МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТА ДОВЕДЕННЯ ТВЕРДЖЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ВЕКТОРІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала студентка 2 курсу
Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Алєксандрова Інна Володимирівна
Керівник кандидат педагогічних наук, ст. викладач
Григор'єва В.Б.
Рецензент доктор педагогічних наук
Професор Шерман М.І.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність проблеми дослідження. Одним з фундаментальних понять сучасної математики є поняття вектора та його координат. Еволюція поняття вектора відбувалася завдяки широкому використанню цього поняття у різних галузях математики, техніки, механіки. Роботи К. Гаусса, К. Весселя, Ж. Аргана з теорії комплексних чисел встановили зв'язок між комплексними числами і геометричними операціями над векторами (координатами) на площині. У середині XIX століття вектори і координати використовуються для вивчення властивостей тривимірного і n-вимірного векторних просторів. У кінці XIX століття починається бурний розвиток векторного числення. Векторна алгебра і векторні простори вивчаються у курсах «Лінійної алгебри», «Аналітичної геометрії», «Лінійного програмування» та ін. у закладах вищої освіти.

Питання векторної алгебри складають обов'язковий розділ курсу аналітичної геометрії [9], що викладається студентам фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Важливість цього розділу визначається тим, що більшість питань аналітичної геометрії успішно описуються засобами векторної алгебри, а також і тим, що на базі векторної алгебри побудовано векторний аналіз, що широко використовується в курсах диференціальної геометрії, загальної та теоретичної фізики, теоретичної механіки. Крім застосувань до спеціальних курсів, векторна алгебра з успіхом може бути застосована при розв'язуванні різноманітних задач елементарної геометрії. Остання обставина посилює роль векторної алгебри при підготовці вчителя математики загальноосвітньої школи. Саме цим аспектом обумовлена актуальність вибору теми дослідження.

Питання, пов'язані із застосуванням векторної алгебри до розв'язування математичних та фізичних задач досліджували Г. Апостолова, В. Бевз, Г. Бевз, Н. Владімірова, Т. Годованюк, А. Губанова, Ю. Захарійченко, О. Зеленяк, Л. Ізюмченко, О. Коломієць, Т. Махомета, З.

Слєпкань, Л. Тополя, В. Швець, В. Ясінський та ін. Теоретикометодичними аспектами вивчення координат і векторів у шкільному курсі математики, векторної алгебри у ЗВО, у т.ч. із застосуванням ІКТ, займалися М. Бурда, І. Дереза, І. Дремова, О. Істер, Є. Нелін, С. Панова, Т. Поліщук, М. Працьовитий, Н. Тарасенкова, І. Тягай, С. Цуренко, Ю. Яременко та ін. Проблеми впровадження профільного навчання в Україні досліджували І. Акуленко, Г. Бевз, Н. Бібік, Б. Біляк, О. Губанова, С. Іванова, І. Ключник, Л. Липова, І. Лікарчук, Ю. Мальований, С. Максименко, В. Малишев, О. Носова, В. Павлюк, О. Панішева, П. Сікорський, З. Слєпкань, О. Чашечникова та ін.

Вибір теми даної статті зумовлюється тим, що для учнів дуже складними є геометричні задачі взагалі, у тому числі задачі, пов'язані із застосуванням координат і векторів до їхнього розв'язування. Про це свідчать підсумки зовнішнього незалежного оцінювання з математики, які стверджують, що значна кількість учнів навіть не намагаються розв'язувати задачі векторної алгебри.

Основна ***мета*** дослідження – розкрити питання про можливість застосування векторів до розв'язування різноманітних задач та доведення тверджень.

Предметом дослідження виступає векторний апарат, а ***об'єктом*** дослідження – алгебраїчні та геометричні властивості операцій над векторами.

Виходячи з мети дослідження, визначені його основні ***завдання***, а саме:

- розглянути основні положення векторної алгебри, що стосуються безпосередньо операцій над векторами та їх властивостей;
- визначити методи розв'язування геометричних задач за допомогою векторів та їх особливості та переваги;
- дослідити питання про можливість застосування векторів при розв'язуванні задач та доведенні теорем.

Основні ***методи дослідження***, що використовувалися у роботі, – це векторний та координатний методи.

Теоретичне значення роботи полягає у систематизації основних теоретичних положень векторної алгебри та розкритті можливість застосування апарату векторної алгебри до розв'язування задач та доведення тверджень. ***Практичне значення*** роботи полягає у розкриті особливостей розв'язання задач мовою векторної алгебри.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету

В структурі роботи виділено три основні розділи. В першому розділі наведено деякі теоретичні положення векторної алгебри, що стосуються властивостей основних операцій над векторами. Зокрема, вектори розглядаються як геометричні об'єкти, а також як елементи векторного простору, що визначається своєю аксіоматикою.

В другому розділі наведено деякі методи застосування векторів, зокрема, розглянуто особливості таких методів, як поворот вектора на 90°, метод застосування одиничного вектора, а також можливість застосування скалярного добутку векторів до доведення алгебраїчних та геометричних нерівностей та знаходження векторних рівнянь множин точок.

Третій розділ практичного характеру і містить приклади застосування векторів до розв'язування задач та доведення планіметричних тверджень.

Матеріал роботи може бути використаний вчителями загальноосвітніх шкіл, а також викладаючи та студентами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Історичний огляд проблеми дослідження

Відомо, що сучасна аналітична геометрія обґрунтовується векторною аксіоматикою, а в основі її лежить метод декартових координат. Ця наука утворює міцний зв'язок між алгеброю і геометрією. В ній геометричні фігури можна подати рівняннями або нерівностями, а аналітичні вирази легко визначаються графічно. У шкільній математиці теж вивчаються, у певній мірі, декартова система координат і вектори з їх властивостями, які є окремими темами аналітичної геометрії. Історія розвитку цих тем є важливими фактами розвитку математики, які повинні приваблювати учнів. Відомо, що потреба у методі координат турбувала ще стародавніх греків. Найбільш цікаво це питання розкриває давньогрецький вчений Аполлоній Перзький (III ст. до н. е.) у праці «Про конічні перерізи», будуючи відрізки діаметрів і відрізки спряжених з ними паралельних хорд еліпса, гіперболи і параболи [14]. Проте метод прикладання площ, яким користувався Аполлоній, призвів до складних рівнянь, визначених у словесній формі. У зв'язку з цим його метод був «забутий» майже на 19 століть. Лише у XVII ст., коли виникла потреба у дослідженні властивостей змінних величин, вчені зацікавилися працями своїх попередників. Праця Аполлонія і підказала їм на потребу встановлення зв'язків між полем дійсних чисел і полем відрізків прямих [15]. Французький вчений Рене Декарт (1596-1650) у праці «Міркування про метод», опублікованій у 1637 році, вперше розглянув дві ідеї: введення змінної величини і використання прямолінійних координат.

Знаючи рівняння змінних величин можна побудувати їх зображення в системі координат і навпаки, за графіком можна визначити рівняння, яке пов'язує незалежні і залежні змінні. Така система координат мала недоліки. Вчені при перевиданні праці Р. Декарта удосконалювали його систему координат. Так, англійський учений Дж. Валліс [7] (1616-1703) запропонував брати абсциси і ординати не лише додатними, а й від'ємними числами. Швейцарський математик Г. Крамер (1704-1752) доповнив декартову систему координат віссю Оу і зробив її рівноправною із віссю абсцис Ох. Видатний французький вчений А. Клеро (1713-1765) ввів третю вісь – аплікат Oz, для використання декартової системи координат у трьохвимірному просторі. Назва «аналітична геометрія» була введена видатним французьким математиком С. Лакруа (1765-1843) [23]. В кінці XVIII ст. було завершено формування аналітичної геометрії. Вектори як напрямлені відрізки почали вивчатись у XIX столітті. Термін «вектор» походить від латинського слова vector – той, що несе, вперше був запропонований у 1845 році видатним англійським математиком У. Гамільтоном (1805-1865) з позначенням латинськими буквами із стрілкам над ними. У. Гамільтон дослідив властивості векторів, увів дії над ними, досліджував векторні функції. Великий вклад у розвиток теорії векторів внесли Г. Грасман (1809- 1887), Дж. Максвелл (1831-1879), Дж. Гіббс (1839-1903), О. Хевісайд (1850-1925) та ін. У 1917 році для обґрунтування евклідової геометрії була розроблена векторна аксіоматика німецьким математиком Г. Вейлем (1885-1955). Векторні алгебра і аксіоматика були доповнені до аналітичної геометрії в кінці XIX і на початку XX ст.

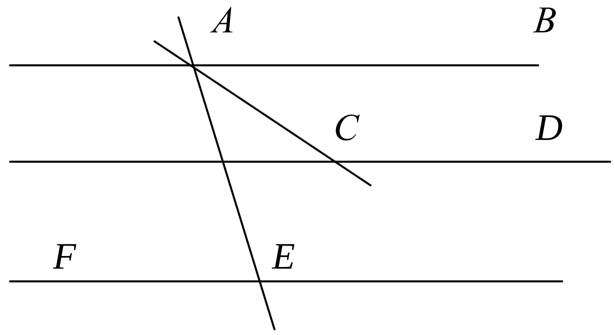
З тих пір векторно-координатний метод відіграє важливу роль при розв'язуванні геометричних задач. У шкільному курсі геометрії суть векторного методу полягає в тому, що певне взаємне положення точок, прямих і площин виражають мовою векторів, у вигляді векторних рівностей. Одержані рівності перетворюють за допомогою апарату векторної алгебри до нового вигляду, а потім перекладають на мову геометрії [13]. Суть методу координат – це спосіб виражати положення точки або фігури відносно прямокутної декартової системи координат за допомогою чисел. Методом координат геометричні факти можна перекласти на мову алгебри, тобто надати їм вигляду алгебраїчних рівнянь, результати розв'язування яких знову інтерпретувати геометрично. Оскільки вектори можна задати координатами, то векторно-координатний метод є об’єднанням двох методів: векторного і координатного.

1.2. Дії над векторами

Геометричною фігурою називається будь-яка множина точок. Найпростіші фігури: точка, пряма, промінь, відрізок, площина, півплощина.

Дві *прямі a* та *b* називаються *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не мають жодної спільної точки. Два *промені l* та *h паралельні*, якщо вони лежать на паралельних прямих. *Площини* α та β *паралельні*, якщо вони не мають жодної спільної точки.

Паралельні промені можуть бути однаково або протилежно напрямлені. Промені *AB* та *CD однаково напрямлені*, якщо вони лежать в одній півплощині з межею *AC*. Промені *AB* та *EF* протилежно напрямлені, якщо вони лежать в різних півплощинах з межею *AE* (мал. 1.1).

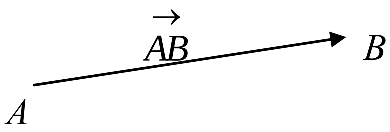


Мал. 1.1

Множина всіх променів на прямій (на площині, в просторі), які мають однаковий напрямок, називається *напрямом* на прямій (на площині, у просторі). На прямій існує лише два протилежні один одному напрями. На площині та у просторі існує нескінчена множина напрямів [23].

Якщо на прямій один з двох можливих напрямів прийняти за додатковий напрям, то така пряма має назву *напрямленої*. Приклад напрямлених прямих – вісі координат.

Одним з найважливіших понять аналітичної геометрії є поняття напрямленого відрізка або вектора [1]. *Вектором* називається такий відрізок, для якого характерний порядок його кінців. *Позначення:* $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$. Якщо задано вектор $\overrightarrow{AB}$, то точка A називається *початком* вектора, а B – *кінцем* вектора. На малюнку вектор позначаються стрілкою, що вказує на його напрям (мал. 1.2).



Мал. 1.2

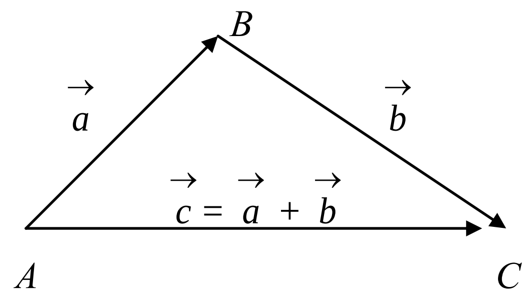
Кожен з векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{BA}$ називається *протилежним* до другого. *Позначення*: протилежним до довільного вектора $\vec{a}$ вважається вектор $-\vec{a}$. *Довжиною* (*модулем*) вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB. *Позначення*: $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$ називаються *однаково* (*протилежно*) *напрямленими*, якщо однаково (протилежно) напрямлені промені AB та CD.

Можна розглядати кожну точку A як частинний випадок вектора, початок і кінець якого співпадають. Його позначають $\overrightarrow{AA}$ і називають *нульовим вектором*. *Позначення*: $\vec{0}$. Довжина нульового вектора вважається рівною нулю. Нульовий вектор вважається однаково напрямленим та паралельним до будь-якого вектора.

Два вектора називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий напрям та довжину. Два вектори, паралельні до однієї прямої, називаються *колінеарними*. Два ненульових колінеарних вектори або однаково, або протилежно напрямлені. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Нехай дано два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки відрізок, що визначає вектор $\vec{a}$, а від кінця одержаного відрізка – відрізок, що визначає вектор $\vec{b}$. З'єднаємо початок першого вектора та кінець другого і отримаємо деякий вектор $\vec{c}$ (мал. 1.3). Цей вектор називається *сумою* даних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ та позначається: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Мал. 1.3

Якщо позначити

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{BC},\ \vec{c} = \overrightarrow{AC},$$

то отримаємо векторну рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\ . \tag{1.1}$$

Отже, для будь-яких трьох точок *A*, *B* та *C* має місце рівність (1.1). Зокрема,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

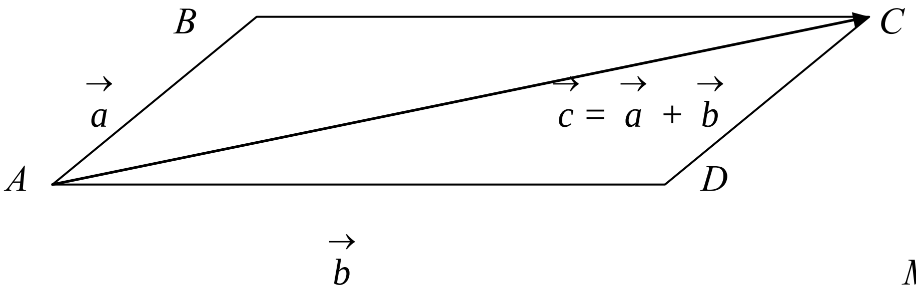
або

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0},\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\ .$$

Додавання векторів вказаним способом має назву *правила трикутника* додавання векторів. З цього правила видно, що для векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ справедлива нерівність:

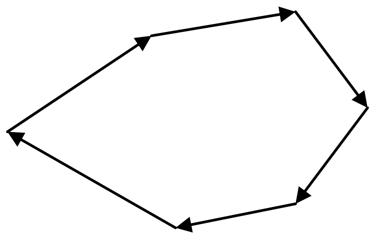
$$|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|. \tag{1.2}$$

Також користуються і *правилом паралелограма* додавання векторів [10]. Сумою двох векторів, що мають спільний початок, є вектор, який збігається з напрямом діагоналі паралелограма, побудованого на двох даних векторах як на сторонах. Графічно це має вигляд (мал. 1.4):



Мал. 1.4

Для знаходження суми n векторів необхідно знайти вектор $\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$. Для цього використовується *правило многокутника* (мал. 1.5).



