

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики**  
**Кафедра інформатики, програмної інженерії та економічної**  
**кібернетики**

**РОЗРОБЛЕННЯ ROBO-ADVISOR ДЛЯ СТВОРЕННЯ**  
**ОПТИМАЛЬНИХ ПОРТФЕЛІВ ФІНАНСОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ**  
**ДЛЯ ІНВЕСТОРІВ З РІЗНОЮ СХИЛЬНІСТЮ ДО РИЗИКУ**

**Кваліфікаційна робота (проект)**

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

Виконав: студент 2 курсу

Спеціальності 122 Комп'ютерні  
науки

Освітньо-професійної програми  
«Комп'ютерні науки» другого  
(магістерського) рівня вищої освіти

Мельников Семен Петрович

Керівник: доктор економічних наук,  
професор Кобець Віталій  
Миколайович

Рецензент: кандидат педагогічних  
наук, доцент Таточенко Володимир  
Іванович

Херсон – 2020

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	3
<b>РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи роботизованих систем для прийняття інвестиційних рішень робо-едвайзер</b> .....	5
1.1 Поняття робо-едвайзера .....	5
1.2 Типовий сценарій роботи робо-едвайзера .....	6
1.3 Структура і функції робо-едвайзерів .....	6
1.4 Робо-едвайзери в роботах дослідників .....	11
1.5 Поширення робо-едвайзерів у світі .....	13
1.6 Класифікація робо-адвайзерів .....	15
<b>РОЗДІЛ 2. Методи формування інвестиційного портфелю</b> .....	18
2.1 Методи формування інвестиційного портфелю: теорії Марковіца та Тобіна .....	18
2.1.1 Портфельна теорія Марковіца .....	19
2.1.2 Вибір оптимального портфеля по Марковіцу .....	24
2.1.3 Портфельна теорія Тобіна .....	25
2.2 Індексна модель Шарпа .....	27
2.2.1 Вибір оптимального портфеля по Шарпу .....	32
2.3 Вибір моделі для розробки та новизна програмного продукту .....	33
2.4 Створення портфелю для кожного типу цілей інвестора .....	36
<b>РОЗДІЛ 3. Розробка роботизованої системи для прийняття інвестиційних рішень робо-едвайзер</b> .....	39
3.1 Типовий сценарій роботи робо-едвайзера .....	39
3.2 Вибір технологій розробки .....	42
3.2.1 Мова програмування R .....	42
3.2.2 Мова програмування Python .....	44
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	46
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	47
<b>ДОДАТКИ</b> .....	52
Додаток А .....	52

## ВСТУП

На сьогоднішній день інвестування грошей у цінні папери є звичайним ділом для багатьох людей. Розвиток інформаційних технологій і підвищення продуктивності апаратних засобів за останні десятиліття привнесли масу можливостей для зниження витрат і підвищення ефективності у всіх галузях економіки і фінансів. Тому потреба у винайденні зручного і недорогого інструменту управління фінансовими активами є актуальною у наш час.

Люди далеко не завжди раціональні і часто приймають нерациональні рішення. Це стосується в тому числі і сумнівних інвестиційних рішень. Крім того, людям властиво робити помилки. Це обумовлює актуальність розробки робо-едвайзера для створення оптимального для клієнта співвідношення активів в інвестиційному портфелі.

**Метою** цієї роботи є розробка робочого екземпляру роботизованої системи для прийняття інвестиційних рішень. Для цього потрібно вирішити наступні завдання:

1. Обробка теоретичного матеріалу щодо робо-едвайзерів.
2. Розробка математичної моделі, що використовується у роботі робо-едвайзера.
3. Вибір оптимальних інструментів для розробки робо-едвайзера.
4. Розробка робочого прототипу робо-едвайзера.

**Об'єктом** дослідження є фінансовий ринок та інструменти, що на ньому використовуються.

**Предметом** дослідження є роботизована система для прийняття інвестиційних рішень робо-едвайзер.

Для розв'язання поставлених завдань були використані такі **методи**:

теоретичний аналіз фінансової та ІТ літератури з проблеми дослідження, а також систематизація та узагальнення попередніх досліджень. Також у роботі використано комплекс емпіричних методів: методи математичної статистики, аналізу та економетрики для побудови математичної моделі; методи прогнозування для надання порад щодо формування портфелю інвестицій.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у структурі алгоритму, що дозволяє приймати інвестиційні рішення максимально відповідно до очікувань користувача та наданої ним інформації, що у свою чергу підвищить ефективність прийнятих рішень та у диверсифікації на рівні портфелів, а не тільки фінансових інструментів всередині одного портфеля.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає у тому, що за результатами роботи отримано:

- роботизовану систему розробки оптимального інвестиційного портфеля;
- прототип робо-едвайзеру.

#### **Апробація результатів роботи, публікації**

Була написана та успішно опублікована стаття у альманаху «Магістерські студії» під назвою: «Робо-едвайзер як інструмент для створення оптимального портфелю цінних паперів».

**Структура роботи** складається зі вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел, додатку. В першому розділі розглянуті теоретичні основи роботизованих систем для прийняття інвестиційних рішень робо-едвайзер. Другий розділ досліджує методи формування інвестиційного портфелю. Третій розділ включає розробку роботизованої системи для прийняття інвестиційних рішень робо-едвайзер з використанням мов програмування R та Python.

## РОЗДІЛ 1

# ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОБОТИЗОВАНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ ІНВЕСТИЦІЙНИХ РІШЕНЬ РОБО- ЕДВАЙЗЕР

### 1.1 Поняття робо-едвайзера

Будучи доволі молодою технологією робо-едвайзери поки не отримали єдиного визначення свого терміну. У той же час більшість дослідників сходяться в думці щодо того, якими ключовими характеристиками і функціями володіють ці сервіси. У короткому довіднику термінів фінтех-індустрії автор визначає робо-едвайзер як «онлайн-сервіс для самостійного управління добробутом, який надає автоматизовані інвестиційні поради по низькій ціні і при низькому порозі входу, застосовуючи алгоритми управління портфелем»[1].

Інший автор визначає робо-едвайзери як «автоматизовані інвестиційні рішення, які залучають клієнтів за допомогою цифрових інструментів з покращеним досвідом користувача для того, щоб направляти клієнтів через процес самооцінки і формувати їх інвестиційну поведінку в напрямку елементарного прийняття рішень на основі цілей, підтримуваних методами ребалансування портфелю з використанням алгоритмів, заснованих на пасивних інвестиціях і стратегіях диверсифікації»[2].

Консультанти А.Т. Kearney в своєму дослідженні визначають робо-едвайзери як «провайдери, які пропонують автоматизовану інвестиційну раду за низьку плату за допомогою веб- і\або мобільної платформи»[3].

В рамках даної роботи визначимо робо-едвайзер як онлайн-сервіс, що надає клієнтам автоматизовані фінансові консультації щодо формування портфелів цінних паперів для досягнення обраних користувачем фінансових цілей з урахуванням заданого рівня ризику,

який формує схвалений користувачем портфель шляхом покупки цінних паперів та продукує ребалансування портфеля при необхідності; при цьому клієнту надається зручний зворотний зв'язок (візуалізація, звітність) і можливо додаткові послуги (податкова оптимізація та ін.).

## **1.2 Типовий сценарій роботи робо-едвайзера**

У типовому сценарії використання робо-едвайзера користувач через інтернет-сайт або мобільний додаток після реєстрації знайомиться з сервісом, відповідає на питання анкети для ризик-профілювання, встановлює свої фінансові цілі (термін, сума, величини внесків) і рівень прийняттого ризику для цих цілей. Потім сервіс формує портфель з фінансових інструментів на основі внутрішнього алгоритму, якщо програмою передбачено планування цілей то робо-едвайзер прогнозує можливі дати досягнення мети. Пропонований портфель візуалізується у вигляді діаграм, дашбордів (dashboard), графіків. Якщо програма використовується не тільки для консультування та повністю автономна, то сервіс пропонує клієнту сформувати зазначений портфель - за згодою відбувається відкриття рахунку (брокерського чи іншого в залежності від вимог регулятора конкретної юрисдикції). Клієнт проходить відповідні комплаєнс-процедури при відкритті рахунку. Потім клієнт поповнює рахунок, і робо-едвайзер купує цінні папери. Клієнт може відстежувати стан портфеля і прогрес в досягненні цілей в будь-який момент. При цьому весь процес проходить без втручання «живого» консультанта або керівника.

## **1.3 Структура і функції робо-едвайзерів**

Елементи структури робо-едвайзер наведені на рисунку 1.1:

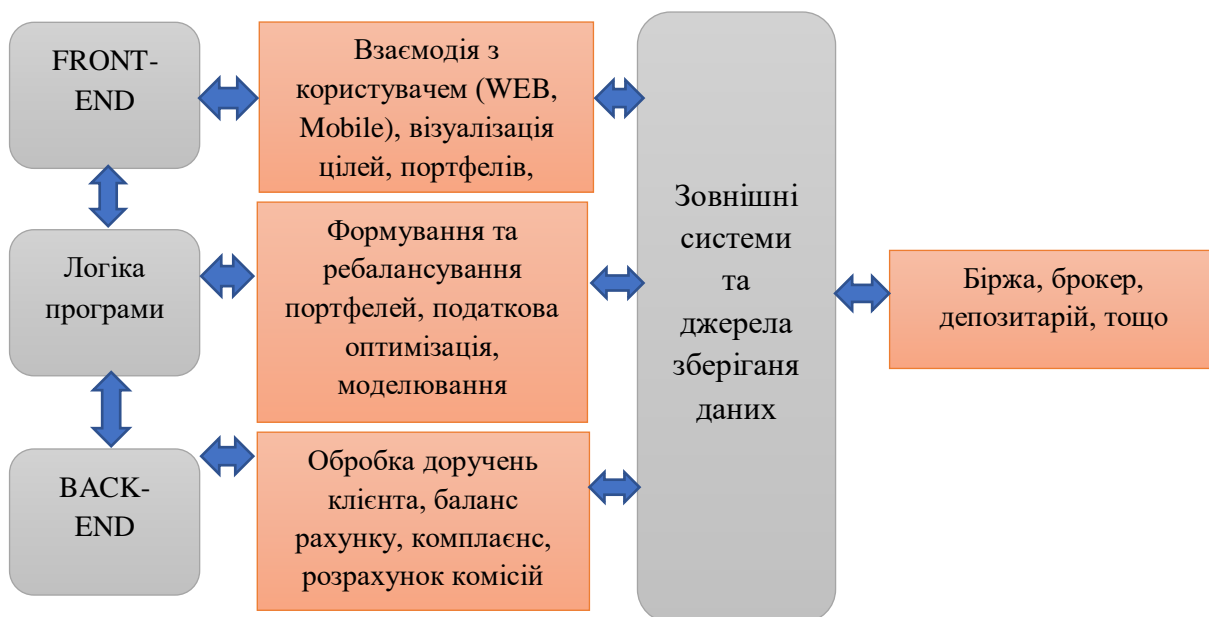


Рисунок 1.1 – Елементи структури робо-едвайзеру

Типовими функціями робо-едвайзеру є [32]:

- Профілювання клієнта (ризик-прибутковість, цілі, суми інвестицій).
- Формування портфеля.

