МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ТЕРНАРНА ТА БІНАРНА ПРОБЛЕМИ ГОЛЬДБАХА

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка 421 групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: вчитель математики
Балакова Ольга Русланівна

Керівник Савченко О.Г., доктор фізико-математичних наук, професор

Рецензент Гудирева О.М., кандидатка фізико-математичних наук, доцентка

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. У розвитку математики існує загальна закономірність: нові напрямку математики народжуються в надрах старих. Так і теорія чисел, яка вивчає властивості цілих та раціональних чисел, а також і будь-яких інших чисел, зросла з арифметики.

Найдавнішою математичної діяльністю був рахунок. Він був необхідний, щоб здійснювати певні підрахунки, як виникали в практичній діяльності. Першими істотними успіхами в арифметиці стало винахід чотирьох основних дій: додавання, віднімання, множення і ділення. Подальший розвиток математики розпочався приблизно в 3000 до н.е. завдяки вавилоняни і єгиптянам.

Математиків давно цікавить питання про подання будь-якого числа у вигляді суми деякої кількості простих. Однією із таких задач зайнявся більш двохсот років тому член Петербурзької Академії наук Х. Гольдбах. Він перепробував дуже багато чисел, намагаючись розкласти їх на суму простих. І прийшов до висновку, що будь-яке число, більше семи, можна подати у вигляді суми трьох простих, про це і повідомив в листі до Ейлера. Це твердження називається тернарною проблемою Гольдбаха. Поряд з цим існує більш сильна гіпотеза, в якій стверджується, що кожне парне число, яке більше двох, можна подати у вигляді суми двох простих чисел. Вона є недоведеною і називається бінарною проблемою Гольдбаха.

З тих пір, як Гольдбах висунув цю гіпотезу, математики не сумнівалися, що вона, як і велика теорема Ферма, вірна. Проте, на відміну від теореми Ферма, ніхто ніколи не претендував на те, щоб спромогтися її довести. До вирішення цієї проблеми існує прямий підхід – надовго запустити комп'ютерну програму, яка б послідовно перевіряла це твердження на все більших і більших парних числах. Таким способом можна було б спростувати теорему, якщо вона неправильна. Але так не можна довести теорему – з тієї простої причини, що ніколи не можна гарантувати, що число, яке програма могла б перевірити за наступний свій крок, не опиниться першим виключенням з правилу.

У 30-і роки XX століття група російських математиків встановила, що існує таке скінчене n, що будь-яке парне число може подати у вигляді суми не більше, ніж n простих доданків, а також, що гіпотеза Гольдбаха вірна для великого класу парних чисел. Однак доведення теореми до цих пір не знайдено.

В останні роки в галузі адитивної теорії чисел відбулися великі зміни. Так, тернарна (слабша) проблема Гольдбаха була вирішена у 2013 році Х. Хельготтом. Про бінарну (сильнішу) проблему більшість вважає, що цю гіпотезу неможливо довести, оскільки закономірність, яка спостерігається, є складною комбінацією математичних збігів.

Незгасний інтерес математиків до цієї невирішеної проблеми і обумовлює актуальність дослідження.

Мета дослідження – розглянути основні спроби доведення тернарної та бінарної проблем Гольдбаха.

Об'єктом дослідження виступає адитивна теорія чисел, а ***предметом дослідження*** – безпосередньо гіпотези Гольдбаха.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження:

- розглянути історичний аспект виникнення та постановки проблем Гольдбаха;
- розкрити питання стосовно основних напрямків пошуку доведення висунутих гіпотез;
- розглянути основні доведення тернарної та бінарної проблем Гольдбаха.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були узагальнені основні відомості, що стосуються проблем Гольдбаха та визначені найбільш ґрунтовні методи доведення висунутих Гольдбахом тверджень. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ присвячено історичному аспекту виникнення гіпотез Гольдбаха. В ньому, зокрема, розкрито особливості спроб відшукання вирішення даних проблем. В другому розділі наведено основні методи доведення тернарної та бінарної проблем Гольдбаха та розкрито особливості математичних методів, які лежать в основі доведень.

РОЗДІЛ 1
ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМ ГОЛЬДБАХА

1.1. Формулювання проблеми Гольдбаха

При дослідженні проблеми Гольдбаха, в першу чергу, слід пригадати двох видатних математиків, які й поклали початок гіпотезі, що не дає спокою багатьом науковцям вже понад 270 років. По-перше, слід згадати людину, на ім’я якої і отримало назву твердження, це Христіан Гольдбах. Гольдбах (1690-1764) досить багато мандрував, причому під час своїх подорожей він познайомився з видатними математиками та з деякими з них підтримував довготривале листування. Проживши певний час у Берліні, він у 1725 році переселився до Петербургу, де незабаром його було обрано членом, а потім і секретарем Академії наук. У 1742 році він вступив до служби у міністерство іноземних справ. Помер Гольдбах у Москві. Про його праці в галузі вищої математики відомо з листування його з Л. Ейлером, причому це листування відбувалося протягом 1729-1764 років. З цього змістовного та досить широкого листування надруковані були сином Ейлера Фусом 177 листів у першому томі «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle» [12].

По-друге, свою роль у формулюванні та дослідженні проблеми Голдбаха відіграв безпосередньо Ейлер, швейцарський, німецький та російський математик та механік, який здійснив фундаментальний вклад у розвиток цих наук [7]. Ейлер вів активне наукове листування, яке нараховує більше 3000 листів.

Твердження, про яке йде мова у дипломній роботі, вперше було сформульоване К. Гольдбахом у 1742 році у листі Леонарду Ейлеру, в якому Гольдбах висловив наступне припущення:

«Кожне непарне число, яке перевищує 5, можна подати у вигляді суми трьох простих чисел» [16].

Наприклад,

7 = 2 + 2 + 3

9 = 2 + 2 + 5 = 3 + 3 + 3

11 = 2 + 2 + 7 = 3 + 3 + 5

13 = 3 + 3 + 7= 3 + 5 + 5

15 = 2 + 2 + 1 1 = 3 + 5 + 7 = 5 + 5 + 5

17 = 2 + 2 + 13 = 3 + 3 + 11 = 3 + 7 + 7 = 5 + 5 + 7

19 = 3 + 3 + 13 = 3 + 5 + 11 = 5 + 7 + 7

21 = 2 + 2 + 17 = 3 + 5 + 13 = 3 + 7 + 11 = 5 + 5 + 11 = 7 + 7 + 7

23 = 2 + 2 + 19 = 3 + 3 + 17 = 3 + 7 + 13 = 5 + 5 + 13 = 5 + 7 + 11

25 = 3 + 3 + 19 = 3 + 5 + 17 = 3 + 11 + 11 = 5 + 7 + 13 = 7 + 7 + 11

Ейлер зацікавився проблемою та висунув більш сильну гіпотезу:

«Кожне парне число, яке перевищує 2, можна подати у вигляді суми двох простих чисел» [13].

Наприклад,

4 = 2 + 2

6 = 3 + 3

8 = 3 + 5

10 = 3 + 7 = 5 + 5

12 = 5 + 7

14 = 3 + 11 = 7 + 7

16 = 3 + 13 = 5 + 11

18 = 5 + 13 = 7 + 11

20 = 3 + 17 = 7 + 13

22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11

На рисунку 1 зображена так звана «Комета Гольдбаха» [21] – графік, на якому відмічені кількості різних варіантів подання парних чисел у вигляді суми двох простих.