Мал. 1.5

Властивості додавання

1. Додавання векторів асоціативно:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right).$$

2. Додавання векторів комутативне:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Різницею двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{x}$, якщо виконується рівність: $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$. Позначення: $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ *на дійсне число* (скаляр) α називається вектор $\vec{p}$, що задовольняє двом умовам:

1) довжина вектора $\vec{p}$ дорівнює модулю числа α, помноженому на довжину $\vec{a}$: $\left|\vec{p}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$;

2) вектор $\vec{p}$ однаково напрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$ та протилежно напрямлений, якщо $\alpha < 0$.

Вектор $\vec{p}$ дорівнює $\vec{0}$ тоді і тільки тоді, коли або $\vec{a}$ – нульовий вектор, або $\alpha = 0$.

Властивості множення вектора на скаляр

1. Асоціативність множення:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}.$$

2. Дистрибутивність множення відносно додавання скалярів:

$$\vec{a} \cdot (\alpha + \beta) = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}.$$

3. Дистрибутивність множення відносно додавання векторів:

$$\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}.$$

При діленні вектора $\vec{a}$ на число α ($\alpha \neq 0$) цю дію заміняють на множення на число, обернене до α: $\vec{a} : \alpha = \vec{a} \cdot \frac{1}{\alpha}$. Одиничний вектор ($|\vec{a}| = 1$) одержується у тому випадку, коли вектор ділять на його довжину: $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$.

Цей одиничний вектор, що відповідає вектору $\vec{a}$ називають *ортом*.

***Теорема* 1.1** (про колінеарні вектори). Якщо $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) – колінеарні вектори, то існує єдине число α таке, що $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$.

Доведення.

Якщо $\vec{b} = \vec{0}$, то покладемо α = 0. Якщо $\vec{b} \neq \vec{0}$, то можливі два випадки:

а) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ співнапрямлені, в цьому випадку покладемо $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$;

б) вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ протилежно напрямлені, тоді покладемо $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Припустимо, що існує ще одне число α′ таке, що $\vec{b} = \alpha' \cdot \vec{a}$. Тоді маємо:

$$\alpha' \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a},\ \ \alpha' \cdot \vec{a} - \alpha \cdot \vec{a} = \vec{0},\ \vec{a} \cdot (\alpha' - \alpha) = \vec{0}.$$

Так як $\vec{a} \neq \vec{0}$, то α′ – α = 0, тобто α′ = α, щ. т. д.

1.2. Лінійна залежність та незалежність векторів

Нехай R – множина дійсних чисел та V – довільна непуста множина. Припустимо, що на V задана бінарна операція “+” та для будь-якого числа $\alpha \in R$ визначено відображення f_α: $V \rightarrow V$. Домовимося результат $f_\alpha(x)$ позначати $\alpha \cdot x$ та називати *добутком* числа α на елемент $x \in V$ [25].

Множина V із заданими на ній операціями “ + ” та “ · ” називається *лінійним (векторним) простором*, якщо виконуються наступні аксіоми:

I. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$, $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$.

2. Існує нейтральний елемент $\bar{0} \in V$, тобто $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ для будь-якого $\bar{x} \in V$.

3. Для кожного елементу $x \in V$ існує такий елемент $\bar{t}$, що $\bar{x} + \bar{t} = \bar{0}$.

4. $\alpha(\bar{x} + \bar{z}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{z}$, $(\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$.

5. $\alpha(\beta \cdot \bar{x}) = (\alpha \cdot \beta)\bar{x},\ 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$, де $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – довільні елементи з V; α, β – довільні числа з R.

Елементи з множини V називаються *векторами*, а елементи з R – *скалярами*. Таким чином, у математиці вектор – це елемент лінійного простору.

Нехай V – довільний лінійний простір. Вектори $\bar{a}_1,..,\bar{a}_k \in V$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують скаляри такі, що

$$\alpha_1\bar{a}_1 + ... + \alpha_k\bar{a}_k = \bar{0},$$

причому хоча б один зі скалярів α_i відмінний від нуля. В іншому випадку вектори $\bar{a}_i$ називаються *лінійно незалежними*.

Вектори $\bar{b}_1,...,\bar{b}_k \in V$ утворюють *базис* простору V якщо:

1) вони лінійно незалежні;
2) кожен вектор $\bar{x}$ з V є їх лінійно комбінацією, тобто

$$\bar{x} = \alpha_1\bar{b}_1 + ... + \alpha_k\bar{b}_k,$$

для деяких склярів $\alpha_1,...,\alpha_k \in R$.

Якщо у лінійному просторі V існує базис, який складається зі скінченого числа векторів, то простір V називається *скінченовимірним*, а число елементів базису – *розмірністю простору V*. В цьому випадку пишуть $\dim V = k$.

Справедливе наступне твердження [12].

***Теорема* 1.2.** Якщо простір V скінченовимірний, то будь-які два його базиси містять однакову кількість елементів.

Нехай V – лінійний простір і $\dim V = n$. Припустимо, що $B = \{\bar{b}_1,...,\bar{b}_n\}$ – базис простору V. Для довільного вектора маємо розклад:

$$\bar{x} = \alpha_1 \cdot \bar{b}_1 + ... + \alpha_n\bar{b}_n. \tag{1.3}$$

Скаляри $\alpha_1,...,\alpha_n$ називаються *координатами вектора* $\bar{x}$ у базисі B. Покажемо, що координати вектора базисом B визначаються однозначно. Нехай

$$\bar{x} = \gamma_1 \cdot \bar{b}_1 + ... + \gamma_n \cdot \bar{b}_n,$$

тоді

$$(\alpha_1-\gamma_1)\overline{b}_1+...+(\alpha_n-\gamma_n)\overline{b}_n=\overline{0}.$$

Оскільки b_i – лінійно незалежні вектори, то

$$\alpha_1-\gamma_1=0,...,\alpha_n-\gamma_n=0,$$

тобто $\alpha_1=\gamma_1,...,\alpha_n=\gamma_n$.

Припустимо, що $n=2$, тобто V_2 – лінійний простір напрямлених відрізків на площині. Покажемо, що два напрямлені відрізки $\overline{a}$ і $\overline{b}$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони лежать на паралельних прямих або хоча й один із них є нульовий (тобто коли $\overline{a}\parallel\overline{b}$).

Нехай $\overline{a}\parallel\overline{b}$. На довільній прямій $e\parallel\overline{a}$ побудуємо вектори $\overline{OA}=\overline{a}$ та $\overline{OB}=\overline{b}$. Якщо $\overline{a}$ або $\overline{b}=0$, доводити нічого. Тому будемо вважати, що $\overline{a},\overline{b}\neq 0$. За означенням, знайдеться скаляр α такий, що $\overline{a}=\alpha\overline{b}$ або $\overline{a}-\alpha\overline{b}=\overline{0}$, тобто $\overline{a},\overline{b}$ лінійно залежні вектори.

Знову, нехай $\overline{a},\overline{b}$ – довільні лінійно залежні вектори простору V_2. Можна, припускати, що $\overline{a},\overline{b}\neq\overline{0}$. Тоді існує скаляр α такий, що $\overline{a}=\alpha\overline{b}$. Згідно з визначенням рівності спрямованих відрізків, одержуємо, що $|\overline{a}|=|t\cdot\overline{b}|$ і $\overline{a},t\overline{b}$ мають однакові напрямки, тобто $\overline{a}\parallel t\overline{b}$. Отже, $\overline{a}$ і $t\overline{b}$ лежать на паралельних прямих, але тоді і $\overline{a},\overline{b}$ лежать на паралельних прямих (або на одній і тій же прямій), тобто $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

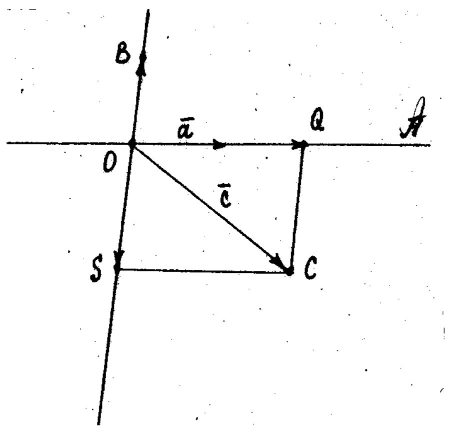
Припустимо тепер, що $\overline{a},\overline{b}$ – лінійно незалежні вектори простору T_2. Розглянемо довільний елемент $\overline{c}\in T_2$. Якщо $\overline{c}=\overline{0}$, то $\overline{c}=0\cdot\overline{a}+0\cdot\overline{b}$, тобто $\overline{c}$ лінійно виражається через вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Доведемо цей факт і для вектора $\overline{c}\neq 0$.

Нехай $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{b}=\overline{OB}$ і $\overline{c}=\overline{OC}$. За умовою $\overline{a}$ і $\overline{b}$ – лінійно незалежні. Згідно з доведеним вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$ лежать на різних прямих d_1 і d_2, які пересікаються в точці *O*.

Вихідна геометрична площина Π розбивається прямими d_1 та d_2 на чотири частини, в одній із яких буде знаходитися відрізок $\overline{OC}$ (мал.1.6).

Через точку C проведемо прямі, паралельні прямим OB та OA. Припустимо, що одержані точки перетину S і Q. Вектор $\overline{OQ} = \alpha\overline{a}$, а вектор $\overline{OS} = \beta\overline{b}$. Згідно з визначенням операції додавання векторів, одержуємо рівності: $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Таким чином $\{\overline{a}, \overline{b}\}$– базис простору V_2, і тому $\dim V_2 = 2$.

Отже, у просторі V_2 будь-які два неколінеарні вектори утворюють базис. Два вектори лінійно залежні в просторі V_2 тоді і тільки тоді, коли вони паралельні.



Мал. 1.6

Розглянемо простір V_3.

Нехай $\overline{a} \in T_3$ і n – довільна площина геометричного простору E_3. Будемо говорити, що вектор $\overline{a}$ паралельний площині n, якщо для точки $O \in \Pi$ відрізок $\overline{OA} = \overline{a}$ лежить у площині Π. Запишемо це у вигляді $\overline{a} \parallel \Pi$. Якщо $\overline{a} = \overline{0}$ то вважаємо, що $\overline{a} \parallel \Pi$.

Три вектори $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ називаються *компланарними,* якщо існує площина Π, якій вони паралельні. Доведемо, що будь-які три вектори простору V_3 лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Нехай

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0},$$

де хоча б один із скалярів α, β або γ не дорівнює нулю. Припустимо, що $\alpha \neq 0$, тоді $\bar{a} = t\bar{b} + s\bar{c}$. У просторі V_3 вибираємо довільну точку O і будуємо відрізки $\overline{OB} = \bar{b}$ і $\overline{OC} = \bar{c}$. Тоді відрізок $\overline{OA} = \bar{a}$ лежить у площині *П*, в якій лежать точки *O*, *A* і *B*. Отже, $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c} \parallel \Pi$.

Знову, нехай $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c} \parallel \Pi$. У площині *П* беремо точку і будуємо відрізки

$$\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OB} = \bar{b} \text{ і } \overline{OC} = \bar{c}.$$

Зрозуміло, що *A, B* і *C* $\in$*П.* Але у будь-якій площині будь-які три вектори лінійно залежні. Таким чином все доведено.

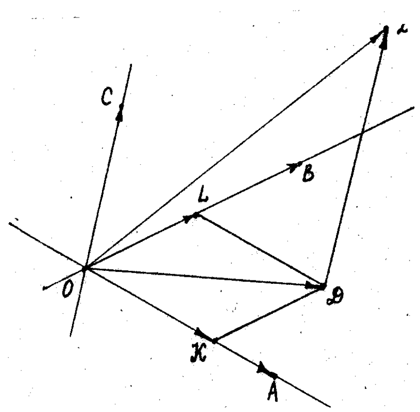
Покажемо тепер, що будь-які три некомпланарні вектори у просторі V_3 утворюють базис.

Якщо $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$ – некомпланарні, то вони лінійно незалежні [9].

Розглянемо довільний вектор $\bar{z} \in V_3$. У просторі V_3 фіксуємо точку O і будуємо відрізки

$$\overline{OA} = \bar{a},\ \overline{OB} = \bar{b},\ \overline{OC} = \bar{c},\ ZO = \bar{z}.$$

Площини *BOA*, *COB* і *AOC* розбивають простір V_3 на вісім частин, в одній із яких знаходиться відрізок $\overline{OZ}$ (мал. 1.7).



Мал. 1.7

Через точку *Z* проведемо пряму *l* паралельно прямій *OC*. Нехай *D* – точка перетину *l* з площиною *OAB.* Через точку *D* проводимо прямі $n \parallel OB$ і

$m \parallel OA$. Нехай

$$K = n \bigcap OA \text{ і } L = m \bigcap OB.$$

Тоді

$$\overline{OK} = \alpha\bar{a}, \overline{OL} = \beta\bar{b},$$

причому $\overline{OD} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. Якщо $\overline{DZ} = \gamma\bar{c}$, то

$$\overline{OZ} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c},$$

тобто вектор $\bar{z}$ є лінійною комбінацією векторів $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$. Отже доведено, що останні утворюють базис простору V_3. Таким чином, $\dim V_3 = 3$.

