МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконала: студентка 421 групи

Спеціальності 014 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка

кваліфікація: вчитель математики

Божко Олександра Олександрівна

Керівник Плоткін Я.Д., доктор фізико-математичних наук, доцент

Рецензент Перегняк Г.Є., вчитель-методист

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Операційне числення застосовується для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь звичайних та з частинними похідними, диференціально-різницевих рівнянь та лінійних інтегральних рівнянь типу згортки. До цих рівнянь приводять задачі, пов'язані із перехідними процесами лінійних фізичних систем.

Метод операційного числення заснований на тому, що над оператором диференціювання та деякою функцією (зображенням) від цього оператора, якій відповідає функція (оригінал), здійснюють дії такі, що диференціюванню оригіналу відповідає множення оператора на зображення [6]. За допомогою методу операційного числення лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами шуканої функції (оригіналу) зводяться до алгебраїчних рівнянь відносно функції зображення.

Операційне числення почали розвивати у своїх роботах Г. Лейбніц, Л. Ейлер [7], Ж. Лагранж, П. Лаплас [4], Ж. Фур'є, О. Коші.

Англійський інженер-електрик О. Хевісайд вводить до операційного числення правила дії з оператором диференціювання та функціями цього оператора [22]. Застосовуючи операційне числення до розв'язування диференціальних рівнянь, він отримав ряд важливих результатів, що стосуються складних проблем теорії електромагнітних коливань у проводах. Створення операційного числення зазвичай пов'язують з ім'ям О. Хевісайда, який започаткував його систематичне застосування до розв'язування фізико-технічних задач. Проте перша розробка методу операційного числення була здійснена задовго до появи робіт О. Хевісайда у працях математиків Л. Арбогаста, Ж. Франсе, Р. Лобатто, Д. Грегорі, Р. Кармайкла [13].

Операційне числення в Україні вперше розробив професор Київського університету М.Є. Ващенко-Захарченко. У своїх роботах він розглядав символи та їх властивості, застосування символічного числення до розв'язування лінійних звичайних та з частинними похідними диференціальних рівнянь з постійними та змінними коефіцієнтами, виводить формулу розкладу для випадку простих та кратних коренів, яка увійшла до літератури як формула розкладу О. Хевісайда [16].

Строге обґрунтування та розвиток операційне числення отримало на основі інтегральних перетворень в роботах Дж. Карсона, Т. Бромвича, П. Леві та інших [12].

Широке застосування операційного числення до теорії диференціальних та інтегральних рівнянь визначає актуальність обраної теми дослідження.

Мета дослідження – розглянути питання застосування операційного числення до розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь.

Об'єктом дослідження виступають основні методи операційного числення, а ***предметом дослідження*** – безпосередньо перетворення Лапласа.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження:

- розглянути основні поняття, що стосуються перетворення Лапласа та його властивостей;
- розкрити питання застосування методів операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь;
- розглянути питання застосування методів операційного числення до відшукання розв'язків інтегральних рівнянь різного типу.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що були узагальнені основні відомості, що стосуються можливості застосування перетворення Лапласа для знаходження розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь. ***Практичне значення*** дипломної роботи полягає в тому, що наведені в роботі приклади розкривають алгоритм застосування операційного числення до відшукання розв'язків рівнянь певного виду.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: метод інтегрування та диференціювання, основні методи операційного числення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ містить основні теоретичні відомості, що стосуються найбільш важливих понять теорії операційного числення, зокрема, перетворення Лапласа та його властивостей. В другому розділі наведено основні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівня за допомогою операційного числення.

РОЗДІЛ 1
ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Оригінал та зображення функції

Функція дійсної змінної t виду

$$f(t) = u(t) + iv(t), \tag{1.1}$$

де $u(t)$ і $v(t)$ – дійсна і уявна частини функції, а i – уявна одиниця, називається комплексною функцією дійсної змінної.

Оригіналом називається комплексна функція

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

дійсної змінної t, яка задовольняє умовам:

1. $f(t)$ – однозначна неперервна або кусково-неперервна функція [5] разом зі своїми похідними n-го порядку в інтервалі (-∞,∞);
2. $f(t) = 0$ при $t < 0$;
3. Існують такі числа $M > 0$ i $S > 0$, що для всіх $t > 0$

$$|f(t)| < Me^{St}$$

Число $S_0 > 0$, для якого нерівність в умові (1.1) виконується при будь-якому $S = S_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ і не виконується при $S = S_0 - \varepsilon$ (S_0 – точна нижня границя чисел S), називається показником зростання функції $f(t)$, тобто $S_0 = min\, S$.