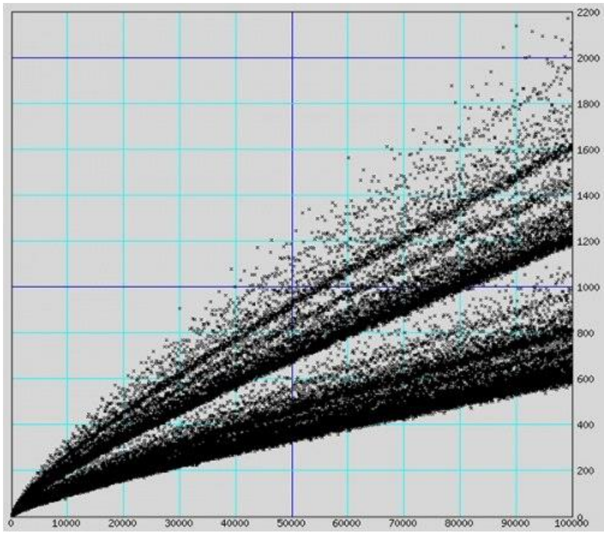

Рис. 1. *Комета Гольдбаха*

Точки над кожним парним числом (які відкладаються праворуч по горизонтальній осі) показують, скількома способами можна розкласти це число на суму двох простих чисел. Наприклад, число 6 допускає один розклад (3 + 3), число 10 – два (3 + 7 та 5 + 5), а число 70 – п’ять (3 + 67, 11 + 59, 17 + 53, 23 + 47 та 29 + 41). На цьому рисунку показані дані по усім парним числам від 6 до 411678. Цікаво, що є декілька «променів» з підвищеною точністю точок поруч з ними.

На рисунку 2 зображене схематичне розбиття декількох перших парних чисел на суму простих.

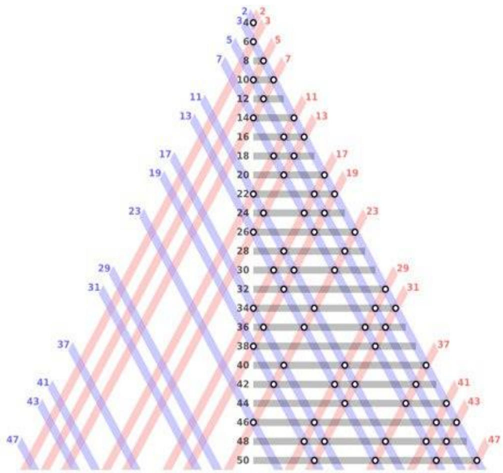

Рис. 2. *Розбиття парних чисел на суму простих*

Із загальних міркувань здається логічним, що чим більше число, тим більшою повинна бути і кількість способів подати його у вигляді суми двох простих доданків. Проте не все так просто, і з цим пов'язана одна із найдавніших нерозв'язаних задач в теорії чисел.

Перше твердження називається тернарною проблемою Гольдбаха, друге – бінарною проблемою Гольдбаха (або проблемою Ейлера) [11]. Із справедливості твердження бінарної проблеми Гольдбаха автоматично випливає справедливість тернарної проблеми Гольдбаха: якщо кожне парне число, починаючи з 4, є сумою двох простих чисел, то додаючи 3 до кожного парного числа, можна отримати усі непарні числа, починаючи з 7. В таких випадках кажуть, що твердження в бінарній проблемі сильніше, ніж в тернарній.

Проблема Гольдбаха (разом із гіпотезою Рімана) внесена під номером 8 до списку проблем Гільберта [7]. Проблеми Гільберта – це список з 23 кардинальних проблем математики, який Давид Гільберт запропонував до розгляду на II Міжнародному Конгресі математиків в Парижі у 1900 році. Тоді ці проблеми (які охоплюють основи математики, алгебру, теорію чисел, геометрію, топологію, алгебраїчну геометрію, групи Лі, дійсних та комплексний аналіз, диференціальні рівняння, математичну фізику та теорію ймовірностей, а також варіаційне числення) не були розв'язані. На даний момент розв'язані 16 проблем з 23. Ще дві не є коректними математичними проблемами (одна сформульована досить розпливчато, щоб зрозуміти, розв'язана вона чи ні, друга, далека від розв'язання, – фізичне, а не математична). Із 5, які залишаються, дві зовсім не розв'язані, а проблема Гольдбаха, в свою чергу, є однією з трьох проблем Гільберта, яка розв'язана лише для деяких випадків.

Як зрозуміло з вище зазначеного, формулювання проблеми Гольдбаха, незалежно від того, тернарної або бінарної, є досить простим та доступним навіть для звичайного учня загальноосвітнього закладу. Проте її повного доведення немає й досі, що робить проблему Гольдбаха досить популярною як серед математиків-початківців, так і у загальносвітовій культурі. Нижче в роботі мова піде про те, що вдалося досягти в доведенні проблеми Гольдбаха.

1.2. Тернарна та бінарна проблеми Гольдбаха

Для подальшого розгляду проблеми Гольдбаха слід розглянути основні поняття, пов’язані з так званою гіпотезою Рімана. Слід відмітити, що із припущення про справедливість цієї гіпотези будувалося доведення тернарної проблеми Гольдбаха.

Отже, гіпотеза Рімана про розподіл нулів дзета-функції Рімана була сформульована Бернхардом Ріманом у 1859 році [8]. В той час, як не було знайдено якої-небудь закономірності, яка описує розподіл простих чисел серед натуральних, Ріман виявив, що кількість простих чисел, які не перевищують x, – це функція розподілу простих чисел, яку позначають як $\pi(x)$ – виражається через розподіл так званих «нетривіальних нулів» дзета-функції. Більшість тверджень про розподіл простих чисел, в тому числі про обчислювальну складність деяких цілочисельних алгоритмів, доведені у припущенні вірності гіпотези Рімана.

Гіпотеза Рімана входить до списку семи «проблем тисячоліття», за розв’язання кожної з яких Математичний інститут Клея (Clay Mathematics Institute, Кембрідж, Масачусетс) виплатить нагороду в один мільйон доларів США. Це твердження настільки складне, що сам Гільберт навіть жартував, що «якби він заснув та прокинувся через 500 років, то першим ділом би запитав, чи доведена гіпотеза Рімана» [15]. У випадку публікації контрприкладу до гіпотези Рімана вчена рада інституту Клея має право вирішити, чи можна вважати даний контрприклад остаточним вирішенням проблеми, або ж проблема може бути сформульована у більш вузькій формі та залишатися відкритою (в останньому випадку автору контрприкладу може бути виплачена невелика частина винагороди).

Сформульована гіпотеза наступним чином: дзета-функція Рімана $\varsigma(S)$ визначена для всіх комплексних $S \neq 1$ та має нулі у від'ємних парних S = – 2, – 4, – 6, …

З функціонального рівняння

$$\varsigma(S) = 2^{S}\,\pi^{S} \sin\frac{\pi S}{2}\,\frac{1}{\sin \pi s \Gamma(s)}\,\varsigma(1-S)$$

та явного виразу $\frac{1}{\varsigma(S)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{s}}$ при $ReS > 1$, де $\mu(n)$ – функція Мьобіуса [5], випливає, що усі інші нулі, так звані «нетривіальні», розташовані в смужці $0 \leq ReS \leq 1$ симетрично відносно так званої «критичної лінії» $\frac{1}{2}+it,\ t \in \mathbb{R}$.

Гіпотеза Рімана стверджує, що усі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину, яка дорівнює $\frac{1}{2}$.

Часто використовується інше, теоретико-числове формулювання [11]: чи вірна наступна асимптотична формула для розподілу простих чисел:

$$\pi(x) = \int_{2}^{x}\frac{dt}{\ln t} + O(\sqrt{x}\ln x)\ ?$$

В оглядових працях [20, 21] відмічається, що дані на користь істинності гіпотези Рімана сильні, проте залишають місце для обґрунтованих сумнівів. Окремі автори, проте, переконані у хибності гіпотези (зокрема, так вважав Джон Літлвуд [13]).

Серед даних, які дозволяють припускати істинність гіпотези, можна виділити успішне доведення схожих гіпотез. Це найбільш сильний теоретичний довід, який дозволяє припустити, що умова Рімана виконується для усіх дзета-функцій, пов'язаних з автоморфними відображеннями, що включає класичну гіпотезу

Рімана. Істинність аналогічної гіпотези вже доведена для дзета-функцій Сельберга [9], в деяких відношеннях аналогічної з функцією Рімана, та для дзета-функції Госа [4].

