МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЯДИ, ЇХ ЗБІЖНІСТЬ ТА ПІДСУМОВУВАНІСТЬ МАТРИЧНИМИ МЕТОДАМИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала студентка 2 курсу
Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Кошеварова Анна Олександрівна
Керівник доцент, кандидат фізико-математичних наук, професор
Кузьмич Валерій Іванович
Рецензент доцент, кандидат фізико-математичних наук
Вейцбліт Олександр Йосипович

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Ряди широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь.

Вони відіграють важливу роль у математиці принаймні з двох причин: є ефективним інструментом математичних досліджень і одним із найважливіших засобів побудови практичних чисельних методів.

Широким застосуванням теорії рядів і пояснюється актуальність теми дипломної роботи. Метою роботи є вивчення основних методів підсумовування рядів.

Теорія рядів почала розвиватися в кінці XVII ст. але була створена лише в XIX ст. на основі поняття границі в роботах Гаусса, Коші. Багато математиків минулого працювали над проблемою знаходження суми ряду. Ейлер в статті «Про розбіжні ряди» (1754-1755р.) називає ряд збіжним, якщо його члени прямують до нуля, і розбіжним в іншому випадку. Надаючи кожному ряду числове значення, яке Ейлер називає сумою ряду, він підкреслює, що частинні суми не завжди мають точне значення, рівне сумі.

Отже, підсумовувати ряд вдалось в тому випадку, коли ряд збіжний: задача підсумовування зводилась лише до відшукання границі послідовності частинних сум. Що ж стосується розбіжних рядів, то в даному випадку застосування частинних сум не дає бажаного результату. Тому для підсумовування розбіжних рядів необхідно було побудувати іншу теорію.

Мета даної роботи полягає у розгляді основних методів дослідження матричних методів підсумовування рядів, опису їх властивостей та співвідношення між цими методами, зокрема, метою роботи є огляд та систематизація результатів з підсумовування рядів

Фур'є класичними методами.

Об'єктом дослідження виступають дискретні та напівнеперервні методи підсумовування рядів, а **предметом дослідження** – збіжність та підсумовуваність числових, тригонометричних рядів Фур'є.

Виходячи з мети, визначені основні **завдання роботи**:

1. Навести основні твердження і найважливіші теореми, що стосуються теорії рядів та поняття збіжності.
2. Розглянути найбільш поширені методи підсумовування рядів, вивчити їх властивості.
3. Класифікувати матричні методи в залежності від включень полів підсумованості рядів.
4. Систематизувати результати з підсумовування тригонометричних рядів Фур'є.

Основні методи, що використовувалися в дослідженні – це загальні матричні методи класичного та функціонального аналізу, теорії підсумовування рядів та функцій, зокрема, метод граничного переходу, метод оберненого перетворення.

Робота складається з двох основних розділів.

В першому розділі наведено деякі положення теорії рядів. Зокрема, в ньому розглянуто основні поняття та означення теми, а також найпростіші властивості числових рядів та лінійні методиперетворення рядів, лінійні методи перетворення рядів.Твердження цього розділу є допоміжними при виконанні завдань дослідження.

В другому розділі розглядаються основні методи класичного підсумовування рядів, такі як метод Чезаро, метод Пуассона- Анабеля. Крім того, в ньому наведені співвідношення та порівняння цих двох методів, а також розглянуто узагальнені методи Чезаро та метод Бореля.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами навчальних закладів.

У третьому розділі зроблено огляд ознак збіжності тригонометричних рядів Фур'є. Розглянуті середні арифметичні та Пуассона-Абеля рядів Фур'є та умови підсумовування їх цими методами. Розглянуто питання локальної властивості збіжних рядів Фур'є, та їх абсолютної підсумовуваності.

Апробація результатів дослідження проводилась на Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції «Іноваційні технології навчання природничо- математичних дисциплін у закладах середньої та вищої освіти», яка проходила 16 червня 2020 року, (м. Херсон). У матеріалах конференції надрукована стаття «Тригонометричні ряди, їх збіжність та підсумовуваність матричними методами», а також надрукована стаття у збірці «Пошук молодих вчених» на тему «Підсумовування тригонометричних рядів дискретними та матричними методами»

Практичне значення. Результати дослідження можуть використовуватися студентами при вивчені математичних дисципліни; викладачами при проведені занять.

Структура і обсяг роботи.Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел у кількості 44 одиниць. Загальний обсяг роботи – 55 сторінки.

РОЗДІЛ 1
ЗАГАЛЬНІ МАТРИЧНІ МЕТОДИПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

1.1. Основні поняття та означення. Найпростіші властивості числових рядів

Нехай $u_1, u_{2,}, \dots, u_n, \dots$ – деяка послідовність чисел.

Означення. Числовимрядом називають вираз $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ або

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (1.1)$$

Числа$u_1, u_{2,}, \dots, u_n, \dots$ називаються його членами, а u_n-ззагальним членом.

Утворимо скінчені суми:

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

ці суми називаються частинними сумами числового ряду.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$S = \lim_{n\to\infty} S_n (1.2)$послідовності частинних сум, то ряд (1.1) називається *збіжним*, а число S вважають його *сумою* і записують:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Якщо ж границя (1.2) нескінченна або зовсім не існує, то ряд (1.1) називають *розбіжним* і вважають, що він суми не має [2-5].

Найпростішим прикладом нескінченого ряду є геометрична прогресія

$$u + uq + uq^2 + \dots + uq^n + \dots,$$

її частинна сума буде

$$S_n = \frac{u - uq^n}{1 - q} \text{ (якщо } q \neq 1)$$

Якщо$|q| < 1$, то S_n має скінченну границю:$S = \frac{u}{1-q}$то ряд збігається і S буде його сумою[3].

Розглянемо деякі властивості збіжних рядів:

1. Якщо ряд$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$збіжний і має сумуS, то ряд$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$також збіжний і сума його дорівнює . Іншими словами, збіжний ряд можна множити почленно на одне і те саме число[4].
2. Збіжні ряди можна почлено додавати та віднімати, тобто якщо ряди$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$збіжні і мають суми відповідно S та σ, то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$і суми їх дорівнюють $S \pm \sigma$.
3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.
4. (Необхідна умова збіжності ряду.) Якщо ряд$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$збіжний, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше користуються такими достатніми умовами (ознаками) збіжності, як ознаки порівняння, ознаки Д'Аламбера і Коші та інтегральна ознака Коші[16].

Теорема1 (ознаки порівняння). Нехай задано два ряди з невід'ємними членами

$\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots + \mathrm{u}_\mathrm{n} + \cdots, \quad \mathrm{u}_\mathrm{n} \geq 0$,(1.3)

$\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \cdots + \mathrm{v}_\mathrm{n} + \cdots, \quad \mathrm{v} =\geq 0$ (1.4)

і для всіх nвиконується нерівність

$\mathrm{u}_\mathrm{n} \leq \mathrm{v}_\mathrm{n}.$ (1.5)

Тоді, якщо ряд (1.4) збіжний, то збіжний і ряд (1.3). Якщо ряд (1.3) розбіжний, то розбіжний і ряд (1.4)[7].

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$,(1.6)

$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$,(1.7)

причому існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a(a \neq 0, a \neq \infty),$$

то ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Теорема 3 (ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами (1.6) існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, mo$:

1) ряд збіжний при;
2) ряд розбіжний при $\mathrm{l}>1$.

Теорема 4 (ознака Коші) Якщо для ряду (1.6) з додатними членами існуєграниця$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то цей ряд збіжний при $\mathrm{l}<1$і розбіжний при $\mathrm{l}>1$.

Розглянемо ряд, в яких знаки членів строго чергуються:

$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$,(1.8)

де $u_n>0, n=1,2,\ldots$. Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою такої достатньої ознаки[13].

Теорема 5 (ознака Лейбніца). Ряд (1.8) збіжний, якщо :

1) $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1}<\mathrm{u}_{\mathrm{n}}, \mathrm{n}=1,2,\ldots$,(1.9)

2) $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{u}_{\mathrm{n}}=0$.(1.10)

При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

Візьмемо довільний знакозмінний ряд

$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$,(1.11)

де числа u_{n} можуть мати довільний знак. Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів ряд

$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$. (1.12)

Для знакозмінних рядів справедлива така ознака збіжності.

Теорема 6. Якщо ряд (1.12) збіжний, то збіжний і ряд (1.11).

Знакозмінний ряд (1.11) називають абсолютно збіжним, якщо ряд(1.12), утворений з модулів його членів, є збіжним[15].

Якщо ж ряд (1.11) збіжний, а ряд (1.12), утворений з модулів його членів розбіжний, то ряд (1.11) називають умовно збіжним.

Розглянемо функціональні ряди,тобто ряди членами якого є функції визначені на деякій множині E:

$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_3(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.(1.13)

Якщо взяти довільне число $x_0 \epsilon$Ëі в ряді (1.13) покласти $x = x_0$то дістанемо числовий ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0). \quad (1.14)$$

Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо ряд (1.14) є збіжним, то точка x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду (1.13). Якщо ж ряд (1.14) є розбіжним, то точкаx_0називається точкою розбіжності ряду (1.13). Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається областю його збіжності[21-14].

Частинна сума функціонального ряду є функцією від x і визначається за аналогією з числовими рядами:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

У кожній точці x, яка належить області збіжності ряду (1.13), існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, яку називають сумою ряду (1.13) і записують

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

Функціональний ряд (1.13) називається рівномірно збіжним на множині , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить лише від εі не залежить від x, що для всіх і для всіх $x \epsilon D$ виконується нерівність $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ [26].