1.3. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Нехай V – довільний лінійний простір розмірності n. Розглянемо довільне відображення $g : V \cdot V \to R$, що задовольняє умовам (якщо позначити $g(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$):

1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$;
2) $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z}$;
3) $\alpha(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \alpha\bar{x} \cdot \bar{y}$;
4) $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$, причому $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$, тоді і тільки тоді, коли $x = 0$.

Функція g називається *скалярним добутком* у просторі V.

***Теорема* 1.3.** У будь-якому скінченовимірному лінійному просторі існує скалярний добуток векторів.

Доведення.

Розглянемо довільний базис $B = \{\bar{b}_1, ..., \bar{b}_n\}$ простору V і для елементів $\bar{x}, \bar{y}$ із V покладемо

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + ... + x_n y_n, \tag{1.4}$$

де x_i – координати вектора $\bar{x}$ у *B*; y_i – координати вектора $\bar{y}$ у *B*. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що так визначений “добуток” $\bar{x}\cdot\bar{y}$ є скалярним. Дійсно,

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=\sum x_i\cdot y_i\,;$$

$$\bar{x}\cdot(\bar{y}+\bar{z})=\sum x_i(y_i+z_i)=\sum x_i\cdot y_i+\sum x_i\cdot z_i=\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{x}\cdot\bar{z}\,;$$

$$\alpha(\bar{x}\cdot\bar{y})=\alpha(\sum x_i\cdot y_i)=\sum\alpha\cdot x_i\cdot y_i=\sum(\alpha\cdot x)_i\cdot y_i=(\alpha\cdot\bar{x})\cdot\bar{y}\,;$$

$$\bar{x}\cdot\bar{x}=\sum x_i^2\geq 0\,,$$

$$\bar{x}\cdot\bar{x}=0\leftrightarrow x_1=...=x_n=0\leftrightarrow\bar{x}=\bar{0}$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що визначення скалярного добутку за формулою (1.4) суттєво залежить від базису *B*, тобто різні базиси задають різні скалярні добутки [25].

Зазначимо, що скалярний добуток векторів обчислюється за формулою

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=x_1y_1+...+x_ny_n\,,$$

де $x_i \mid y_i \mid$ – координати вектора $\bar{x} \mid \bar{y} \mid$ у базисі *B*.

Нехай E_3 – тримірний простір і V_0 – лінійний простір всіх напрямлених відрізків із E_3. Таким чином, під вектором простору E_3 розуміємо сукупність всіх рівних напрямлених відрізків. $\dim V_0=3$ і будь-які некомпланарні вектори із V_0 утворюють базис. Декартова система координат простору E_3 має вид $S=\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, де *O* – фіксована точка із E_3, а $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – вектори із V_o, що задовольняють умовам:

$$|\,i\,|=|\,j\,|=|\,\bar{k}\,|=1,\ \bar{i}\perp\bar{j},\ \bar{i}\perp\bar{k},\ \bar{j}\perp\bar{k}\,.$$

Під координатами точки *A* в системі *S* будемо розуміти координати a_1,a_2 і a_3 вектора $\overline{OA}$ в базисі $D=\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ і записувати $A=\{a_1,a_2,a_3\}$. Координати вектора $\bar{x}$ в базисі *D*, за означенням, вважаються координатами вектора $\bar{x}$ в системі *S*.

Для будь-якої точки *A* і будь-якого вектора $\bar{x}$ існує єдина точка *B* така, що $\bar{x} = \overline{AB}$. Оскільки додавання векторів у V_3 визначено за правилом трикутника, то для будь-яких точок *A, B* і *C* маємо рівність:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Отже, з рівності $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ одержуємо $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, тому для координат z_1, z_2 і z_3 вектора $\overline{AB}$ маємо рівності:

$$z_1 = b_1 - a_1,\ z_2 = b_2 - a_2,\ z_3 = b_3 - a_3,$$

якщо $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Одержали таке правило для знаходження координат вектора $\overline{AB}$ в системі *S*: для знаходження координат вектора $\overline{AB}$ необхідно від координат кінця відняти відповідні координати початку.

Нехай відносно декартовій системі *S* заданий вектор $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Покажемо, що його довжина обчислюється за формулою

$$|\,\bar{x}\,| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,. \qquad (1.5)$$

Дійсно, розглянемо вектор $\overline{OA} = \bar{x}$. Тоді координати точки *D* співпадають з координатами вектора $\bar{x}$, бо відстань від початку координат до точки *D* дорівнює довжині діагоналі паралелепіпеда зі сторонами $|\,x_1\,|, |\,x_2\,|, |\,x_3\,|$. Зазначимо, що якщо одне з чисел x_i дорівнює нулю, одержуємо прямокутник, якщо дві координати дорівнюють нулю – відрізок.

З‘ясуємо геометричну суть скалярного добутку у геометричному просторі E_3. Скалярний добуток визначаємо за допомогою системи координат $S = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

де $\{x_1, x_2, x_3\} = \bar{x}$, $\{y_1, y_2, y_3\} = \bar{y}$.

***Теорема* 1.4.** $$\bar{x} \cdot \bar{y} = |\,\bar{x}\,| \cdot |\,\bar{y}\,| \cdot \cos\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\bar{x}$ та $\bar{y}$.

Доведення.

Якщо $\bar{x}=\bar{0}$ або $\bar{y}=\bar{0}$, то рівність очевидна. Нехай вказані вектори ненульові. Покладемо $\overline{OA}=\bar{x}$ і $\overline{OB}=\bar{y}$.

Припустимо, що $\bar{x}\parallel\bar{y}$, тоді $\bar{y}=\alpha\bar{x}$. Отже, $\bar{y}=\{\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3\}$. Але тоді

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=\alpha x_1^2+\alpha x_2^2+\alpha x_3^2.$$

Якщо точки *A* і *B* лежать по різні сторони від початку координат, то $\alpha=-1$. В цьому випадку:

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{(\alpha x_1)^2+(\alpha x_2)^2+(\alpha \chi_3)^2}\cdot(-1)=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cdot\cos\varphi.$$

Нехай тепер $\bar{x}$ та $\bar{y}$ неколінеарні. Із властивості скалярного добутку випливає, що

$$(\bar{x}+\bar{y})^2=\bar{x}^2+\bar{y}^2+2\bar{x}\cdot\bar{y}.$$

Оскільки $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$, з цієї рівності випливає, що скалярний добуток $\bar{x}\cdot\bar{y}$ виражається через довжини векторів $\bar{x}+\bar{y}$, $\bar{x}$ і $\bar{y}$, а значить не залежить від вибору декартової системи координат.

Будемо припускати, що система *S* вибрана так, що вектори $\bar{x},\bar{y}$ лежать у площині *XOY*, причому $\bar{x}$ та $\bar{i}$ мають однакові напрямки. Тоді

$$\bar{x}=\{|\bar{x}|,0,0\},\ \bar{y}=\{|\bar{y}|\cdot\cos\varphi,|\bar{y}|\cdot\sin\varphi,0\}.$$

Підставляючи знайдені координати в (1.4), одержуємо

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cdot\cos\varphi.$$

Теорему доведено.

Як наслідок із теореми 1.4 випливає, що два ненульові вектори $\bar{x}$ та $\bar{y}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\bar{x}\cdot\bar{y}=0$, тобто відношення ортогональності векторів співпадає з відношенням перпендикулярності цих векторів. Зазначимо також, що $|\bar{x}|=\sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$, тобто квадрат модуля вектора дорівнює його скалярному квадрату. З (1.4) маємо:

$$cos\varphi=\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|},$$

або

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}},$$

для будь-яких ненульових векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$.

З‘ясуємо геометричний смисл прямокутних координат вектора у просторі E_3. Нехай $\bar{a}$ – ненульовий вектор, заданий у декартовій системі $S = \{0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ координатами $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Згідно з означенням базису, маємо:

$$a = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}.$$

Введемо у розгляд кути:

$$\varphi = (\bar{a}, \bar{i}),\ \psi = (\bar{a}, \bar{j}) \text{ і } \theta = (\bar{a}, \bar{k})$$

(в дужках вказані вектори, які утворюють відповідний кут).

Із рівності

$$\bar{a} \cdot i = a_1 \cdot \bar{i} \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{i} \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k} \cdot \bar{i}$$

одержуємо, що $a_1 = \bar{a} \cdot \bar{i}$, бо вектор $\bar{i}^2 = 1$, $\bar{j} \cdot \bar{i} = 0$, $\bar{k} \cdot \bar{i} = 0$. Отже,

$$a_1 = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi.$$

Аналогічно маємо вирази:

$$a_2 = |\bar{a}| \cdot \cos\psi,\ a_3 = |\bar{a}| \cdot \cos\theta$$

Числа $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\theta$ називаються *направляючими косинусами вектора* $\bar{a}$ у системі *S*. Із одержаних формул випливає, що кожна координата вектора дорівнює добутку довжин цього вектора на відповідний направляючий косинус.

Відмітимо, що сума квадратів направляючих косинусів будь-якого ненульового вектора дорівнює одиниці. Дійсно

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot (\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\theta),$$

тобто

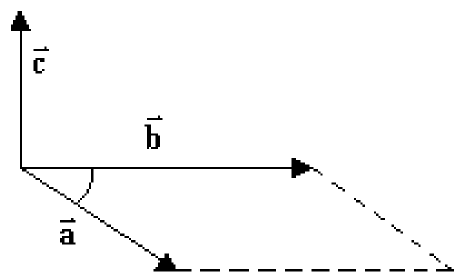
$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\theta = 1.$$

Звідси, зокрема, випливає, що координати одиничного вектора у системі дорівнюють направляючим косинусам цього вектора:

$$\bar{a} = \{\cos\varphi, \cos\psi, \cos\theta) \text{ або } |\bar{a}| = 1.$$

Таким чином, у декартовій системі координат довільний вектор має координати: $|\bar{a}|\cdot\cos\varphi$, $|\bar{a}|\cdot\cos\psi$, $|\bar{a}|\cdot\cos\theta$, де φ, ψ та θ – кути, що направляють вектор $\bar{a}$.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається новий вектор $\vec{c}$, довжина якого чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перпендикулярний до площини цих векторів і направлений так, щоб найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ навколо одержаного вектора $\vec{c}$ відбувався проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, позначається $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$ (мал 1.8).



Мал. 1.8

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні, то їх векторний добуток вважається рівним нулю.

З означення випливає, що довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

тобто добутку довжин векторів співмножників на синус кута між ними.

Властивості векторного добутку двох векторів

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативність);

2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивність).

Якщо вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ задані координатами у деякому ортонормованому базисі, то координати вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ обчислюються за формулами:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Мішаним (або векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається скалярний добуток векторного добутку перших двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на третій вектор $\vec{c}$. Мішаний добуток позначається $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, отже,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}.$$

Із означення випливає, що змішаний добуток є число.

Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на трьох направлених відрізках, що виходять із однієї точки і подають вектори-співмножники.

Нехай задані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Від деякої точки O простору відкладаємо відрізки $\overline{OA}\in\vec{a}$, $\overline{OB}\in\vec{в}$, $\overline{OC}\in\vec{c}$ і на цих відрізках будуємо такий паралелепіпед, щоб відрізки $\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}$ були трьома його вимірами (мал. 1.9).

Позначимо $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$, тоді

$$d=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S,$$

де S – площа паралелограма, що лежить в основі паралелепіпеда. Тоді

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\vec{c}\right|=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\right|-\mathrm{dc}\ \cos\left(\widehat{\vec{d},\vec{c}}\right)=\mathrm{Sc}\left|\cos\left(\widehat{\vec{d},\vec{c}}\right)\right|,$$

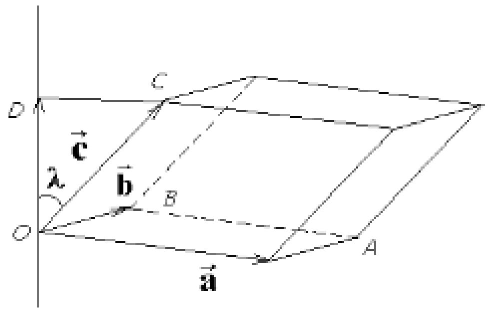
але

$$c\left|cos\left(\vec{d},\vec{c}\right)\right|=\left|Пр_{\vec{d}}\,\vec{c}\right|=H,$$

де H – висота паралелепіпеда. Отже,

$$\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=SH,\text{ або }\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=V,$$

де V – об'єм паралелепіпеда.



Мал. 1.9

Для того, щоб три вектори були *компланарними*, необхідно і достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулеві.

Властивості мішаного добутку трьох векторів

1) мішаний добуток не залежить від групування множників:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right);$$

2) мішаний добуток не змінюється від кругової перестановки множників:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a};$$

3) скалярний множник можна винести за знак мішаного добутку:

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right);$$

4) мішаний добуток суми векторів на два інших вектори дорівнює сумі мішаних добутків кожного з векторів-доданків на два інших вектори:

$$\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\vec{b}\vec{c}=\vec{a}_1\vec{b}\vec{c}+\vec{a}_2\vec{b}\vec{c}.$$

РОЗДІЛ 2
РІЗНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕКТОРІВ

2.1. Застосування скалярного добутку векторів для доведення нерівностей

Вектори можна з успіхом застосовувати для доведення або одержання тригонометричних нерівностей, зокрема, використовуючи властивості скалярного добутку [40]. З властивостей скалярного добутку векторів випливають дві основні нерівності:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0, \quad \vec{a} \neq \vec{0}, \tag{2.1}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \leq 0, \tag{2.2}$$

причому в (2.2) знак нерівності має місце тоді і тільки тоді, коли вектори лінійно залежні (тобто колінеарні).

За допомогою даних нерівностей можна доводити різноманітні геометричні та алгебраїчні нерівності.

Задача 2.1.

Довести, що для довільного трикутника *ABC* виконується нерівність:

$$\cos \angle A + \cos \angle B + \cos \angle C \leq \frac{3}{2}.$$

Розв'язання.