З іншого боку, деякі дзета-функції Епштейна [16] не задовольняють умові Рімана, хоча вони мають нескінченне число нулів на критичній лінії. Проте ці функції не виражаються через ряди Ейлера та не пов’язані напряму з автоморфними відображеннями. До «практичних» аргументів на користь істинності гіпотези Рімана відноситься обчислювальна перевірка великого числа нетривіальних нулів дзета-функції в рамках проекту ZetaGrid (один з найкрупніших проектів в галузі розподільних обчислень [7]). Як би то ні було, гіпотеза Рімана й досі не має загального та повного розв’язання. Не дивлячись на це, її істинність досить часто припускається при доведенні інших теорем теорії чисел, зокрема, й проблеми Гольдбаха.

Як було зазначено вище, існують два різні формулювання проблеми Гольдбаха. Тернарна проблема – це більш «слабке» твердження, з якого випливає істинність бінарної («сильнішої») проблеми Гольдбаха.

До початку XX століття гіпотези Гольдбаха, поряд з гіпотезою Рімана, стали одними з центральних задач теорії чисел. Прорив у вирішенні цієї задачі був здійснений британським математиками Гарольдом Харді та Джоном Літлвудом [14]. Тоді вони вивчали задачу Варінга. Розвиваючи ідеї самого Харді та Сіріваса Рамануджана, закладені в роботах 1916-1917 років, британські математики створили так званий круговий метод. Його суть полягає у наступному: розв’язання задачі (наприклад, кількість способів подати ціле число у вигляді суми трьох простих) задається інтегралом по одиничному колу від деякого ряду. Цей інтеграл розбивається на два, один з яких оцінюється, а стосовно другого доводиться його відносна малість. Складові першої суми називаються великими дугами, а другої – малими. Використовуючи свій метод, Харді та Літлвуд змогли довести тернарну гіпотезу Гільберта, проти в їх доведенні була одна, проте суттєва, недосконалість: в роботі вони спиралися на недоведену узагальнену гіпотезу Рімана.

У 1973 році метод Харді та Літлвуда був удосконалений І.М. Виноградовим (радянський математик, академік Академії Наук СРСР), який надав доведення, що не залежить від справедливості гіпотези Рімана, тобто довів, що будь-яке достатньо велике непарне число можна подати у вигляді суми трьох простих чисел [12].

З того моменту радянські математики вважають тернарну проблему Гольдбаха розв’язаною, в той час, як закордонні математики з цим не погоджуються. На жаль, праві саме іноземці: не дивлячись на те, що Виноградов зробив унікальну справу, остаточно задача не була розв’язана. Розв’язання Виноградова не можна назвати повним та остаточним, оскільки він не надав оцінки для цього «достатньо великого числа». З тих пір більшість математиків намагалися покращити результат Виноградова. Ідея в основі усіх цих спроб була достатньо простою: покращуючи оцінки, домогтися того, щоб число N стало достатньо малим. «Достатньо малим» в даному випадку вважається таке значення, для якого гіпотезу Гольдбаха можна перевірити на комп’ютері. У 1989 році Ванг і Чен опустили нижню межу до $_{e}e^{11,503} \approx 3,33339\times10^{43\ 000} \approx 10^{43000,5}$ [5], що, тим не менше, й досі залишається поза межами досяжності для явної перевірки усіх менших чисел при сучасному розвитку обчислювальної техніки.

Проте вклад І.М. Виноградова як у вирішенні проблеми Гольдбаха, так і до математики загалом, величезний. При спробі розв’язати проблеми Гольдбаха вчений створив один із самих міцних та загальних методів теорії чисел – метод тригонометричних сум [17], який полягає у тому, що більшість математичних проблем аналітичної теорії чисел доволі просто можна сформулювати на мові скінчених сум доданків певного тригонометричного виду. Застосовуючи цей метод, він сам та його послідовники отримали велику кількість видатних результатів як в теорії чисел, так і в інших галузях математики.

Суттєвого просування у вирішенні проблеми Гольдбаха не було майже 20 років, доки у 2012 році світ не побачила робота відомого спеціаліста з теорії чисел Терренса Тао [19]. Йому вдалося показати, що будь-яке непарне число можна подати у вигляді суми не більш, ніж п’яти простих чисел.

В середині травня 2013 року математик з Перу Харольд Хельфготт виклав до архіву препринтів Корнельського університету статтю «Великі дуги для теореми Гольдбаха». Ця стаття містить фінальну частину доведення тернарної проблеми Гольдбаха [14]. Результатом цієї роботи стали так звані вільні від логарифмів оцінки. Основним результатом роботи стала головна теорема, яка звучить наступним чином: усі непарні цілі числа, більші за 1029, можна подати у вигляді суми трьох простих. Раніше твердження гіпотези Гольдбаха було перевірено самим Хельфготтом до 8,875 х 1030. Разом ці два факти дають остаточне доведення тернарної гіпотези Гольдбаха. Цікаво, що нова робота базується на численних методах ще в одному місці: для доведення довелося перевірити узагальнену гіпотезу Рімана для достатньо великого числа коренів. Це було зроблено Давидом Платтом [3].

Бінарна проблема Гольдбаха все ще далека від вирішення. Для бінарної проблеми круговий метод не діє – вплив малих дуг там виявляється досить сильним. Виноградов у 1973 році та Теодор Естреманн у 1938 році [17] показали, що майже усі парні числа можна подати у вигляді суми двох простих чисел (доля тих, які не можна подати, якщо вони є, прямує до нуля). Цей результат був дещо посилений у 1975 році Хью Монтгомері та Робертом і Чарльзом Воном. Вони показали, що існують додатні константи c та C такі, що кількість парних чисел, які не перевищують N, що не можна подати у вигляді суми двох простих, не перевищує CN^{1-C} [9]. У 1930 році Лев Шнірельман показав, що будь-яке парне число можна подати у вигляді суми не більш, ніж C простих, де C – деяка константа. Спочатку вона була не дуже великою, у 1969 році радянський математик Клімов показав, що C не перевищує 6000000000. Цей результат неодноразово поліпшувався – у 1995 році Олівер Рамаре показав, що будь-яке парне число можна подати у вигляді суми не більш, ніж шести простих [2]. Цікаво, що новий результат Хельфготта дозволяє покращити результат Рамаре: віднімаючи від парного числа трійку, ми отримаємо деяке непарне, яке, як відомо, можна подати у вигляді суми трьох простих. Отже, будь-яке парне число можна подати у вигляді суми чотирьох простих. Із справедливості тернарної гіпотези Гольдбаха випливає, що довільне парне число – це сума не більш, ніж чотирьох простих чисел. Самі ж математики вважають, що до розв’язання сильної проблеми Гольдбаха ще далеко.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ ПРОБЛЕМ ГОЛЬДБАХА

2.1. Доведення Харді та Літлвуда

У 1923 році з'являється третя частина відомих мемуарів англійських математиків Харді та Літлвуда. На протязі всієї роботи автори розвивають свій новий метод у теорії чисел, який потім застосовують до найбільш цікавих проблем цієї галузі теорії чисел. Третя частина роботи присвячена головним чином дослідженню проблеми Гольдбаха за допомогою нового методу [7].

Харді та Літлвуду не вдалося довести твердження Гольдбаха, проте їм вдалося пов'язати вирішення цієї проблеми з розв'язанням іншої відомої проблеми теорії чисел – гіпотези Рімана, про яку мова шла вище. Харді та Літлвуду вдалося виявити, що твердження Гольдбаха справедливе для усіх достатньо великих непарних чисел. Але для парних чисел вказане твердження не вдається довести, навіть базуючись на гіпотезі Рімана. Вдається лише довести, що якщо і є «виключні» парні числа (тобто такі, які не можна подати у вигляді суми двох простих), то їх число незрівнянно мале у порівнянні з числом «регулярних» парних чисел, які розкладаються на суму двох простих.