Функції-оригінали при $t \to \infty$ є або обмеженими, або тими, що прямують до нескінченності, але не швидше ніж показникова функція $e^{S_0 t}$; такі функції називаються функціями експоненціального типу. На функцію-оригінал можна накладати більш загальні умови, розглядаючи і функції неперервних розривів в n точках на будь-якому скінченному інтервалі і припускаючи, що в цих точках функції абсолютно інтегровані [4].

Зображенням функції-оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = S + i\sigma$, визначена за допомогою інтегралу

Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \qquad (1.2)$$

Теорема 1.1. Якщо функція $f(t)$ – оригінал з показником росту S_0, то інтеграл Лапласа збігається рівномірно в напівплощині $Re\, p > S_0$ і функція $F(p)$ є в ній аналітичною.

Кожній $f(t)$ за формулою (1.2)

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, f(t)\, dt$$

ставиться у відповідність певна функція $F(p)$, аналітична в області $Re\, p > S_0$. Ця відповідність називається *перетворенням Лапласа*.

Відношення між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ записують наступним чином: $f(t) \to F(p)$ або $F(p) \to f(t)$.

В перетворенні Лапласа оригінал будемо позначати малою буквою, а його зображення – відповідною великою буквою, наприклад $x(t) \to X(p)$, $\varphi(t) \to \Phi(p)$.

В операційному численні використовують також зображення за Карсоном-Хевісайдом [3], яке визначається рівністю

$$\Phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(t)\, dt. \qquad (1.4)$$

Воно відрізняється від зображення за Лапласом тільки множником p.

В сучасній технічній літературі в основному використовують зображення за Лапласом, так як загальність перетворення Фур'є і Лапласа зв'язує операційне числення з гармонічним аналізом і таким чином вносить фізичний зміст в поняття зображення (зображення за Лапласом $F(S + i\sigma)$ – це спектральна функція затухаючої функції $e^{-st} f(t)$, для якої змінна σ є частотою [11]).

Приклади.

Функція-оригінал

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad \left(\eta(0) = \frac{1}{2},\ \lim_{t \to 0+0} \eta(t) = 1\right) \qquad (1.5)$$

називається *одиничною функцією Хевісайда*. Якщо $f(t)$ задовільняє умовам оригінала (1.1) і (1.3), то функція

$$f(t)\eta(t) = \begin{cases} f(t), t > 0, \\ 0, \quad t < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

задовольняє усім умовам оригіналу.

1. Зображення одиничної функції $\eta(t)$. За формулою (1.2) отримуємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\eta(t)dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-pt}dt = \lim_{a\to\infty}\frac{e^{-pt}}{-p}\bigg|_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-pa}}{p}\right) = \frac{1}{p}$$

{Якщо $Re\,p\ > 0$, то $\lim\limits_{a\to\infty} e^{-pa}\ = 0$ } . [28] Звідси випливає,

$$\eta(t) \to \frac{1}{p}, \quad Re\,p\ > 0.$$

2. Зображення функції $e^{\alpha t}$. За формулою (1.2) маємо

$$L(e^{\alpha t}) = \int_0^{\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(p-\alpha)t}\,dt =$$

$$= -\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-(p-\alpha)t}\big|_0^a}{p-\alpha} = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{e^{-(p-\alpha)\alpha}}{p-\alpha}\right).$$

Якщо $Re(p-\alpha) > 0$, то $\lim\limits_{a\to\infty} e^{-(p-\alpha)\alpha} = 0$. [43]

Таким чином,

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \quad Re\,p > Re\,\alpha\,. \tag{1.7}$$

3. Гамма-функція. Гамма-функція визначається інтегралом

$$\Gamma(S) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{S-1}dt, \quad S > 0. \tag{1.8}$$

Подамо інтеграл у формулі (1.8) у виді

$$\Gamma(S) = \int_0^1 e^{-t}t^{S-1}dt + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{S-1}dt\,.$$

Інтеграл

$$\int_0^1 e^{-t}t^{S-1}dt\ <\ \int_0^1 t^{S-1}dt\ =\ \frac{t^S}{S}\bigg|_0^1$$

рівномірно збігається при $t > 0$, якщо $S > 0$. З нерівності

$$t^{S+1} < e^{t}\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t^{S+1}}{e^{t}} = 0\right)$$

або

$$e^{-t}t^{S-1} < \frac{1}{t^{2}},$$

випливає, що інтеграл

$$\int_{1}^{\infty} e^{-t}t^{S-1}dt < \int_{1}^{\infty}\frac{dt}{t^{2}} = 1$$

рівномірно збігається для всіх S.