Нехай *O* – центр кола, вписаного в трикутник *AB*C, A_1, B_1, C_1 – точки його дотику зі сторонами *BC, CA* та *AB* (мал. 2.1). Нехай

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{s},$$

причому $\vec{s} = \vec{0}$ тільки для рівностороннього трикутника. Згідно з (2.1) маємо $\vec{s}^{\,2} \geq 0$, або

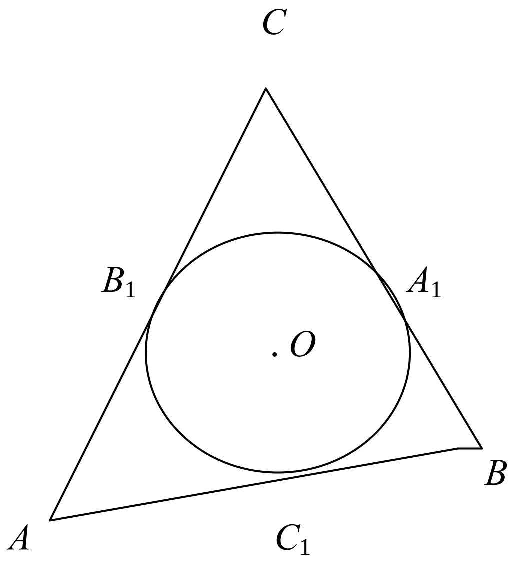
$$(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1})^2 \geq 0.$$

Піднесемо тричлен до квадрату, враховуючи, що

$$|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OC_1}|=r\,.$$

Отримаємо:

$$3r^2+2r^2(\cos\angle B_1OC_1+\cos\angle C_1OA_1+\cos\angle A_1OB_1)\ge 0\,.$$



Мал. 2.1

Але

$$\cos\angle B_1OC_1=-\cos\angle A,\quad \cos\angle C_1OA_1=-\cos\angle B,$$
$$\cos\angle A_1OB_1)=-\cos\angle C.$$

Таким чином,

$$3r^2-2r^2(\cos\angle A_1+\cos\angle B+\cos\angle C)\ge 0\,,$$

звідки випливає:

$$\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C\le\frac{3}{2}\,.$$

Знак рівності має місце лише для рівностороннього трикутника.

Задача 2.2.

Довести, що для довільного чотирикутника зі сторонами a_1, a_2, a_3, a_4 має місце нерівність:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2>\frac{1}{3}a_4^2\,.$$

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник (навіть будь-яка ламана з чотирма ланцюгами у просторі). Якщо

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a}_2, \quad \overrightarrow{CD} = \vec{a}_3, \quad \overrightarrow{DA} = \vec{a}_4,$$

то за правилом многокутника:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}.$$

Звідси: $\vec{a}_4 = -(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)$, або

$$\vec{a}_4{}^2 = \vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_2{}^2 + \vec{a}_3{}^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3.$$

Маємо:

$$2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_2{}^2 - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2,$$
$$2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_3{}^2 - (\vec{a}_1 - \vec{a}_3)^2,$$
$$2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_2{}^2 + \vec{a}_3{}^2 - (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)^2.$$

Отже, одержуємо:

$$\vec{a}_4{}^2 = 3(\vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_2{}^2 + \vec{a}_3{}^2) - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 - (\vec{a}_1 - \vec{a}_3)^2 - (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)^2.$$

Але оскільки згідно з (2.1)

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 > 0, \quad (\vec{a}_1 - \vec{a}_3)^2 >), \quad (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)^2 > 0,$$

одержуємо:

$$\vec{a}_4{}^2 < 3(\vec{a}_1{}^2 + \vec{a}_2{}^2 + \vec{a}_3{}^2), \text{ або } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > \frac{1}{3} a_4^2.$$

Задача 2.3.

Довести, що лінійні двогранні кути тетраедра $ABCD$ задовольняють нерівність:

$$\cos \angle AB + \cos \angle BC + \cos \angle CD + \cos \angle DA + \cos \angle AC + \cos \angle BD \le 2.$$

Розв'язання.

Якщо O – центр сфери радіуса r, вписаної в тетраедр $ABCD$, а точки A_1, B_1, C_1, D_1 – точки дотику її з гранями тетраедра, то

$$(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1})^2 \ge 0.$$

Звідси:

$$4r^2-2r^2(\cos\angle AB+\cos\angle BC+\cos\angle CD+\cos\angle DA+\cos\angle AC+\cos\angle BD)\geq 0$$

і після перетворень одержуємо шукану нерівність.

2.2. Поворот вектора на кут 90°

Для розв'язування афінних задач планіметрії, що стосуються взаємного розташування двох прямих, належності трьох точок одній прямій, обчислення відношення колінеарних відрізків, зручно користуватися векторами. В процесі розв'язування таких задач необхідно володіти лише операціями додавання та віднімання векторів, множення вектора на число.

Якщо ж задача носить метричний характер, то цих операцій недостатньо. На допомогу приходить звичайно операція скалярного добутку векторів. За допомогою цієї операції (у поєднанні з афінними операціями) можна обчислювати відстані та кути, знаходити метричні співвідношення між лінійними та кутовими елементами многокутників, описувати різні множини точок, розв'язувати ряд задач, пов'язаних з колом.

Між тим досить корисною при розв'язуванні метричних задач є операція повороту вектора на 90° у додатному напрямку (у припущенні, що на площині введена орієнтація [2]). Ця нескладна операція дозволяє нерідко позбавитися від застосування скалярного добутку векторів, особливо в тих випадках, коли в задачі треба встановити перпендикулярність прямих та відрізків. Більш того, вказана операція у багатьох випадках має перевагу перед скалярним добутком векторів, оскільки в результаті її застосування не доводиться замінювати векторні рівності числовими (як у випадку скалярного добутку), що закривають геометричну картину задачі.

Для ілюстрації наведемо приклади розв'язання кількох нестандартних планіметричних задач, в яких знаходить застосування операція повороту вектора на 90°.

Вектор $\vec{b}$, який одержується з вектора $\vec{a}$ поворотом його на 90° в додатному напрямку (проти руху годинникової стрілки), позначимо символом $i\vec{a}$ [32]. Множник i вказує на дію повороту. Отже, з $\vec{b}$ = $i\vec{a}$ випливає, що

$$|\vec{b}| = |\vec{a}|, \quad (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = +90^\circ.$$

Перерахуємо властивості операції множення на i, що випливають з її означення:

1) $i(k\vec{a}) = k(i\vec{a}), \quad k$ – дійсне число;

2) $i(\vec{a} + \vec{b}) = i\vec{a} + i\vec{b}$;

3) $i\vec{0} = \vec{0}$;

4) $i(i\vec{a}) = -\vec{a}$.

Цими властивостями будемо користуватися при розв’язуванні задач та доведенні теорем.

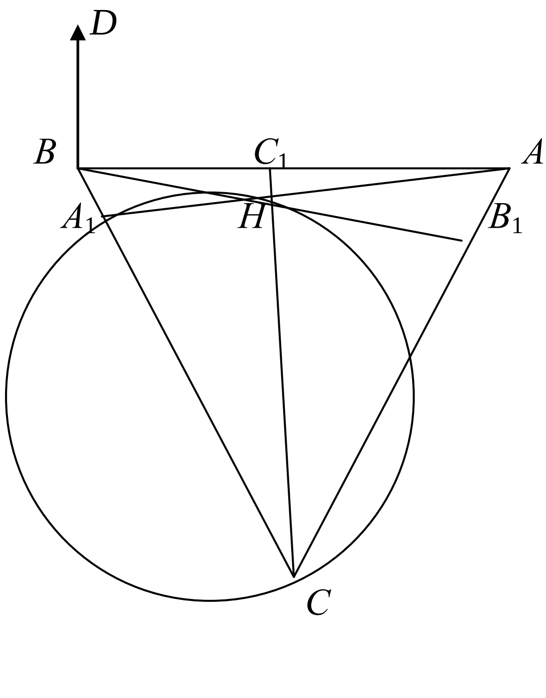
Задача 2.4.

Дано трикутник ABC, точка H – його ортоцентр. Довести, що:

$$\overrightarrow{CH} = ctg\angle C \cdot (i\,\overrightarrow{BA}).$$

Розв’язання.

Нехай $\angle C < 90^\circ$ (мал. 2.2).



Мал. 2.2

Доведемо, що:

$$\vec{CH} = ctg\angle C \cdot (i\,\vec{BA}).$$

Дійсно, коло, побудоване не діаметрі *CH*, проходить через основи A_1 та B_1 висот AA_1 та BB_1 трикутника *ABC*. Отже,

$$|CA_1| = |CH|\sin\angle B,$$

де $|CA_1| = |CA|\cos\angle C$.

Звідси:

$$|CH| = \frac{|CA|}{\sin\angle B} \cdot \cos\angle C.$$

Але за теоремою синусів $|CA| : |AB| = \sin\angle B : \sin\angle C$. Тому:

$$|CH| = \frac{|CA|}{\sin\angle C} \cdot \cos\angle C$$

і

$$|CH| = |AB| \cdot ctg\angle C. \qquad (2.3)$$

Якщо вектор $\vec{BA}$ повернути на + 90° навколо вершини *B*, то отримаємо вектор $i\,\vec{BA} = \vec{BD}$, співнапрямлений з $\vec{CH}$ (точки *C* та *D* лежать по різні сторони від *AB*). Отже,

$$\vec{CH} = k(i\,\vec{BA}), \text{ де } k > 0.$$

Тому $|\vec{CH}| = k|\vec{BA}|$. Порівнюючи останню рівність з (2.3), одержуємо: $k = ctg\angle C$.

Таким чином,

$$|\vec{CH}| = ctg\angle C \cdot (i\,\vec{BA}),$$

що і треба було довести.

Задача 2.5.

Дано трикутник *ABC*. Поворотом точки *C* навколо точки *A* на + 90° одержуємо точку *D*, а поворотом точки *C* навколо точки *B* на – 90°

одержуємо точку E. Обчислити відстань від середини відрізка DE до прямої AB.

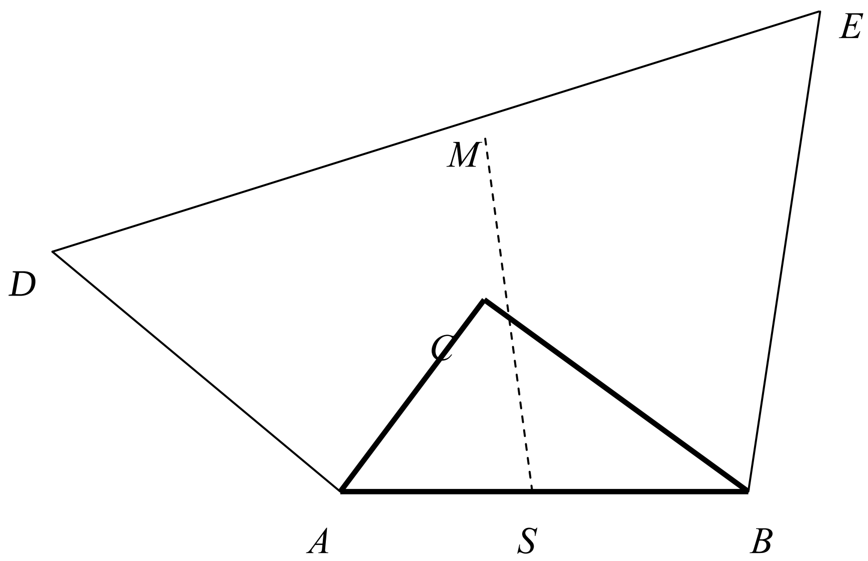
Розв'язання.

Обираючи довільним чином початок векторів (мал. 2.3), отримаємо:

$$\vec{D} = \vec{A} + i(\vec{C} - \vec{A}),\ \vec{E} = \vec{B} - i(\vec{C} - \vec{B}).$$

Звідси:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{D} + \vec{E}) = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} + i\,\frac{\vec{B} - \vec{A}}{2}.$$



Мал. 2.3

Якщо S – середина AB, то

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}),$$

і тому

$$\vec{M} = \vec{S} + i\,\frac{\overrightarrow{AB}}{2}.$$

Таким чином,

$$\vec{M} - \vec{S} = i\,\frac{\overrightarrow{AB}}{2}, \quad \overrightarrow{SM} = i\,\frac{\overrightarrow{AB}}{2}, \quad |\overrightarrow{SM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|,$$

причому $SM \perp AB$.

Отже, шукана відстань дорівнює $\frac{1}{2}AB$. Цікаво відмітити, що вона залежить лише від відстані між A та B, але не залежить від положення вершини C.

Задача 2.6.

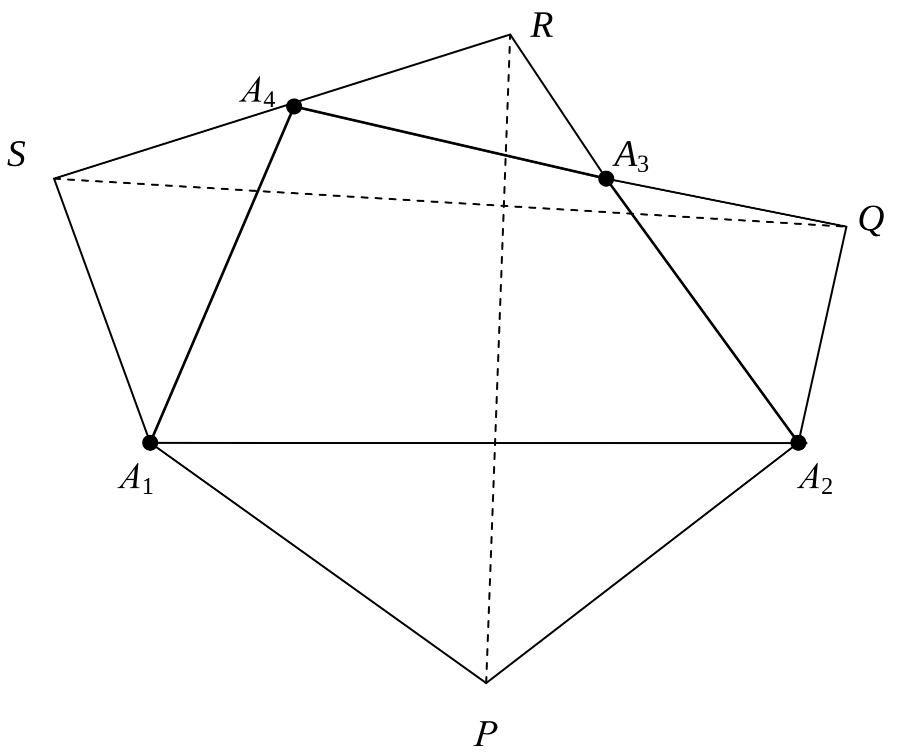
На площині дано довільні чотири точки A_1, A_2, A_3, A_4. Побудові чотири інші точки P, Q, R, S, такі, що трикутники A_1PA_2, A_2QA_3, A_3RA_4, A_4SA_1 однаково орієнтовані, рівнобедрені та прямокутні з прямими кутами при вершинах P, Q, R, S. Довести, що відрізки PR і QS рівні та перпендикулярні.