Розглянемо основні моменти методу Харді та Літлвуда. Передусім відмітимо, що на сьогодні цей метод вже має історичне значення: завдяки цьому методу розроблені більш досконалі методи в адитивній теорії чисел.

Харді та Літлвуд виходили з розгляду степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{p \geq 2} lnpx^p, \tag{2.1}$$

де p пробігає усі прості числа та $|x| < 1$. Ряд (2.1) зображає функцію, голоморфну всередині одиничного кола [4]. Такою буде й функція

$$f^S(x) = \sum_{n\geq 8} a_n x^n,$$

Проте тут a_n вже пов'язане з проблемою Гольдбаха. Дійсно, простий розрахунок показує, що

$$a_n = \sum_{n=p+p'+p''} lnp\ lnp' lnp'', \tag{2.2}$$

де підсумовування розповсюджується на усі можливі подання числа у вигляді суми трьох простих. Якщо вдасться довести, що $a_n \neq 0$ для достатньо великих непарних чисел, то твердження Гольдбаха буде, вочевидь, доведено.

Харді та Літлвуд, намагаючись довести виконання нерівності

$$a_n \neq 0 \tag{2.3}$$

для всіх достатньо великих непарних n, виділили головну частину a_n при $n \to \infty$. Вони скористалися класичним виразом Коші для коефіцієнтів степеневого ряду [5]:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f^3(x)dx}{x^{n+1}}, \tag{2.4}$$

де в якості контуру C_n взято (за технічними міркуваннями) коло $|x| = e^{-\frac{1}{n}}$.

Проте досі це було лише перетворення проблеми: замість вивчення a_n виявилося достатньо вивчити $f(x)$. Проте $f(x)$ зовсім не походить на ті елементарні функції, які добре відомі з курсу аналізу. Наступний крок, який здійснили Харді та Літлвуд, полягав у тому, щоб вони пов'язали функцію з більш вивченими функціями. Скориставшись відомою в аналізі формулою Мелліна [24]

$$e^x = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^s \Gamma(s) ds,$$

вони пов'язали деяким інтегральним рівнянням функцію $f(x)$ з функцією $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ та аналогічними їй функціями. Завдяки цьому вдалося пов'язати властивості $f(x)$ з гіпотезою Рімана, що дозволило Харді та Літлвуду апроксимувати функцію $f(x)$ досить простими функціями.

Саме, виявилося, що у безпосередній близькості від кожної точки виду

$$e^{-\frac{1}{\mu}}\rho, \text{де } \rho = e^{2\pi i\frac{a}{q}},$$

має місце така наближена рівність:

$$f(x) \cong \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\frac{1}{1-\rho^{-1}} = \psi_\rho(x), \tag{2.5}$$

де $\mu(q)$ – функція Мьобіуса і $\varphi(q)$ – функція Ейлера [7]. Аналогічно, для $f^3(x)$ буде мати місце наближена рівність:

$$f^3(x) \cong \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)}\frac{1}{(1-\rho^{-1})^3} = \psi_\rho^3(x). \tag{2.6}$$

Але такі наближені рівності (2.5) та (2.6) мають місце лише для дуже малих околів точок

$$e^{-\frac{1}{\mu}}\rho. \tag{2.7}$$

Тому весь шлях інтеграції в рівності (2.4) доводиться розбивати на маленькі інтервали, всередині яких лежать точки сукупності (2.7).

Виявляється, що достатньо з цією метою взяти ті точки сукупності (2.7), для яких дроби $\frac{a}{q}, (a,q) = 1$ задовольняють умові $q \leq \sqrt{n}$. Позначимо дугу, яка вміщує точку $e^{-\frac{1}{\mu}}\rho$, через C_ρ. Тоді рівність (2.4) можна буде записати наступним чином:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\sum_{q=1}^{\sqrt{n}}\sum_{\rho(q)}\int_{C_\rho}\frac{f^3(x)dx}{x^{n+1}}, \tag{2.4'}$$

де символ $\rho(q)$ вказує на те, що ρ пробігає усі примітивні корені з 1 степеню q.

Апроксимуючи $f^3(x)$ по дузі C_ρ функцією $\psi_\rho^3(x)$, ми отримаємо наближену рівність:

$$a_n \cong \frac{1}{2\pi i}\sum_{q=1}^{\sqrt{n}}\sum_{\rho(q)}\int_{C_\rho}\frac{\psi_\rho^3(x)dx}{x^{n+1}}.$$

Далі виявляється, що кожен із інтегралів правої частини останнього співвідношення може бути без великої похибки розповсюджений на усе коло C_n. Причиною тому виявляється та обставина, що функція $\psi_\rho(x)$ має єдину особливість – полюс першого порядку [5] – саме поблизу дуги C_ρ – в точці $x = \rho$, на решті ж кола $\psi_\rho(x)$ мала за абсолютною величиною.

Отже, для a_n ми одержуємо нове наближення

$$a_n \cong \frac{1}{2\pi i} \sum_{q=1}^{\sqrt{n}} \sum_{\rho(q)} \int_{C_n} \frac{\psi_\rho^3(x)dx}{x^{n+1}}.$$

Але тепер інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\psi_\rho^3(x)dx}{x^{n+1}}$$

легко може бути обчислений, оскільки він дорівнює за тією ж самою теоремою Коші коефіцієнту при x^n в розкладі функції $\psi_\rho^3(x)$ в степеневий ряд. Такий розклад легко здійснити, хоча б застосувавши правило бінома [6]; в результаті виявляється, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\psi_\rho^3(x)dx}{x^{n+1}} = \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \rho^{-n} \sim \frac{n^2}{2} \rho^{-n} \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)}.$$

Нарешті, без великої похибки підсумовування по q можна розповсюдити до ∞, тобто

$$a_n \cong \frac{n^2}{2} \sigma_n, \qquad (2.8)$$

де

$$\sigma_n = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^3(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\rho(q)} \rho^{-n}. \qquad (2.9)$$

Величина σ_n була названа Харді та Літлвудом терміном «особливий ряд» [16]; вона виявляється тісно повязаною з арифметичною природою числа n. Ця величина відіграє важливу роль не лише в методі Харді-Літлвуда, але й в методі Виноградова, який йде набагато далі.

Виявимо тепер основний для нас факт, що

$$\sigma_n > c > 0$$

якщо n – непарне число.

Дійсно, в ряді (2.9) легко підрахувати перший та другий члени: обидва вони дорівнюють одиниці. Отже,

$$\sigma_n \geq 4 - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)},$$

інакше

$$\left| \sum_{\rho(q)} \rho^{-n} \right| \leq \varphi)q).$$

Але ряд $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)}$ в силу властивостей функцій $\mu(q)$ і $\varphi(q)$ перетворюється в рівний йому нескінчений добуток

$$\prod_{\rho} \left(1 + \frac{1}{(\rho - 1)^2}\right),$$

де ρ пробігає усі прості числа. Оскільки

$$\prod_{\rho} \left(1 + \frac{1}{(\rho - 1)^2}\right) = \frac{5}{2} \prod_{\rho \geq 5} \left(1 + \frac{1}{(\rho - 1)^2}\right) < \frac{5}{2} \prod_{m=4}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) <$$

$$< \frac{5}{2} e^{\prod_{m=4}^{\infty} \frac{1}{m^2}} < \frac{5}{2} e^{\frac{1}{3}},$$

то

$$\sigma_n > 4 - \frac{5}{2} e^{\frac{1}{3}} > 0.$$

А тоді, згідно співвідношенню (2.8), для кожного достатньо великого числа n не лише існує множина розв’язків рівняння $n = p + p' + p''$, але й число таких розв’язків необмежено зростає разом з n.

