28. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965. – 340 с.

29. Наследов А. Д. SPSS: Компьютерный анализ данных в психологии и социальных науках / Наследов А. Д. − СПб.: Питер, 2005. − 416 с.

30. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник для студентів/ В.П. Бабак, А.Я. Білецький, О.П. Приставка, П.О. Приставка.-К.: КВІЦ.,2003. – 432 с.

31. Основи теорії ймовірностей: курс лекцій: Навч. посібник/ В.М. Рабик. – Львів: Магнолія плюс, 2004. – 176 с.

32. Посібник з теорії ймовірності та математичної статистики: Навч. посібник для вузів/ М.К. Бугір. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 176 с.

33. Практикум з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика»/ В.І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. -К.: КІНГ, 1991. – 212 с.

34. Практикум з математичної статистики: Навчальний посібник для студентів вузів/ А.Т. Мармоза. –К.: Кондор, 2004. – 258 с.

35. Прикладные задачи теории вероятности/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. –М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

36. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. В.С Гмурман. – М., 1970. – 324 с.

37. Себер Дж. Линейный регрессионный аналіз / Дж. Себер. – М.: Мир, Пер. с англ., 1980. – 456 с.

38. Статистика (з програмованою формою контролю знань): математична статистика. Загальна теорія статистики: Навчальний посібник для студентів вузів/ А.Т. Опря. -К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 468 с.

39. Таха Х. Введение в исследование операций. – [7-е изд.] / Таха Х., пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2007. – 912 с.

40. Теория вероятностей и математическая статистика: примеры и задачи: Учебное пособие для студентов вузов/ И.В. Белько, Г.П. Свирид. -3-е изд., стереотип. –М.: Новое знание, 2007. – 251 с.

41. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студентов вузов/ Н.Ш. Кремер. -3-е изд., перераб. и доп.- М.: Юнити, 2007. – 522 с.

42. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студентов вузов/ К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. –М.: Даликов и К, 2008. – 473 с.

43. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов вузов / Ред. В.И. Єрмаков. –М.: Инфра-М, 2008. – 208 с.

44. Теорія ймовірностей та математична статистика/ В. С. Гурман. –М.: Вища школа. –1972. – 214 с.

45. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посібник для студентів вузів/ В.В. Барковський, Н.В. Барковська Н.В., О.К. Лопатін. 3-є вид. перероб. і доп.– К.: Центр навчальної літератури, 2002. – 448 с.

46. Теорія ймовірностей...від найпростішого: Навчальний посібник для студентів вузів/ О. Д. Валь, К.С. Королюк, С.В. Мельничук. –Чернівці: Книги-ХХІ, 2004. – 159 с.

47. Теорія ймовірностей: основні поняття, приклади, задачі: Навчальний посібник / В.М. Турчин. – К.: А.С.К., 2004. – 208 с.

48. Толбатов Ю. А. Загальна теорія статистики засобами Excel. Навчальний посібник / Ю. А. Толбатов. – К.: Четверта хвиля, 1999. – 224 с.

49. Толбатов Ю. А. Економетрика: Підручник для екон. спец. вищ. навч. закл. / Ю. А. Толбатов. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.

50. Шимко П. Д. Статистика / П. Д. Шимко, М. П. Власов. − Ростов н/Д: Феникс, 2003. − 448 с. – [Серия «Учебники, учебные пособия»].

51. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособ.; Под ред. В. В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 321 с.

52. Farrar D. E., Glouber R. R. Multicollinerity in regresion analysis; the problem revisited. – «Review of Economics and Statistic», 1967. – Vol. 49, N1. – P. 92 – 107.