Розв'язання.

Згідно з правилом ланцюга додавання векторів маємо (мал. 2.4):

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RA_4} + \overrightarrow{A_4S} + \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QA_2} + \overrightarrow{A_2P},$$

$$i\,\overrightarrow{SQ} = i(\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RA_3} + \overrightarrow{A_3Q}).$$



Мал. 2.4

Але з умови задачі випливає:

$$\overrightarrow{PA_2} = i\,\overrightarrow{PA_1}, \quad \overrightarrow{QA_3} = i\,\overrightarrow{QA_2},$$

$$\overrightarrow{RA_4} = i\,\overrightarrow{RA_3}, \quad \overrightarrow{SA_1} = i\,\overrightarrow{SA_4}.$$

Тоді з цих співвідношень випливає:

$$\overrightarrow{SA_1} = i\,\overrightarrow{SA_4}, \quad \overrightarrow{A_1P} = i\,\overrightarrow{PA_2},$$

$$\overrightarrow{RA_3} = i\,\overrightarrow{A_4R}, \quad \overrightarrow{A_3Q} = -i\,\overrightarrow{QA_2}.$$

Отже,

$$i\,\overrightarrow{SQ} = i(\overrightarrow{SA_4} + i\,\overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PR} + i\,\overrightarrow{A_4R} - i\,\overrightarrow{QA_2}) =$$

$$= \overrightarrow{A_4S} + \overrightarrow{A_2P} + i\,\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RA_4} + \overrightarrow{QA_2} = \overrightarrow{RP} - \overrightarrow{SQ} + i\,\overrightarrow{PR}.$$

Звідси одержуємо:

$$\overrightarrow{RP} - i\,\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SQ} - i\,\overrightarrow{PR}.$$

Здійснимо поворот рівних векторів на 90°:

$$i\,\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{SQ} = i\,\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{PR}.$$

З останніх двох рівностей випливає, що $i\,\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{RP}$.

2.3. Застосування одиничного вектора

Одиничні вектори [42] доцільно застосовувати при розв’язуванні тих задач, в яких мова йде про доведення перпендикулярності прямих, рівності кутів, про виявлення метричних кутових співвідношень у фігурах.

Розглянемо декілька прикладів розв’язання таких задач.

Задача 2.7.

Дано чотири вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ однакової довжини, сумою яких є нульовий вектор. Довести, що кут між довільними двома векторами дорівнює куту між двома іншими.

Розв’язання.

За умовою: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$, тоді

$$\vec{OA}+\vec{OB}=-(\vec{OC}+\vec{OD}).$$

Якщо вектори рівні, то їх скалярні квадрати також рівні, тобто:

$$(\vec{OA}+\vec{OB})^2=(\vec{OC}+\vec{OD})^2.$$

Звідси випливає:

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\vec{OC}\cdot\vec{OD}.$$

Оскільки вектори, які розглядаються, одиничні, то

$$\cos\angle AOB=\cos\angle COD \text{ або } \angle AOB=\angle COD.$$

З'ясуємо, який геометричний зміст має одержаний результат. Під час розв'язання задачі ми не торкалися питання про те, компланарні чи ні вектори, які розглядаються. Тому результат залишається вірним як для випадку компланарних, так і для не компланарних векторів.

Якщо вектори $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$ не компланарні, то точки *A*, *B*, *C*, *D* лежать на сфері з центром в точці *O* та радіусом $|\vec{OA}|$. Вони є вершинами тетраедра, протилежні ребра якого попарно рівні.

Якщо припустити, що точки *A*, *B*, *C*, *D* лежать в одній площині, то отримаємо, що *ABCD* – це паралелограм, діагоналі якого рівні, тобто прямокутник.

Задача 2.8.

Дано тригранний кут, плоскі кути якого дорівнюють α, β, γ. Обчислити величини його двогранних кутів.

Розв'язання.

Відкладемо на ребрах тригранного кута від його вершини *O* одиничні вектори $\vec{OA}=\vec{e}_1$, $\vec{OB}=\vec{e}_2$, $\vec{OC}=\vec{e}_3$. Позначимо згідно з умовою величини плоских кутів *AOB*, *BOC* та *AOC* через α, β, γ відповідно. Перпендикулярно до прямої *OA* проведемо відрізки *BM* та *CN* (мал. 2.5).

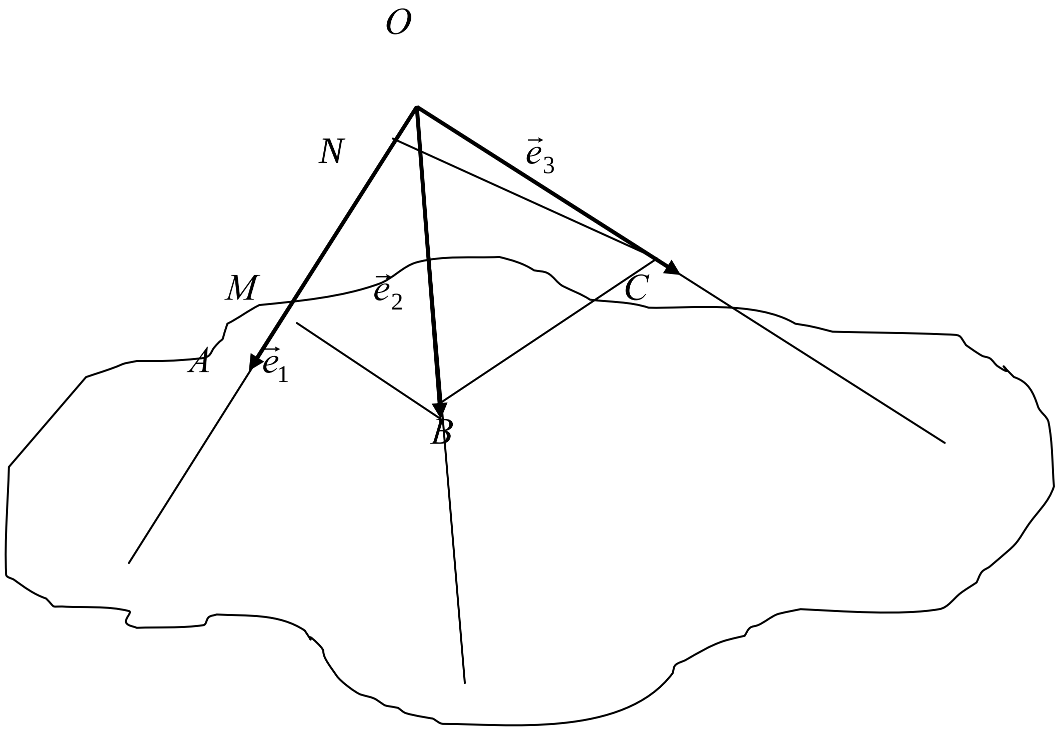
Тоді кут між векторами $\vec{MB}$ та $\vec{NC}$ дорівнює величині двогранного кута, позначимо її через φ_1. Користуючись правилом многокутника, запишемо:

$$\vec{BC} = -\vec{MB} + \vec{MN} + \vec{NC}\,.$$

Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрату, тоді отримаємо:

$$\vec{BC}^2 = \vec{MB}^2 + \vec{MN}^2 + \vec{NC}^2 - 2\,\vec{MB}\cdot\vec{NC}$$

(оскільки $\vec{MB}\cdot\vec{MN} = \vec{NC}\cdot\vec{MN} = 0$).



Мал. 2.5

Враховуючи, що:

$$\vec{BC} = \vec{e}_3 - \vec{e}_2, \quad \vec{BC}^2 = 2 - 2\cos\alpha\,,$$

$$\vec{MB}^2 = |\vec{MB}|^2 = |\vec{OB}|^2 - |\vec{OM}|^2 = 1 - \cos^2\gamma\,,$$

$$\vec{NC}^2 = |\vec{NC}|^2 = |\vec{OC}|^2 - |\vec{ON}|^2 = 1 - \cos^2\beta\,,$$

приходимо до рівності:

$$2 - 2\cos\alpha = 1 - \cos^2\gamma + |\vec{MN}|^2 + 1 - \cos^2\beta - 2\sin\gamma\sin\beta\cos\varphi_1\,.$$

Але $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, де $\overrightarrow{ON}$ – складова вектора $\overrightarrow{OC}$ по осі OA, $\overrightarrow{OM}$ – складова вектора $\overrightarrow{OB}$ по осі OA.

Тоді:

$$\overrightarrow{MN}^2 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\gamma\cos\beta .$$

Отже,

$$2 - 2\cos\alpha = 2 - \cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\beta - \\ - 2\sin\gamma\sin\beta\cos\varphi_1.$$

Після спрощень отримаємо:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\gamma\sin\beta\cos\varphi_1.$$

Звідси знаходимо косинус двогранного кута, що лежить проти плоского кута BOC, величина якого дорівнює α:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\sin\beta}.$$

Проводячи аналогічні міркування, отримаємо формули для обчислення косинусів двогранних кутів φ_2 та φ_3, що лежать проти плоских кутів, величини яких дорівнюють β та γ відповідно:

$$\cos\varphi_2 = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

При розв’язуванні цієї задачі доведена важлива теорема косинусів для тригранного кута.

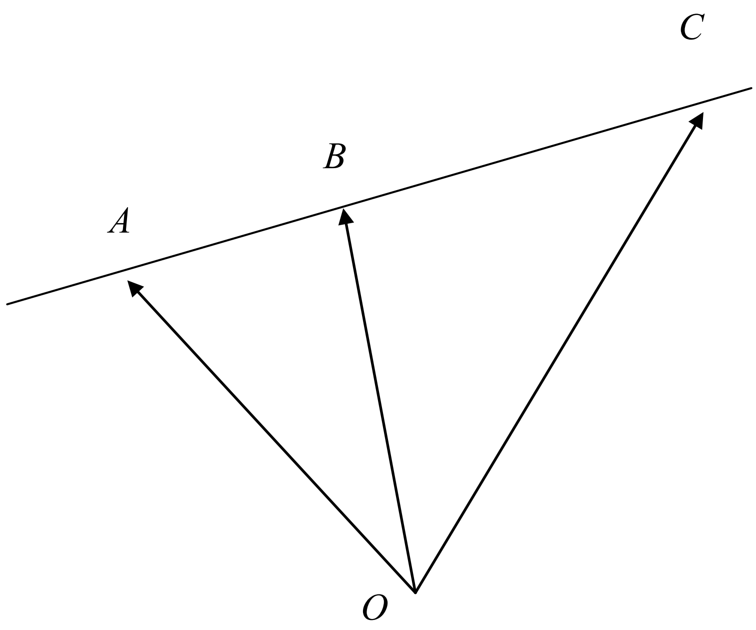
2.4. Застосування векторів до розв’язування задач на знаходження геометричних місць точок

В задачах з афінним змістом як правило необхідно встановити належність трьох точок одній прямій або чотирьох точок одній площині, обчислити відношення, в якому точка, яка належить відрізку, ділить цей відрізок, довести паралельність відрізків або прямих, паралельність прямих та площин тощо.

Проте іноді зустрічаються задачі на знаходження геометричних місць. Для успішного застосування векторів в таких задачах слід володіти найважливішими векторними рівностями, що містять змінні вектори, які задають основні відомі множини точок. Лише при цих умовах можна під час розв'язання задачі розпізнати за одержаним рівнянням шукану множину точок. Розглянемо ці рівності.

1. Скласти векторне рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки *A* та *B*.

Нехай *C* – довільна точка прямої AB, тоді $\vec{AC} = k\,\vec{AB}$ (мал. 2.6).



Мал. 2.6

Якщо *O* – довільна точка площини (або простору), то

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA},$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA},$$

тому

$$\vec{OC} - \vec{OA} = k(\vec{OB} - \vec{OA}).$$

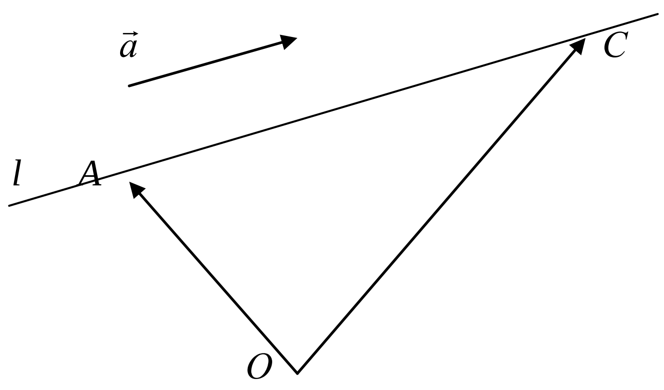
Звідси випливає:

$$\overrightarrow{OC} = (1-k)\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}. \qquad (2.4)$$

Для кожної точки *C* ми маємо певне значення *k*, а для кожного дійсного числа *k* знаходимо досить певну точку *C* на прямій *AB*. Отже, рівняння (2.4), в якому *A*, *B*, *O* – фіксовані точки, задає усі ті і лише ті точки, які належать прямій *AB*. Рівняння (2.4) містить параметр *k* та змінний вектор $\overrightarrow{OC}$.

2. Скласти векторне рівняння прямої, яка проходить через дану точку *A* паралельно вектору $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$.

Очевидно, що для довільної точки *C* прямої $l(A, \vec{a})$, для якої вектор $\vec{a}$ є напрямним вектором та яка проходить через точку *A*, виконується рівність $\overrightarrow{AC} = k\vec{a}$ (мал. 2.7).