Таким чином, твердження Гольдбаха доводиться для всіх достатньо великих непарних чисел, правда, із залученням гіпотез, аналогічних гіпотезі Рімана. Чому ж метод Харді-Літлвуда не підходить для парних чисел? Виявляється, що у випадку парного n має місце рівність $\sigma_n = 0$, отже, a_n дорівнює невідомому залишковому члену, який ми вміємо найбільше оцінювати зверху.

2.2. Доведення Л.Г. Шнірельмана

У 1930 році радянський математик Л.Г. Шнірельман публікує свою глибоку роботу, в якій між іншим доводиться більш слабке твердження проблеми Гольдбаха [14]. Саме, Шнірельман доводить, що будь-яке ціле число є сумою не більш, ніж, приблизно, 800000 простих доданків.

Таким чином, відкриття, яке здійснив Шнірельман, було дійсно першим негіпотетичним та суттєвим кроком в цій проблемі. Усе, що було відомо до Шнірельмана, було або деяким емпіричним фактом, перевіреним для скінченого числа об'єктів, або ж здогадкою, яка є недоведеною.

Ідеї, покладені Шнірельманом в основу його методу, зовсім відрізнялися від тих, які покладено в основі методу Харді-Літлвуда. Метод Шнірельмана скоріше аналогічний методам теорії функції дійсної змінної. Основним поняттям, яким користується Шнірельман, є поняття «щільності» послідовності натуральних чисел. Нехай задана деяка послідовність натуральних чисел

$$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \tag{2.10}$$

та $N(x)$ дорівнює числу членів послідовності (2.10), які не перевищують x. Якщо

$$inf_{x \geq 1} \frac{N(x)}{x} = \alpha > 0,$$

тобто нижня границя відношення $\frac{N(x)}{x}$ для $x = 1, 2, \dots$ додатна, то ми будемо говорити, що послідовність (2.10) має додатну щільність ($= \alpha$). Якщо ж

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}=\alpha>0, \qquad (2.11)$$

то ми будемо говорити, що послідовність (2.10) майже щільна.

Легко переконатися, що будь-яка майже щільна послідовність з

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}>\alpha'>0,$$

може бути доповнена шляхом додавання скінченого числа членів до послідовності додатної щільності $>\alpha'$.

Розглянемо тепер ближче послідовності додатної щільності. Передусім майже очевидний наступний факт: якщо $\alpha>\frac{1}{2}$, то будь-яке натуральне число x або належить до послідовності (2.10), або дорівнює суму двох доданків, узятих з цієї послідовності. Дійсно, нехай

$$n_1, n_2, \dots, n_\gamma \qquad (2.12)$$

– усі члени послідовності (2.10), які не перевищують x. Тоді й числа

$$x-n_1, x-n_2, \dots, x-n_\gamma \qquad (2.13)$$

не будуть перевищувати x. Так як за умовою $\alpha>\frac{1}{2}$, то $\gamma>\frac{1}{2}x$, отже, обидва ряди (2.12) та (2.13) разом містять більш, ніж x цілих чисел; таким чином, або $x=n_\gamma$, або ряди (2.12) та (2.13) мають хоча б один спільний член, тобто $x=n_i+n_j$.

Майже так само легко довести і наступне: будь-яку послідовність додатної щільності можна так доповнити новими членами, які є сумами членів даної послідовності, що нова послідовність буде мати щільність $>\frac{1}{2}$. При цьому особливо важливою є та обставина, що число доданків, з яких складається кожен новий член, не перевищує деякої величини, яка залежить лише від початкової послідовності. Доведення цього твердження базується на наступній лемі: якщо задані дві послідовності додатної щільності

$$\{n_i\} \text{ з щільністю } =\alpha>0,$$
$$\{n'_j\} \text{ з щільністю } =\beta>0,$$

то послідовність $\{n_k\}$, яка складається з усіх n_i, n'_j та $n_i + n'_j$ має щільність $\geq \alpha + \beta - \alpha\beta$.

Застосуємо лему до питання, що розглядається. Нехай послідовність R: $\{n_i\}$ має щільність $\alpha < \frac{1}{2}$. Утворимо нову послідовність R_1, яка складається з членів R та їх попарних сум; згідно з лемою щільність послідовності R_1 буде

$$\alpha_1 \geq \alpha + \alpha(1 - \alpha) > \alpha + \frac{\alpha}{2}.$$

Якщо $\alpha_1 \leq \frac{1}{2}$, то складемо нову послідовність R_2, яка містить у собі усі члени послідовностей R та R_1 та їх попарні суми. За тією ж лемою щільність послідовності

$$\alpha_2 \geq \alpha_1 + \alpha(1 - \alpha_1) > \alpha_1 + \frac{\alpha}{2} > \alpha + 2\frac{\alpha}{2}.$$

Якщо будувати таким рекурентним чином ряд послідовностей R, R_1, R_2, …, R_s, …, то щільність однієї з побудованих послідовностей стане, вочевидь, більшою за $\frac{1}{2}$, і значення s, при якому це відбудеться, легко знайти, знаючи α.

Отже, якщо щільність послідовності $< \frac{1}{2}$, то можна побудувати вказаним способом нову послідовність, щільність якої $> \frac{1}{2}$. А ця нова послідовність вже буде такою, що, як ми переконалися вище, будь-яке ціле число або буде належати їй, або буде сумою двох її членів. Але це приводить нас до дуже важливого твердження, яке є одним із основних в методі Шнірельмана.

Якщо послідовність (2.10) є майже щільною, то будь-яке ціле число x є сумою виду

$$x = n_{\gamma_1} + n_{\gamma_2} + \cdots + n_{\gamma_p} + \gamma, \tag{2.14}$$

де $p \leq P, \gamma \leq N_0$, причому P та N_0 не залежать від вибору x.

Дійсно, будь-яку майже щільну послідовність (2.10) з $\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{x} > \alpha$ (> 0) ми спочатку поповнюємо новими членами, доки не отримаємо послідовність додатної щільності $> \alpha$. Цей процес породжує «зайвий доданок» в рівності (2.14). Потім вказаним вище процесом будуємо нову послідовність, щільність якої $> \frac{1}{2}$. Суми пар членів цієї послідовності вже виражає будь-яке ціле число x. А повертаючись до початкових доданків

$$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$$

ми переконуємося, що справедлива рівність (2.14).

Такі в загальних рисах властивості «щільних» послідовностей. Проте в «слабшій» проблемі Гольдбаха ми маємо справу, навпаки, з послідовністю, щільність якої дорівнює нулю, оскільки там мова йде про подання цілого числа у вигляді суми простих чисел, послідовність же простих чисел, як відомо [6], має щільність 0. Проте Шнірельману вдалося довести, і в цьому полягав успіх його методу, що послідовність

$$\{p_i + p_j\}, \tag{2.15}$$

де p_i та p_j пробігають незалежно одне від одного усі прості числа, є вже майже щільною.

Своє доведення Шнірельман базує на двох глибоких фактах теорії розподілу простих чисел. Перший факт – це класична теорема Чебишева [8], другий факт можна сформулювати наступним чином. Нехай $B(m)$ – число зображень числа m у вигляді суми двох простих. Виявляється, що не знаючи точно закономірностей, яким підпорядковується величина $B(m)$, можна, проте, оцінити зверху величину $\sum_{m=1}^{x} B^2(m)$. Метод оцінки цієї величини аналогічний методу, розробленому Бруно [12].

Виявляється, можна довести, що

$$\sum_{m=1}^{x} B^2(m) < c_1 \frac{x^3}{(lnx)^4}. \tag{2.16}$$

Базуючись на цих двох фактах, вже легко довести теорему Шнірельмана.