Таким чином, $\Gamma(S)$ неперервна для $S > 0$. Інтегруючи праву частину гамма-функції $\Gamma(S+1)$ по частинах [7] $(u = t^{S}\ \ dv = e^{-t}dt)$ отримаємо

$$\Gamma(S+1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{S}dt = (-e^{-t}t^{S})|_{0}^{\infty} + S\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{S-1}dt,$$

або

$$\Gamma(S+1) = S\,\Gamma(S). \tag{1.9}$$

Користуючись (1.9) отримуємо

$$\Gamma(S+k) = S(S-1)(S-2)\dots(S-k)\Gamma(S-k),$$
$$k < S, \quad k \in N.$$

Для $S = n, \quad n \in N,$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!$$

так як

$$\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}dt = 1.$$

Маємо

$$t^{\alpha} \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}\ , \quad Re\,p > 0 \tag{1.10}$$

$$t^{n} \to \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{1.11}$$

1.2. Властивості перетворення Лапласа

1. *Лінійність.*

Теорема 1.2. Якщо $f_1 \to F_1 \ldots f_n \to F_n$ і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – числа, тоді

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) \to$$
$$\to \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p) + \cdots + \alpha_n F_n(p). \tag{1.12}$$

2. *Подібність*.

Теорема 1.3. Якщо $f(t) \to F(p)$ і α −число, тоді

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{1.13}$$

3. *Запізнення.*

Теорема 1.4. Якщо $f(t) \to F(p)$ і $t_0 > 0$, тоді

$$f(t - t_0) \to e^{-t_0 p} F(p). \tag{1.14}$$

4. *Випередження.*

Теорема 1.5. Якщо $f(t) \to F(p)$ і $t_0 > 0$, тоді

$$f(t + t_0) \to e^{t_0 p} \left((F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right). \tag{1.16}$$

Теорему випередження використовують при розв'язуванні рівнянь, в які входять $f(t)$, $f(t + t_0)$, …, $f(t + nt_0)$. [12]

Теорема 1.6. Якщо $f(t)$ – періодична функція з періодом T,

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & t > T \end{cases}$$

і $f_0(t) \to F_0(p)$, то зображення функції $f(t)$ має вигляд

$$f(t) \to F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}. \tag{1.17}$$

4. *Зсув.*

Теорема 1.7. Якщо $f(t) \to F(p)$ і $p_0 -$ число, тоді

$$e^{-p_0 t} f(t) \to F(p + p_0) \tag{1.18}$$

Теорему про зсув використовують при розгляді фізичних явищ, які пов'язані із затухаючими коливаннями [18].

1.3. Згортка функцій та її властивості

Згорткою неперервних функцій $\varphi(t)$ і $f(t)$, $(0 \le t \le \infty)$ називається інтеграл

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau. \tag{1.19}$$

Властивості згортки:

Комутативність: $\varphi * f = f * \varphi$

$$\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = -\int_t^0 \varphi(u) f(t-u) du =$$

$$= \int_0^t f(t-u) \varphi(u) du$$

$$u = t - \tau.$$

Асоціативність:

$$(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$$

Дистрибутивність:

$$\varphi * (f + \psi) = \varphi * f + \varphi * \psi$$

Перевіряється безпосередньо підстановкою [14].

Абсолютна величина згортки визначається наступним чином:

$$|\varphi * f| \le |\varphi| * |f|$$

Теорема 1.8. Якщо $\varphi(t)$ і $f(t)$ – оригінали, то $\varphi * f$ – оригінал.

Доведення.