Мал. 2.7

Звідси одержуємо:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k\vec{a}. \qquad (2.5)$$

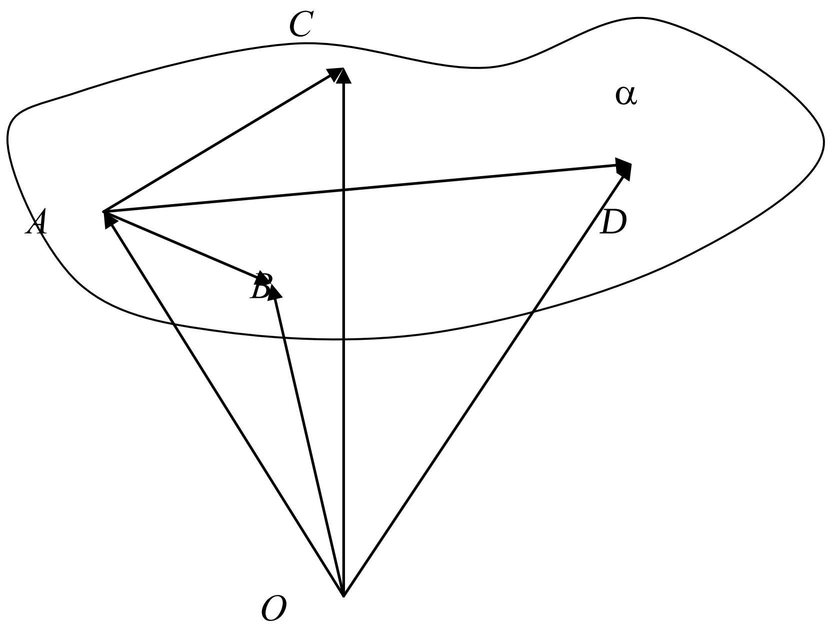
Рівняння (2.5), яке містить параметр *k*, задає точки прямої *l*, що проходить через точку *A* паралельно $\vec{a}$, і тільки ці точки.

3. Скласти векторне рівняння площини α, що проходить через три точки *A*, *B*, *C*, які не лежать на одній прямій.

Нехай D – довільна точка площини α (мал. 2.8). В такому випадку вектори $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$ не колінеарні, а тому вектор $\vec{AD}$ можна розкласти за векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, тобто

$$\vec{AD} = p\,\vec{AB} + q\,\vec{AC},$$

де p і q – деякі дійсні числа, що однозначно визначаються завданням точки $D \in \alpha$.



Мал. 2.8

Обравши у просторі довільну точку O, можна записати:

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA},$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA},$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA},$$

і тому

$$\vec{OD} - \vec{OA} = p(\vec{OB} - \vec{OA}) + q(\vec{OC} - \vec{OA}).$$

Звідси:

$$\vec{OD} = (1 - p - q)\,\vec{OA} + p\,\vec{OB} + q\,\vec{OC}. \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.6) і є векторне рівняння площини, яка проходить через задані три точки, що не лежать на одній прямій. Це рівняння можна записати і таким чином:

$$\vec{OD} = s\,\vec{OA} + p\,\vec{OB} + q\,\vec{OC}, \quad p + q + s = 1. \qquad (2.7)$$

Для довільної точки D, яка належить площині α, вектор $\vec{OD}$ задовольняє рівнянню (2.7) при однозначно визначених цією точкою значеннях p, q, s, а для точок $D \notin \alpha$ вектор $\vec{OD}$ рівнянню (2.7) не задовольняє при жодних значеннях p, q, s.

Розглянуті вище векторні рівняння прямої та площини можна застосовувати при розв'язуванні деяких афінних задач на відшукання множин точок на площині та у просторі.

РОЗДІЛ 3
ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТА ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

Вектори застосовуються досить ефективно при розв'язуванні різноманітних геометричних задач та доведенні теорем. Розглянемо приклади застосування векторів.

Задачі на обчислення

Задача 3.1.

На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC дано точку D таку, що $BD : DA = 3 : 1$. Обчислити довжину відрізка CD, знаючи довжини катетів $CB = a$ і $CA = b$.

Розв'язання.

Позначимо: $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$. За умовою задачі $\overrightarrow{BD} = 3\,\overrightarrow{DA}$, але:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD},$$

тому одержуємо:

$$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = 3(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}).$$

Звідси: $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}.$ Тоді остаточно одержуємо:

$$\overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{16}\vec{a}^2 + +\frac{3}{8}\vec{a}\vec{b} + \frac{9}{16}\vec{b}^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2),$$

звідси:

$$|\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{4}\sqrt{\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2}.$$

Задача 3.2.

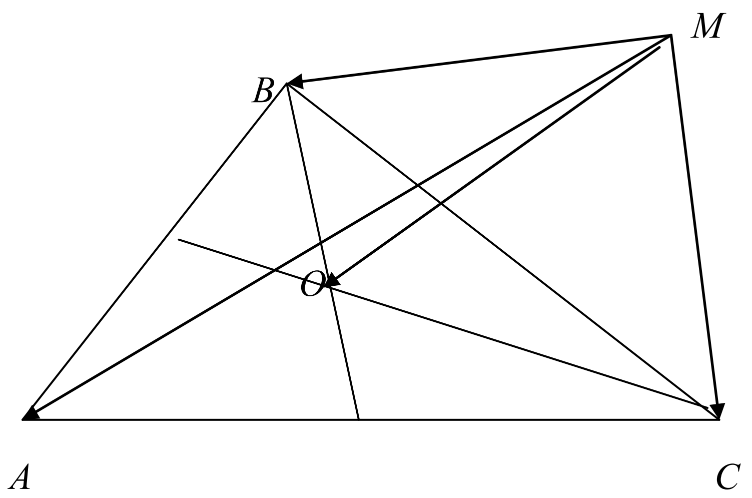
Виразити відстань від даної точки M до точки O перетину медіан трикутника ABC через довжини сторін трикутника і відстані точки M до вершин трикутника.

Розв'язання.

Позначимо (мал. 3.1):

$$\overrightarrow{BC}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AB}=\vec{c},$$

$$\overrightarrow{MA}=\vec{a}_1,\ \overrightarrow{MB}=\vec{b}_1,\ \overrightarrow{MC}=\vec{c}_1,\ \overrightarrow{MO}=\vec{d}.$$



Мал. 3.1

За відомою векторною рівністю [16]:

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).$$

Звідси:

$$|\overrightarrow{MO}|^2=\vec{d}^{\,2}=\frac{1}{9}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2.$$

Після спрощення, використавши, що

$$2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})^2=\vec{a}_1^{\,2}+\vec{b}_1^{\,2}-\vec{c}^{\,2},$$

і, аналогічно,

$$2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{b}_1^{\,2}+\vec{c}_1^{\,2}-\vec{a}^{\,2},$$

$$2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=\vec{c}_1^{\,2}+\vec{a}_1^{\,2}-\vec{b}^{\,2}.$$

Знайдемо:

$$\vec{d}^{\,2}=\frac{1}{3}(\vec{a}_1^{\,2}+\vec{b}_1^{\,2}+\vec{c}_1^{\,2})-\frac{1}{9}(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}).$$

Задачі на доведення

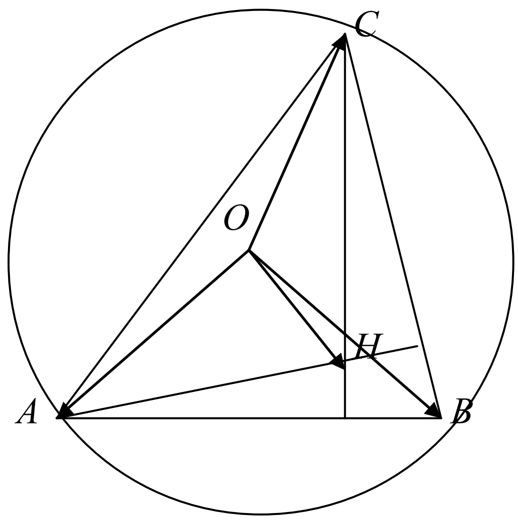
Задача 3.3.

У трикутнику *ABC* точка *O* – центр описаного кола, *H* – точка перетину його висот. Довести, що:

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

Доведення.

За умовою задачі $AH \perp BC$, але тоді звідси випливає, що $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ (мал. 3.2).



Мал. 3.2

Оскільки:

$$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA},$$
$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB},$$

тоді звідси одержуємо:

$$(\vec{OH} - \vec{OA})(\vec{OC} - \vec{OB}) = 0. \qquad (3.1)$$

Крім того, $\vec{OB}^2 = \vec{OC}^2$, звідки маємо рівність:

$$(\vec{OC} + \vec{OB})(\vec{OC} - \vec{OB}) = 0. \qquad (3.2)$$

Віднімаючи (3.2) від (3.1), одержуємо:

$$(\vec{OC}-\vec{OB})(\vec{OH}-\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OC})=0.$$

Аналогічно, з умов $\vec{BH}\cdot\vec{CA}=0$ і $\vec{OC}^2=\vec{OA}^2$ маємо:

$$(\vec{OA}-\vec{OC})(\vec{OH}-\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OC})=0.$$

Оскільки $\vec{OC}-\vec{OB}\neq 0$ і $\vec{OA}-\vec{OC}\neq 0$, то вектор, перпендикулярний до кожного з них, може бути тільки нульовим, тобто

$$\vec{OH}-\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OC}=\vec{0}.$$

Звідси одержуємо:

$$\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC},$$

що і треба було довести.

Задача 3.4.

Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення.

Нехай $AP \perp BC$, $BQ \perp CA$, де AP і BQ – висоти трикутника ABC і O – точка їх перетину. Позначимо:

$$\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}, \vec{OC}=\vec{c},$$
$$Z = OC \cap AB.$$

За означенням різниці векторів маємо:

$$\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}, \quad \vec{BC}=\vec{c}-\vec{a}, \quad \vec{CA}=\vec{a}-\vec{c}.$$

Оскільки $\vec{OA}\perp\vec{BC}$, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, а тому одержуємо рівність $\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=0$, тобто:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\,. \tag{3.3}$$

Аналогічно, з того, що $\vec{OB}\perp\vec{CA}$, випливає, що скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, тому $\vec{b}(\vec{a}-\vec{c})=0$, тобто:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}\,. \tag{3.4}$$

З (3.3) та (3.4) випливає, що $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, тобто

$$\vec{c}(\vec{a} - \vec{b}) = 0\,.$$

Остання рівність рівносильна тому, що $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$, тобто *CZ* – висота трикутника *ABC*, а тому одержали, що всі три висоти трикутника перетинаються в одній точці, що і треба будо довести.

Задачі на побудову

Задача 3.5.

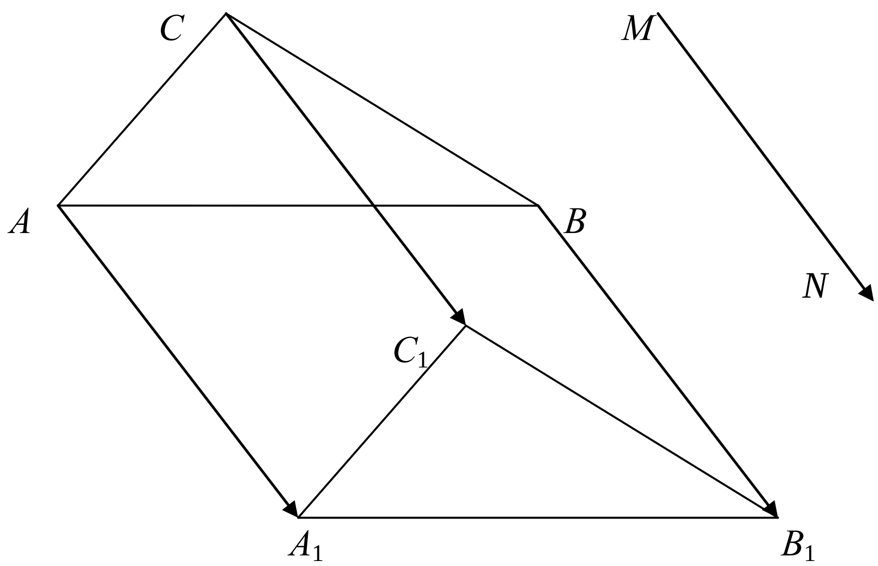
Дано трикутник *ABC* і точки *M*, *N*. Побудувати образ трикутника *ABC* при паралельному перенесенні $\overrightarrow{MN}$.

Розв'язання.

Для побудови образа трикутника при паралельному перенесенні досить побудувати образи його вершин. Паралельне перенесення повністю визначається завданням однієї пари відповідних точок.

За умовою задачі $N = \overrightarrow{MN}(M)$. Побудуємо (мал. 3.3):

$$A_1 = \overrightarrow{MN}(A), B_1 = \overrightarrow{MN}(B), C_1 = \overrightarrow{MN}(C),$$



Мал. 3.3

при цьому:

$$\vec{AA_1} = \vec{BB_1} = \vec{CC_1} = \vec{MN}.$$

Трикутник $A_1B_1C_1$ є образом трикутника ABC при паралельному перенесенні $\vec{MN}$, тобто:

$$\Delta A_1B_1C_1 = \vec{MN}(\Delta ABC).$$

Задача 3.6.

Побудувати образ паралелограма $ABCD$ при паралельному перенесенні $\vec{AB} + \vec{BC}$.

Розв'язання.

Паралельне перенесення $\vec{AB} + \vec{BC}$ є композиція паралельних перенесень $\vec{AB}$ і $\vec{BC}$. Оскільки

$$\vec{BC} \circ \vec{AB} = \vec{AC}, \text{ де } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC},$$

то для побудови образа паралелограма $ABCD$ можна або виконати послідовно два паралельні перенесення $\vec{AB}$ і $\vec{BC}$, або виконати одне паралельне перенесення $\vec{AC}$. В другому випадку слід побудувати:

$$A_1 = \vec{AC}(A) = C,\ B_1 = \vec{AC}(B),\ D_1 = \vec{AC}(D),\ C_1 = \vec{AC}(C).$$

При цьому:

$$\vec{BB_1} = \vec{CC_1} = \vec{DD_1} = \vec{AC}.$$

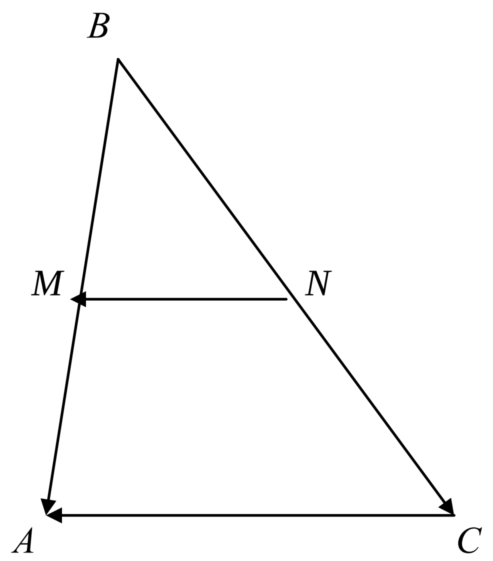
Паралелограм $CB_1C_1D_1$ шуканий, тобто:

$$CB_1C_1D_1 = \vec{AC}(ABCD).$$

Розглянемо приклади застосування векторів для доведення деяких теорем, що використовуються у планіметричних задачах.