Якщо програма використовується не тільки для консультування та повністю автономна, можуть бути наявні ще такі функції:

- Відкриття рахунку\укладення договору з клієнтом.
- Купівля портфеля.
- Отримання котирувань і зовнішніх даних.
- Візуалізація поточного стану портфеля.
- Збільшення портфеля при додатковій внески\ребалансування\закриття портфелю.

Високорівневий алгоритм роботи робо-едвайзеру наведено на рисунку 1.2.



Рисунок 1.2 – Схема роботи робо-едвайзера

Типовими характеристиками робо-едвайзерів є [33]:

- віддалене обслуговування клієнта (онлайн компонент) - клієнт взаємодіє з сервісом через веб-інтерфейс або мобільний додаток. Тим самим, сервіс орієнтований на технічно підкованих користувачів з доступом в інтернет і\або наявністю смартфона;
- відсутність «живого» радника або керівника - сервіс пропонує автоматизовані рекомендації щодо формування портфеля. Клієнт взаємодіє з сервісом самостійно і напямую, відповідаючи на питання про себе, свій фінансовий стан та цілі. Тим самим, традиційні посередники видаляються з процесу управління активами клієнта;
- низькі витрати - сервіс стягує нижчу плату за свої послуги в



порівнянні з традиційними фінансовими консультантами і керуючими, що створює конкуренцію за ціною для традиційних бізнес-моделей;

- алгоритм на базі сучасної портфельної теорії - сервіси як правило використовують сучасну портфельну теорію Марковіца (modern portfolio theory, MPT) та її розширення (наприклад, модель Блека-Літтермана) для формування відповідного клієнту портфеля шляхом проведення оптимізації прибутковості і ризику (mean-variance optimization);
- використання біржових інвестиційних фондів (Exchange Traded Funds, ETF) - в якості базису для формування портфеля сервіс вибирає папери ETF-фондів, тому що вони дають можливість скласти диверсифікований портфель і охопити широкий ринок; комісії індексних ETF як правило низькі, що також дозволяє сервісу отримати перевагу по витратах;
- пасивні індексні стратегії - сервіс використовує пасивні стратегії, не намагаючись переграти ринок за рахунок вибору цінних паперів, які «вистрілять», і не намагаючись «вгадати» більш вигідний момент покупки-продажу. Сервіс як правило слідкує індексам (чого знову ж сприяє покупка ETF), що знижує число операцій по портфелю за рік, звідси зниження комісій брокеру і загальне зниження комісій сервісу. Пасивні індексні стратегії допомагають виключити традиційного керуючого активами і знизити витрати;
- інвестиції на основі цілей клієнта (goal based investing) - академічні дослідники припускають наявність у людини різні ментальні моделі (mental accounts) оцінки ризику і пріоритетів для різних фінансових цілей. Наприклад, людина може купувати страховку і в той же час грати в лотерею; може поповнювати депозит для заощаджень «на чорний день», але готова ризикнути і купити волатильні акції на ринку цінних паперів. Різні пріоритети і різні сприйняття, ставлення до ризику для різних цілей передбачає відповідне управління портфелем клієнта на основі цілей [4].

Дослідники показують, що управління на основі цілей математично еквівалентно оптимізації прибутковості-ризиків при сприйнятті ризику як ймовірності недосягнення поставлених фінансових цілей [2]. Роботодвайзер може пропонувати клієнту набір типових цілей (пенсія, велика покупка, навчання і т.п.) і дає можливість кастомізації мети під потреби клієнта і його індивідуальні особливості;

- ребалансування портфеля - при відхиленні портфеля від заданої структури через зміну ситуації на ринку сервіс проводить ребалансування - повертає структуру портфеля до встановленого значення. Для мінімізації витрат через операції купівлі-продажу (для виключення «помилкових» ребалансувань через волатильність на ринку) сервіс може встановлювати межі, в межах яких відхилення структури портфеля є допустимим;
- простота, прозорість, зрозумілі візуалізація і дизайн - сервіс повинен бути зручний для клієнта в режимі 24 \ 7; результати рекомендацій і сформовані портфелі повинні відображатися у вигляді зрозумілих графіків, діаграм. Клієнт повинен отримати всю необхідну інформацію про повну вартість послуг сервісу і методології його роботи;
- низький поріг входу - сервіс пропонує почати інвестувати з невеликих сум, набагато менших, ніж при індивідуальному довірчому управлінні. Деякі сервіси взагалі не встановлюють нижніх меж обсягу початкових інвестицій.

Таким чином підривна інновація робото-двайзеру полягає в декількох компонентах: від переводу управління активами в віддалений канал обслуговування, виключення з процесу традиційних посередників до зниження комісій і порога входу для початку інвестицій. Всі ці фактори разом з ростом частки населення як активно використовує технології (народжені в 1980-2000 рр., мілленіали, покоління Y), так і повністю народженого в цифрову епоху (народжені після 2000 р, покоління Z), привели до різкого зростання числа клієнтів і активів під управлінням у

робо-едвайзерів з моменту їх появи.

#### 1.4 Робо-едвайзери в роботах дослідників

Перші сучасні та найвідоміші американські робо-едвайзери були засновані в 2008 році і запуснені в 2010 (Betterment) і 2011 (Wealthfront, Personal Capital) роках. Активи під управлінням даних сервісів стали рости стрімкими темпами - наприклад, на початок 2013 року біля Wealthfront під управлінням перебували активи розміром 100 млн. дол. Через рік величина AUM перевищила 538 млн. дол. (Приріст більше 400% за рік) [5]. За підсумками 2014 року активи під управлінням Wealthfront зросли вже до 2 млрд. дол. [6].

Настільки швидкі темпи приросту AUM зробили робо-едвайзінг однією з «гарячих» тем як в пресі і серед професійних консультаційних та аналітичних фірм. Ernst and Young у своєму дослідженні [6] порівнює традиційну модель і моделі цифрових радників (як повністю автоматизованих, так і включаючих можливість взаємодії з людиною) і оцінює потенційний обсяг активів для індустрії цифрових радників в 10 трлн. дол. У 2020 році очікується зріст AUM (активів під управлінням) робо-едвайзерів до 1.4 трлн дол., а у 2023 до 2.5 трлн дол. Також експерти очікують зріст користувачів робо-едвайзерів у три рази до 2023 року. [7]

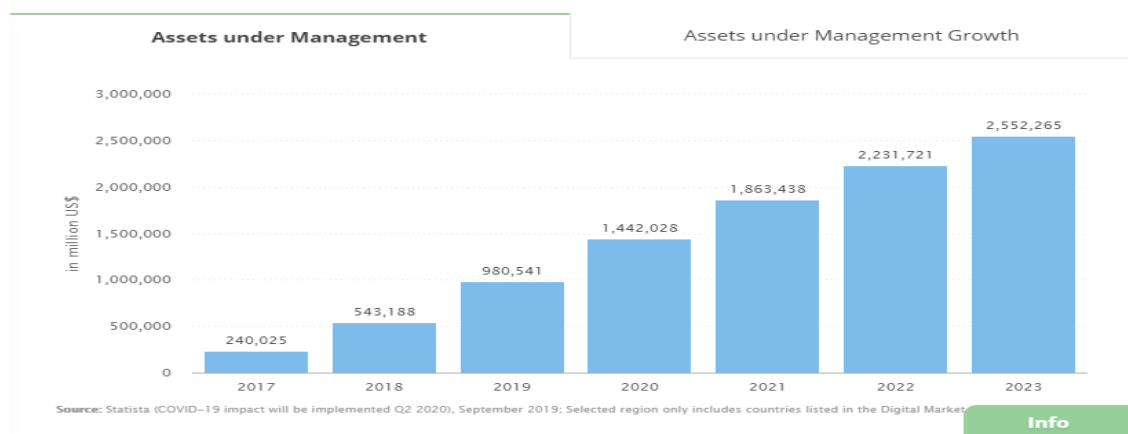


Рисунок 1.3 – Прогноз активів під управлінням робо-едвайзерів

Дослідники Deloitte пропонують розділяти сервіси робо-едвайзер на 4 рівні [8]:

1. Робо-едвайзер 1.0 - клієнти отримують поради щодо формування портфеля зі списку певних продуктів після відповіді на ряд питань, виконання порад і подальше управління портфелем лежить на плечах самого клієнта.
2. Робо-едвайзер 2.0 - портфель формується у вигляді фонду фондів, виконання рекомендацій і відкриття рахунків є частиною сервісу. Клієнту пропонується портфель на основі ризик-профілювання. Управління портфелем здійснюється вручну виділеними менеджерами.
3. Робо-едвайзер 3.0 - інвестиційні рішення і ребалансування здійснюються автоматично на основі алгоритмів, що працюють відповідно до встановленим набором стратегій.
4. Робо-едвайзер 4.0 - застосування алгоритмів машинного навчання, що навчаються самі на основі складних анкет ризик-профілювання. Алгоритми в режимі реального часу здійснюють ребалансування портфеля з урахуванням ризику, прибутковості, ліквідності та зміни ринкової ситуації.

В іншій роботі Deloitte [9] автори аналізують стратегії традиційних гравців в зв'язку з появою робо-едвайзер: укласти партнерську угоду з робо-едвайзер, купити існуюче рішення або розробляти свого власного робо-едвайзер. Другим шляхом пішла, наприклад, американська BlackRock, придбавши сервіс FutureAdvisor в 2015 році [10]. За третім шляхом пішли американські Vanguard і Charles Schwab, які розробили свої сервіси автоматизованих радників - Vanguard Personal Advisor Services і Schwab Intelligent Portfolios відповідно - стали згодом лідерами ринку за величиною AUM.