Нехай

$$|f(t)| < M_0 e^{St}, \qquad |\varphi(t)| < M_1 e^{S_1 t}$$

$$|f * \varphi| \le \int_0^t M_0 e^{S_0 \tau} M_1 e^{S_1 (t-\tau)} \, d\tau$$

Позначимо $M_0 M_1 = M_2$ і нехай $S_0 > S_1$, тоді

$$|f * \varphi| \leq M_2 \int_0^t e^{S_0\tau} e^{S_1(t-\tau)}\, d\tau = M_2 e^{S_0 t} \tau \Big|_0^t =$$

$$= M_2 e^{S_0 t} t = (te^{-\alpha t}) M_2 e^{(S_0+\alpha)t}, \quad \alpha > 0$$

Дужки обмежені, тому кількість можна продовжити

$\leq M\, e^{(S_0+\alpha)t}$ або $|f * \varphi| < M\, e^{S_0 t}$, так як

$$S_0 = \inf_{\alpha}(S_0 + +\alpha).$$

Теорема Бореля (множення зображень).

Якщо $f(t) \to F(p), \;\; Re\, p > S_0, \;\; \varphi(t) \to \Phi(p), \;\; Re\, p > S_1$, то

$$f * \varphi \to F(p)\Phi(p). \tag{1.20}$$

Доведення.

$$\varphi * f = \int_0^\infty e^{-pt} f * \varphi\, dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau.$$

Подвійний інтеграл по області D: $0 \leq t \leq \infty$, $0 \leq \tau \leq$t (рис. 1.1) збігається абсолютно, так як зображення оригіналу $\varphi * f$ визначено в півплощині $Re\, p > S_0$ при $S_0 > S_1$.

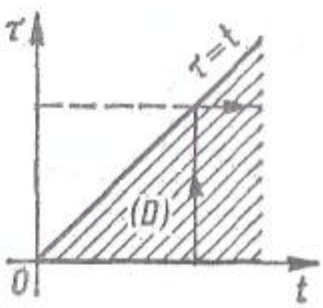

Рис. 4

Змінимо порядок інтегрування:

$$f * \tau \to \int_0^\infty \varphi(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau) dt$$

Так як $t - \tau = u$, то одержуємо:

$$f * \tau \to \int_0^\infty e^{-p\tau} \varphi(\tau) \int_0^\infty e^{-pu} f(u) du = F(p)\Phi(p).$$

1.4. Інтегрування оригіналу і зображення

Теорема 1.8. Якщо $f(t) \to F(p), \quad Re\,p > S_0,$ то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}, \qquad Re\,p > S_0. \tag{1.21}$$

Доведення.

1. Функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ задовольняє, очевидно, умовам 1) і 2), функції-оригінала, а умові 3), так як

$$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| < \int_0^t Me^{S_0\tau}d\tau = \frac{M}{S_0}(e^{S_0 t} - 1) < M_1 e^{S_0 t}$$

де $M_1 = \frac{M}{S_0}$. Звідси випливає, що функція $\varphi(t)$ є оригіналом з показником росту S_0 [14].

2. Нехай $\varphi(t) \to \Phi(p), \quad Re\,p > S_0$ тоді за теоремою диференціювання оригіналу $\varphi'(t) \to p\Phi(p),\ \varphi(0) = 0,$ так як $\varphi'(t) = f(t),$ то $F(p) = p\Phi(p)$. Звідси

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Отже,

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}.$$

Теорема 1.9. Якщо $f(t) \to F(p), \quad Re\,p > S_0,$ і інтеграл $\int_p^\infty F(p)dp$ збігається в півплощині $Re\,p > S_1 > S_0$, то

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \to \frac{f(t)}{t}, \quad Re\,p > S_1 > S_0\,. \tag{1.22}$$

Доведення.

В півплощині $Re\,p > S_0 + \delta$ інтеграл Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ збігається рівномірно відносно p. Тому в цій півплощині інтегруємо його за параметром p, причому за контур інтегрування можна взяти будь-який промінь, який виходить із точки p і утворює гострий кут з віссю дійсних чисел. Маємо

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt .$$

Так як за умовою інтеграл $\int_p^\infty F(p)dp$ збігається в півплощині $Re\, p > S_1 > S_0$, то

$$\int_p^\infty dp \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_p^\infty e^{-pt} dp ,$$

або

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt .$$

Звідси, функція $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом з показником росту $S_1 > S_0$.