Передусім звернімо увагу на те, що в силу відомої в аналізі нерівності Шварца [19], має місце таке співвідношення:

$$\left(\sum_{m=1}^{x} B^2(m)\right)^2 < \gamma(x)\sum_{m=1}^{x} B^2(m), \tag{2.17}$$

де $\gamma(x)$ – число членів послідовності $\{p_i + p_j\}$, які не перевищують x. З іншого боку, в сумі $\sum_{m=1}^{x} B^2(m)$ враховані й усі суми $p_i + p_j$, де p_i і p_j пробігають незалежно одне від одного усі прості числа, які не перевищують $\frac{x}{2}$; отже,

$$\sum_{m=1}^{x} B^2(m) > \left[\pi\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > c_2\frac{x^3}{(lnx)^2}. \tag{2.18}$$

Порівнюючи (2.17) та (2.18), ми виявляємо, що

$$\gamma(x) > c_3 x$$

для достатньо великих x, тобто послідовність (2.15) є майже щільною. Але тоді для неї справедлива рівність (2.14), тобто

$$x = p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2} + \cdots + p_{\gamma_q} + \gamma, \tag{2.19}$$

де p_{γ_i} – прості числа, а q та γ обмежені абсолютними константами. А оскільки γ, очевидно, є сумою обмеженого числа простих доданків, то твердження «слабшої» проблеми Гольдбаха в силу (2.19) виявляється справедливим.

Як було зазначено вище, Шнірельман показав, що будь-яке ціле число є сумою не більше, ніж 800000 простих. Домовимося позначати буквою *K* («константа Шнірельмана» [9]) найменше натуральне число, яке володіє наступною властивістю: довільне натуральне число є сумою не більше, ніж *K* простих. Продовжуючи та розвиваючи метод Шнірельмана, радянський математик Н.П. Романов отримав результат $K \leq 2208$ [8]. Продовжуючи роботи Шнірельмана та Романова, Ландау та Шерк показали, що $K \leq 71$. Нарешті, Річі показав, що $K \leq 67$ [7]. Проте є підстави вважати, що повне вирішення проблеми Гольдбаха отримати неможливо.

2.3. Доведення І.М. Виноградова

У травні 1937 року академік І.М. Виноградов повністю розв’язав проблему Гольдбаха для усіх достатньо великих непарних чисел [3]. Саме, він довів, що будь-яке достатньо велике непарне число є сумою трьох простих. Що стосується парних чисел, то з роботи Виноградова випливає, що вони (починаючи з деякого місця) є сумами чотирьох простих. Робота Виноградова, без сумнівів, є самим великим кроком вперед у вирішенні проблеми Гольдбаха. З часу опублікування цієї роботи можна вважати, що повне вирішення проблеми Гольдбаха вже не за горами.

І.М. Виноградов виходить у своїй роботі з розгляду сум виду

$$S_n = \sum_{p \leq n} e^{2\pi i \alpha p}, \tag{2.20}$$

де p пробігає усі прості числа $\leq n$.

Міркування Виноградова базується потім на двох дуже глибоких фактах, які стосуються законів розподілу простих чисел. Перший з цих фактів був помічений самим Виноградовим. Він пов'язаний з оцінкою зверху модуля суми (2.20). Другий – відноситься до класичної проблеми розподілу простих чисел в арифметичних прогресіях.

Неважко прослідкувати певну аналогію між сумою (2.20) та рядом (2.1), який використовували у своїх міркуваннях Харді та Літлвуд. Тому і в подальшому відмічається певна схожість методів Виноградова та Харді-Літлвуда. Проте є і суттєва різниця обох методів: Харді та Літлвуд користуються нескінченими рядами та теоремами теорії функцій комплексної змінної, а Виноградов усього цього уникає, користуючись тільки скінченими сумами.

Простий підрахунок показує, що

$$S_n^2 = \sum_{m \le 3n} a_m e^{2\pi i \alpha m}, \qquad (2.21)$$

де a_m дорівнює числу способів подання числа m у вигляді суми трьох непарних простих. Нас тепер буде цікавити a_n. Теорема Виноградова буде доведена, якщо ми покажемо, що

$$a_n \neq 0 \qquad (2.22)$$

для всіх достатньо великих непарних *n*. Відоме правило Ейлера для відшукання коефіцієнтів тригонометричних сум [11] дозволить нам виразити a_n через

$$a_n = \int_0^1 S_n^3 e^{-2\pi i n\alpha} d\alpha. \qquad (2.23)$$

Наша задача тепер полягає у тому, щоб виділити із a_n головну частину. Неважко здогадатися, що головна частина пов'язана із поведінкою підінтегральної функції поблизу раціональних точок $\alpha = \frac{a}{q}$. І дійсно, справа відбувається таким чином, що головна частина a_n складається з інтегралів, розповсюджених на околи деяких раціональних точок.

Щоб визначити це, ми зробимо наступним чином. Нехай *F* позначає сукупність нескоротних дробів виду

$$\frac{a}{q}, (a, q) = 1,$$

знаменники яких задовольняють умові

$$q \le Q = (lnn)^r, \qquad (2.24)$$

де *r* – достатньо велике фіксоване ціле додатне число. Кожну точку сукупності *F* приймемо за центр інтервалу довжини 2δ, де $\delta = \frac{Q}{n}$. Неважко побачити, що для великих *n* ці інтервали не перекриваються. Множину точок α, які попадають всередину усіх таких інтервалів, позначимо буквою *E*. нехай доповнення до неї буде *CE*. Тоді рівність (2.23) можна переписати наступним чином:

$$a_n = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{(\alpha,q)=1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} n} \int_{-\delta}^{+\delta} S_n^2\left(\frac{a}{q} + \vartheta\right) e^{-2\pi i n\vartheta} d\vartheta$$
$$+ \int_{CE} S_n^2(\alpha) e^{-2\pi i n\alpha} d\alpha, \qquad (2.25)$$

причому в перших доданках покладено $\alpha = \frac{a}{q} + \vartheta$.

Перейдемо тепер до суми

$$S_n\left(\frac{a}{q} + \vartheta\right) = \sum_{p \le n} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q} + \vartheta\right)p}. \qquad (2.26)$$

Легко помітити, що в цій сумі можна знехтувати доданками, які відносяться до простих дільників числа q. Усі такі доданки в сумі (2.25) дадуть величину порядку

$$Q^2 lnQ = O((lnn)^{2r+1}),$$

яка увійде до залишкового члену.

Тому в сумі (2.26) ми обмежимося доданками, які відповідають таким індексам p, які не ділять q. Але тоді суму (2.26) можна записати наступним чином:

$$S_n\left(\frac{a}{q} + \vartheta\right) = \sum_{(l,q)=1} e^{2\pi i \frac{l}{q}} \sum_{p \equiv l'(modq) p \le n} e^{2\pi i\vartheta p} + \text{зал. член}. \qquad (2.27)$$

де l – найменший додатний лишок ap за модулем q [18], а l' – найменший додатний розв’язок конгруенції $al' \equiv l(modq)$.

До правої частини (2.27) входить сума, яка розповсюджується на усі прості числа арифметичної прогресії

$$qm + l', \qquad (2.28)$$

(які не перевищують n). Наша мета тепер – замінити цю суму деякою більш простою сумою, яка розповсюджується на усі цілі індекси деякого інтервалу. Для цього ми пов'яжемо нашу суму з функцією, яка дає число простих чисел в прогресії (2.28).

Питання тепер, вочевидь, зводиться до нового: як буде поводитися функція $\pi(n; q, l')$? Тут і доводиться використовувати той факт з теорії розподілу простих чисел в арифметичних прогресіях, про який згадувалося вище. Працями ряду відомих математиків достатньо добре з'ясована поведінка функції $\pi(m; q, l')$. Зокрема [5], виявлено, що якщо q не перевищує довільного фіксованої степені lnn, то

$$\pi(m; q, l') = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\gamma=2}^{m} \frac{1}{ln\gamma} + O\left(\frac{m}{(lnm)^A}\right), \tag{2.30}$$

де $\varphi(q)$ – функція Ейлера, а A – довільне додатне число.