Академічні дослідники також приділили увагу темі робо-едвайзерів. В роботі [11] досліджуються принципи дизайну, яким

повинен відповідати робо-едвайзер. В роботі [12] автор аналізує угоди про використання сервісів з точки зору їх відмови від відповідальності, а в роботі [13] автор коротко резюмує позицію американської саморегулювальної організації FINRA по темі робо-едвайзер. В роботі [14] автори розглядають характеристики робо-едвайзер, призводять коротку історію розвитку сервісів і описують параметри основних робо-едвайзерів США, Європи та Азії. В роботі [15] автор розглядає типові характеристики робо-едвайзер і підходи до їх побудови, а також детально порівнює два американських сервіси Wealthfront і Schwab Intelligent Portfolios. Стаття [16] на прикладі 13 робо-едвайзерів США, Великобританії та Німеччини розглядає аспекти ризик-профілювання на основі поставлених сервісами питань. Робота [17] присвячена юридичним аспектам функціонування робо-едвайзер і захисту прав їх користувачів в рамках законодавства США.

## 1.5 Поширення робо-едвайзерів в світі

Успіх перших робо-едвайзерів в США породив масу конкурентів на американському ринку і «наслідувачів» в інших країнах. Згідно зі звітом Burnmark [18] станом на квітень 2017 в світі існує більше 250 робо-едвайзерів. Географічний розподіл сервісів наведено в таблиці 1.1.

*Таблиця 1.1*

Географічний розподіл сервісів

Регіон	Країна	К-ть робо-едвайзерів
Північна Америка	США	200
	Канада	12
Південна Америка		3
Європа	Німеччина	31

	Великобританія	20
	Франція	17
	Швейцарія	12
	Італія	5
Африка		3
Азіатсько-	Китай	20
Тихоокеанський регіон	Індія	19
	Японія	14
	Сінгапур	8
	Австралія	8
Всього		372

Як мова йшла раніше, АUM робо-едвайзерів у 2020 році складає 1.4 трлн дол. [7]. З них, за даними statista.com, лєвова частка припадає на США, що можна побачити на рисунку 1.4 [19]

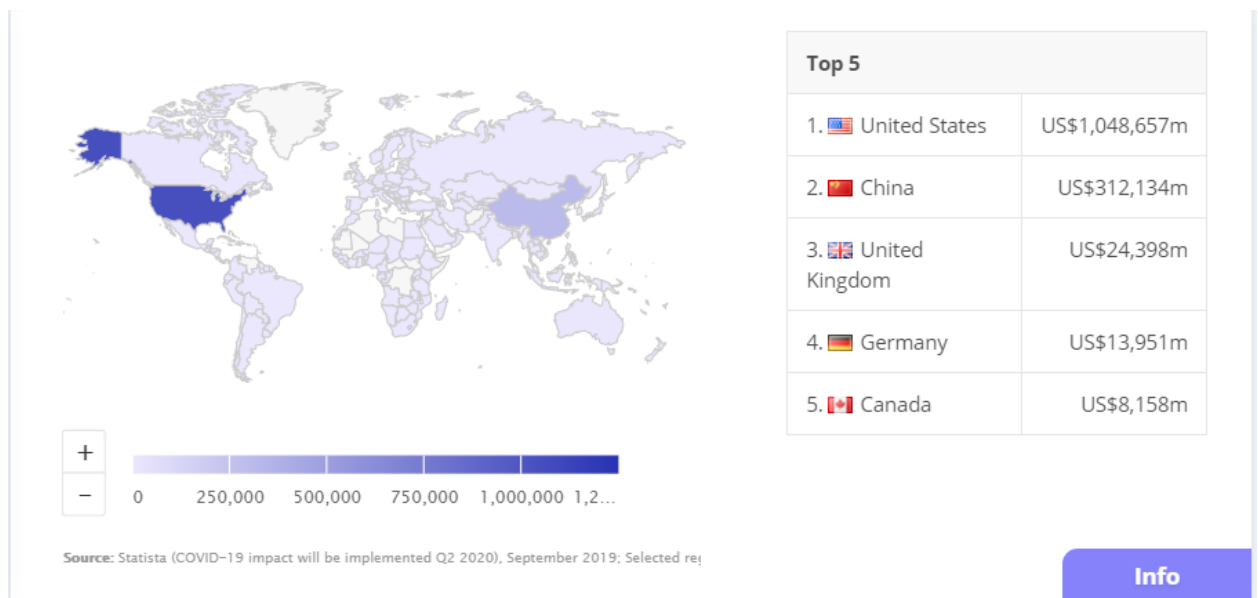


Рисунок 1.4 – Розподіл активів під управлінням по країнам

Незважаючи на наявність декількох сотень сервісів в світі велика частина активів сконцентрована під керуванням малого числа гравців. За даними Інвестопедії, більша половина з них з США. [20].

Найбільшим робо-едвайзером за величиною AUM є сервіс від Vanguard, який на початок 2018 року більш ніж подвоїв активи під управлінням за рік і першим перевищив позначку AUM в 100 млрд. дол. [21], залишивши конкурентів далеко позаду.

	Robo-Advisor	AUM in Millions (US\$)
1	 Vanguard Personal Advisory Service	140,000
2	 Schwab Intelligent Portfolios	41,000
3	 Wealthfront	20,000
4	 TD Ameritrade Essential & Selective Portfolios	19,900
5	 Betterment	18,000
6	 Personal Capital	10,000
7	 ETrade Core Portfolios	6,200
8	 WealthSimple	3,000
9	 FutureAdvisor	1,200
10	 M1 Finance	500

Рисунок 1.5 – Активи, що знаходяться в управлінні, у мільйонах станом на 30 червня 2019 року

## 1.6 Класифікація робо-едвайзерів

Зростання популярності робо-едвайзер і попит на даний сервіс з боку учасників ринку привели до виникнення ще одного напрямку - розробки платформ, які можуть бути кастомізовані під бренд замовника (white label рішення). Тим самим, ринок робо-едвайзер можна поділити на сегменти:

- B2C (Business-to-Consumer): сервіси для роздрібних клієнтів (іноді їх ще називають D2C, Digital-to- Consumer, підкреслюючи цифровий характер наданої послуги);

- B2B (Business-to-Business): платформи, що надають учаснику ринку можливість швидко «зробити» і запустити власного B2C робо-едвайзер під своїм брендом.

При цьому можна запустити свій B2C-сервіс і одночасно продавати свою B2B-платформу. Як підмножини B2B-сервісів також виділяють B2B2C або Robo-4-Advisors, коли сервіс робо-едвайзер використовують традиційні консультанти для обслуговування інтересів своїх клієнтів [2]. Серед робо-едвайзерів також виділяють гібридні рішення (hybrid), коли класичний робо-едвайзер доповнюється допомогою «живого» консультанта [14] - такий більш затратний сервіс може надаватися за додаткову плату або для клієнтів з великим розміром інвестованих коштів.

Розвиток сфери робо-едвайзер в США привело до їх спеціалізації на певній ділянці ринку [22]:

- класичні робо-едвайзери (robo-advisor);
- робо-едвайзер для управління пенсійними накопиченнями (robo-retirement) - сервіси служать для управління створеними в рамках законодавства рахунками пенсійного капіталу (401 (k) в США, наприклад);
- сервіси для мікро-інвестування (micro-investing) - з кожної покупки користувача (по банківській карті) перераховується невелика додаткова сума, яка йде на автоматичну покупку цінних паперів, характеризуються невеликою сумою кожної інвестиції.

При цьому в кожному такому сегменті існують як B2C-, так і B2B-рішення, хоча домінують сервіси B2C: згідно з базою Burnmark майже 70% робо-едвайзерів відносяться до B2C, 11% - виключно до B2B, майже кожен 5-ий (19% ) працює по гібридній моделі, 5% пропонують одночасно



і B2C, і B2B-рішення [14]. Згідно з тією ж базою 72% робо-едвайзерів інвестують виключно в ETF-фонди. При цьому лише 18% сервісів стягують щорічну плату більше 0,7% від AUM клієнта.

## РОЗДІЛ 2

### МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЮ

#### 2.1 **Методи формування інвестиційного портфелю: теорії Марковіца та Тобіна**

##### 2.1.1 **Портфельна теорія Марковіца**

Питаннями побудови найбільш ефективного портфеля займалися багато вчених. Найвідомішим з них є нобелівський лауреат Г. Марковіц, розробивши з допомогою математичних методів першу модель оптимізації портфеля. Г. Марковіц заслужено вважається засновником сучасної портфельної теорії. Надалі розроблена ним теорія почала розвиватися в працях У. Шарпа і в моделях ціноутворення фінансових активів. Дані моделі мають практичне застосування на фондових ринках.

У 1952 році Г.Марковіц опублікував статтю, що називалась «Portfolio Selection». У цій статті були закладені засади сучасної портфельної теорії. Автор вважав, що прибутковість цінних паперів є випадковою величиною. На початку формування інвестиційного портфелю інвестором проводиться оцінка таких показників, як очікувана прибутковість та стандартне відхилення як міра ризику. Також оцінюється взаємний зв'язок між дохідністю окремих акцій, які представлені коефіцієнтами кореляції. Коли дані показники є визначеними, інвестор з усієї множини портфелів може обрати саме той, який є для нього оптимальним за критерієм ризик-прибутковість на даний момент [23].

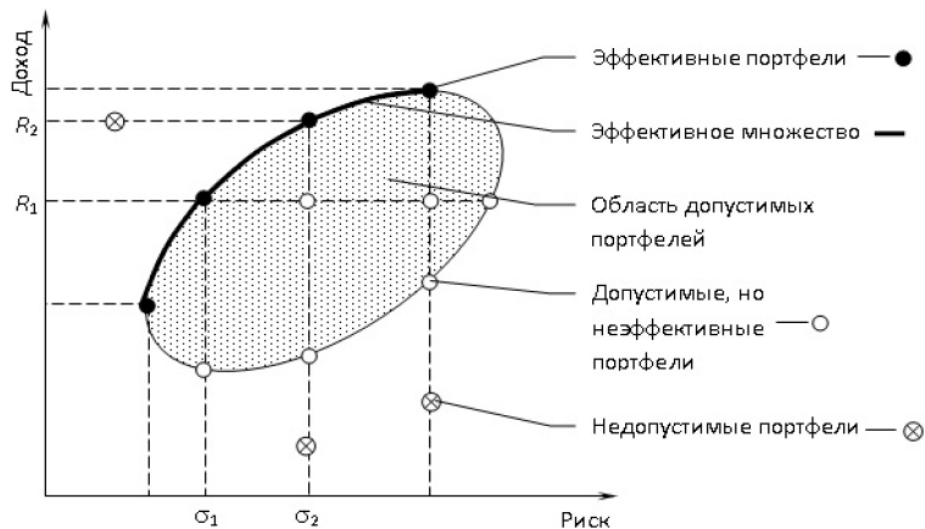


Рисунок 2.1 – Ілюстрація безлічі можливих портфелів цінних паперів по Марковіцу

Г. Марковіц у своїй праці вважав, що отриманий інвестором дохід не інвестується знову, тобто період інвестування дорівнює 1. Ефективність ринку цінних паперів є іншим важливим постулатом в теорії Г.Марковіца. Під цим поняттям мається на увазі такий ринок, де наявна інформація відразу відображається в зміні котирувань цінних паперів, тобто реакція на появу нової актуальної інформації відбувається миттєво.