1. Довести, що середня лінія трикутника паралельна його основі та дорівнює її половині (мал. 3.4).

Доведення.



Мал. 3.4

Позначимо вектори:

$$\vec{BA} = \vec{a}, \quad \vec{BC} = \vec{c}\ .$$

Тоді вектор $\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c}$, а тому одержуємо:

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{c}\,,$$

звідси:

$$\vec{NM} = \vec{BM} - \vec{BN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{CA}.$$

З останнього співвідношення випливає, що $\vec{NM} \parallel \vec{CA}$ і $|\vec{NM}| = \frac{1}{2}|\vec{CA}|$, що і треба було довести.

2. Довести, що середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.

Доведення.

Позначимо вектори, що збігаються зі сторонами трапеції $ABCD$ наступним чином:

$$\vec{AB} = \vec{a}, \quad \vec{BC} = \vec{b}, \quad \vec{CD} = \vec{c}, \quad \vec{AD} = \vec{d}.$$

Нехай MN – середня лінія трапеції. Маємо:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}, \text{ або } \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Далі,

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD},$$

або $\overrightarrow{MB} = \frac{\vec{a}}{2}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{\vec{c}}{2}$. Тоді одержуємо:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}.$$

З того, що $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, дістанемо, що $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} - \vec{b}$, тоді:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) + \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}).$$

Бачимо, що вектор $\overrightarrow{MN}$ паралельний $\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} + \vec{d}$ паралельний $\vec{b}$ і $\vec{d}$. Крім того,

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\vec{b} + \vec{d}|,$$

але оскільки $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{d}$, тому $|\vec{b} + \vec{d}| = |\vec{b}| + |\vec{d}|$ і

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}(|\vec{b}| + |\vec{d}|),$$

що і треба було довести.

3. Довести, що діагоналі паралелограма в точці їх перетину діляться навпіл.

Доведення.

Позначимо вектори, що збігаються зі сторонами паралелограма $OACB$ наступним чином:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b},$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Позначимо точку перетину діагоналей паралелограма через D. Вектор $\overrightarrow{OD}$ паралельний вектору $\overrightarrow{OC}$, отже, існує єдине число t_1, помноживши на яке вектор $\overrightarrow{OC}$, дістанемо вектор $\overrightarrow{OD}$:

$$\overrightarrow{OD} = t_1\overrightarrow{OC} = (\vec{a}+\vec{b})t_1.$$

Оскільки $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$, то одержуємо:

$$\overrightarrow{AD} = t_2\ \overrightarrow{AB} = (\vec{b}-\vec{a})t_2.$$

Сума векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{AD}$ дорівнює $\overrightarrow{OD}$: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$, тому одержуємо:

$$\vec{a} + (\vec{b}-\vec{a})t_2 = (\vec{a}+\vec{b})t_1, \text{ або } \vec{a}(1-t_2) + \vec{b}t_2 = \vec{a}t_1 + \vec{b}t_2.$$

У нас зліва і справа вектор, причому ці вектори рівні й розкладені за одними й тими самими не колінеарними векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{b}$, а такий розклад єдиний, отже

$$\begin{cases} 1-t_2 = t_1, \\ t_2 = t_1. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, дістанемо $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$. Отже, точка D є серединою кожної діагоналі, що і треба було довести.

4. Довести, що медіани трикутника, перетинаючись, ділять одна одну у відношенні 2 : 1 (мал. 3.5).

Доведення.

Позначимо вектори:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b}.$$

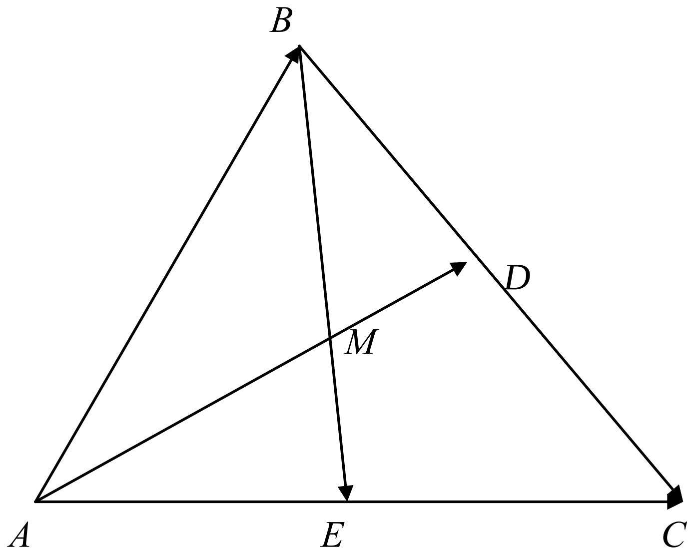
Знайдемо вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BE}$, які збігаються з двома медіанами трикутника ABC:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

Вектор $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AD}$, отже,

$$\overrightarrow{AM} = t_1\,\overrightarrow{AD}\text{, або } \overrightarrow{AM} = \frac{t_1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$



Мал. 3.5

Аналогічно, вектор $\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BE}$, отже,

$$\overrightarrow{BM} = t_2\,\overrightarrow{BE}\text{, або } \overrightarrow{BM} = t_2\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right).$$

Але $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$, або

$$\vec{a} + t_2\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right) = \frac{t_1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

звідки одержуємо:

$$\vec{a}(1-t_2) + \frac{t_2}{2}\vec{b} = \frac{t_1}{2}\vec{a} + \frac{t_1}{2}\vec{b}.$$

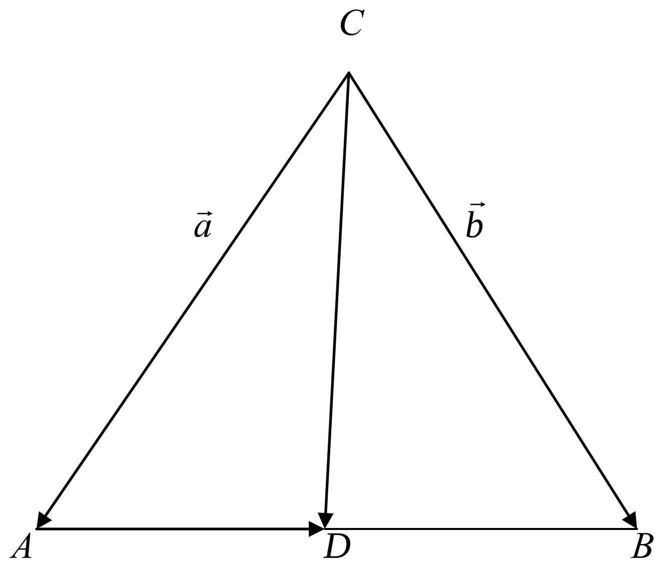
Оскільки розклад вектора за двома не колінеарними векторами єдиний, то маємо систему:

$$\begin{cases} 1-t_2 = \dfrac{t_1}{2}, \\ \dfrac{t_2}{2} = \dfrac{t_1}{2}. \end{cases}$$

Звідси $t_1 = t_2 = \dfrac{2}{3}$. Отже, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, а $\overrightarrow{MD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, тобто $AM : MD = 2 : 1$, що і треба було довести.

5. Довести, що бісектриса довільного кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам (мал. 3.6).

Доведення.



Мал. 3.6

Введемо позначення:

$$\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CB} = \vec{b}.$$

Нехай CD – бісектриса кута, $|\overrightarrow{CA}| = a$, $|\overrightarrow{CB}| = b$. Треба довести, що $AD : DB = a : b$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{CD}$ спочатку як суму векторов $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AD}$, а потім – як вектор, що ділить кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ навпіл [23]:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\, t = (\vec{b} - \vec{a})t.$$

Тоді:

$$\overrightarrow{CD} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})t = \vec{a}(1-t) + \vec{b}t.$$

Далі, $\overrightarrow{CD} \parallel \vec{c}$, тоді одержуємо:

$$\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0 = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b},$$

$$\vec{CD} = \vec{c}t_1 = \left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}\right)t_1.$$

Отже, $\vec{CD} = \frac{t_1}{a}\vec{a} + \frac{t_1}{b}\vec{b}$. Але розклад вектора за двома не колінеарними векторами єдиний, тому:

$$\begin{cases} 1 - t = \dfrac{t_1}{a}, \\ t = \dfrac{t_1}{b}. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему рівнянь, дістанемо:

$$t = \frac{a}{a+b}, t_1 = \frac{ab}{a+b}.$$

Тоді маємо:

$$\vec{AD} = \vec{AB}\,t = \frac{a}{a+b}(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \frac{b}{a+b}(\vec{b} - \vec{a}),$$

а тому $AD : DB = a : b$, що і треба було довести.

Методами векторної алгебри доведемо ще дві важливі теореми про кутометричні співвідношення в довільному трикутнику.

6. У кожному трикутнику довжини його сторін пропорційні синусам протилежних кутів (*теорема синусів*).

Доведення.

Розглянемо довільний трикутник ABC – гострокутний або тупокутний. Для прямокутного трикутника істинність теореми синусів очевидна. Вважаємо сторони його і проведені до них висоти напрямленими відрізками – векторами (мал. 3.7). За означенням різниці і скалярного добутку векторів запишемо рівності:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \text{ та } (\vec{a} - \vec{b})\vec{CD} = \vec{c} \cdot \vec{CD}.$$

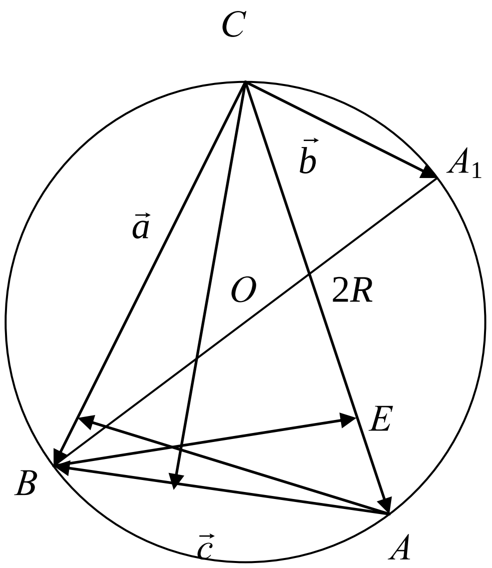
Оскільки $\vec{c} \perp \vec{CD}$, то

$$(\vec{a}-\vec{b})\,\overrightarrow{CD}=0, \quad \vec{a}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{b}\cdot\overrightarrow{CD},$$

або

$$a\,|\overrightarrow{CD}|\cos B\hat{C}D=b\,|\overrightarrow{CD}|\cos A\hat{C}D,$$

$$\frac{a}{\cos B\hat{C}D}=\frac{b}{\cos A\hat{C}D}.$$



Мал. 3.7

Оскільки:

$$B\hat{C}D=90^\circ-\hat{B}, \quad A\hat{C}D=90^\circ-\hat{A},$$

або

$$B\hat{C}D=90^\circ-\hat{B}, \quad A\hat{C}D=\hat{A}-90^\circ=-(90^\circ-\hat{A}),$$

дістанемо:

$$\frac{a}{\cos(\pm 90^\circ-\hat{A})}=\frac{b}{\cos(90^\circ-\hat{B})}; \quad \frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}.$$

Аналогічно:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}} \text{ і } \frac{c}{\sin\hat{C}}=\frac{a}{\sin\hat{A}}.$$

Отже,

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}.$$

Теорему доведено.

Знайдемо тепер відношення сторін трикутника до синуса протилежного кута. Навколо трикутника ABC опишемо коло і вважатимемо діаметр A_1B напрямленим відрізком – вектором $\overrightarrow{A_1B} = 2\overrightarrow{R}$ (мал. 3.7). Тоді, розглядаючи відрізок CA_1 як вектор $\overrightarrow{CA_1}$, маємо:

$$\vec{a} - 2\overrightarrow{R} = \overrightarrow{CA_1} \text{ та } (\vec{a} - 2\overrightarrow{R})\vec{a} = \overrightarrow{CA_1} \cdot \vec{a}.$$

Оскільки $\overrightarrow{CA_1} \perp \vec{a}$, то:

$$(\vec{a} - 2\overrightarrow{R})\vec{a} = 0, \vec{a} \cdot \vec{a} = 2\overrightarrow{R} \cdot \vec{a},$$

або

$$a^2 = 2Ra\cos A_1\hat{B}C, \frac{a}{\cos A_1\hat{B}C} = 2R.$$

Маємо:

$$A_1\hat{B}C = 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - (180^\circ - \hat{A}),$$

$$\frac{a}{\cos(\pm 90^\circ - \hat{A})} = 2R; \quad \frac{a}{\sin\hat{A}} = 2R.$$

Тепер теорему синусів можна подати у вигляді:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R.$$

Таким чином, за допомогою векторної алгебри досить раціонально доводяться ці дві важливі теореми. Взагалі введенням векторів істотно спрощується розв’язання багатьох складних геометричних задач, стає більш наочним доведення теорем.

ВИСНОВКИ

Векторний та векторно-координатний методи розв'язування задач передбачають застосування нової мови математики, нової "азбуки" спілкування і, звичайно, нові задачі. До них, в першу чергу, відносяться задачі, умова яких містить вектори, а тому виникає питання: "Як розв'язувати задачу: за допомогою векторів або без них?" Саме задачі з векторним змістом є чудовим матеріалом для вивчення векторної мови. Можливості векторів проілюстровані при розв'язуванні традиційних задач класичної геометрії.