Теорема 7 (ознака Вейєрштрасса)[14]. Функціональний ряд (1.13) абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку $[a; b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,   (1.15)

такий що $|u_n(x)| \le a_n, \forall x \in [a; b]$,

$n = 1,2, \dots$.   (1.16)

1.2 Лінійні методи перетворення рядів

З'ясуємо збіжність і знайдемо суму ряду

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots.$ (1.17)

Зауважимо, що при будь-якому n=1,2,…

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

Розглянемо ряд

$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots.$ (1.18)

Очевидно, для цього ряду

$$s_1=1,$$

$$s_2=s_1+u_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$s_3=s_2+u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$s_4=s_3+u_4=1-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

…………………………..

Дляn парного: $\mathrm{n}=2\mathrm{k}$

$$s_{2k}=\left(1-\frac{1}{k+1}\right),$$

а для n непарного: $\mathrm{n}=2\mathrm{k}+1$

$$s_{2k+1}=1.$$

Звідси видно, що $\lim_{n\to\infty} s_n=1$ряд (1.18) збігається.

Приклади:

1. $$\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots=1$$

2. $$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots=1$$ [3].

Наступна теорема може розглядатися як узагальнення цього прийому:

Теорема 1.1. Нехай для ряду

$u_1+u_2+\cdots+\ u_n$ ...,(1.19)знайдеться така збіжна послідовність $t_1, t_2, \ldots t_n, \ldots$із границею T, що для будь-якого цілого додатного q і для всіх n=1, 2, … виконується $u_n=t_n-t_{n+q}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=t_1+t_2+\cdots+t_q-qT. \qquad (1.20)$$

Доведення. Позначивши через S_n n-ту частинну суму ряду (1.19), для будь-якого $n>q$ маємо

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(t_k-t_{k+q}\right)=\sum_{k=1}^{n}t_k-\sum_{k=1}^{n}t_{k+q}$$
$$=t_1+t_2+\cdots+t_q+t_{q+1}+\cdots+t_n-t_{q+1}-\cdots-t_n-t_{n+1}$$
$$-\cdots-t_{n+q}=t_1+t_2+\cdots+t_q-\left(t_{n+1}+\cdots+t_{n+q}\right).$$

При необмеженому зростанні *n* кожна із змінних t_{n+k} за умовою прямує до T, і отримаємо (1.20)[17-23].

Приклади:

1. Візьмемо довільне ціле додатне q. Тоді для будь-якого α, що не є цілим невід'ємним числом

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+a)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+q}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q(a+n)}-\frac{1}{q(a+n+q)}\right).$$

Покладемо

$$\frac{1}{q(a+n)}=t_{n.}$$

Очевидно, що $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$,і застосування доведеної теореми дає

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+q)}=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+q}\right).$$

2. Для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+q)(a+n+q)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(a+n)(a+n+q)}-\frac{1}{(a+n+1)(a+n+2)}\right),$$

можемо представити $t_n=\frac{1}{2}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$(очевидно тут при збільшенні n зміннat_n прямує до нуля) а q=1 і одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)}=\frac{1}{2(a+1)(a+2).}$$

Якщо $\text{a}=1/3$, то після множення ряду на $(1/3)^3$ отримаємо

$$\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\cdots=\frac{1}{54\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)}=\frac{1}{168}.$$

Подальше узагальнення доведеної теореми полягає в наступному:

Теорема 1.2. Нехай для ряду

$\mathrm{u}_1+\mathrm{u}_2+\cdots+\mathrm{u}_\mathrm{n}+\cdots$(1.21)

знайдеться така збіжна послідовність $\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2,\dots,\mathrm{t}_\mathrm{n},\dots$

із границею T, і такі і додатні числа $c_1, c_2, \dots, c_q$,що $c_1 + c_2 + \dots + c_q = 0$,і для будь – якого

$$n=1, 2, \dots u_n = c_1 t_n + \dots + c_q t_{n+q}. \quad (1.22)$$

Тоді ряд (1.21) збігається і

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (c_1 t_1 + (c_1 + c_2) t_2 + \dots + (c_1 + c_2 + \dots + c_{q-1}) t_{q-1} + (c_2 + 2c_3 + \dots + (q-1) c_q) T \ . \quad (1.23)$$

Доведення. Виразимо всі члени даного ряду (1.21) у вигляді (1.22) і так випишемо ці вирази одне під другим, щоб складові, що містять t з однаковими індексами розташовувались по одній вертикалі для економії місця здійснимо цей запис у формі таблиці 1(числа, які стоять в заголовках стовпців, множаться на всі числа, які стоять у відповідному стовпці і всі такі добутки підсумуються)[29].

t_1 t_2 t_3 … t_{q-1}	t_q ………….. t_n	t_{n+1} … t_{n+q-1} t_{n+q} …
c_1 c_2 c_3 … c_{q-1}	c_q ……….……	
c_1 c_2 … c_{q-2}	c_{q-1} …………	
c_1 … c_{q-3}	c_{q-2} …………	
……………	……………… c_q	
		c_q
	…………….. c_{q-1}	
		c_{q-1}
c_1	c_2………….. c_{q-2}	
	c_1……………. …	…
	…. .. …….. c_2	
		c_3 …. c_q
	……………… c_1	
		c_2 ….. c_{q-1} c_q
		………………..

Суми чисел в кожному із стовпців, які лежать між суцільними вертикальними лініями, рівні нулю, а із зростання n всі числа $t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+q-1}, t_{n+q}$ прямують до спільної границі T. Звідси випливає (1.23). Зручно користуватись цією теоремою при T=0.

Приклади:

1. Для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{3}{\sqrt{n+1}}-\frac{4}{\sqrt{n+2}})$$

маємо

$$t_n=\frac{1}{\sqrt{n}}, T=\lim_{n\to\infty} t_n=0, q=3, c_1=1, c_2=3, c_3=-4.$$

Тому його сума рівна

$$c_1t_1+(c_1+c_2)t_2+(c_3+2c_3)T=1+4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}.$$

2. Для ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}-\frac{2}{\ln(n+1)}+\frac{1}{\ln(n+2)}\right)$$

буде

$$t_n=\frac{1}{\ln n}, T=0, q=3, c_1=1, c_2=-2, c_3=1$$

так, що сума цього ряду буде рівна

$$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}=\frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 2\ln 3}.$$

3. Сума ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\sin\frac{\pi}{n}+2(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}+(n+2)\sin\frac{\pi}{n+2})$$

рівна $\sin\pi$ - $\sin\frac{\pi}{2}$ = -1.

4. Сума ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\sin\frac{\pi}{n}+(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1}+(n+2)\sin\frac{\pi}{n+2})-3(n+3)\sin\frac{\pi}{n+3})$$

рівна

$$\sin\pi+2\sin\frac{\pi}{2}+3\sin\frac{\pi}{3}+(1+2\cdot1-3\cdot3)\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}=2+\frac{3\sqrt{3}}{3}-6\pi$$
$$=2+\sqrt{3}-6\pi\ [25].$$

1.3. Загальні матричні перетворення рядів

Нехай $\alpha = (\alpha_{пк})$ – нескінченна матиця (n,к = 0, 1, ….).
Для даної послідовності ($\acute{U}_n$) утворимо середні

$$\acute{U}_n = \sum_k' \alpha_{nk} U_k.\text{(A)}$$

Якщо ряди (A) існують при будь-якому n = 0, 1, … і $\lim \acute{U}_n = \acute{U}$, тоді кажуть, що послідовність ($\acute{U}_n$) підсумовується методомα до суми U.

Перетворення (A) називається **матричним перетворенням**послідовності в послідовність.[4,с.9]

Поряд з матричним перетворенням (A) застосовуються і слідуючі матричні перетворення :

$$\acute{U}_n = \sum_k' \alpha_{nk} u_k \text{(B)}$$

ряду в послідовність;перетворення

$$\acute{u}_n = \sum_k' \bar{\alpha}_{nk} u_k \text{(C)}$$

ряду в ряд ;перетворення

$$\acute{u}_n = \sum_k' \bar{\alpha}_{nk} U_k \text{(D)}$$

послідовності в ряд. [11,с.85-112]

Матричний метод задається у вигляді одного з перетворень (A), (B), (C) або (D), причому метод і його матрицю усюди позначаємо однієї й тією ж буквою.

Якщо матричний метод A заданий у вигляді перетворень (A) або (B), то

$$A\{\sum u_n\} = A\ \{U_n\} = \lim U'_n\,,$$

у вигляді (C) або (D) – $A\{\sum un\} = A\ \{U_n\} = \sum u'_n$.

Матричний метод називається **трикутним,** якщо він заданий трикутним перетворенням. Метод $A = (\alpha_{nk})$ називається **нормальним**, якщо він трикутний і $\alpha_{nn} \neq 0$ при будь-якому n = 0,1,....