Працюючи над своєю теорією, вчений вважав, що прибутковість цінних паперів являється випадковою величиною, тобто такою, що розподілена за нормальним, або Гаусовським законом. Через це вчений вважав, що при створенні свого портфелю інвестором проводиться оцінка лише 2 показників: це очікувана прибутковість та стандартне відхилення (ризик). Тобто інвестор має вибрати саме той портфель, оцінивши прибутковість і ризик кожного портфеля, який найкраще задовільняє його ціль - забезпечення максимальної прибутковості  $r$  при допустимому значенні ризику  $\sigma$ . Якому саме портфелю буде надано перевагу інвестором залежить від його оцінки співвідношення "прибутковість-ризик" [35].

Теорема Марковіца звучить так: «Раціональний інвестор завжди

вибирає такий портфель, що за бажаної прибутковості досягає мінімального ризику» (і навпаки).

При підході до інвестиційного процесу у праці Марковіца включається ряд наукових абстракцій і припущень, як і у будь-якій іншій теорії [36]:

- інвестування проводиться на один період;
- ні один з учасників ринку цінних паперів не має впливу на ціни та інформація доступна будь-кому, немає додаткових витрат, всі інвестори мають однакові очікування, тобто Марковіц мав на увазі, що ринок цінних паперів ефективний;
- інформація на ринку надходить хаотично і визначає ціни;
- прибутковість акцій за період  $n + 1$  обчислюють як середню арифметичну прибутковості тієї ж акції визначеної за попередні  $n$  років. Також це має назву очікуваної прибутковості  $E(r)$  акції, тобто:

$$E(r) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t$$

При розрахунку дисперсії одна ступінь свободи втрачається, тому що однією з величин прибутковості  $r_t$  може бути сама середня арифметична, таким чином:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N [r_t - E(r)]^2$$

$$\sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

Оцінюючи інвестиційну привабливість акцій перевагу треба надати саме тій, що забезпечує кращу високу очікувану прибутковість за меншого рівня ризику. Але у реальності акції, що мають більшу дохідність у той же час часто мають вищий рівень ризику. Пам'ятаючи про це можна зробити інвестиційний вибір за допомогою коефіцієнта відхилення  $CV$ :

$$CV = \frac{\sigma}{E(r)}$$

що показує, яка частка ризику припадає на 1% очікуваної прибутковості.

Коли мова йде про очікувану прибутковість портфеля мається на увазі середньозважене значення очікуваних значень прибутковості цінних паперів що складають портфель. "Вага" кожного окремого цінного паперу при цьому визначається відносною кількістю грошей, що спрямовані інвестором на покупку цього цінного паперу. Очікувана дохідність інвестиційного портфеля дорівнює:

$$E(r_{портф}) = \sum_{i=1}^n W_i E(r_i),$$

де  $E(r_{портф})$  - очікувана норма віддачі портфеля;

$W_i$  – складова в сумі інвестиційних витрат, що призначена на покупку  $i$ -того цінного паперу ("вага"  $i$ -того цінного паперу в портфелі);

$E(r_i)$  - очікувана прибутковість  $i$  -того цінного паперу;

$n$  - число цінних паперів в портфелі.

Сума «ваг» всіх акцій портфеля повинна дорівнювати одиниці:

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1$$

Визначаючи ризик створеного портфеля слід пам'ятати, що дисперсія портфеля не може бути знайдена, як середньозважена тих дисперсій, що входять в портфель цінних паперів. Це обумовлюється тим фактом, що у портфелі дисперсія має залежність ще і від взаємозв'язку дохідностей активів, що знаходяться у портфелі, один з одним, а не тільки від дисперсій цих цінних паперів. Можна сказати, що ризик взятого цілого портфеля є не тільки індивідуальним ризиком кожного цінного паперу, що входять у портфель та взятий окремо, а ще й тим, що існує можливість впливу змін щорічних значень прибутковості окремої акції на зміни у прибутковості іншої акції, що є складовими інвестиційного портфелю [37].

Можна сказати, що ризик включає 2 частини:

- власний ризик акцій;

- системний ризик (кореляція однієї акції з іншою, погіршення всього ринку).

Взаємозалежність двох величин, взятих випадково, прийнято вимірювати за допомогою коваріації і коефіцієнта кореляції. Коваріація зі знаком плюс або позитивна коваріація означає, що прибутковість двох окремих цінних паперів має тенденцію змінюватись в напрямках що збігаються. Якщо тенденція інша, тобто двоє окремих цінних паперів збільшуються або зменшуються в протилежних напрямках, то вважається що має місце коваріація зі знаком мінус або негативна коваріація [38].

При розгляді величини прибутковості цінних паперів за попередні періоди коваріація підраховується за формулою:

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N [r_{i,t} - E(r_i)] * [r_{j,t} - E(r_j)]$$

де  $\sigma_{i,j}$  - ковариация між величинами прибутковості цінного паперу  $i$  та цінного паперу  $j$ ;

$r_{i,t}$  та  $r_{j,t}$  - прибутковість цінних паперів  $i$  та  $j$  в момент  $t$ ;

$E(r_i)$  и  $E(r_j)$  - очікувана (середня арифметична) прибутковість цінних паперів  $i$  та  $j$ ;

$N$  - загальна кількість років спостереження.

Часто при визначенні ступеня взаємозв'язку двох випадкових величин використовують відносну величину - коефіцієнт кореляції  $\rho_{i,j}$ :

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i * \sigma_j}$$

Коефіцієнтом кореляції між прибутковістю цінних паперів  $i$  та  $j$  вважається коваріація дохідності цих цінних паперів до добутку їх стандартних відхилень. Значення  $\rho_{i,j}$  змінюються в межах  $-1 < \rho_{i,j} < +1$  і не залежать від способів підрахунку величин  $\sigma_{i,j}$  та  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$ . Це дає нам можливість з більшою точністю давати оцінку ступіню взаємозв'язку прибутковості двох цінних паперів: якщо  $\rho_{i,j} > 0$ , то прибутковість цінних паперів  $i$  та  $j$  змінюється в одних і тих же напрямках, тобто, коли

прибутковість  $i$ -того цінного паперу зростає (або спадає), то і прибутковість  $j$ -того цінного паперу також зростає (спадає). Чим ближче значення  $\rho_{ij}$  до величини  $+1$ , тим сильніше цей взаємозв'язок. Коли  $\rho_{ij} = +1$ , то вважається, що цінні папери  $i$  та  $j$  мають абсолютну позитивну кореляцію: в цьому випадку значення річної прибутковості  $r_{i,t}$  та  $r_{j,t}$  пов'язані позитивною лінійною залежністю, тобто будь-яким змінам  $r_{i,t}$  завжди відповідають пропорційні зміни  $r_{j,t}$  у тих же напрямках.

Якщо  $\rho_{ij}$  від'ємні, то  $r_{i,t}$  та  $r_{j,t}$  мають тенденцію змінюватися в різних напрямках: коли  $r_{i,t}$  зростає (або спадає), то  $r_{j,t}$  спадає (зростає). Чим ближче в цьому випадку  $\rho_{ij}$  до величини  $(-1)$ , тим вище ступінь негативного взаємозв'язку. При  $\rho_{ij} = -1$  спостерігається абсолютна негативна кореляція, коли  $r_{i,t}$  та  $r_{j,t}$  пов'язані негативною лінійною залежністю. При  $\rho_{ij} = 0$  відсутній який-небудь взаємозв'язок між величинами прибутковості двох цінних паперів.

Даний коефіцієнт кореляції є надзвичайно важливим для формування портфеля. Чим нижчим є коефіцієнт кореляції цінних паперів, з яких складається портфель, тим меншим є ризик інвестиційного портфеля.

Таким чином, дисперсія допомагає визначити ризик інвестиційного портфелю. Припустимо, що досліджуваний портфель складається з  $n$  цінних паперів, у такому разі дисперсія портфеля обчислюється за такою формулою:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,j}$$

Якщо згадати, що коефіцієнт кореляції дорівнює  $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i * \sigma_j}$  то цю

формулу можна представити у вигляді:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

### 2.1.2 Вибір оптимального портфеля по Марковіцу

За умови, що до складу портфелю входить більше ніж 2 цінних папери, для будь-якого визначеного рівня прибутковості можна підібрати нескінченну кількість портфелів, або, іншими словами, існує нескінченне число портфелів які мають однакову прибутковість.

Таким чином, задачу інвестора можна сформулювати так: з нескінченної множини портфелів з бажаною прибутковістю  $E(r_n)$  треба знайти такий, що буде забезпечувати мінімальний рівень ризику. Іншими словами, задачу інвестора можна сформулювати таким чином [31]: необхідно знайти мінімальне значення дисперсії портфеля

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n W_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j \sigma_{i,j}$$

при заданих початкових умовах:

$$E(r_{портф}) = \sum_{i=1}^n W_i E(r_i) = E(r_n)$$

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1$$

Для розв'язання цієї задачі знаходження оптимального портфеля, який містить у собі  $n$  цінних паперів, спочатку треба обчислити:

- $n$  значень очікуваної прибутковості  $E(r_i)$ , де  $i = 1, 2, \dots, n$  для кожного цінного паперу в портфелі;
- $n$  значень дисперсій  $\sigma_i^2$  кожного цінного паперу;
- $n(n-1)/2$  значень коваріації  $\sigma_{i,j}^2$ , де  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Якщо ми підставимо значення  $E(r_i)$ ,  $\sigma_i$  та  $\sigma_{i,j}$  у вищезазначені вирази, ці рівняння будуть мати невідомими тільки величини  $W_i$  - "ваги" цінного паперу в портфелі. Таким чином, задача формування оптимального портфеля з  $n$  цінних паперів формулюється так: для бажаної величини прибутковості  $E(r_n)$  інвестору необхідно знайти такі значення  $W_i$ , за яких ризик інвестиційного портфеля зводиться до



мінімального. Іншими словами, для цього значення  $E(r_n)$  інвестору необхідно визначити, які з сум інвестиційних витрат слід направити на придбання того чи іншого цінного паперу для того щоб ризик інвестиційного портфеля був мінімальним.