Отже, інтегрування зображення $F(p)$ зводиться у просторі оригіналу до ділення на t функції $f(t)$ [27], тобто

$$\int_p^\infty F(p)\, dp \to \frac{f(t)}{t}, \qquad Re\, p > S_1 > S_0 .$$

РОЗДІЛ 2
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Застосування операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь

Розглянемо рівняння з нульовими початковими даними:

1. $L(x) = f(x)$

$$L(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x$$

$$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

2. $L(x) = 1$

$$x(0) = 0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = 0$$

$x(t) -$ розв'язок задачі (1), а якщо $x_1(t) -$ розв'язок задачі (2) і

$$\begin{array}{cc} x \to X(p) & x_1 \to X_1(p) \\ \vdots & \vdots \\ x^{(n)} \to p^n X(p) & x_1^{(n)} \to p^n X_1(p) \\ f(t) \to F(p) & 1 \to \dfrac{1}{p} \end{array}$$

то з (1) і (2) отримаємо:

$$AX(p) = F(p)\,,\ AX_1 = \frac{1}{p}$$

(де $\mathrm{A} = p^{(n)} + a_1 p^{(n-1)} + \cdots + a_n x$). Тоді $X(p) = pX_1(p)F(p)$ і з властивостей згортки отримаємо:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau$$

Приклади.

1. $x^{IV} + 2x^{II} + x = \cos t$

$x(0) = \cdots = x^{III}(0) = 0$

Знайдемо $x_1(t)$ – розв'язок рівняння $x^{IV} + 2x^{II} + x = 1$

$$x_1(0) = \cdots = x_1^{III}(0) = 0$$

Операторне рівняння [15]

$$(p^{IV} + 2p^{II} + 1)x_1(p) = \frac{1}{p}$$

$p = 0$ – простий полюс,

$p = \pm i$ – полюси другого порядку.

$$x_1(t) = \frac{1}{(p^2+1)^2}\Big|_{p=0} + 2\,Re\left(\frac{d}{dp}(p-i)^2\frac{1}{p(p^2+1)^2}e^{pt}\right)$$

$$= 1 + 2\,Re\,\left(\frac{e^{pt}}{p(p^2+1)^2}\right)'_{p=i}$$

$$= 1 + 2\,Re\frac{e^{pt}p(p^2+1)^2 - e^{pt}((p^2+1)^2 + p^2(p+i))}{p^2(p^2+1)^4}\Bigg|_{p=i}$$

$$= 1 + 2\,Re\frac{tp^2 - 3p + (tp-1)i}{p^2(p^2+1)^2}e^{pt}\Big|_{p=i} = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t$$

Тобто

$$x_1 = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t$$

$$x(t) = \int_0^t \left(\sin(t-\tau)\frac{1}{2}\sin(t-\tau) + \frac{(t-\tau)}{2}\cos(-\tau)\right)\cos\tau d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\sin(t-\tau) - (t-\tau)\cos(t-\tau))\cos\tau\, d\tau = \frac{1}{8}t(\sin t - t\cos t).$$

2. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{cases}$$

$x(0) = y(0) = y'(0) = 0 \quad x'(0) = 1$

$x \to X\ x' \to pX\ \ x'' = p^2X - 1\ \ e^t = \frac{1}{p-1}$

$y \to Y\ y' \to pY\ \ y'' = p^2Y - 1\ \ e^{-t} = \frac{1}{p+1}$

$$\begin{cases} p^2X - 1 + pX + p^2Y - 1 = \dfrac{1}{p-1} \\ pX + 2X - pY + Y = \dfrac{1}{p+1} \end{cases}$$

Розв'язуючи систему

$$X = \frac{1}{8(p-1)} + \frac{3}{4(p+1)^2} - \frac{1}{8(p-1)}$$
$$Y = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{p-1} \to e^t \qquad \frac{1}{p+1} \to e^{-t}$$
$$\frac{1}{p^2-1} \to sh\ t \qquad \frac{1}{(p+1)^2} \to t\ e^{-t}$$

і за теоремою про диференціал [9]:

$$\left(\frac{1}{p^2-1}\right)' \to -t\ sh\ t$$

або

$$\frac{-2p}{(p^2-1)^2} \to -t\ sh\ t$$
$$\frac{2p}{(p^2-1)^2} \to t\ sh\ t$$

Одержуємо

$$X(t) - \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^{-t} - \frac{1}{8}e^{-t}$$
$$Y(t) = \frac{3}{4}t\ sh\ t.$$

3. Розв'яжемо рівняння:

$$y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{3\mathrm{t}}$$
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$
$$y(t) \to Y(p) \qquad y'^{(t)} \to pY(p) \qquad y''(t) \to p^2Y(p)$$
$$e^{3t} \to \frac{1}{p-3}$$
$$p^2Y(p) - 2pY(p) - 3Y(p) = \frac{1}{p-3}$$
$$Y(p)(p^2 - 2p - 3) = \frac{1}{p-3}$$
$$Y(p) = \frac{1}{(p-3)(p^2-2p-3)}$$
$$Y(p) = \frac{1}{(p-3)^2(p+1)}$$