Усі чотири види перетворень самостійні. Покажемо, що легко переходити від перетворення (A) до (D) і назад, і від (D) до перетворення (C) і назад (тут же стане ясним і вибір наших позначень).[24,с.451]

Дійсно, через збіжність усіх рядів у перетворенні (A), маємо

$$\acute{u}_n = \bar{\Delta}\acute{U}_n = \sum_k a_{nk}U_k - \sum_k a_{n-1,k}\,U_k = \sum_k \bar{\Delta}\,a_{nk}\,U_k,$$

і, отже,

$\bar{a}_{nk} = \Delta\bar{a}_{nk}$.(1.24)

Аналогічно доводиться , що

$\bar{a}_{nk} = \Delta\bar{a}_{nk.}$(1.25)

Також навпаки, через збіжність усіх рядів у перетворенні (D), маємо

$$\acute{U}_n = \sum_{m=0}^{\acute{}n} \acute{u}_m = \sum_{m=0}^{n}\sum_k \bar{a}_{mk}\,U_k = \sum_k (\sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk})U_k\,,$$

і, отже,

$a_{nk} = \sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}$. (1.26)

Аналогічно

$a_{nk} = \sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}$. (1.27)

Для трикутних методів формули (1.26) і (1.27) набирають вигляд

$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk}$, (1.28)

$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk.}$(1.29)

Формула (1.24) є формулою переходу від перетворення (A) до перетворення (D); формула (1.26) - від (D) до (A); , формула (1.25) - від (B) до (C); формула (1.27) - від (C) до (B). Відзначимо, що перехід [18,с.141-142] від перетворення (A) до (B) або навпаки не завжди можливий. Тому в загальному випадку перетворення (A) і (B) самостійні. Однак, якщо метод трикутний, то всі чотири види перетворень рівносильні.[4,с.50]

Знайдемо тепер формули переходу від перетворення (A). до перетворення (B) і навпаки у випадку трикутного методу,

Дійсно,

$$\acute{U}_k = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} U_v = \sum_{v=0}^{n} u_n \sum_{v=0}^{v} u_k = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{v=k}^{n} a_{nv}) u_k$$

звідки

$\alpha_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \alpha_{nk}.$(1.30)

З формули (1.30) при k< n виводимо

$$\Delta\alpha_{nk} = \sum_{v=k}^{n} a_{nv} - \sum_{v=k+1}^{n} a_{nv} = a_{nk}$$

звідки (при всіх k)

$$a_{nk} = \Delta\alpha_{nk}. \qquad (1.31)$$

Формула (1.30) є формулою переходу від перетворення (A) до (B) у випадку трикутного методу, а формула (1.31) – від (B) до (A).[4,с.52]

1.4.Регулярніматричніперетворення. Включенняматричних методівпідсумовуванняpядів

Нехай A і B – два методи підсумовування.Якщо Á ∋ B́ , то кажуть, що метод B включає метод A, або, що метод B не слабкіше метода A, і пишуть B ∋ A .Якщо при цьому знайдеться хоча б один ряд, підсумований методом B, але не підсумований методом A, то говорять, що метод B сильніше метода A (або A слабкіше метода B).

Якщо B$\{\sum u_n\} = A\{\sum u_n\}$ для будь-якого ряду $\sum u_n$ з множини Á ∩ B́, то кажуть, що метод A та B спільні.

Якщо одночасно B ∋ A та A ∋ B, то говорять, що методи A та B рівносильні, та пишуть A~B (іншими словами, A~B коли Á = B́).Аналогічно вищезазначеному визначаються й інші включення.

Наприклад, B ∋ |A| означає, що метод B підсумовує всі |A| - підсумовуючі ряди; |B| ∋ A_0 означає, що метод B абсолютно підсумовує всі A- обмежені ряди.

Можливі наступні дев’ять включень:

$$\mathrm{B} \ni \mathrm{A}|\mathrm{B}| \ni \mathrm{AB}_0 \ni \mathrm{A}$$

$$\mathrm{B} \ni |\mathrm{A}||\mathrm{B}| \ni |\mathrm{A}|\mathrm{B}_0 \ni |\mathrm{A}|$$

$$\mathrm{B} \ni \mathrm{A}_0|\mathrm{B}| \ni \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \ni \mathrm{A}_0$$

Подивимось, як дізнатися, коли має місце яке – небудь з останніх співвідношень. Для цього нам потрібно поняття добутку методі. Добутком матричних методів В і С називається А=СВ, який визначається у вигляді перетворення (А) матрицею $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{nk})$ з елементами $a_{nk=\sum_v c_{nv} b_{vk}}$ (добуток СВ існує, якщо всі ряди, визначаючі елементи a_{nk},збігаються). Якщо методи В та С трикутні, то завжди існує добуток СВ, бо $a_{nk} \sum_{v=k}^{n} c_{nv} b_{vk}$ тепер мрже бути доведена.

Теорема 1.3: Нехай метод А нормальний і В трикутний; $\alpha, \beta = l, c, m$. Для того, щоб мало місце включення βВ $\ni$ αА, необхідно і достатньо, щоб метод$G = BA^{-1} = (\sum_{v=k}^{n} b_{nv} \varepsilon_{vk})$задовольняв умовам перетворення $\alpha \to \beta$. При $\alpha, \beta \neq m$ для сумісності методів А і В необхідна та достатня відповідна регулярність [28,с. 30] метода G.

Доведення заводиться к знаходженню умов, коли $\{u_k\} \in \beta B$ при будь-якій послідовності $\{u_k\} \in \alpha A$. Позначимо

$$\acute{u}_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} u_k$$

$$u_n'' = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} u_k$$

Бачимо, що нам залишається показати, що $\{u_n''\} \in \beta$ при будь-якій послідовності $\{u_n'\} \in d$. Останнє, однак, має місце тоді і тільки тоді, якщо метод, однак, має місце тоді і тільки тоді, якщо метод $G = (g_{nk})$ задовольняє умовам перетворення $\alpha \to \beta$, бо, в силу нормальності метода А, застосовуючи $u_{n=\sum_{k=0}^{n} \varepsilon nk} u_k'$, знаходимо

$$u_{n=}'' \sum_{v=0}^{n} b_{nv} \sum_{k=o}^{v} \varepsilon_{vk}\, u_k' = \sum_{k=0}^{n} u_k' \sum_{v=k}^{n} b_{nv}\, \varepsilon_{vk} = \sum_{k=0}^{n} g_{nk}\, u_k'.$$

Якщо ж метод Gрегулярний, то $lim\, u''_n = lim\, u'_n$, і метод B сумісний з методом A.

Теорема 1.4: нехай $A = (a_{nk})$, обернений, а B $= (b_{nk})$ – довільний матричний метод. Для того, щоб мало місце включення B ∋ A, необхідно і достатньо виконання умов:

1. B – підсумовування послідовностей $\{\varepsilon nk\}$ і $\{\varepsilon n\}$,
2. $sup_m \sum_k \lfloor \sum_{v=0}^{m} b_{nv}\varepsilon_{nk} \rfloor < \infty$, (n = 0, 1…..),
3. $\sum_k |\sum_v b_{nv}\, \varepsilon_{vk}| = 0$, (n = 0, 1…..),

Де $(\varepsilon_{nk}) = A^{-1}$,$\varepsilon n = \sum_k \varepsilon_{nk}$.

При цьому для сумысності A і B необхідно і достатньо виконання умов:

B$\{\varepsilon_{nk}\} = 0$, (k=0,1….) та $B\{\varepsilon_n\} = 1$.

РОЗДІЛ 2.
ДЕЯКІ КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ТА СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ НИМИ

2.1. Метод підсумовування Чезаро

В якості підсумовуючої функції для ряду $U: u_1 + u_2 + \cdots$ візьмемо границю середніх арифметичних частинних сум S_k цього ряду, тобто

$$S_c(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{k} u_l\,.$$

Таке розуміння суми ряду називається його підсумовування за Чезаро[17-19].

Приклади:

1. Для ряду 1-1 + 1-1 + 1- ... маємо

$$S_k = \begin{cases} 1, \text{для непарного } k \\ 0, \text{для парного } k \end{cases}$$

Тому

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{n}(1+0+1+0+\cdots) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n}, \text{для непарного } k \\ \dfrac{1}{2}, \text{для парного } k \end{cases}$$

Звідси, $S_c(u) = 1/2$

2. Для ряду1-2 + 3-4 + $\cdots$ буде

$$S_k = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2}, \text{для непарного } k \\ -\dfrac{k}{2}, \text{для парного } k \end{cases}$$

Значить

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{n}(1-1+2-2+\cdots) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n}, \text{для непарного } n \\ -\dfrac{1}{2}, \text{для парного } n \end{cases}$$

При збільшенні n послідовності цих сум ні до якої границі не прямує. Таким чином, розглянутий ряд за Чезаро не підсумовується.

Метод підсумовування Чезаро є лінійним. Дійсно, якщо U, V і$a\mathrm{U} + b\mathrm{V}$- ряди, то

$$S_c(au + bv) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} (au_i + bv_i) =$$

$$= a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} u_i + b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} v_i == aS_c(u) + bS_c(v)$$

Доведемо, що підсумовування за Чезаро є і регулярним,тобто якщо ряд $\mathrm{U}: \mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots$ збігається і $\mathrm{S}_0(\mathrm{U}) = \mathrm{S}$, то він підсумовується за Чезаро і $\mathrm{S}_\mathrm{c}(\mathrm{U}) = \mathrm{S}$ [18].

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S_0(u) = S.$$

Розглянемо різницю

$$S_0(u) - S_c(u) =$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \lim_{n\to\infty} \left(S_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (S_n - S_k).$$

Очевидно, тут U_0не входить в жоден доданок останньої суми, U_1входить лише в один, U_2- входить тільки в два і так далі. Таким чином,

$$S_0(u) - S_c(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k u_k$$

згідно леми,для збіжного ряду остання границя рівна нулю.

Зручна необхідна ознака підсумовування ряду Чезаро подається в наступній теоремі.

Теорема 2.1. Для того щоб ряд $\mathrm{U}: \mathrm{u}_0 + \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \cdots$ підсумовувався за Чезаро, необхідно, щоб

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0$$

Доведення. Нехай S_nn-та частинна сума ряду u(причому $S_0 = 0$), і припустимо, що границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{\infty} S_k = S_c(u)$$

існує. Тоді, очевидно, і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k = S_c(u) \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = S_c(u)$$

так що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$

Але тоді повинно бути і$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$і із останніх двох рівностей випливає, що $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0$ [18].

2.2. Метод підсумовування Пуассона-Абеля

Означення:Якщо підсумовуюча функція S_p визначається рівністю

$$S_p(U) = S_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) = \lim_{x\to 1\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = \lim_{x\to 1\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k x^k$$

то таке підсумовування називається підсумовуванням за Пуассоном-Абелем [31, 9].