### 2.1.3 Портфельна теорія Тобіна

За теорією Марковіца інвестор вкладає всі інвестиції у ризикові активи (акції, криптовалюта, тощо). У підході Дж. Тобіна інвестор може інвестувати окрім ризикових активів ще й у безризикові. Під таким активом розуміється актив, дохід якого є строго встановленим. Якщо слідувати визначенню, стандартне відхилення прибутковості у безризикового активу є нуль. Таким чином, коваріація між прибутковістю безризикового активу  $r_b$  та будь яким іншим ризиковим активом також є нуль. Інвестування у безризиковий актив також можна вважати безризиковим кредитуванням, так як можна сказати, що воно по суті є наданням позики державі [24].

Крім того, інвестору дозволяється позичати гроші під відсоток, рівний прибутковості безризикового активу (безризикове запозичення).

З появою на ринку безризикового активу інвестор отримав можливість вкладати частину своїх грошей в цей актив, а залишок - в будь-який з ризикованих портфельів, що містяться у великій кількості з множини досяжності Марковіца. Поява нових можливостей істотно розширює множину досяжності і, що важливіше, змінює розташування значної частини ефективної множини Марковіца [34].

Візьмемо до розгляду портфель  $A$ , що складений за допомогою якого-небудь способу з  $p$  ризикових цінних паперів. Фіксуємо портфель  $A$  і створимо новий портфель, який складається на  $(1 - V)$  з безризикового цінного паперу і на  $V$  з портфеля  $A$ .

Прибутковість такого портфеля має вигляд:

$$r_p = Vr_A + (1 - V)r_6.$$

Прибутковість, що очікується від портфеля та його дисперсія визначаються як:

$$m_p = V\bar{r}_A + (1 - V)r_6 \text{ або } m_p = r_6 + V(\bar{r}_A - r_6),$$

$$\sigma_p^2 = V^2\sigma_A^2, \sigma_p = V\sigma_A,$$

Виключаючи  $V$  з системи рівнянь, одержимо рівняння прямої лінії НА (рисунок 2.2):

$$m_p = r_6 + \frac{\bar{r}_A - r_6}{\sigma_A} \sigma_p.$$

На рисунку 2.2 показано ефективна множина ЕФ для портфелів з ризикових цінних паперів (крива лінія) і можливі поєднання ризику і очікуваної прибутковості при додаванні в ризиковий портфель безризиковою цінного паперу (пряма НА).

Серед усієї множини ліній, що можуть бути проведені з точки Н, яка поставлена у відповідність безризиковому активу, і з'єднують цю точку з ризиковим портфелем, у всіх них нахил не більший, ніж у лінії, що йде в точку Т.

Портфель, який розташований в точці дотику Т, називається дотичним. Саме при об'єднанні даного портфелю ризикових активів з безризиковим можна досягнути формування формування максимально ефективного портфеля.

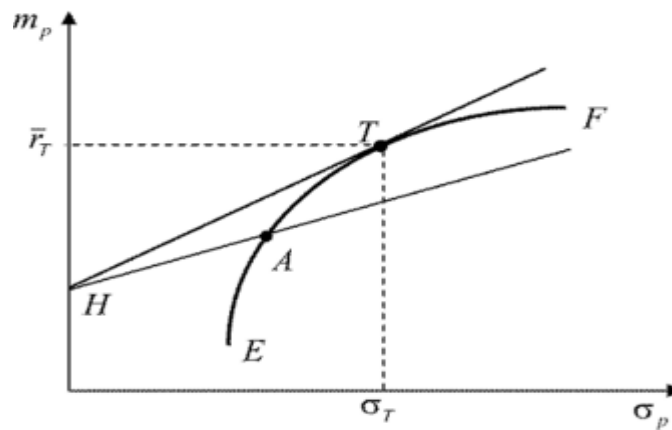


Рисунок. 2.2 – Максимально ефективні портфелі в моделі Тобіна

Наведемо рівняння «ризик-прибутковість» для комбінованого портфеля, який складається з дотичного портфеля та безризикового активу:

$$m_p = r_6 + \frac{\bar{r}_T - r_6}{\sigma_T} \sigma_p.$$

Ця лінія відсікає частину ефективної множини Марковіца. Портфелі, що належали ефективній множині у моделі Марковіца та мали розташування між портфелем з мінімальним рівнем ризику E та портфелем T, при появі можливості інвестицій в безризикові активи стали не ефективними. Тепер до складу ефективної множини входять прямий та викривлений відрізок. Прямий відрізок йде від безризикового активу в точку T таким чином представляючи портфелі, які складаються з різних комбінацій безризикового активу та портфеля T. Викривлений відрізок має розташування вище і правіше точки T і являє портфелі з ефективної множини моделі Марковіца.

## 2.2 Індексна модель Шарпа

Індексна модель була запропонована Шарпом задля уникнення високої трудомісткості [25]. Слід також зазначити, що науковцем не було розроблено нових методів складання портфеля, а проблема була спрощена таким чином, що знайти наближене рішення можна приклавши

значно менші зусилля. В основу моделі Шарпом було покладено метод лінійного регресійного аналізу, який дає можливість з'єднати дві випадкові залежні змінні величини  $X$  та  $Y$  лінійним виразом типу:

$$Y = \alpha + \beta X,$$

де  $X$  - величина якого-небудь ринкового показника. За цю змінну можн взяти, наприклад, темпи зростання валового внутрішнього продукту, рівень інфляції, індекс цін споживчих товарів тощо. Самим Шарпом ця змінна розглядалась як прибутковість ринкового портфеля  $r_m$ . За змінну  $Y$  береться віддача  $r_i$  якоїсь  $i$ -тої акції портфеля [40].

Залежність прибутковості цінного паперу від індексу можна описати наступною формулою:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i * r_{m,t} + \varepsilon_{i,t},$$

де  $r_{i,t}$  – прибутковість  $i$ -тої акції портфеля за крок  $t$ ;

$r_{m,t}$  – прибутковість ринкового портфеля в момент  $t$  (індекс S&P 500, тощо);

$\alpha_i$  – «коефіцієнт альфа»; він показує яка частина прибутковості  $i$ -тої акції портфеля не пов'язана зі змінами прибутковості ринкового портфеля  $r_{m,t}$ ;

$\beta_i$  – «коефіцієнт бета», він показує чутливість прибутковості  $i$ -тої акції портфеля до змін ринкової дохідності  $r_{m,t}$ ;

$\varepsilon_{i,t}$  – випадкова помилка, яка свідчить про те, що реальні, діючі значення  $r_{i,t}$  та  $r_{m,t}$  відхиляються від лінійної залежності.

Знайти параметри  $\alpha_i$  та  $\beta_i$  за результатами спостережень можна використавши метод найменших квадратів (МНК). Використовуючи цей метод за параметри  $\alpha_i$  і  $\beta_i$  беруться такі значення, що дають змогу мінімізувати суму квадратів помилок  $\varepsilon_{i,t}$ . Таким чином, якщо ми розглядаємо регресійну модель, що описує залежність прибутковості якогось цінного паперу  $r_{i,t}$  і ринкового портфеля  $r_{m,t}$  за  $N$  спостережуваних в минулому кроків розрахунку, то в якості параметрів треба взяти такі значення  $\alpha_i$  і  $\beta_i$ , за яких величина:

$$\sum_{t=1}^N (\varepsilon_{i,t})^2 = \sum_{t=1}^N [r_{i,t} - (\alpha_i + \beta_i * r_{m,t})]^2$$

досягає мінімуму. Цьому виразу надається мінімум, коли параметри  $\alpha_i$  і  $\beta_i$  приймають наступні значення:

$$\alpha_i = E(r_i) - \beta_i * E(r_m)$$

Вільний член  $\alpha_i$  у регресійній моделі можна обчислити порівнявши різницю між очікуваним значенням  $E(r_i)$ , що спостерігався протягом  $N$  кроків величин  $r_{i,t}$  та зваженим очікуваним значенням  $E(r_m)$ , що спостерігалися протягом цих же кроків розрахунку величин  $r_{m,t}$ , де вагою слугує параметр  $\beta_i$ .

Шарп ввів  $\beta$ -фактор, що відіграє значну роль в сучасній портфельній теорії, цей фактор визначає чутливість прибутковості  $i$ -тої акції портфеля до змін ринкової дохідності:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2},$$

де  $\sigma_{i,m}$  – коваріація між темпами зростання курсу цінних паперів і темпами зростання ринку;

$\sigma_m^2$  – дисперсія дохідності ринку.

Показником «бета» можна охарактеризувати ступінь ризику паперу і він показує, наскільки зміна ціни паперу перевищує зміну ринку в цілому. Якщо  $\beta > 1$ , то цей папір можна розглядати як інструмент з підвищеним ступенем ризику, тому що його ціна рухається в середньому швидше за ринок. Якщо  $\beta < 1$ , то ступінь ризику цього паперу відносно низький, так як на протязі періоду розрахунку його ціна змінювалася повільніше, ніж ринок. Якщо  $\beta < 0$ , то в середньому ціна цього паперу рухалася у протилежному з ринком напрямі протягом періоду розрахунку (ці акції можна вважати ризикованими, ніж ринок загалом) [39].

Так як для побудови оптимального портфеля з використанням моделі Шарпа будуть потрібні значення дисперсій  $\sigma_{\varepsilon,i}^2$  випадкових помилок, то загальну формулу для її знаходження можна виразити таким чином:

$$\sigma^2_{\varepsilon,i} = E [\varepsilon_{i,t} - E(\varepsilon_{i,t})]^2$$

Але, оскільки  $E(\varepsilon_i) = 0$ , то маємо:

$$\sigma^2_{\varepsilon,i} = E [\varepsilon_{i,t}]^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [r_{i,t} - (\alpha_i + \beta_i * r_{m,t})],$$

де  $N$  – це ступінь свободи.

Якщо інвестором використовується  $n$  цінних паперів для формування портфелю, параметри лінійної регресії  $\alpha_i$  та  $\beta_i$  дозволяють виразити з їх використанням всі початкові елементи, а саме очікувану прибутковість  $E(r_i)$  для кожного цінного паперу у портфелі, дисперсію  $\sigma^2_i$  та коваріацію  $\sigma_{i,j}$  доходностей цих цінних паперів:

$$E(r_i) = \alpha_i + \beta_i * E(r_m)$$

$$\sigma^2_i = \beta_i^2 * \sigma^2_m + \sigma^2_{\varepsilon,i}$$

$$\sigma_{i,j} = \beta_i * \beta_j * \sigma^2_m$$

Зниження кількості обчислень у моделі Шарпа досягається тому, що всі парні коваріації  $\sigma_{i,j}$  між доходністю цінних паперів у портфелі вважаються рівними нулю. Для відображення взаємного впливу ризику одного цінного паперу на ризик іншого цінного паперу, Шарпом було запропоновано звести ці ефекти коваріаційності до взаємозв'язку цінних паперів портфеля з якимось ринковим індексом, таким чином відбувається вираз кореляції між прибутковістю цінних паперів за допомогою ринкового індексу [41].