Підставляючи (2.30) в (2.20), ми одержуємо

$$\sum_{p \equiv l'(modq) p \leq n} e^{2\pi\vartheta p} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{m=2}^{n} \frac{e^{2\pi i \vartheta m}}{lnm} + \text{зал. член.} \tag{2.31}$$

При цьому простий підрахунок підказує, що залишковий член достатньо малий:

$$\text{зал. член.} \leq c \frac{n}{(lnn)^A} \sum_{m=2}^{n-1} |e^{2\pi i \vartheta m} - e^{2\pi i (\vartheta+1) m}| + O\left(\frac{n}{(lnn)^A}\right) \leq$$
$$\leq c \frac{n}{(lnn)^A} n|\vartheta| + O\left(\frac{n}{(lnn)^A}\right) = O\left(\frac{n}{(lnn)^{A-r}}\right),$$

оскільки $|\vartheta| < \frac{Q}{n}$.

Таким чином, порівнюючи (2.27) та (2.31), можна написати

$$S_n\left(\frac{a}{q} + \vartheta\right) = \frac{1}{\varphi(q)} F_n(\vartheta) \sum_{(l,q)=1} e^{2\pi i \frac{l}{q}} + \text{зал. член.}, \tag{2.32}$$

де

$$F_n(\vartheta) = \sum_{m=2}^{n} \frac{e^{2\pi i \vartheta m}}{lnm}. \tag{2.33}$$

Але добре відомо [17], що

$$\sum_{(l,q)=1} e^{2\pi i \frac{l}{q}} = \mu(q),$$

де $\mu(q)$ – функція Мьобіуса. Отже,

$$S_n^3\left(\frac{a}{q}+\vartheta\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} F_n^3(\vartheta) + \text{зал. член.}$$

Одержаний для $S_n^3\left(\frac{a}{q}+\vartheta\right)$ вираз підставляємо у (2.25) та отримуємо

$$a_n = R_n(\delta) \sum_{q=1}^{Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{p(q)} \rho^{-n}$$
$$+ \int_{CE} S_n^3(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha + \text{зал. член.}, \qquad (2.34)$$

де $R_n(\delta) = \int_{-\delta}^{+\delta} F_n^3(\vartheta) e^{-2\pi i n \vartheta} d\vartheta$ та $\rho(q)$ пробігає усі примітивні корені з одиниці степеня q.

Але якщо придивитися до виразу $\sum_{q=1}^{Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{p(q)} \rho^{-n}$, то ми помічаємо, що він є ніщо інше, як сегмент «особливого ряду» методу Харді-Літлвуда. Отже,

$$\sum_{q=1}^{Q} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{p(q)} \rho^{-n} > \alpha > 0 \qquad (2.35)$$

для усіх достатньо великих непарних n. Далі, легко помітити, що $R_n(\delta)$ можна замінити без великої похибки інтегралом

$$R_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F_n^3(\vartheta) e^{-2\pi i n \vartheta} d\vartheta.$$

Але R_n є коефіцієнт суми $F_n^3(\vartheta)$ при члені $e^{-2\pi i n \vartheta}$, тобто

$$R_n = \sum_{n=m+m'+m''} \frac{1}{lnm} \frac{1}{lnm'} \frac{1}{lnm''},$$

де підсумовування розповсюджується на усі можливі способи подання числа у вигляді суми трьох додатних доданків, відмінних від одиниці.

Число таких способів неважко оцінити знизу. Дійсно, індекси m та m' можуть приймати незалежно один від одного усі значення від 1 до $\frac{m}{2}$ і кожній парі (m, m') відповідає один і лише один розв'язок рівняння

$$n = m + m' + m''.$$

Отже, число таких способів подання не менше c'^{n^2}, тобто

$$R_n > c'' \frac{n^2}{(lnn)^3}, \qquad (2.36)$$

оскільки

$$lnm\, lnm'\, lnm'' \leq (lnn)^3.$$

Приймаючи до уваги (2.35) та (2.36), ми бачимо, що для всіх достатньо великих непарних *n* перший доданок в (2.34) буде більший за $c''' \frac{n^2}{(lnn)^3}$.

Таким чином, основна мета – довести, що $a_n \neq 0$, – буде досягнута, якщо показати, що

$$\int\limits_{CE} S_n^3(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha = O\left(\frac{n^2}{(lnn)^2}\right).$$

Виноградов у свої роботі оцінив $\max_{\alpha \in CE} |S_n(\alpha)|$ та показав, що ця величина має порядок

$$O\left(\frac{n^2}{(lnn)^2}\right). \qquad (2.37)$$

Ця оцінка і являє собою центральний та глибокий пункт усієї роботи. Навіть сама по собі вона є значним внеском в теорію розподілу простих чисел та відкриває широкі перспективи в цій теорії. Вона відповідає тим недоведеним гіпотезам, які Харді та Літлвуд поклали в основу своєї роботи.

2.4. Сучасне доведення тернарної гіпотези Гольдбаха

У 2013 році перуанський математик Харольд Хельфготт довів тернарну гіпотезу Гольдбаха, а потім зумів оптимізувати комп'ютерний алгоритм для розрахунку решета Ератосфена.

Як відомо, у III ст. до нашої ери давньогрецький математик, астроном, географ, філолог і поет Ератосфен Кіренський придумав геніальний спосіб пошуку простих чисел. Дуже ефективний і швидкий метод, який використовується до сих пір, отримав назву решето Ератосфена [19]. Суть зрозуміла з назви. Решето Ератосфена означає пошук простих чисел методом виключення. Беремо список чисел, виключаємо з нього всі складені числа – і отримуємо список простих чисел, немов просіявши список через решето.

У вигляді алгоритму решето Ератосфена формалізується наступним чином:

1. Виписати підряд всі цілі числа від двох до n (2, 3, 4, ..., n).

2. Нехай змінна p спочатку дорівнює двом – першому простому числу.

3. Закреслити в списку числа від $2p$ до n, рахуючи кроками по p (це будуть числа, кратні p: $2p$, $3p$, $4p$, ...).

4. Знайти перше незакреслене число у списку, яке більше за p, і привласнити значенню змінної p це число.

5. Повторювати кроки 3 і 4, поки можливо.

Після виконання цієї операції незакресленими в списку залишаються тільки прості числа. Очевидно, що комп'ютерна реалізація решета Ератосфена вимагає великого обсягу пам'яті. Так воно і було, доки своє рішення проблеми не запропонував 38-річний перуанський математик Х. Хельфготт.

Х. Хельфготта привернув загальну увагу в 2013 році, коли йому вдалося вирішити тернарну проблему Гольдбаха. Тернарна проблема Гольдбаха, як зазначалося вище, – більш слабке твердження основної бінарної проблеми Гольдбаха. Це твердження про те, що будь-який парне число, починаючи з 4, можна представити у вигляді суми двох простих чисел.

Тернарна гіпотеза Гольдбаха безпосередньо випливає з бінарної гіпотези. Тернарного гіпотеза стверджує, що будь-яке непарне число, починаючи з 7, можна подати у вигляді суми трьох простих чисел.

Х. Хельфготта зумів остаточно довести цю гіпотезу, знизивши кордон *N* до прийнятного числа 1029, а всі інші числа перевірили на суперкомп'ютері. Його доведення опубліковано в журналі Science 24 травня 2013 роки [13]. Воно підтверджено іншими кваліфікованими математиками, здатними зрозуміти доведення, наприклад, Теренсом Тао.

Наразі талановитий математик направив свої зусилля на ще одну важливу задачу сучасної науки – оптимізацію пошуку простих чисел. Йому вдалося запропонувати покращений варіант решета Ератосфена. Новий варіант в комп'ютерній реалізації вимагає менше оперативної пам'яті, що означає менший обсяг підкачки сторінок з віртуальної пам'яті – отже, процес істотно прискорюється. Для оптимізації комп'ютерного алгоритму решета Ератосфена математик застосував варіант того ж методу, який використовував при роботі над тернарной проблемою Гольдбаха. Мова йде про круговий метод Харді-Літтлвуда. Той самий метод, який на початку минулого століття чудово вдосконалив Виноградов, в результаті чого майже зумів довести гіпотезу Гольдбаха.