Приклади:

1. Для ряду$1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$підсумовування за Пуассоном-Абелем дає$\lim_{x\to 1\to 0}(1 - x + x^2 - \cdots) = \lim_{x\to 1\to 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$

2. Розглянемо ряд

$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (2n - 1) - 2n + \cdots$. Для нього

$$S_p(U) = \lim_{X\to 1\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n.$$

Але для будь-якого x, близького до 1, але меншого за 1, ряд який стоїть під знаком границі збігається. А тому:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n-1) x^n.$$

Підсумовуючи ряди які стоять справа, одержимо:

$$S_p(U) = \lim_{x\to 1\to 0} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. Розглянемо ряд:

$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nQ$, де $(Q \neq 0) \lim_{n\to\infty} \cos nQ$. (2.1)

Тут границя не існує, тому згідно з необхідною умовою збіжності ряду (2.1) розбігається [1-3].

Підсумуємо цей ряд за Пуассоном-Абелем. Для цього візьмемо довільне $x < 1$розглянемо ряд:

$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos nQ$ (2.2)

і складемо ряд з модулів членів цього ряду:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |x^n \cos nQ|$$

Ознака збіжності Коші дає нам, що

$$\sqrt[n]{|x^n \cos nQ|} = [x] \sqrt[n]{\cos nQ \leq |x|} < 1.$$

Отже останній ряд збігається. Це означає, що ряд (2.2) збігається абсолютно, а тому – збігається. Знайдемо його суму.

Зазначимо, що $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} \cos nQ$ дійсна частина комплексного числа $\left(x(\cos Q + i \sin Q)\right)^n$. Тому

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos nQ$$

є дійсною частиною виразу

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(x(\cos Q + i \sin Q)\big)^n$$

Або, підсумовуючи дану геометричну прогресію, отримаємо

$$\frac{1}{2} + \frac{x(\cos Q + i \sin Q)}{1 - x(\cos Q + i \sin Q)}$$

Множення чисельника і знаменника цього дробу на комплексне число, спряжене знаменнику, дає нам

$$\frac{1}{2} + \frac{x(\cos Q + i \sin Q)(1 - x(\cos Q - i \sin Q))}{(1 - x(\cos Q + i \sin Q))(1 - x(\cos Q - i \sin Q))} (2.3).$$

Після очевидних обчислень виявляється, що дійсна чистина цього виразу рівна

$$\frac{1}{2} + \frac{xcosQ - x^2}{1 - 2\cos Q + x^2} = \frac{1}{2}\frac{1 - x^2}{1 - 2xcosQ + x^2}$$

Таким чином (підкреслимо, що припускаємо Q≠0

$$S_p(U) = \lim_{x\to 1\to 0} \frac{1}{2}\frac{1 - x^2}{1 - 2xcosQ + x^2}$$

Лінійність та регулярність підсумовування за Пуассоном-Абелем.

Лінійність підсумування за Пуассоном-Абелем випливає із того, що для будь-яких рядів U і V

$$S_p(aU + bV) = \lim_{X\to 1\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (a\, u_n + bv_n)x^n =$$

$$= \lim_{X\to 1\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} au_n\, x^n + \lim_{X\to 1\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} bv_n\, x^n = aS_p(U) + bS_p(V)$$

Встановимо регулярність цього підсумовування.

Теорема 2.2. Якщо Uзбіжний ряд, то він підсумовується за методом Пуассона-Абеля і $\mathrm{S_p(U) = S_0(U)}$[16].

Доведення. Складемо за рядом U: $u_1 + u_2$ ....степеневий ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$(2.4)

Із збіжності ряду Uвипливає, що радіус збіжності степеневого ряду (2.4) не менше одиниці, причому прих = 1 цей ряд збігається. Тому в другій теоремі Абеля сума ряду (2.4) неперервна в точці x = 1зліва, тобто

$$S_p(U) = \lim_{x\to 1\to 0} \sum_{n=2}^{\infty} u_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_0(U)$$

теорему доведено.

Підсумовування рядів за Пуассоном-Абелем і їх абсолютна збіжність

Різниця між абсолютною збіжністю ряду і його умовною збіжністю з точки зору підсумовування за Пуассоном-Абелем зберігається, наприклад, ряд$1-1+1-1$ ...за Пуассоном-Абелем підсумовуємо, але ряд, який складається із модулів його членів, тобто ряд$1+1+1+\cdots$ ні. Тут ця різниця виявляється слабшою, ніж у випадку звичайної збіжності.

Означення.Нехай нам дано ряди $\mathrm{U}\colon \mathrm{u}_0+\mathrm{u}_1+\cdots, \mathrm{V}\colon \mathrm{v}_0+\mathrm{v}_1+\cdots$. Добутком цих рядів будемо називати ряд $\mathrm{W}\colon \mathrm{w}_0+\mathrm{w}_1+\cdots$, в якому

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 \text{ при } (n = 0{,}1{,}2..)$$

Для абсолютно збіжних рядів U і Vмає місце наступна рівність

$$S_p(U)S_p(V) = S_p(W).$$

Якщо ж обидва ряди U і V збігаються, але лише умовно, то це очевидне на перший погляд співвідношення не виконується (втрачає зміст його перша частина)[13-18].

Наприклад. Нехай кожен із рядів U і V є

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

Тоді для члена W_n ряду W, який є добутком U та V маємо:

$$w_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{n-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k\sqrt{n-k+1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$$

Внаслідок того, що

$$k(n-k+1) \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

тут повинно бути

$$|w_n| > n\frac{2}{n+1} \geq 1$$

тобто ряд Wне задовільняє необхідну умову збіжності, і сума S_0(W)не існує.

Однак з точки зору підсумовування за Пуассоном-Абелем різниця в цьому питанні між абсолютною і умовною збіжністю втрачається.

Теорема 2.3. Якщо ряди U і Vпідсумовувані за Пуассоном-Абелем, то їх добуток Wтакож підсумовуємо за Пуассоном-Абелем, і

$$S_p(U)S_p(V) = S_p(W).$$

(2.5)

Доведення. Підсумовування рядів U і V,за теоремою Пуассона-Абеля означає збіжність степеневих рядів $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$і $\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$при $-1 < x < 1$.

Звідси, за теоремою Абеля кожен такий ряд збігається, причому абсолютно. Але тоді за теоремою про множення абсолютно збіжних рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) x^n$$

Ліва частина цієї рівності за умовою при$x \to 1 \to 0$ має границю рівну добутку S_p(U)$S_p(V)$Значить, і права його частина має границю, яка за означенням дорівнює S_p(W)[15,23].

Таким чином, з точки зору множення радів підсумовування рядів за Пуассоном – Абелем навіть «ближче» до скінченних сум ніж підсумовування рядів у звичайному розумінні.

Приклади:

1. Нехай обидва ряди U і V є одним і тим же рядом 1-1 + 1 ...,

тобто $u_n = v_n =$ (-1)$^{n+1}$. Тоді $w_n =$ (-1)$^{n+1}$nтобто ряд

$$W: 1 - 2 + 3 - 4 \ldots,$$

$$S_p(U) = S_p(V) = \frac{1}{2}$$

Тому за тільки що доведеною теоремою$S_P(w) = \frac{1}{4}$.

2. Розглянемо ряд

U: $1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n-1}} + \cdots$. (2.6)

Він не збіжний навіть умовно, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n-1}}\right| = \frac{2}{3} \neq 0$$

Однак цей ряд може бути отриманий в результаті перемноження ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 \ldots \tag{2.7}$$

і геометричної прогресії

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots. \tag{2.8}$$

В нашому випадку

$$u_n = (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots \pm \frac{1}{2^n}\right)$$

і підсумовування скінченної геометричної прогресії, яка стоїть у дужках дає можливість знайти $S_p(U)$.

Нагадаємо, що сума ряду (2.7) за Пуассоном-Абелем рівна$1/2$, а прогресія (2.8) збігається в звичайному розумінні (а значить і за Пуассоном – Абелем) і має суму рівну 2.

Звідси ряд (2.6) також збігається за Пуассоном – Абелем і його сума дорівнює $2 \cdot 1/2 = 1$.

2.3. Співвідношення між підсумовуванням методу Чезаро та Пуассона-Абеля

Підсумовування за Чезаро «слабше» ніж підсумовування за Пуассоном – Абелем. Зокрема має місце така теорема.

Теорема 2.4. Якщо рядUпідсумовується за Чезаро, то він підсумовується і за Пуассоном-Абелем, і $\mathrm{S_p(U) = S_P(U)}$ [5].