Очікувану прибутковість портфеля, який складається з  $n$  цінних паперів можна обчислити за формулою:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^n W_i * E(r_i) \quad (1),$$

де  $W_i$  – вага кожного цінного паперу в портфелі. Підставимо в цю формулу вираз для  $r_i$  з формули  $r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i * r_{m,t} + \varepsilon_{i,t}$ :

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^n W_i E(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n W_i * (\alpha_i + \varepsilon_i) + \sum_{i=1}^n W_i \beta_i * E(r_m) \quad (2)$$

Щоб надати компактність цій формулі, Шарпом було

запропоновано вважати ринковий індекс як характеристику умовного ( $n + 1$ )-того цінного паперу в портфелі. Таким чином, другий доданок рівняння (2) можна представити у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n W_i \beta_i * E(r_m) = W_{n+1} E(\alpha_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) \quad (3),$$

де,  $W_{n+1} = \sum_{i=1}^n W_i \beta_i \quad (3a);$

$$\alpha_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = r_m .$$

При цьому мається на увазі, що дисперсія ( $n + 1$ )-тої помилки рівна дисперсії ринкової прибутковості:  $\sigma_{\varepsilon, n+1}^2 = \sigma_m^2$ . Вираз (3a) — це сума зважених величин «бети» ( $\beta_i$ ) кожного цінного паперу та має назву «портфельна бета» ( $\beta_n$ ). Враховуючи формули (2) і (3) формулу (1) можна записати так:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^{n+1} W_i E(\alpha_i + \varepsilon_i),$$

а оскільки  $E(\varepsilon_i) = 0$ , то остаточно маємо:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^{n+1} W_i \alpha_i$$

Таким чином, очікувана прибутковість портфеля  $E(r_n)$  може бути виражена такою, яка складається з двох частин:

- суми зважених параметрів  $\alpha_i$  кожного цінного паперу -  $W_1 \alpha_1 + W_2 \alpha_2 + \dots + W_n \alpha_n$ , яка відображає вклад у  $E(r_n)$  самих цінних паперів;
- компоненти  $W_{n+1} \alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^n W_i \beta_i * E(r_m)$ , тобто добутку очікуваної ринкової прибутковості і портфельної бети, що відображає взаємозв'язок ринку з цінними паперами.

Дисперсія портфеля в моделі Шарпа відображається у вигляді:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} W_i^2 * \sigma_{\varepsilon, i}^2$$

При цьому слід мати на увазі, що  $W_{n+1} = \sum_{i=1}^n W_i \beta_i$ , тобто  $(W_{n+1})^2 = (W_1 \beta_1 + W_2 \beta_2 + \dots + W_n \beta_n)^2$ , а  $\sigma_{\varepsilon, n+1}^2 = \sigma_m^2$ . Виявляється, що дисперсія портфеля, який складається з  $n$  цінних паперів, можна виразити

зі складової двох компонент:

- середньозважених дисперсій помилок, які відображають частку ризику портфеля, який пов'язаний з ризиками самих цінних паперів (тобто власний ризик);
- зваженої величини дисперсії ринкового показника, де вагою буде слугувати квадрат портфельної бети, який відображає частку ризику портфеля, що визначається нестабільністю самого ринку (ринковий ризик).

Мета інвестора у моделі Шарпа зводиться до наступного: необхідно знайти мінімальне значення дисперсії портфеля:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} W_i^2 * \sigma_{\varepsilon,i}^2 ,$$

при наступних початкових умовах:

- $\sum_{i=1}^{n+1} W_i \alpha_i = E(r_n) ;$
- $\sum_{i=1}^n W_{i=1} ;$
- $W_{n+1} = \sum_{i=1}^n W_i \beta_i .$

### 2.2.1 Вибір оптимального портфеля по Шарпу

Визначимо основні кроки, що треба зробити задля побудови границі ефективних портфельів в моделі Шарпа [30]:

- 1) Для формування портфелю вибрати  $n$  цінних паперів, і окреслити історичний проміжок в  $N$  кроків розрахунку. За цей проміжок будуть спостерігатися значення прибутковості  $r_{i,t}$  кожного цінного паперу.
- 2) Обчислити ринкові прибутковості  $r_{m,t}$  за ринковим індексом для того ж проміжку часу.
- 3) Визначити величини  $\beta_i$ :



$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2}.$$

4) Знайти параметр  $\alpha_i$ :

$$\alpha_i = E(r_i) - \beta_i * E(r_m).$$

5) Порахувати дисперсії  $\sigma^2_{\varepsilon,i}$  помилок регресійної моделі.

6) Зробити підстановку цих значень в рівняння:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} W_i^2 * \sigma^2_{\varepsilon,i}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} W_i \alpha_i = E(r_n)$$

$$\sum_{i=1}^n W_{i=1}$$

$$W_{n+1} = \sum_{i=1}^n W_i \beta_i$$

Після цих дій з'ясується, що ваги  $W_i$  цінних паперів є невідомими величинами. Визначивши певну величину очікуваної прибутковості портфеля  $E(r_n)$  можна обчислити ваги цінних паперів в портфелі, зробити побудов кордону ефективних портфелів і визначити оптимальний портфель.

### 2.3 Вибір моделі для розробки та новизна програмного продукту

При розробці програми було прийнято рішення використовувати портфельну теорію Марковіца. Підхід Марковіца передбачає, що прибутковість портфеля не може перевищувати максимальну з доходностей складових його інструментів. Грамотно складений портфель повинен бути збалансований з точки зору прибутковості і ризику таким чином, щоб в ідеалі прагнути до безперервного росту, хоча окремі його складові можуть тимчасово втрачати в ціні. Найбільш оптимальні комбінації інструментів утворюють множину, що називають ефективними портфелями. Їх ще називають не поліпшуваними: для

кожного з них неможливо домогтися підвищення прибутковості без одночасного підвищення ризику.

Також до переваг портфельної теорії Марковіца можна віднести:

- сформульований математичний апарат, який дозволяє багато в чому автоматизувати і спростити процес формування інвестиційного портфеля;
- розраховує ефективну границю для порівняння множинних портфельних розподілів;
- дозволяє визначити портфель, який забезпечує найбільш підходящу комбінацію ризику і прибутковості;
- відстежує поточний портфель, що дає можливість коригувати його складу з точки зору оптимізації ризику і прибутковості
- відмова від гри на коливаннях, тобто портфель ребалансується тільки для підтримки оптимальних співвідношення «ризик-прибутковість». [26]

Частина коду, що демонструє застосування портфельної теорії Марковіца:

```
k = universe
```

```
Dmat = VC
```

```
dvec = rep.int(0, k)
```

```
big <- 1e+100
```

```
a1 = rep.int(1, k)
```

```
a2 = t(ret_with_forecasts)
```

```
a3 = matrix(0, k, k)
```

```
diag(a3) = 1
```

```
b3 = rep.int(0, k)
```

```

Amat = t(rbind(a1, a2, a3))
b0 = c(1, mu, b3)

res <- quadprog::solve.QP(Dmat, dvec, Amat, bvec = b0, meq = 2)

optimal_portfolio = list()

optimal_portfolio$ticker = as.character(map$ticker)
optimal_portfolio$asset_name = as.character(map$name)
optimal_portfolio$portfolio_weights = round(res$solution * 100, 2) /
sum(round(res$solution * 100, 2)) * 100

#multiply by 12 to annualize
optimal_portfolio$expected_portfolio_return =
optimal_portfolio$portfolio_weights %*% ret_with_forecasts * freq
optimal_portfolio$expected_portfolio_risk =
sqrt((t(optimal_portfolio$portfolio_weights) %*% VC %*%
optimal_portfolio$portfolio_weights * freq))
return(optimal_portfolio)

```

Насамперед при роботі з інвестором перед початком процесу інвестування слід визначити його ризик-профіль та інвестиційні цілі, тобто чого людина хоче досягнути за допомогою інвестицій. Тому інвестору пропонується відповісти на перелік питань, завдяки чому формується його психологічний та інвестиційний портрет, визначається схильність до ризику. Також йому пропонується визначити цілі, заради яких людина робить інвестиції (накопичити на дім, запустити бізнес, тощо). Але пропонується вибрати не лише основну ціль, а і декілька

другорядних. Оскільки диверсифікація, тобто використання декількох різних інвестиційних інструментів, буде відбуватись не тільки всередині одного інвестиційного портфелю, як це робиться зазвичай, а на основі обраних цілей будуть підбиратися декілька інвестиційних портфелів (основний, у який буде проінвестована основна частина грошей і який відповідатиме основній інвестиційній цілі, та декілька другорядних, що відповідатимуть додатковим цілям), досягається додатковий позитивний ефект, що полягає в задоволенні декількох цілей, так як інвестор інколи може неправильно їх пріоритезувати або не бути впевненим, для чого робляться інвестиції, отримується можливість поєднати портфелі з різним рівнем ризику у межах одного інвестиційного плану, що теж є великим плюсом, оскільки, як правило, невеликою частиною коштів інвестор готовий ризикнути, але не всіма, тобто можна задовольнити подібну потребу при формуванні одночасно декількох портфелів, що не можна було б зробити в одному. Також можна швидше і з меншими втратами змінювати пріоритетність цілей інвестора. Розробка інвестиційного плану буде вестись зі створенням трьох інвестиційних портфелів: для консервативного типу інвестора з мінімізацією ризику, для агресивного типу інвестора з максимізацією прибутку та для помірно-агресивного типу інвестора де поєднуються ці дві цілі та ризик, як і рентабельність, знаходяться на середньому рівні. У цьому полягає новизна розробки робо-едвайзеру з диверсифікацією на рівні портфелів, а не тільки фінансових інструментів всередині одного портфеля.

## **2.4 Створення портфелю для кожного типу цілей інвестора**

Як вже згадувалось вище, диверсифікація буде проводитись на рівні портфелів всередині кожного інвестиційного плану. При цьому, кожній цілі інвестора буде відповідати тип інвестора з цього переліку:

- консервативний;

- помірно-агресивний;
- агресивний.