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів [7]:

$$\frac{1}{(p-3)^2(p+1)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{(p-3)^2} + \frac{C}{p+1} =$$

$$= \frac{A(p-3)(p+1) + B(p+1) + C(p-3)^2}{(p-3)^2(p+1)}$$

p^2 (A+C)=0

p -2A + B - 6C=0

p^0 -3A + B + 9C=1

$$A = -\frac{1}{16}, \qquad B = \frac{1}{4}, \qquad C = \frac{1}{16}$$

$$Y(p) = -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p-3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(p-3)^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{p+1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{16} e^{3t} + \frac{1}{4} t e^{3t} + \frac{1}{16} e^{-t}$$

2.2. Розв’язування інтегральних рівнянь за допомогою операційного числення

Наведемо формули, які ми будемо використовувати при обчисленні інтегралів.

1. Частинні випадки теореми узагальненого множення зображень:

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{t\tau}\right) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p^{n+1}}\, F\left(\frac{1}{p}\right); \tag{2.1}$$

$$\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\tau(t-\tau)}\right) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p}\, F\left(p + \frac{1}{p}\right); \tag{2.2}$$

$$\int_0^t J_0\left(2\sqrt{t^2-\tau^2}\right) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\, F\left(\sqrt{p^2+1}\right); \tag{2.3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}\, f(\tau) d\tau \to \frac{1}{p\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right); \tag{2.4}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}\, f(\tau)d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p}}\, F\left(\frac{1}{p}\right); \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, f(\tau)d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p}}\, F\left(\sqrt{p}\right). \tag{2.6}$$

2. Формули інтегрування за параметром:

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau = \int_0^\infty F(p)dp \tag{2.7}$$

$$\int_0^\infty t^n f(\tau)\, d\tau = (-1)^{n+1}\int_0^\infty F^{n+1}\,(p)dp =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{d^n}{dp^n}\big(F(p)\big)\Big|_0^\infty \tag{2.8}$$

$$\int_a^b f(t,\tau)d\tau \to \int_a^b F(p,\tau)d\tau. \tag{2.9}$$

Гранична формула:

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p) = f(0),$$

якщо існує $\lim_{p\to 0} f(t)$ [8].

3. Формула теореми множення оригіналів:

$$\int_0^\infty f(t)\varphi(t)dt = \lim_{p\to 0}\sum_{k=1}^\infty Res\left(F(q_k)\Phi\,(p-q_k)\right) =$$

$$= \lim_{p\to 0}\sum_{k=1}^\infty Res\,\Phi\,(q_k)F(p-q_k). \tag{2.10}$$

4. Рівність Парсеваля.

Теорема 2.1. Якщо $f(t) \to F(p)$ i $\varphi(t) \to \Phi(p)$ то

$$\int_0^\infty F(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_0^\infty \Phi(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Доведення.

Оскільки

$$F(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau t} f(t)dt,$$

то

$$\int_0^\infty F(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_0^\infty \varphi(\tau)d\tau \left(\int_0^\infty e^{-\tau t} f(t)dt \right).$$

Змінивши порядок інтегрування, отримаємо

$$\int_0^\infty F(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_0^\infty f(t)dt \int_0^\infty \varphi(\tau)e^{-\tau t} d\tau.$$

Оскільки

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)e^{-\tau t} d\tau = \Phi(t)$$

то

$$\int_0^\infty F(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\Phi(\tau)d\tau. \tag{2.11}$$

Розглянемо частинний випадок. Якщо

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & a < t < b, \\ 0, \ a < t, & t > b, \end{cases}$$

або

$$\varphi(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b),$$

то

$$\Phi(p) = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}.$$

Тоді з рівності (1.34) маємо

$$\int_a^b F(\tau)d\tau = \int_0^\infty \frac{e^{-a\tau} - e^{-b\tau}}{\tau} f(\tau)d\tau. \tag{2.12}$$

Нехай

$$\int_a^b F(\tau;\ \lambda)d\tau = \Phi(\lambda).$$

Замінюючи $\lambda = q(p)$, маємо $\int_a^b F\big(\tau; q(p)\big)d\tau = \Phi\big(q(p)\big)$.