Доведення. Нехай ряд $\mathrm{U{:}\, u_0 + u_1 + u_2 + \cdots}$ підсумовується за Чезаро і має в цьому розумінні суму S Звідси випливає на основі попереднього пункту, що $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

Це в свою чергу означає, що для будь-якого ε>0, починаючи з деякого номера, буде $|\mathrm{u_n}| < n\varepsilon$.Далі, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \varepsilon x^n$$

збігається для довільного $|\mathrm{x}| < 1$ як в цьому можна переконатися, використовуючи, наприклад, ознаку збіжності Даламбера. Звідси, для довільного $|\mathrm{x}| < 1$ збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\, x^n.$$

Але (покладемо умовноS_{-1}= 0)

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^{n+1}$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

і повторюючи ці міркування ще раз, одержимо

$$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{u_n x^n} = (1-\mathrm{x})^2 \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \mathrm{S_k} \right) \mathrm{x^n} (2.9)$$

Розглянемо тепер ряд $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$ .... і помножимо його на себе. Отримаємо

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n,$$

тобто

$$1 = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Враховуючи (2.9), отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - S_c(U) = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_k - S_c(U) \right) (n+1)x^n. \qquad (2.10)$$

Для будь-якого натурального n сума, яка стоїть справа, можна розбити на дві частини: одну, яка охоплює всі доданки для n від 0 до$N-1$ і другу, яка містить всі інші доданки:

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{K=0}^{n} S_k - S_c(U) \right) (n+1)x^n +$$

$$(1-x)^2 \sum_{n=N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} S_k - S_c(U) \right) (n+1)x^2.$$

Виберемо Nтаким, щоб для довільного$n > N$було

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k - S_c(U) \right| < \varepsilon.$$

Тоді для будь-якого$0 < x < 1$ одержимо (збільшуючи, якщо треба, Nще більше).

$$(1-\mathrm{x})^2 \textstyle\sum_{\mathrm{n=N}}^{\infty} \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{n}} (\mathrm{S_p} - (\mathrm{n}+1)\mathrm{S_c}\,(\mathrm{u}))\mathrm{x^n} \le (1-\mathrm{x})^2 \sum_{\mathrm{n=N}}^{\infty} (\mathrm{n} +$$

$$+1)\varepsilon \mathrm{x}^2 = (1-\mathrm{x})^2 \varepsilon \textstyle\sum_{\mathrm{n=N}}^{\infty} (\mathrm{n}+1)\mathrm{x^n} = (1-\mathrm{x})^2 \varepsilon \frac{1}{(1-\mathrm{x})^2} = \varepsilon \mathrm{x^N} < \varepsilon \qquad (2.11)$$

Крім того, зафіксувавши Nі вибравши хдостатньо близьким до одиниці, можна добитися того, щоб було

$$(1-x)^2 \sum_{n=N}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{n} (S_k - (n+1)S_c(u)) \right) x^n < \varepsilon. \qquad (2.12)$$

Із (2.10), (2.11) і (2.12) випливає, що

$$\lim_{n \to 1 \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - S_c\,(u) = 0,$$

тобто $S_p(u) = S_c(u)$,що й треба було довести [5].

Обернена теорема не справедлива: існують ряди, які підсумовуються за Пуассоном-Абелем, але не підсумовуються за Чезаро. Так ряд$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ підсумовується за Пуассоном-Абелем, але не підсумовується за Чезаро.

Із доведеної теореми випливає, що якщо ряд підсумовується за Чезаро то він підсумовується і за Пуассоном-Абелем.

2.4. Узагальнені методи Чезаро

Ми вже знайомі з методом середніх арифметичних; він є найпростішим з великої кількості методів підсумовування, запропонованих Ч е з а р о. Фіксуючи натуральне число k, Ч е з а р о вводить варіанту

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} + \frac{C_{n+k-1}^{k-1}A_0 + C_{n+k-2}^{k-1}A_1 + \cdots + C_{k-1}^{k-1}A_n}{C_{n+k}^k}$$

і її границя при n → ∞ розглядають як «узагальнену суму» (k-*го* порядку) ряду (A). При k = 1 ми повертаємося до методу середніх арифметичних.[25,с.119-154]

Надалі нам знадобиться наступне співвідношення між коефіцієнтами:

$$C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \cdots + C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k}^k;$$

воно легко доводиться по методу математичної індукції відносно n, якщо виходити з відомого співвідношення

$$C_{n+k}^k = C_{(n-1)+k}^k + C_{n+(k-1).}^{k-1}$$

Насамперед, покажемо, що методи Ч е з а р о всіх порядків є окремими випадками регулярних методів В о р о н о г о. Для цього досить покласти p_n= $C^{\,k-1}_{\,n+k-1}$, тоді випливає, що P_n = $C^{\,k}_{\,n+k}$, і до того ж, очевидно,

$$\frac{P_n}{P_n} = \frac{1}{n+k} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

За допомогою тієї ж рівності , користуючись самим визначенням величин $S^{(k)}_n$, можна встановити, що

$$S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)} *.$$

Це дає можливість з'ясувати відношення між підсумовуванням по Ч е з а р о k-го і (k - 1)-го порядку. Нехай ряд (1/A) допускає підсумовування (k - 1)-го порядку до числа A [17,c135-139]. Тоді маємо

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = \frac{S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k} =$$

$$= \frac{C_{k-1}^{k-1}\gamma_0^{(k-1)} + C_k^{k-1}\gamma_1^{(k-1)} + \cdots + C_{n+k-1}^{k-1}\gamma_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k}.$$

Застосовуючи сюди теорему Теплиця і покладаючи

$$x_n = \gamma_n^{(k-1)} \quad \text{і} \quad t_{nm} = \frac{C_{m+k-1}^{k-1}}{C_{n+k}^k}(m = 0, 1, \dots, n),$$

прийдемо до висновку, що й $\gamma^{(k)}_n \to A$[17,c.460-471]. Таким чином, якщо ряд (1.A) допускає підсумовування по методу Ч е з а р о якого-небудь порядку, то він допускає і підсумовування методом Чезаро будь-якого вищого порядку, і причому до тієї ж суми.

Наведемо тепер узагальнення уже відомої нам теореми Ф р о б е н і у с а: якщо ряд (1.A) підсумовується яким-небудь з методів Ч е з а р о (скажемо k-го порядку), то він підсумовується до тієї ж суми і по методу П у а с о н а – А б е л я.[13,c.346]

Нехай дано, що

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = A.$$

Тоді звідси випливає, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

для - 1 < x < 1 збігається. Дійсно, оскільки

$$C_{n+k}^{k} \sim \frac{n^k}{k!}$$

то маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|S_n^{(k)}\right|}{n^k} = \frac{|A|}{k!}$$

Якщо А ≠ 0, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|S_n^{(k)}\right|} = 1,$$

і по теоремі К о ш і – А д а м а р а, радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n$$

дорівнює 1 [23, с.378]. Він принаймні н е м е н ь ш е 1, якщо А = 0. Розглянемо тепер ряд тотожностей

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)}\, x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(1)} x^n\,,*$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)}\, x^n.$$

Вище ми встановили збіжність останнього ряду в проміжку (-1, 1); звідси випливає збіжність і всіх попередніх рядів. Крім того,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)}\, C_{n+k^{x^n}}^{k}.$$

Зіставимо з цією тотожністю іншу рівність:

$1 = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k^{x^n}}^{k}$,(2.13) яка має місце в тім же проміжку (-1, 1). Ця рівність отримується k -кратним диференціюванням прогресії

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.(2.14)$$

Помноживши обидві частини тотожності (2.13) на (1,A) віднімаючи з неї почленно рівність (2.14), одержимо:

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A - \gamma_n^{(k)}\right] C_{n+k^{x^n}}^{k}.$$

Подальші міркування цілком аналогічні тим, за допомогою яких була доведена теорема А б е л я і теорема Ф р о б е н і у с а. В результаті ми й одержимо:

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A,$$

Відзначимо, що існують розбіжні ряди, які підсумовуються по методу П у а с о н а – А б е л я, але не підсумовуються жодним з узагальнених методів Ч е з а р о. Таким чином, перший з названих методів виявляється сильнішим від всіх останніх, навіть разом узятих![14,с.198]

РОЗДІЛ 3
ПОНЯТТЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РЯДУ

3.1. Поняття тригонометричного ряду

Тригонометричні ряди ули виведені Д. Бернулі у 1753 році у зв'язку з вивченням коливань струни. Виникле при цьому питання про можливості розкладу даної функції в тригонометричний ряд зародив гарячі суперечки між математиками того часу (Ейлер, Даламбер, Лагранж). Розбіжність породжувались тим, що поняття функції в той час не було чітко встановлено. Згадані суперечки сприяли уточненню поняття функції.

Формули, які виражають коефіцієнти ряду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots \quad (3.1)$$

Через дану функцію були дані А. К. Клеро в 1757 році, але не привернули к собі увагу . Л. Єйлер знову отримав ці формули у 1777 році (у праці, опублікованій після смерті Єйлера в 1793 році). Строгі їх висновок був намічений Ж. Б. Л. Дирихле в 1829 році, встановив і строго довів достатній ознаку розкладу функції в тригонометричний ряд [41].

Згодом були встановлені й інші достатні умови і дослідженні функції, як не задовільняютьзгалданим умовам. В розробку теорії тригонометричних рядів та їх практичного застосування важливий вклад внесли багато вітчизняних та зарубіжних вчених, а саме: Н. И. Лобачевскій, А. Н. Крилов (1863 – 1945), С. Н. Бернштейн (1880 – 1968), Н. Н. Лузін (1883 – 1950), Д. Е. Меньшов (1892 – 1988), Н. К. Бари (1901 – 1961), А.Н. Колмогоров (1903 – 1987) та інші.

Тригонометричним рядом називається ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

Де a_0, a_1, a_2,…, b_1,b_2,….- постійні, які називаються коефіцієнтами ряду.

Зауваження 1. Вільний член (його можна записати у вигляді $\frac{a_0}{2}\cos 0x$) позначається через$\frac{a_0}{2}$ (а не через a_0) з тією метою, щоб формули для коефіцієнтів були однакові.

Зауваження 2. Всі члени ряду (3.1) є періодичними функціями з періодом 2π. Це означає, що коли аргумент зростає на величину, кратну 2π, всі члени зберігають свої значення.

Зауваження 3.Тригонометричним рядом називають також більш загальний вираз

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos 2\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin2\frac{\pi x}{l} + \cdots + a_n \cos \mathrm{n}\frac{\pi x}{l} + b_n \sin \mathrm{n}\frac{\pi x}{l} + \cdots, \quad (3.2)$$

де – lпозитивна постійна, яка називається півперіодом (всі члени ряду (3.2) – періодичні функції з періодом2 l;

ряд (3.1) є окремий випадок ряду (3.2) коли півперіод l = π[41].