Перше обмеження, яке накладається на портфель, це позитивні частки всіх цінних паперів для  $i=1, \dots, n$ :

$$x_i > 0$$

Друге обмеження полягає в тому, що сума всіх часток цінних паперів повинна складати 1, це правило нормування часток. Наступна формула показує це обмеження:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Так само прибутковість портфеля буде виглядати як сума доходностей окремих фінансових інструментів з вибраними за уподобаннями інвестора ваговими коефіцієнтами. Оскільки агресивний інвестор намагається максимізувати отримувану прибутковість, то необхідно буде максимізувати цю цільову функцію у вигляді наступної формули ( $m_i$  – очікувана доходність  $i$ -го фінансового інструменту):

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i \rightarrow \max$$

Крім прибутковості інвесторові необхідно також врахувати і ризик, пов'язаний з тим чи іншим фінансовим інструментом. Ризик за Марковіцем виражається у вигляді середньоквадратичного відхилення  $\delta_i$  кожної акції. Значення  $\delta_p$  - це рівень прийняттого ризику для інвестора. Крім обліку середньо-квадратичного відхилення окремих фінансових інструментів необхідно врахувати кореляцію між їхньою прибутковістю ( $r_{ij}$ ). В результаті ризик всього портфеля представлений формулою::

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j r_{ij} \delta_i \delta_j} < \delta_p$$

Економіко-математична модель задачі формування оптимального портфелю фінансових інструментів максимальної ефективності, тобто портфеля для агресивного типу інвестора, при якій ризик портфелю не

перевищує заданого значення  $\delta_p$ , і при врахуванні всіх обмежень на портфель, буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i x_i \rightarrow \max; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j r_{ij} \delta_i \delta_j} < \delta_p; \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1; \\ x_i > 0 \end{cases}$$

Зворотня задача оптимізації портфеля зводиться до вибору такої структури портфеля, прибутковість якого вище або дорівнює заданому значенню  $m_p$ , а ризик мінімальний. Таким чином ми отримуємо портфель для консервативного типу інвестора. Економіко-математична модель задачі в цьому випадку набуде вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i x_i \geq m_p; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j r_{ij} \delta_i \delta_j} \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1; \\ x_i > 0 \end{cases}$$

При розробці портфелю для помірної-агресивного типу інвестора ми одночасно намагаємось мінімізувати ризик та максимізувати прибуток, при цьому ризик буде нижчим, ніж у двох попередніх типів інвесторів, так як і прибутковість вкладень. Таким чином отримуємо таку економіко-математичну модель задачі:

$$\begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \delta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j r_{ij} \delta_i \delta_j} \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n m_i x_i \geq m_p \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1; \\ x_i > 0 \end{cases}$$

## РОЗДІЛ 3

# РОЗРОБКА РОБОТИЗОВАНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ПРИЙНЯТТЯ ІНВЕСТИЦІЙНИХ РІШЕНЬ РОБО-ЕДВАЙЗЕР

### 3.1 Типовий сценарій роботи робо-едвайзера

Для успішної розробки оптимального інвестиційного портфелю, перш за все, треба розробити функції, які мають бути виконані.

Першим кроком робот пропонує вибрати мету інвестування: зберегти заощадження, накопичити 1 000 000 гривень, накопичити на автомобіль, накопичити на дім, накопичити на пенсію, зібрати достатньо грошей на освіту дітям, інше, тощо. Це потрібно, по-перше, для того, щоб визначити схильність до ризику користувача. По-друге, цілі допомагають нам у диверсифікації на рівні інвестиційних портфелів.

Наступним кроком користувачу пропонується відповісти на ряд питань. Серед них, наприклад, можуть бути такі:

- вік;
- дохід;
- який процент своїх заощаджень ви бажаєте інвестувати;
- що з наведеного найкраще описує фінансовий стан вашої родини (я заробляю один і маю одного чи кількох людей під опікою, ми заробляємо разом з партнером і маємо одного чи кількох людей під опікою, я заробляю один і нікого не маю під опікою, ми заробляємо з партнером і не маємо нікого під опікою);
- якщо є збалансований портфель, який знизився на 20%, при цьому не потрібні гроші в середньостроковій перспективі, що

ви будете робити (буду чекати відновлення зростання, буду чекати зростання але не більш одного року, буду чекати зростання але не більше 3 місяців, відразу оберу консервативні інвестиції).

Ці питання допомагають створити психологічний та інвестиційний портрет користувача, визначається його схильність до ризику.

The image shows a questionnaire with four questions:

- 1. Вкажіть свій вік**  
A slider scale from 18 to 80. The value 40 is selected.
- 2. Яке з тверджень найкраще описує фінансовий стан вашої родини?**  
Four radio button options:
  - Я заробляю один і нікого не маю під опікою
  - Я заробляю один і маю одного чи кількох людей під опікою
  - Ми заробляємо з партнером і не маємо нікого під опікою
  - Ми заробляємо разом з партнером і маємо одного чи кількох людей під опікою
- 3. Який ваш дохід після сплати податків (у гривні)**  
A slider scale from 30,000 to 500,000. The value 150,000 is selected.
- 4. Який відсоток ваших доходів у місяць ви витрачаєте на життєві потреби?**  
A slider scale from 0 to 100. The value 30 is selected.

Рисунок 3.1 – Скріншот з прототипу робо-едвайзера, сторінка опитувальника

Далі, третім кроком, програмою буде вестись розробка трьох інвестиційних портфелів: для консервативного типу інвестора з мінімізацією ризику, для агресивного типу інвестора з максимізацією



прибутку та для помірно-агресивного типу інвестора де поєднуються ці дві цілі. Пропорції розподілу інвестованих коштів будуть пропонуватися в залежності від отриманого на попередніх кроках ризик-профілю.

На четвертому кроці користувачу на основі розрахунків буде пропонуватися інвестиційний план з розробленими інвестиційними портфелями. Користувач буде мати змогу обрати всі чи деякі з запропонованих інвестиційних портфелів або змінити пропорцію розподілу коштів, якщо деякі з запропонованих портфелів сподобаються йому більше ніж інші.

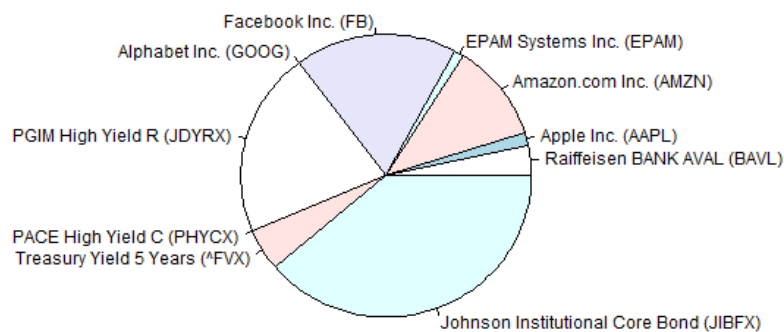


Рисунок 3.2 – Скріншот з прототипу робо-едвайзера, сторінка запропонованого портфелю у виді кругового графіку

Assets	Weights
Raiffeisen BANK AVAL (BAVL)	3.52
Apple Inc. (AAPL)	1.38
Amazon.com Inc. (AMZN)	11.18
EPAM Systems Inc. (EPAM)	1.12
Facebook Inc. (FB)	17.98
Alphabet Inc. (GOOG)	0.00
PGIM High Yield R (JDYRX)	21.25
PACE High Yield C (PHYCX)	0.00
Treasury Yield 5 Years (^FVX)	4.78
Johnson Institutional Core Bond (JIBFX)	38.79

Рисунок 3.3 – Скріншот з прототипу робо-едвайзера, сторінка запропонованого портфелю у виді таблиці

Наступним кроком може бути запропонована періодичність ревізії інвестиційних портфелів. Це потрібно для того, щоб збалансувати портфелі відповідно до змін ринку, інвестиційних цілей користувача або інших його побажань.

## **3.2 Вибір технологій розробки**

### **3.2.1 Мова програмування R**

R - мова програмування, призначена для статистичної обробки даних і роботи з графікою. Так само вона є вільним програмним середовищем обчислень з відкритим вихідним кодом в рамках проекту GNU [27].

Був розроблений співробітниками статистичного факультету Оклендського університету Россом Айхекой і Робертом Джентлменом на основі мови S [28]. З 2011 року підтримується і розвивається організацією R Foundation.

R підтримує безліч статистичних та чисельних методів і має гарну розширюваність за допомогою пакетів. Кожен такий пакет являє собою бібліотеку, яка містить набір специфічних функцій. Так само, однією з особливостей мови є підтримка графічних можливостей, яка дозволяє візуалізувати дані у вигляді різних графіків і діаграм.

Всі пакети і виконуючого середовища поширюються через CRAN (Comprehensive R Archive Network)[29]. Існує безліч дзеркал для зручного поширення, але головний вузол розташований у Відні (Австрія).

Пакети мови R містять відмінну довідку по будь-яких функцій / пакетам мови. Для того, щоб отримати довідку з цікавої теми, можна використовувати `help` («ім'я команди»).

Для того, щоб використовувати наведений мову програмування, будуть потрібні відповідне середовище розробки. У мови R існує кілька розроблених для нього графічних інтерфейсів: JGR, RKWard, SciViews-R, Statistic Lab, R Commander, Rattle, RStudio. Кожна з цих середовищ по-своєму унікальна, відмінно підходить для вирішення певного кола завдань, використовуючи для цього мову R. Але найбільшого поширення отримано середовище RStudio - графічний інтерфейс з відкритим вихідним кодом.

Загалом, можна виділити такі переваги мови програмування R:

- В основному, він був спрямований на роботу зі статистичними методами.
- R має кілька графічних бібліотек, таких як ggplot2 і plotly, які роблять його дуже популярним завдяки якісним звітам і зображенням, які ми можемо генерувати.
- Ми можемо використовувати R для декількох статистичних функцій, таких як регресія, кластеризація, класифікація, статистичне тестування і т. Д. Отже, R має безліч підтримуваних операцій для машинного навчання і статистичних завдань.
- R - це мова програмування з відкритим вихідним кодом, що означає, що користувачі можуть брати активну участь у розвитку зростаючої мови, а також користуватися багатьма перевагами без будь-якої ліцензії.
- Будучи заснованою на інтерпретаторі мовою, R може негайно запуснути скрипт і надати висновок користувачеві. Це дозволяє легко відлагодити код.
- Має більше 7000 перевірених пакетів.
- Гнучкий у використанні, так як дозволяє створювати / редагувати скрипти і пакети, взаємодіє з іншими мовами,

такими: C, Java і Python, може працювати з форматами даних для SAS, SPSS та STATA.

- Активна спільнота користувачів та розробників.
- Регулярні оновлення, хороша документація і технічна підтримка.

Так як основний вибір був між мовами R та Python, перевага надалась саме мові програмування R через те, що основна робота ведеться саме зі статистикою та обробкою інформації. Мову програмування Python було вирішено залишити для тестування та парсингу даних з мережі Інтернет.