На перший погляд, деякі задачі мають більш лаконічний розв'язок, ніж традиційний; в деяких випадках розв'язання задач за допомогою векторів може здаватися досить громіздкім. Але нашою метою не є порівняння методів розв'язування, оскільки класичний і векторний методи – це різні мови математики, і наше завдання – навчитися розмовляти мовою векторів.

Перевага векторного методу полягає передусім у тому, що, розв'язуючи задачу за допомогою векторів, достатньо обрати лише початкову точку і усі вектори, що розглядаються, відкладати від цієї точки. Доцільний вибір початку робить розв'язання більш природним, скорочуючи значні обчислення.

Використовуючи властивості скалярного добутку векторів, раціонально доводяться різноманітні тригонометричні, геометричні та алгебраїчні нерівності.

Операції додавання та віднімання векторів, множення вектора на число доцільно використовувати при розв'язуванні афінних задач планіметрії, що стосуються взаємного розташування двох прямих, належності трьох точок одній прямій, обчислення відношень колінеарних відрізків.

Операція скалярного добутку векторів (у поєднанні з афінними операціями) дозволяє обчислювати відстані та кути, знаходити метричні співвідношення між лінійними та кутовими елементами многокутників, описувати різні множини точок, розв'язувати ряд задач, пов'язаних з колом.

Операція повороту вектора на 90° у додатному напрямку (у припущенні, що на площині введена орієнтація) є досить корисною при розв'язуванні метричних задач. Вона дозволяє позбавитися від скалярного добутку векторів і іноді має перевагу перед скалярним добутком векторів, оскільки не вимагає заміни векторних рівностей числовими (як у випадку скалярного добутку), що закриває геометричну картину задачі.

В задачах на знаходження геометричних місць для успішного використання векторів слід володіти найважливішими векторними рівностями, що містять змінні вектори, які задають основні відомі множини точок. Векторний метод є досить зручним та ефективним в певних випадках, а поєднання його з іншими поняттями та теоремами посилює його ефективність.

Дипломна робота містить достатню кількість розв'язаних задач на застосування різних векторних методів. Частина задач з вказівками їх розв'язання наведена для самостійної роботи (додаток А). Матеріал роботи може бути корисним учням шкіл та коледжів, ліцеїв та гімназій, класів з поглибленим вивченням математики, абітурієнтів, студентів, вчителів і викладачів вузів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Елементарная геометрия / Ж. Адамар. Ч.1. – М.: Учпедгиз, 1978. – 416 с.
2. Антонов Н.П. Сборник задач по элементарной математике: Пособие для самообразования / Н.П. Антонов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
3. Бевз Г.П. Методика розв‘язування стереометричних задач / Г.П. Бевз. – К.: Рад. шк., 1975. – 240 с.
4. Бевз Г.П. Геометрія тетраедра / Г.П. Бевз. – К.: Рад. шк., 1974. – 106 с.
5. Бескин Н.М. Стереометрия / Н.М. Бескин. – М.: Учпедгиз, 1960. – 352 с.
6. Білоусова В.П. Аналітична геометрія / В.П. Білоусова, І.П. Ільїн. – К.: Вища школа, 1973. –328 с.
7. Болтянский В.Г. Векторы в курсе геометрии средней школы / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. – М.: Учпедгиз, 1982. – 124 с.
8. Болтянский В.Г. Преобразования. Векторы / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. – М.: Просвещение, 1964. – 438 с.
9. Бугров Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М, Никольский. – М.: Наука, 1983. – 228 с.
10. Василевский А.Б. Методы решения задач / А.Б. Василевский. – Мн.: Вышэйшая шк., 1974. – 184 с.
11. Ваховский Е.Б. Задачи по элементарной математике повышенной трудности / Е.Б. Ваховский, А.А. Рывкин. – М.: Наука, 1981. – 186 с.
12. Великина П.Я. Сборник задач по геометрии / В.П. Великина. – М.: Просвещение, 1971. – 236 с.
13. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І.Юрик, І.П.Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.: іл.
14. Габович И.Г. О поиске планов решений геометрических задач / И.Г. Габович // Математика в школе. – 1983. – №1. – С. 53-55.

15. Гельфанд М.Б. Розв'язування геометричних задач у середній школі / М.Б. Гельфанд, Л.М. Лоповок, Г.М. Скобелев, І.Ф. Тесленко. – К.: Рад. шк., 1972. – 210 с.
16. Гусев В.А., Колягин Ю,М., Луканкин Г.Л. Векторы в школьном курсе геометрии: Пособие для учителей / В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1986. – 134 с.
17. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом и теорем: Пособие для учителей / Я.И. Груденов. – М.: Просвещение, 1981. – 123 с.
18. Демидов В.П. Сборник задач на доказательство по стереометрии / В.П. Демидов. – Саранск, 1978. – 164 с.
19. Егоров И.Г. Геометрия / И.Г. Егоров. – М.: Просвещение, 1979. – 414 с.
20. Жаров В.А. Вопросы и задачи по геометрии / В.А. Жаров, П.С. Марголите, З.А. Скопец. – М.: Наука, 1975. – 216 с.
21. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1988. – 224 с.
22. Карелін Л.З. Збірник геометричних задач і вправ на дослідження для восьмирічної школи: Посібник для вчителя / Л.З. Карелін. – К.: Рад. шк., 1969. – 80 с.
23. Карнацевич Л.С. Уроки геометрии в 9 классе / Л.С. Карнацевич. – К.: Рад. шк., 1979. – 167 с.
24. Крайзман М.Л. Розв'язування геометричних задач методом векторів / М.Л. Крайзман. – К.: Рад. шк., 1980. – 96 с.
25. Крайзман М.Л. Решение задач различными способами на уроках геометрии / М.Л. Крайзман // Математика в школе. – 1990. – №1. – С.17-19.
26. Кушнір І.А. Методи розв‘язання задач з геометрії: Кн. для вчителя / І.А. Кушнір. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.
27. Кушнір І.А. Вектори в задачах / І.А. Кушнір // У світі математики. – № 12. – 1981. – 237 с.

28. Кушнір І.А. Розв’язання задач за допомогою повороту вектора на 90° / І.А. Кушнір // У світі математики. – № 19. – 19901. – 210 с.

29. Кушнир И.А. О применении одной векторной формулы / И.А. Кушнир // Математика в школе. – № 2. – 1981. – С.80-84.

30. Кушнир И.А. О применении двух векторных формул / И.А. Кушнир // Математика в школе. – № 1. – 1985. – С.80.

31. Кушнир И.А. Векторные методы решения задач / И.А. Кушнир. – К.: Оберег, 1994. – 124 с.

32. Кушнір І.А. Трикутник та тетраедр в задачах / І.А. Кушнір. – К.: Рад. шк, 1991. – 250 с.

33. Кущенко В.С. Сборник конкурсных задач по математике с решениями / Кущенко В.С. – Л.: Судостроение, 1988. – 512 с.

34. Лидский В.Б. Задачи по элементарной математике / В.Б. Лидский, Л.В. Овсянников, А.Н. Тулайков, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989. – 276 с.

35. Лоповок Л.М. Сборник задач по стереометрии: Пособие для учителей средней школы. – М.: Учпедгиз, 1987. – 214 с.

36. Майоров В.М. Векторные решения геометрических задач / В.М. Майоров, З.А. Скопец. – М.: Просвещение, 1968. – 250 с.

37. Методика розв‘язування задач на побудову / За ред. О.М.Астряба, О.С.Смогоржевського. – К.: Рад. шк., 1962. – 387 с.

38. Михайловський В.І. та ін. Практикум з розв’язування задач з математики / В.І. Михайловський. – К.: Вища шк., 1985. – 244 с.

39. Моденов П.С. Экзаменационные задачи по математике с анализом их решения / П.С. Моденов. – М.: Просвещение, 1979. – 268 с.

40. Перепёлкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Ч.I / Д.И. Перепелкин. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 398 с.

41. Перепёлкин Д.И. Курс элементарной геометрии. Ч.II / Д.И. Перепелкин. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 409 с.

42. Рибкін М.О. Збірник задач з геометрії / М.О. Рибкін. – К.: Рад. шк., 1973. – Ч.1 – 128 с.

43. Рибкін М.О. Збірник задач з геометрії / М.О. Рибкін. – К.: Рад. шк., 1973. – Ч. 2. – 88 с.
44. Саранцев Г.И. О методике решения планиметрических задач / Г.И. Саранцев // Преподавание геометрии в 6-8 классах. – М.: Просвещение, 1979. – С.84-125.
45. Скопец З.А. Задачи и теоремы по геометрии. (Планиметрия) / З.А. Скопец, В.А. Жаров. – М.: Учпедгиз, 1982. – 234 с.
46. Смирнов И.И. Сборник вопросов и задач по тригонометрии / И.И. Смирнов. – М.: Учпедгиз, 1982. – 198 с.
47. Смогоржевський О.С. Дослідження задач на побудову / О.С. Смогорожевський. – К.: Рад. шк., 1991. – 110 с.
48. Соломоник В.С. Сборник вопросов и задач по математике / В.С. Соломоник. – М.: Высшая школа, 1986. – 212 с.
49. Тесленко І.Ф. Элементарна математика. Геометрія / І.Ф. Тесленко. – К.: Рад, шк., 1988. – 246 с.
50. Туманов С.И. Поиски решения задач: Пособие для учителей / С.И. Туманов. – М.: Просвещение, 1992. – 168 с.
51. Филимонов В.А. Геометрия помогает решить задачу / В.А. Филимонов // Математика в школе. – 1992. – №2-3. – С.24-27.
52. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики / И.М. Шапиро. – М: Просвещение, 1990. – 96 с.
53. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности / К.У. Шахно. – Мн.: Вышэйшая шк., 1969. – 477 с.

ДОДАТОК А

Задачі для самостійного розв'язування на застосування векторної алгебри

1. Довести, що у будь-якому трикутнику ABC бісектриса внутрішнього кута дорівнює $|AD| = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$.

Вказівка: розглянути рівність $c(\vec{AC} - \vec{AD})\,\vec{AD} = b(\vec{AD} - \vec{AB})\,\vec{AD}$.

2. Довести, що коли в трикутнику ABC кут A дорівнює 120°, то кут FDE, утворений в результаті сполучення основи бісектриси AD з основами бісектрис BE і CF, прямий.

Вказівка: Довести, що вираз $(\vec{AE} - \vec{AD})(\vec{AF} - \vec{AD})$ дорівнює нулю.

3. Довести, що у будь-якому чотирикутнику $ABCD$

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 - 2|AB||BC|\cos\hat{B} -$$
$$-\,2|BC||CD|\cos\hat{C} - 2|CD||AB|\cos A\hat{E}D,$$

де E – точка перетину сторін AB і CD.

Вказівка: розглянути рівність $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$.

4. Довести, що у будь-якому чотирикутнику $ABCD$

$$\cos A\hat{E}D = \frac{|AC|^2 + |BD|^2 - |AB|^2 - |CD|^2}{2|BC||DA|},$$

де E – точка перетину сторін AB і CD.

Вказівка: розглянути систему $\begin{cases} \vec{CB} + \vec{DA} = \vec{CA} + \vec{DB}, \\ \vec{BA} + \vec{CD} = \vec{CA} - \vec{DB}, \\ \vec{BA} - \vec{CD} = \vec{DA} - \vec{CB}. \end{cases}$

5. Довести, що у довільному чотирикутнику $ABCD$

$$\cos A\hat{F}B = \frac{|BC|^2 + |DA|^2 - |AB|^2 - |CD|^2}{2|AC||BD|},$$

де E – точка перетину діагоналей AC і BD.

Вказівка: див. вказівку до вправи 4.

6. Обчислити кут між медіанами катетів рівнобедреного прямокутного трикутника.

Вказівка: помістити рівнобедрений трикутник OAB (OA = OB = a) у прямокутну систему координат так, щоб точка O сумістилася з початком координат, а катети OA і OB лежали відповідно на осях координат Ox і Oy. Тоді точки A, B, M і N матимуть координати $A(a;\ 0)$, $B(0;\ a)$, $M(0;\ \frac{a}{2})$, $N(\frac{a}{2};\ 0)$. Кут між медіанами AM і BN – це кут між векторами $\vec{AM}$ і $\vec{BN}$ – дорівнює:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BN}}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{BN}|}.$$

7. Медіани бічних сторін рівнобедреного трикутника перетинаються під кутом 60°. Знайти кут при вершині трикутника.

8. В рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти кут між бічними сторонами цього трикутника.

9. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{DA_1}$ і $\vec{DN}$, де M – середина ребра CC_1.

10. Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ і $\vec{OC}$ дорівнює $\sqrt{15}$. Знайти довжину вектора $\vec{OC}$, якщо $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$, $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 2$.

11. Довести, що в прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c має місце наступна нерівність $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Вказівка: розглянути вектори $\vec{x}=\{1;1\},\ \vec{y}=\{a,b\}$, тоді скалярний добуток $\vec{x}\cdot\vec{y}=a+b, |\vec{x}\cdot\vec{y}|\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$.

12. Яке найбільше і яке найменше значення може приймати вираз $5\sin x - 12\cos x$?

Вказівка: нехай $\vec{a}=\{5;-12\},\vec{b}=\{\sin x;\cos x\}$. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ і $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le\vec{a}^2-\vec{b}^2$.

13. Для яких чисел з множини A = <1, 2, 3> нерівність $2\sin x\cos y\sin z - \cos x\sin y\cos z \le a$ виконується для всіх значень x, y, z?

Вказівка: розглянути вектори $\vec{a}=\{2\sin x\cos y;\cos x\sin y\}$, $\vec{b}=\{\sin z;-\cos z\}$ та скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

14. Довести нерівність $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\le 1$.

Вказівка: розглянути вектори $\vec{a}=\{\sin x\sin y;\cos x\cos y\}$, $\vec{b}=\{\sin z;\cos z\}$ та їх скалярний добуток.

15. Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Довести, що $[\vec{a}\vec{b}]=[\vec{c}\vec{a}]=[\vec{b}\vec{c}]$.

Вказівка: скористатися означенням векторного добутку векторів та площі трикутника, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

16. Показати, що об’єм паралелепіпеда, побудованого на діагоналях граней даного паралелепіпеда, дорівнює подвоєному об’єму паралелепіпеда.

Вказівка: застосувати поняття мішаного добутку векторів.