3.2. Ознаки збіжності тригонометричних рядів

Нехай задано тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x)(3.3)$$

Для того щоб з'ясувати, чи збігається він, звичайно розглянемо числовий ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \qquad (3.4)$$

Мажорантний, як кажуть, ряд (3.3). Його члени перевищують відповідно абсолютні величини членів ряду (3.3):

$$\left|a_k \cos\frac{k\pi}{l}x\right| \le |a_k|$$

$$\left|b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right| \le |b_k|.$$

Звідси випливає, що якщо ряд (3.4) збігається, то збігається також ряд (3.3) для всіх x при чому абсолютно і рівномірно. Але ряд (3.3)може збігатися без того, щоб збігався ряд (3.4.) Бо його члени для кожного xпри змінні kзмінюють знак безкінечне число разів він може виявитися збіжним внаслідок компенсації додатних членів від'ємними. В загальній теорії рядів існує ознаки збіжності подібних рядів. Такими ознаками являються ознаки Дирихле і Абеля, гарно пристосованих до дослідження тригонометричних рядів.

Так чи і інакше, якщо встановлено , що ряд (3.3) рівномірно збігається, то з того, що його члени суть неперервні функції періоду $2l$, слідує, що його сума

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \sin\frac{k\pi}{l}x\right) \quad (3.5)$$

є неперервна функція періоду $2l$і ряд (3.5) можна почлено інтегрувати.

Ряд (3.5) можнформально продиференціювати по x:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi}{l}x + b_k \cos\frac{k\pi}{l}x\right) \qquad (3.6)$$

та скласти його мажорантний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\left(|a_k| + |b_k|\right) \qquad (3.7)$$

Знов, якщо ряд (3.7)збігається, то ряд (3.6)збігається при чомурівномірно. Більш того, на основітеореми з теоріїрівномірнозбіжнихрядівтоді сума ряду (3.6) є похіднавідсуми ряду (3.5)тобто

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l}(- a_k \sin\frac{k\pi}{l} x + b_k \cos\frac{k\pi}{l}\ x).$$

Взагалі, якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k\pi}{l})^s (|a_k| + \ |b_k|) < \infty$$

При деякому натуральному sзбігається, то ряд (3.5)можливо диференціювати почлено sраз.

Втім, треба пам’ятати, що не виключено, що ряд (3.5)можливо продифірінціювати ще один раз, тобто s + 1 раз.

Приклад:встановити, скількиразівможнапродиференціюватипочлено ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kx\,, (\ 0 < q\ < 1).$$

Продиференціюємо даний ряд формальноsраз:

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} k^s\ q^k \{\cos kx\}$$

Мажорантний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k, \quad (0 < q\ < 1)$$

збігається при будь-якому натуральному s, що можно встановити за допомогоюознаки Даламбера. Тому початковий ряд можнапродиференціюватипочленноскількизавгоднoразів[43].

3.3. Єдиність розкладу функції у тригонометричному ряду Фур’є

Розглянемо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,, \tag{3.8}$$

коефіцієнти якого прямують до нуля (або хоча б лише обмежені).Тоді, інтегруючи його почленно[17] два рази, отримаємо

$$\frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n\ \sin nx}{n^2}$$

Зрозуміло, що цей ряд збігається абсолютно і рівномірно (в силу обмеженостіa_n і b_n); позначимо через $F\,(x)$ його суму. Це неперервна функція, якубудемо називати *функцією Рімана* для тригонометричного ряду (3.8).

Отже,

$$F\,(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n\ \sin nx}{n^2} \tag{3.9}$$

Припустимо, що в деякій точці x_0, функція $F\,(x)$ має Шварцеву похідну $D^2F\,(x_0)$[5]. Тоді ми домовимося говорити, що ряд (3.8) підсумовується у точці x_0, методом Рімана і його ріманівська сума дорівнює$D^2F\,(x_0)$.

Теорема 3.1. Ряд Фур'є від будь-якої підсумовуваної функції $f(x)$підсумовується методом Рімана майже усюди до цієї функції.

Дійсно, нехай

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{3.10}$$

Маємо $a_n \to 0$ та $b_n \to 0$, так як це коефіцієнти Фур'є. З теореми [12] ряд Фур'є можна почлено інтегрувати; інакше кажучи , якщо

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt,$$

то

$$F(x) = C + \frac{a_0}{2}x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \cos nx - a_n \sin nx}{n} \quad , \tag{3.11}$$

причому у силу абсолютної неперервності $F(x)$ ряд (3.11) усюди збіжний до неї і навіть рівномірно на відрізку $[-\pi, \pi]$. Далі, якщо $\Phi(x)$ – невизначений інтеграл від $F(x)$, то

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} \quad ,$$

і, отже, функція Рімана$\Phi(x)$ для ряду (2.11) є результатом дворазового інтегрування $f(x)$. Але так як $F(x)$ неперервна, то $\Phi'(x) = F(x)$ у кожній точці; далі $F'(x) = f(x)$ майже усюди, таким чином, $\Phi''(x) = f(x)$ майже усюди, але так як $D^2\Phi(x) = \Phi''(x)$ там, де $\Phi''(x)$ існує[19], то $D^2\Phi(x) = \ f(x)$ майже всюди , а тому ряд (2.13) сумується майже усюди до $f(x)$ методом Рімана.

Теорему доведено.

Користуючись методом підсумовуванняРімана, ми можемо вирішити наступне питання: чи можуть існувати два різні тригонометричні ряди, збіжні у кожній точці до однієї і тієї ж самої функції $f(x)$? Відповідь на це питання є негативною. Щоб пересвідчитись у цьому, доведемо наступну важливу теорему:

Теорема Кантора. Якщо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{3.12}$$

збігається до нуля у кожній точці x на проміжку $[0, 2\pi]$, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

За теоремою Кантора коефіцієнти ряду (3.11) прямують до нуля (тут можна спиратися навіть на теорему Кантора-Лебега[26]). Будуємо функцію Рімана$F(x)$ для ряду (3.12), вона неперервна на всій неперервній прямій. Ряд (3.12) повинен підсумовуватися до нуля у кожній точці, тобто

$$D^2F(x) = 0 \qquad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

Тоді маємо

$$F(x) = Ax + B. \tag{3.13}$$

Але, з іншого боку, якщо $F(x)$ є функцією Рімана для ряду (3.12), то

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}\ , \tag{3.14}$$

З (2.15) та (2.16) маємо

$$\frac{a_0}{4}x^2 + A_1 x + B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}\ , \tag{3.15}$$

де A_1 та B_1 – нові константи. Але перша частина (3.15) має період 2π, отже і ліва теж, а це можливо лише при

$$a_0 = 0 \text{ та } A_1 = 0. \tag{3.16}$$

Тепер маємо

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}\ , \tag{3.17}$$

Ряд (2.19) збігається рівномірно; тому його коефіцієнти є коефіцієнтами Фур'є від його сум[34], але вони є сталим числомB_1, тому

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2} = 0 \qquad\qquad (n = 1,2, \dots),$$

звідси

$$a_n = b_n = 0 \qquad\qquad (n = 1,2, \dots). \tag{3.18}$$

З (3.16) та (3.17) випливає, що ряд (3.17) має усі коефіцієнти рівні нулю, таким чином теорему Кантора доведено. Він відразу узагальнив цю теорему, довівши наступні твердження:

Якщо тригонометричний ряд збігається до нуля усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Дійсно, міркуючи, як при доведені теореми Кантора, ми бачимо, що ряд, який розглядаємо, має коефіцієнти, які прямують до нуля, та його функція Рімана$F(x)$ повинна бути лінійною на кожному інтервалі,де ряд збігається до нуля, так як там $D^2F(x) = 0$. Але $F(x)$ повинна бути гладкою [9]. Тому вона не може мати кутових точок. Тож, вона не може складатися з різноманітних прямолінійних відрізків, а повинна бути просто лінійною. А якщо так, то доведення закінчується, як у минулій теремі, тобто доводимо, що усі коефіцієнти ряду дорівнюють нулю.

Зауваження. Теорему Кантора можна сформулювати у наступній більш загальній формі: якщо тригонометричний ряд з коефіцієнтами, що прямують до нуля, сумовний до нуля методом Рімана усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Дійсно, при доведені теореми ми спиралися лише на те,що коефіцієнти ряду прямують до нуля та $D^2F(x) = 0$ усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок.

Наслідок. Нехай $f(x)$ – функція з періодом 2π, скінченна у кожній точці$[0.2\pi]$. Тоді не існує двох різних тригонометричних рядів, кожен з яких збігається з$f(x)$ на $[0,2\pi]$, окрім, можливо, скінченної кількості точок.

Дійсно, припустимо, що існують два таких тригонометричних ряди; тоді їх різницею є ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{3.19}$$

у якого не усі коефіцієнти дорівнюють нулю, та, однак, він збігається до нуля, окрім,можливо, скінченного числа точок. Але ми вже довели, що це неможливо[42]..

3.4. Локальна властивість абсолютного підсумовування рядів Фур'є

Множину E назвемо множиною типу$A.C.$, якщо з абсолютної збіжності тригонометричного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos(nx - a_{n)}\, \varrho_n > 0 \tag{3.20}$$

на Eвипливає$\sum \varrho_n < +\infty$. Якщо множина E не є $A.C$ – множиною, то назвемо їїN –множиною. Відомий факт [16], що N-множина завжди міри нуль і першої категорії.

З означення N-множини випливає, що існує ряд (3.20), що збігається абсолютно на ній, та такий, що $\sum \varrho_n < +\infty$. Можемо вважати, що такий ряд складається з одних синусів.