### 3.2.2 Мова програмування Python

Як про це йшла мова раніше, Python використовується у проекті у якості «допоміжної» мови програмування. За допомогою неї з мережі Інтернет, а саме з сайтів з фінансовою статистикою, наприклад таких як <https://finance.yahoo.com/> та інших, береться інформація про акції та інші фінансові інструменти. Також за допомогою цієї мови програмування проводились тести створеної програми.

Однією з найбільш популярних мов програмування сьогодні є Python. Це високорівнева мова програмування загального призначення. Відноситься до інтерпретуємих мов, тобто написаний на Python код інтерпретується в момент звернення програмою-інтерпретатором без попередньої компіляції. Крім того, Python це мова з динамічною типізацією. Мова Python є оптимальним інструментом для написання макросів і активно застосовується для роботи, де вимагається швидка розробка проектів. Мова включає безліч пакетів і модулів, що забезпечують її універсальність. Застосування Python дозволяє програмістам економити час.

До переваг мови програмування Python можна віднести:

- Це багатоцільова мова програмування, яку ми можемо використовувати для самих різних завдань.
- В Python є бібліотека для кожного завдання. Починаючи з розробки веб-додатків і закінчуючи тестуванням і вивченням даних, Python пропонує рішення для всього.
- Він надає достатню кількість бібліотек, які ми можемо використовувати для різних операцій машинного навчання, а також передових методологій глибокого навчання.
- Python забезпечує плавну криву навчання, що робить його дуже популярним серед новачків, а також досвідчених програмістів, які хочуть перейти до розробки, використовуючи Python в якості основної мови. Завдяки великим бібліотекам підтримки, він стає вибором для багатьох операцій, так як користувачі Python вважають, що мова є єдиним рішенням багатьох проблем.
- Python також є мовою програмування з відкритим вихідним кодом, в якій є багато проектів, в яких користувачі можуть брати активну участь.
- Ми можемо проаналізувати скрипти Python, а також відразу запустити їх. Крім того, ми можемо зберегти Python як скомпільовані програми, на які можуть посилатися інші програми.

Як можна побачити, саме Python ідеально підходить для задач тестування та створення скриптів для парсингу даних.

## ВИСНОВКИ

У результаті кваліфікаційної роботи (проекту) відповідно до завдання була програма «Робо-едвайзер» з використанням таких технологій: мова програмування R та Python.

У кваліфікаційній роботі (проекті) було проведено аналіз та обґрунтування вибору моделі для розробки робо-едвайзеру, мови програмування, а також було проведено аналіз роботизованої системи для прийняття інвестиційних рішень робо-едвайзер як предметної області для кваліфікаційної роботи (проекту). Розроблена в ході виконання кваліфікаційної роботи (проекту) програма «Робо-едвайзер» є актуальною на сьогодні і має велику практичну значущість. Вона допомагає оптимально створити інвестиційний план та уникнути помилок, які притаманні людям.

В результаті виконання цієї кваліфікаційної роботи (проекту) були вирішені завдання, які були поставлені на початку роботи, а саме:

- було оброблено теоретичний матеріал зарубіжних та вітчизняних дослідників щодо роботизованих систем для прийняття інвестиційних рішень робо-едвайзер;
- розроблено математичну модель для диверсифікації на рівні портфелів для трьох типів цілей інвестора, яка була успішно використана при розробці програми;
- вибрано оптимальні інструменти для розробки робо-едвайзеру, а саме R та Python;
- було розроблено робочий прототип робо-едвайзеру.

При цьому були враховані та виконані усі вимоги, висунені під час виконання цієї роботи.

Розроблена програма виконує усі свої функції і може бути використана при формуванні інвестиційних планів для інвесторів з різними сумами інвестицій.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Schueffel, Patrick. The Concise Fintech Compendium, Fribourg. Switzerland, School of Management Fribourg (HEG-FR), 2017. 364 с.
2. Sironi, Paolo. FinTech Innovation: From Robo-Advisors to Goal Based Investing and Gamification (The Wiley Finance Series). Wiley, 2016. 180 с.
3. Robo-advisors – friend or foe? Investors’ perception URL: <https://www.initio.eu/blog/2018/6/21/robo-advisors-friend-or-foe-investors-perception> (last accessed: 14.04.2020).
4. Design and Architecture of A Robo-Advisor Platform..(3/3) URL: <https://www.vamsitalkstech.com/?p=2354> (last accessed: 14.04.2020).
5. What Is a Robo-Advisor? URL: <https://www.investopedia.com/terms/r/roboadvisor-roboadviser.asp#:~:text=The%20best%20robo%2Dadvisors%20offer,c omprehensive%20education%2C%20and%20low%20fees> (last accessed: 15.04.2020).
6. Brunel Jean L.P. Goals-Based Wealth Management in Practice. CFA Institute Conference Proceedings Quarterly, 2012. 272 с.
7. Wealthfront taps Silicon Valley’s new rich to top \$500m URL: <https://www.ft.com/content/f13a0ab2-aa85-395c-b853-4df573d8f42e> (last accessed: 15.04.2020).
8. How new digital investment services are changing the world URL: <https://pdf4pro.com/view/how-new-digital-investment-services-are-changing-the-514294.html> (last accessed: 15.04.2020).
9. Robo-Advisors to Become \$1.4T Industry This Year URL: <https://www.tradersmagazine.com/news/robo-advisors-to-become-1-4t->

[industry-this-year/](#) (last accessed: 15.04.2020).

10. Robo-Advisory in Wealth Management URL: [https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/de/Documents/financial-services/Robo\\_No\\_2.pdf](https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/de/Documents/financial-services/Robo_No_2.pdf) (last accessed: 15.04.2020).

11. 10 Disruptive trends in wealth management URL: <https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/us/Documents/strategy/us-cons-disruptors-in-wealth-mgmt-final.pdf> (last accessed: 15.04.2020).

12. Blackrock Acquires FutureAdvisor For \$150M As Yet Another Robo-Advisor Pivots To Become An Advisor #FinTech Solution URL: <https://www.kitces.com/blog/blackrock-acquires-futureadvisor-for-150m-as-yet-another-robo-advisor-pivots-to-become-an-advisor-fintech-solution/> (last accessed: 15.04.2020).

13. Developing a robo-advisor typology – lessons from action design research at Beterinbeleggen.nl URL: [http://essay.utwente.nl/75436/1/Akkerman\\_BA\\_BMS.pdf](http://essay.utwente.nl/75436/1/Akkerman_BA_BMS.pdf) (last accessed: 15.04.2020).

14. Possible Pitfalls of Robo-Advisers URL: <https://www.aaii.com/journal/article/a-look-at-possible-pitfalls-of-robo-advisers> (last accessed: 15.04.2020).

15. FINRA scrutinizes digital investment advice, 'robo-advisers' URL: <https://www.complianceweek.com/finra-scrutinizes-digital-investment-advice-robo-advisers/11009.article> (last accessed: 15.04.2020).

16. Kokfai Phoon and Francis Koh. Robo-Advisors and Wealth Management. Journal of Alternative Investments, 2018. 79-94 c.

17. Wealthfront vs. Charles Schwab Intelligent Portfolios: Which Is Best for You? URL: <https://www.investopedia.com/wealthfront-vs-charles-schwab-robo-advisors-4693442> (last accessed: 15.04.2020).



18. To Advise, or Not to Advise—How Robo-Advisors Evaluate the Risk Preferences of Private Investors (Digest summary)  
URL: <https://www.cfainstitute.org/research/cfa-digest/2019/01/dig-v49-n1-1> (last accessed: 15.04.2020).
19. Regulating Robo Advice Across the Financial Services Industry  
URL: [https://scholarship.law.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2742&context=faculty\\_scholarship](https://scholarship.law.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2742&context=faculty_scholarship) (last accessed: 15.04.2020).
20. Digital Wealth  
URL: <https://www.burnmark.com/research/2> (last accessed: 16.04.2020).
21. Robo-Advisors worldwide. Statista market forecast . URL : <https://www.statista.com/outlook/337/100/robo-advisors/worldwide> (last accessed: 16.04.2020).
22. Robo-Advisors 2019: Still Waiting for the Revolution.  
URL: <https://www.investopedia.com/robo-advisors-2019-where-have-all-the-assets-gone-4767826> (last accessed: 16.04.2020).
23. Aaron Klein. «Vanguard Personal Advisor Services Exceeds \$100 billion AUM» URL: <https://fppad.com/tag/aaron-klein/> (last accessed: 16.04.2020).
24. Research “Future of fintech 2018” URL: <https://www.cbinsights.com/research/future-of-fintech-2018/> (last accessed: 16.04.2020).
25. Harry Markowitz Portfolio Selection, 1952 URL: [https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz\\_JF.pdf](https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf) (last accessed: 06.05.2020).
26. Коломина М.Е. Формирование портфеля ценных бумаг. М., 2015. 395 с.
27. Чухно А.А., Юхименко П.І., Леоненко П.М. Сучасні економічні теорії. К.: Знання, 2004. 878 с.
28. Мертенс А. В. Инвестиции: курс лекций по

современной финансовой теории. К., 2004. 416 с.

29. Довбенко М.В. Сучасна економічна теорія. Економічна нобелелогія. К., 2005. 336 с.

30. О. І. Замковий Портфельні теорії інвестування Д., 2020. 70 с.

31. Портфельна теорія Тобіна URL: [https://stud.com.ua/73277/finansi/portfelna\\_teoriya\\_tobina](https://stud.com.ua/73277/finansi/portfelna_teoriya_tobina) (дата доступу: 15.05.2020)

32. І. П. Васильченко, З. М. Фінансова математика К., 2012. 249 с.

33. Уильям Ф. Шарп Инвестиции. М., 2011. 1028 с.

34. Суторміна В.М. Фінанси зарубіжних корпорацій. К., 2004. 190-195 с.

35. Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бейли. Инвестиции. М., 2001. 212 с.

36. Киреева Ю.Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. М., 2018. 164 с.

37. В. М. Олійник Моделювання емерджентної економіки С., 2019. 207 с.

38. The Benefits of Modern Portfolio Theory URL: <https://www.aaii.com/journal/article/the-benefits-of-modern-portfolio-theory> (last accessed: 21.05.2020).

39. The R Project for Statistical Computing URL: <https://developer.r-project.org/www.gnu.org/R.html> (last accessed: 28.10.2020).

40. R (язык программирования) URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/R\\_\(%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA\\_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/R_(%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F)) (дата доступу 28.10.2020).

41. The Comprehensive R Archive Network URL:  
<https://cran.r-project.org/> (last accessed: 28.10.2020).