Сам математик пояснює метод наступним чином:

«Аналіз кількості розв’язків проводиться, по суті, за допомогою перетворення Фур'є. Уявіть собі, що прості числа – це звуки на деякому запису, скажімо, в моменти часу 2, 3, 5, 7, 11 і так далі мікросекунд. Після перетворення у вас виходить свого роду шум, в якому ви намагаєтеся почути якісь ноти. Серед них є такі, які можна почути досить добре, – це і є великі дуги. А є частоти, які просто є шумовими фрагментами, – це малі дуги. Весь метод розпадається на дві частини – виділення нот і доведення того, що решта насправді шум. За першу частину методу відповідають оцінки на великі дуги, за другий – на малі

» [13].

На основі методу Харді-Літтлвуда вчений розробив підхід, який дозволяє замість обсягу оперативної пам'яті N використовувати обсяг пам'яті $\sqrt[3]{N}$ (кубічний корінь з N). Образно кажучи, замість 1 гігабайта пам'яті, тобто 109 байт потрібно всього лише 1 кілобайт ($\sqrt[3]{109} = 103$ байт). Така оптимізація в якомусь сенсі стала побічним ефектом розв’язання проблеми Гольдбаха.

Тези своєї роботи Харальд Хельфготт представив на 21-му Латиноамериканському колоквіумі з алгебри в Буенос-Айресі 25-29 липня 2016 року, а також на заході Sinapsis 2016 в Парижі – неформальній зустрічі перуанських вчених, які проживають в Європі.

Є різні алгоритми для пошуку простих чисел, але Хельфготт звертає увагу, що решето Ератосфена має важливу якість – програма сумісна з іншими математичними операціями, такими як факторизація, але ж саме на факторизації (розкладанні великих чисел на прості множники) базується криптографія. «Факторизація стала ключовим елементом сучасної цивілізації», – констатує Хельфготт.

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні положення.

Проблеми Гольдбаха були сформульовані у 1742 році та мають наступні формулювання:

«кожне непарне число, яке перевищує 5, можна подати вигляді суми трьох простих чисел»;

«кожне парне число, яке перевищує 2, можна подати у вигляді суми двох простих чисел».

Перше твердження називається тернарною проблемою Гольдбаха, друге – бінарною проблемою Гольдбаха (або проблемою Ейлера). Із справедливості твердження бінарної проблеми Гольдбаха автоматично випливає справедливість тернарної проблеми Гольдбаха: якщо кожне парне число, починаючи з 4, є сумою двох простих чисел, то додаючи 3 до кожного парного числа, можна отримати усі непарні числа, починаючи з 7. В таких випадках кажуть, що твердження в бінарній проблемі сильніше, ніж в тернарній.

Для вирішення проблем Гольдбаха британські математики Г. Харді та Д. Літлвуд створили так званий круговий метод. Його суть полягає у наступному: розв’язання задачі (наприклад, кількість способів подати ціле число у вигляді суми трьох простих) задається інтегралом по одиничному колу від деякого ряду. Цей інтеграл розбивається на два, один з яких оцінюється, а стосовно другого доводиться його відносна малість. Складові першої суми називаються великими дугами, а другої – малими. Використовуючи свій метод, Харді та Літлвуд змогли довести тернарну гіпотезу Гільберта, проти в їх доведенні була одна, проте суттєва, недосконалість: в роботі вони спиралися на недоведену узагальнену гіпотезу Рімана.

Метод Харді та Літлвуда був удосконалений І.М. Виноградовим, який надав доведення, що не залежить від справедливості гіпотези Рімана, тобто довів, що будь-яке достатньо велике непарне число можна подати у вигляді суми трьох простих чисел. Розв’язання Виноградова не можна назвати повним та остаточним, оскільки він не надав оцінки для цього «достатньо великого числа». З тих пір більшість математиків намагалися покращити результат Виноградова. Ідея в основі усіх цих спроб була достатньо простою: покращуючи оцінки, домогтися того, щоб число N стало достатньо малим. «Достатньо малим» в даному випадку вважається таке значення, для якого гіпотезу Гольдбаха можна перевірити на комп’ютері. Проте вклад І.М. Виноградова як у вирішенні проблеми Гольдбаха, так і до математики загалом, величезний. При спробі розв’язати проблеми Гольдбаха вчений створив один із самих міцних та загальних методів теорії чисел – метод тригонометричних сум, який полягає у тому, що більшість математичних проблем аналітичної теорії чисел доволі просто можна сформулювати на мові скінчених сум доданків певного тригонометричного виду. Застосовуючи цей метод, він сам та його послідовники отримали велику кількість видатних результатів як в теорії чисел, так і в інших галузях математики.

У 2013 році Х. Хельфготт довів тернарну гіпотезу Гольдбаха. Для оптимізації комп'ютерного алгоритму вирішення тернарної проблеми математик застосував варіант кругового методу Харді-Літтлвуда. На основі методу Харді-Літтлвуда вчений розробив підхід для розкладання великих чисел на прості множники, що дозволяє замість обсягу оперативної пам'яті N використовувати обсяг пам'яті $\sqrt[3]{N}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айерлэнд К. Классическое введение в современную теорию чисел [Текст]/ К. Айерлэнд, М. Роузен — М.: Мир, 1987

2. Андронов И.К. Арифметика рациональных чисел / И.К. Андронов, А.К. Окунев – М.: Просвещение, 1971. – 400 с.

3. Баврин И.И. Старинные задачи / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус – М.; Просвещение, 1994. – 128 с.

4. Бевз В.Г. Практикум з історії математики. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

5. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища шк., 1970. – 275 с.

6. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Вища шк. , 1973. – 552 с.

7. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966, 384 с.

8. Вейль, Г. Алгебраическая теория чисел. – М.: Гос. изд. иностр. литературы, 2004. – 226 с.

9. Виноградов, И.М. Основы теории чисел: учебное пособие. – М.: Лань, 2009. – 176 с.

10. Глейзер Г.И. История математики в школе VII – VIII кл. / Г.И. Глейзер – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

11. Данхем В. Ойлер та теорія чисел / В. Данхем // У світі математики. – 2000. – Т. 6. – Вип. 3. – С. 1 – 19.

12. Делоне, Б.Н. Петербургская школа теории чисел. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 2010. – 422 с.

13. Егоров, Д.Ф. Элементы теории чисел. – М.: Наука, 1998. – 358 с.

14. История математики в 3 т.; [Текст]/ под ред. А.П. Юшкевич — М.: Наука.; — т.2 — 1970, 301с.

15. История математики в 3 т.; [Текст]/ под ред. А.П. Юшкевич — М.: Наука.; — т.3 —1970, 496с.

16. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі / А.Г. Конфорович – К.: Рад. шк., 1981. – 189 с.

17. Матиясевич Ю. В. Десятая проблема Гильберта [Текст]/ Ю. В. Матиясевич — Наука, 1993.

18. Михелович, Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1996. – 260 с.

19. Олейник, В. Методы получения простых чисел – текущее состояние и перспективы. – Кишинев: Evrica, 1999. – 126 с.

20. Прахар, К. П. Распределение простых чисел. – М.: Мир, 2003. – 512 с.

21. Тадеєв В.О. Неформальна математика. 6 – 9 кл. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 288 с.

22. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра і теорія чисел. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – Ч. 1. – 400 с.

23. Фаермарк Д.С. Задача пришла с картины / Д.С. Фаермарк – М.: Наука, 1974. – 160 с. 12.

24. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математики. – Минск: Высшая шк., 1978. – 270 с.

25. Lamb E. Goldbach Variations [Text]/ E.Lamb Scientific American blogs — May 15, 2013.