Нехай ряд (3.20) задовольняє умові:

$$\varrho_n = 0(\varepsilon_n)(n = 1,2, \dots).$$

Якщо з абсолютної збіжності такого ряду на Eвипливає$\sum \varrho_n < +\infty$, то будемо E називати $A.C.$-множиною відносно послідовності $\{\varepsilon_n\}$.

Фату [41] перший звернув увагу на те, що наявність хоча б однієї точки абсолютної збіжності тригонометричного ряду дозволяє зробити деякі висновки про множинЬ його точок збіжності, а також і збіжності спряженого ряду.

Саме має місце

Теорема Фату. Будь-яка точка абсолютної збіжності ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{3.21}$$

є точка симетрії для множини його точок збіжності, для множини точок збіжності спряженого ряду, а також для множини точок абсолютної збіжності даного ряду та спряженого з ним.

Вважаючи для стислості

$$\begin{cases} A_n\,(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ B_n\,(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx \end{cases} ,A_0 \ = \frac{a_0}{2} \tag{3.22}$$

за допомогою елементарних викладок упевнюємося у тому, що

$$A_n\,(x+h) + A_n\,(x-h) = 2A_n\,(x) \cos nh$$

$$B_n\,(x+h) - B_n\,(x-h) = -2A_n\,(x) \sin nh.$$

Припустимо що ряд (2.23) збігається абсолютно при $x = x_0$, тобто

$$\sum |A_n\,(x_0)| < +\infty.$$

Тоді зрозуміло, що збіжність $\sum A_n\,(x_0+h)$тягне за собою збіжність $\sum A_n\,(x_0-h)$ та аналогічно для $B_n(x)$, це також справедливо і для точок абсолютної збіжності. Використовуючи це просте зауваження, Лузін[24] довів наступні дві теореми:

Теорема Лузіна. 1) Якщо тригонометричний ряд має нескінченну кількість точок абсолютної збіжності, то він або майже усюди збігається, або майже усюди розбігається.

2) Якщо тригонометричний ряд збігається абсолютно у двох точках, відстань між якими не порівняна з π, то він або майже усюди збігається, або майже усюди розбігається.

Послідовність додатних чисел ϱ_n назвемо майже монотонно спадною, якщо існує така константа C, що

$$\varrho_{n+1} < C\varrho_n \ \ (n = 1,2,\dots)$$

(аналогічно можна означити майже *монотонне зростання*:

$$\varrho_{n+1} > C\varrho_n \ \ (n = 1,2,\dots)$$

де $C > 0$).

Прийнявши цю термінологію, можемо сформулювати теорему Саса[12].

Теорема Саса. Якщо для ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{3.23}$$

послідовність $\{|a_n|\}$ майже монотонно спадає та ряд (3.23) збігається абсолютно хоча б в одній точці, то

$$\sum |a_n| < +\infty$$

Покладемо $|a_n| = \varrho_n$. Маємо за умовою

$$\varrho_{n+1} \geq \frac{1}{C}\varrho_n \quad n \geq 2.$$

Не порушуючи загальності, тут можемо вважати $C \geq 1$; тоді

$$\varrho_{n+1}|\cos(n-1)x| + \varrho_n|\cos nx| \geq$$

$$\geq \frac{\varrho_n}{C}[|\cos(n-1)x| + |\cos nx|] \geq \frac{\varrho_n}{C}[\cos^2(n-1)x + \cos^2 nx] =$$

$$= \frac{1}{C}\varrho_n[1 + \cos x\cos(2n-1)x] \geq \frac{1}{C}\varrho_n(1 - |\cos x| \text{ для } n \geq 2.$$

Якщо ряд (2.25) збігається абсолютно у точці x_0, то при$x_0 = 0(mod\,\pi)$ теорема тривіальна; якщо ж $x_0 \neq 0(mod\,\pi)$, то з нерівності маємо

$$\varrho_{n-1}|\cos(n-1)x_0| + \varrho_n|\cos nx_0| \geq \frac{1}{C}\varrho_n(1 - |\cos x_0| = \varrho_n\gamma,$$

де $\gamma \neq 0$, робимо висновок, що

$$\sum_{n=1}^{N}\varrho_n \leq \varrho_1 + \frac{1}{\gamma}\sum_{n=2}^{N}[\varrho_{n-1}|\cos(n-1)x_0| + \varrho_n|\cos nx_0|] \leq \varrho_1 + \frac{2A}{\gamma},$$

де $A = \sum_{n=2}^{\infty}\varrho_n|\cos nx_0| < +\infty$..

Отже, $\sum_{n=1}^{N}\varrho_n < +\infty$.

Аналогічно доводиться

Теорема **3.2.** Якщо $\{|b_n|\}$майже монотонно спадає та $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$збігається абсолютно хоча б у одній точці $x_0, x_0 \neq 0(mod\,\pi)$, то$\sum|b_n| < +\infty$.

Дійсно, зауваживши тільки, що

$$\sin^2(n-1)x + \sin^2 nx = 1 - \cos x\cos(2n-1) > 1 - |\cos x|,$$

ми бачимо, що наведені вище доведення повторюються слово у слово.

***Лема*3.1.** Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varrho_n\cos(k_n x - a_n) \tag{3.24}$$

збігається абсолютно у двох точках x_1і $x_2 x_1 - x_2 = \delta \neq 0\ (mod\pi)$.

Нехай

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \cos 2k_n\delta < 1. \qquad (3.25)$$

Тоді:а) якщо ϱ_n монотонно спадає або б) якщо при будь-якому цілому p та будь-якому n

$$\frac{\varrho_{n-p}}{\varrho_n} < C\ ,$$

то $\sum \varrho_n < +\infty$.

У якості наслідків цієї леми отримаємо наступну теорему Салема[35].

***Теорема*3.3**. Нехай ряд

$$\sum \varrho_n \cos(nx - a_n)$$

збігається абсолютно у двох точках x_1 та $x_2\,, x_1 - x_2 \neq 0(mod\ \pi)$.Тоді якщо виконуються одна з умов: а)ϱ_nмонотонно спаднаабо б) $\frac{\varrho_{n-p}}{\varrho_n} < C\ \ (n = 1,2,\dots; p = 1,2,\dots)$, то $\sum \varrho_n < +\infty$.

Дійсно, якщо $x_1 - x_2 = \delta \neq 0(mod\ \pi)$,то

$$\sum_{n=1}^{m} \cos 2n\delta = D_m(2\delta) - \frac{1}{2},$$

де $D_m(x)$ – ядро Діріхле[8], тому

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \cos 2n\delta\right| = \left|\frac{\sin(2m+1)\delta}{2\sin\delta} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin\delta}\,, \qquad (3.26)$$

тож,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \cos 2n\delta}{m} = 0\,,$$

і ми знаходимося в умовах леми (2.1).

Теорема 3.4. Якщо числа $\left(k_n \frac{o}{2\pi}\right)$ рівномірно розподілені на відрізку(0,1) і ряд

$$\sum \varrho_n \cos(k_n x - a_n)$$

збігається абсолютно у двох точках x_1 та x_2 де $x_1 - x_2 = \delta$, то при виконанні однієї з умов а) чи б) леми (2.1) маємо

$$\sum \varrho_n < +\infty .$$

Наслідок. Якщо ϱ_n задовольняють одному з двох умов леми (2.1), і ряд

$$\sum \varrho_n \cos(n^p x - a_n)\ \ p$$

збігається абсолютно у двох точках x_1 та x_2 де $x_1 - x_2 \neq 0\ (mod\ \pi)$, то $\sum \varrho_n < +\infty$.

ВИСНОВКИ

В ході виконання роботи було наведено основні твердження та найважливіші теореми, що стосуються матричних методів підсумовування рядів, їх властивостей та співвідношень між цими методами.

У відповідності до визначенихзавданьроботи:

- наведеніозначення, властивості та співвідношення, щостосуютьсявключенняматричнихметодівпідсумовуванняряді в;
- описанірізноманітнівидиконсервативностізагальнихматричних методівпідсумовуванняфядів;
- наведенізагальніумовивключення та рівносильностінормальнихматричнихметодівпідсумовуванняря дів;
- описанікласичніметодипідсумовуванняфядів: їхозначення, властивості, умовиконсервативності, лімітуючітеореми;

- зробленопорівнянняполівпідсумовуванняокремихкласичнихметодівпідсумовуванняярядів;
- систематизовано результати з підсумовування тригонометричних рядів Фур’є;

З наведенихдослідженьможназробитинаступнівисновки:

1. Існуютьзагальнітеореми, щодаютьнеобхідні та достатніумовивключення та рівносильностіматричнихметодівпідсумовуванняярядів. При доведеніцих теорем головним методом є метод оберненогоперетворення.
2. Для усіхкласичнихметдівпідсумовуванняярядіввстановлені і широко використовуютьсяспіввідношенняміжїх полями підсумовуваності.
3. Для підсумуванняярізнихтипіврядіввикористовуютьсяхарактерні для цихрядівматричніметодипідсумування.
4. Класичніметодипідсумовуванняярядівзастосовуються до підсумовуванняярядівФур’є. Зокрема, дозволяютьпосилити та узагальнитиумовиїхзбіжності та абсолютноїзбіжності, й використовуються для встановленняєдиностірозкладуфункції у тригонометричному ряду.
5. Теоріяпідсумовуванняярядів широко використовується як в теоретичнихдослідженнях, так і у застосувннях, щоносятьобчислювальний характер.