Нехай $F\big(\tau; q(p)\big)d\tau \to f(\tau, t), \quad \Phi\big(q(p)\big) \to \varphi(t)$. Тоді

$$\int_a^\infty e^{-pt}\left(\int_a^b f(\tau, t)d\tau\right)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,\varphi(t)dt.$$

Звідси

$$\int_a^b f(\tau, t)d\tau = \varphi(t). [40]$$

Приклад.

$$\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau.$$

За формулою (1.3), враховуючи, що $\sin t \to \frac{1}{1+p^2}$ [16], отримаємо

$$\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau = \int_0^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \operatorname{arctg} p|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Рівняння виду

$$a \cdot f(t) = \varphi(t) + \lambda\int_\alpha^\beta k(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

де $f(t)$ – невідома функція, $\varphi(t)$ і $k(t, \tau)$ задані функції, a, λ, α, β – константи, називається *лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма* першого роду, якщо $a = 0$ або другого роду, якщо $a \neq 0$ [3].

Функція $k(t, \tau)$, яка визначається на площині (t, τ) в квадраті $t > \alpha,\ \ t < \beta$ називається ядром інтегрального рівняння. Якщо $\varphi(t) = 0$, то рівняння називаються однорідним.

Рівняння

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_{\alpha}^{t} k(t,\tau) f(\tau) d\tau \qquad (2.13)$$

називається *лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра* першого роду, якщо $a = 0$ або другого роду, якщо $a \neq 0$ [5].

Якщо ядро рівняння $k(t,\tau)$ залежить тільки від різниці $t - \tau$, тобто $k(t,\tau) = k(t - \tau)$, то

$$\int_{0}^{t} k(t-\tau) f(\tau) d\tau = k(t) * f(t).$$

В цьому випадку рівняння Вольтерра

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_{0}^{t} k(t-\tau) f(\tau) d\tau \qquad (2.14)$$

є рівнянням типу згортки. Його розв'язок можна знайти операційним численням за допомогою теореми множення.

Інтегральні рівняння 2-го роду. Якщо інтеграл

$$\int_{0}^{\infty} e^{-pt} k(t) * f(t) dt$$

абсолютно збіжний [8], то перетворення Лапласа переводить згортку $k(t) * f(t)$ за теоремою множення в добуток зображень, тобто $k(t) * f(t) \to K(p)F(p)$. Звідси випливає, рівняння

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_{0}^{t} k(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

після $(f(t) \to F(p),\ \ \varphi(t) \to \Phi(p),\ \ k(t) \to K(p))$ перейде в операторне рівняння

$$a\,F(p) = \Phi(p) + \lambda\, k(p)\, F(p).$$

Звідси

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{\mathrm{a} - \lambda \cdot \mathrm{k(p)}},$$

або

$$F(p) = \frac{1}{a}\Phi(p) + \frac{\lambda}{a}\cdot\frac{\mathrm{K}\,(p)}{\mathrm{a} - \lambda\cdot \mathrm{k(p)}}\Phi(p)\,.$$

Позначимо

$$\frac{\mathrm{K}\,(p)}{\mathrm{a} - \lambda\cdot \mathrm{k(p)}} = X(p)$$

І нехай $X(p) \to x(t)$, тоді

$$F(p) = \frac{1}{a}\Phi(p) + \frac{\lambda}{a}\cdot X(p)\,\Phi(p)\,.$$

переходить в рівняння

$$a\,f(t)\; = \varphi(t) + \lambda\, x(t) * \varphi(\mathrm{t}).$$

Якщо

$$k(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

то

$$k(t) \to K(p) = a_0\frac{1}{p} + a_1\frac{1}{p^2} + \cdots + a_n\frac{n!}{p^{n+1}}\,.$$

Тоді

$$X(p) = \frac{\mathrm{K}\,(p)}{\mathrm{a} - \lambda\cdot \mathrm{k(p)}} = \frac{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + n!\,a_n}{ap^{n-1} - \lambda a_0 p^n - \lambda a_1 p^{n-1} - \cdots - \lambda n!\,a_n}$$

є правильною дробово-раціональною функцією та її оригінал $x(t)$ можна знайти за теоремою розкладання [6].

Звідси випливає, що розв'язання $F(p)$ операторного рівняння, який відповідає інтегральному рівнянню 2-го роду типу згортки, завжди можна перетворити в простір оригіналів.