6. Найпростішіелементитеоріїпідсумовуванняря дівможнави користовуватипід час вивченняшкільного курсу математики, на позакласнихзаняттях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов / Г. Алексич. - М.: Изд. Иностр.лит., 1963 – 359с.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Наука, 1961. – 326 с.
3. Барон С. О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов / С. Барон // Уч. Зап. Тартуск. Ун-ва. – 1964. - №150. – С. 165-181.
4. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов / С. Барон. – М.:Учпедгиз, 1965. – 128с.
5. Барон С. Теория о множествах суммируемости для методов A^{α} . // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1970. – С. 165-178.
6. Барон С. О множителях суммируемости для метода Чезаро отрицательного порядка / С. Барон, Т. Таммай // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем и техн. н. – 1962. – 11,№1. – С. 33-36.

7. Волков И. И. Некоторые вопросы линейных матречных преобразований / И. И. Волком // Матем. сб. – 1958,11. - №1 – С. 85-112.
8. Волков И. И. К вопросу суммирования расходящихся рядов методом (С, α). / И. И. Волков / Тр. Моск. ин-тамеханиз. и электрифик. с. х. – 1959, 4. - №1. – С. 137-146.
9. Грепачевская Л. В. Абсолютная суммируемость ортогональных рядов / Л. В. Грепачевская // Сиб. матем. ж. – 1965, 6. - №4. – С. 737-774.
10. Давыдов Н. А. О включении и разности методов Кожима суммируемости рядов / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1967, 19. - №4. – С. 29-47.
11. Давыдов Н. А. Об одном свойстве включения методов суммирования, определяемых нормальными матрицами / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал - 1969. - №2. – С. 685-690.
12. Давыдов Н. А. О включении и разности методов Теплица суммируемости рядов / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал – 1968. - №4. – С. 460-471.
13. Давыдов Н. А. Равносильность (С, α) и (А) – Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1972. - №5. – С. 221-222.
14. Давидов М. А. Включення методів Чезаро методу в нижню трикутну матрицю Тьоплица. Нормальні методи Тьоплица, рівносильні методам Чезаро / М. А. Давидов // Укриїнський математичний журнал. – 1973. - №8. – С.464-468.
15. Евграфов М. А. Об обращении теоремы Абеля для рядов, имеющих пропуски / М. А. Евграфов // Изв. АН СССР. – Т. 16. – 1952. – С. 521-524.
16. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М.: Наука, 1965. -312с.

17.Кангро Г. О. О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов / Г.О. Кангро // Уч. зап.Тартуск. уи-та. – 1955. -№37. –С. 150-190.

18.Кангро Г. О. О некоторых исследованиях по теории суммируемости / Г. О. Кангро // Изв. АН ЭстССР. физ.,матем. – 1967, 16. - №3. – С.255-266.

19.Кангро Г. О. Теория суммируемости последовательностей и рядов / Г. О. Кангро // Итоги науки и техн. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С.5-70.

20.Кангро Г. О. Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса / Г. О. Кангро, М. Тыннов // Уч. зап.Тарктуск. ун-та. – 1961. - №102. – С.249-262.

21.Кауфман Б. Л. Сравнение по силе некоторых методов суммирование расходящихся рядов с методом чезаровскихсредних / Б. Л. Кауфман // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. -1959. - №5. –С.131-145.

22.Коханівський О .П. Умови рівносильностілогарифмічних методів підсумовування / О. П. Коханівський // Український математичний журнал. – 1974. -№6. –С.229-234.

23.Кузьмич В. И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов / В. И. Кузьмич. – [Вкн: приближенные методы математического анализа]. – К. : Изд-во Киев. пед. ин-та, 1979. – С.18-26.

24.Кук Р. Бесконечные матрицы и пространство последовательностей / Р. Кук. –М. : Мир,1960. – 358 с.

25.Кулль И. Г. Умнодение суммируемых двойных рядов / И. Г. Кулль // Уч. зап.Тартуск. ун-та. – 1958. -№62. –С. 3-59.

26.Ламп Ю. Матричное преобразование обобщенных последовательностей / Ю. Ламн / Тр. Таллинск. Политехн. ин-та. – 1971. –В. А313. –С. 73-80.

27. Огиевский И. И. О включениях между регулярными методами / И. И. Огиевский // Уч. зап.Казанск. ун-та. – 1964, 124. -№6. –С. 241-265.
28. Папласкаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега / А. Б. Папласкаускас. – М.: Наука, 1966. -214 с.
29. Реймерс Э. Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядом / Э. Реймерс // Уч. зап.Тартуск. ун-та. – 1961. -№102. – С. 29-42.
30. Реймерс Э. Новые общие методы суммирования / Э. Реймерс // Уч. зап.Тарктуск. ун-та. – 1962. - №129. –С. 119-154.
31. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Наука, 1975. – 416с.
32. Слепенчук К. М. Абсолютная суммируемость рядов методами Чезаро отрицательного порядка / К. М. Слепенчук // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1965. – № 12. – С. 29-36.
33. Сырмус Т. Об абсолютной суммируемости простых и двойных последовательностей методами Хаусдорфа / Т. Сырмус // Уч. зап.Тартуск. ун-та. – 1967. – № 93. – С. 13-22.
34. Таммерайд И. Тауберовытеоремы с остаточным членом для методовсуммированияЧезаро и Гельдера / И. Таммерайд // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1971. – № 277. – С. 161-170.
35. Тюрнпу Х. Некоторыетипымножителейсуммируемости для метода Риссавторогопорядка / Х. Тюрнпу // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 253-263.
36. Тяхт Т. Мультипликаторыбазисовсуммирования и множителисуммируемости / Т. Тяхт // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1975. – № 355. – С. 157-164.
37. Харди Г. Х. Расходящиесяряды / Г. Х. Харди. – М. : Просвещение, 1951. – 386 с.

38. Харшиладзе Ф. И. Множителиравномерной сходи мости / Ф. И. Харшиладзе // Тр. Тбилисск. матем. ин-та. – 1960. – № 27. – С. 195-208.
39. Эспенберг Х. О множителяхсуммируемости для метода Эйлера-Кноппа / Х. Эспенберг // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 241-249.
40. Эспенберг Х. О множителяхсуммируемости в последовательности для метода Эйлера-Кноппа / Х. Эспенберг // Сб. науч. тр. Эст. с.-х. акад. – 1963. – № 131. – С. 73-81.
41. Юримяэ Э. Заметки о корегулярныхобобщенных матричних методах суммирования / Э. Юримяэ // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1965. – № 177. – С. 62-66.
42. Юримяэ Э. Множествосовершенства для методов, сохраняющихсходимость / Э. Юримяэ // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1971. – № 277. – С. 115-124.
43. Lorentz G.G. Direct theorems on methods of summability II. – Canad. J. Math. – 1951, 3. – №2. – P.236-256.
44. Wood B. On l-l summability. –Proc. Amer. Math. Soc. – 1970, 25. – P.433-436.

ДОДАТКИ

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Кошеварова Анна Олександріна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимогзаконодавстваУкраїни та внутрішніхнормативнихдокументівуніверситету, зокрема Статуту Університету;
- принципівта правил академічноїдоброчесності;
- нульовоїтолерантності до академічногоплагіату;
- моральних норм та правил етичноїповедінки;
- толерантногоставленнядоінших;
- дотримуватисявисокогорівнякультурисплілкування;

– надаватизгодуна:

- безпосереднюперевіркукурсових, кваліфікаційнихробіттощо на ознакинаявностіакадемічногоплагіату за допомогоюспеціалізованихпрограмнихпродуктів;
- оброблення, збереження й розміщеннякваліфікаційнихробіт у відкритомудоступі в інституційномурепозитарії;
- використаннязробіт для перевірки на ознакинаявностіакадемічногоплагіату в інших роботах виключно з метою виявленняможливихознакакадемічногоплагіату;

– самостійновиконуватинавчальнізавдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатівнавчання;

– надаватидостовірнуінформаціющодорезультатіввласноїнавчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерелінформації;

– не використовуватирезультатидослідженьіншихавторів без використанняпокликань на їхню роботу;

– своєюдіяльністюсприятизбереженню та примноженнютрадиційуніверситету, формуваннюйого позитивного іміджу;

– не чинитиправопорушень і не сприятиїхньомускоєннюіншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємноївідповідальності та співпраці в освітньомусередовищі;

– поважати честь, гідність та особистунедоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расовуналежність, релігійнійполітичніпереконання;

– не дискримінувати людей на підставіакадемічного статусу, а також за національною, расовою, статевоючиіншоюналежністю;

– відповідальноставитисядо своїхобов'язків, вчаснота сумлінновиконуватинеобхіднінавчальні та науково-дослідницькізавдання;

– запобігативиникненню у своїйдіяльностіконфліктуінтересів, зокрема не використовуватислужбових і родиннихзв'язків з метою отриманнянечесноїпереваги в навчальній, науковій і трудовійдіяльності;

– не братиучастів будь-якійдіяльності, пов'язанийіз обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– непідроблюватидокументи;

– непоширюватинеправдивутакомпрометуючуінформаціюпроіншихздобувачіввищоїосвіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувативинагород за несправедливеотримання будь-якихперевагабоздійсненнявпливуна змінуотриманоїакадемічноїоцінки;

– не залякувати й не проявлятиагресії та насильствапротиінших, сексуальнідомагання;

– не завдаватишкодиматеріальнимцінностям, матеріально-технічнійбазіуніверситету та особистійвласностііншихстудентів та/абопрацівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символікиуніверситету в заходах, не пов'язаних з діяльністюуніверситету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-якихспроб, спрямованихна те, щобза допомогоюнечеснихі негіднихметодівдосягативласнихкориснихцілей;

– не завдаватизагрозивласномуздоров'юабобезпеціїншим студентам та/абопрацівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, щовідповідно до чинного законодавства у разінедотриманняКодексуакадемічноїдоброчесності буду нести академічну та/абоіншівидивідповідальностійдо менеможуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушенняпринципівакадемічноїдоброчесності.

30.10.2020  Кошеварова Анна Олександрівна