Інтегральні рівняння 1-го роду. Інтегральному рівнянню першого роду

$$\varphi(t) = \lambda\int_0^{\mathrm{t}} k(t-\tau)f(\tau)d\mathrm{\tau} \tag{2.15}$$

відповідає операторне рівняння

$$\Phi(p) = \lambda\,K(p)\,F(p)\,,$$

розв'язання якого

$$F(p) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{K(p)} \Phi(p) \qquad (2.16)$$

не можна перевести за допомогою теореми множення в простір оригіналів, так як функція $\frac{1}{K(p)}$ не є зображенням ($\lim_{p\to\infty} K(p) = 0$ – необхідна умова існування зображення [12]). Але в деяких випадках роз’вязання рівняння (2.16) можна знайти. Якщо функція $k(t)$ і $\varphi(t)$ диференційовані і $k(0) \neq 0$, то, продиференціювавши (2.16) отримаємо інтегральне рівняння 2-го роду:

$$\varphi'(t) = \lambda \int_0^t k'(t-\tau) f(\tau) d\tau + k(0) f(t),$$

розв’язання якого існує.

Якщо $k(0) = k'(0) = \cdots = k^{(n-1)}(0) = 0$, а $k^{(n)}(0) \neq 0$, то після $n+1$ - кратного диференціювання рівняння (2.16) отримаємо інтегральне рівняння 2-го роду:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \lambda \int_0^t k^{(n+1)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + k^{(n)}(0) f(t).$$

Розглянемо задачу, розв’язок якої знаходиться за допомогою інтегральних рівнянь, це так звана задача Абеля.

Задача Абеля – це перша задача, яка привела до розв’язання інтегральних рівнянь. Вона полягає у наступному: матеріальна точка, на яку діє сила тяжіння, рухається у вертикальній площині (ξ, η) по деякій кривій. Необхідно визначити цю криву так, щоб матеріальна точка почала свій рух без початкової швидкості в точці кривої з ординатою x, досягла осі $O\xi$ за час $t = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – задана функція [11].

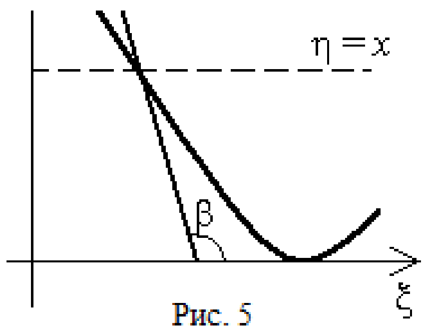

Рис. 5

Розв’язання.

Абсолютна величина швидкості точки, що рухається, обчислюється за формулою $v=\sqrt{2g(x-\eta)}$. Нехай $\beta=\beta(\eta)$ – кут нахилу дотичної до осі $O\xi$ (рис. 2.1). Тоді будемо мати $\dfrac{d\eta}{dt}=-\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta$.

Звідси $dt=-\dfrac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}$. Проінтегруємо останній вираз від 0 до x і покладемо $\dfrac{1}{\sin\beta}=\varphi(\eta)$. Одержимо

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}d\eta=-\sqrt{2g}f_1(x). \qquad (2.17)$$

Нехай $f(x)=-\sqrt{2g}f_1(x)$. Тоді (2.17) запишеться у вигляді

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}d\eta=f(x), \qquad (2.18)$$

де $\varphi(\eta)$ – невідома, а $f(x)$ – відома функції.

Рівняння виду (2.18) називають інтегральним рівнянням Абеля. Воно є частинним випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду [5].

З (2.18) одержимо $\varphi(\eta)$ і складемо рівняння шуканої кривої. Дійсно $\varphi(\eta)=\dfrac{1}{\sin\beta}$, тоді $\eta=\Phi(\beta)$. Далі

$$d\xi=\frac{d\eta}{\mathrm{tg}\beta}=\frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\mathrm{tg}\beta},\ \ \xi=\int\frac{\Phi'(\beta)}{\mathrm{tg}\beta}d\beta=\Phi_1(\beta).$$

Таким чином, крива визначається параметричними рівняннями: $\xi = \Phi_1(\beta)$, $\eta = \Phi(\beta)$. Зокрема, коли $f(x) = C = \text{const}$, такою кривою є циклоїда [19].

Рівняння Абеля є одним з інтегральних рівнянь, до яких зводиться постановка конкретної задачі механіки чи фізики, не використовуючи диференціальні рівняння.

Рівняння

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{(x-t)^{\alpha}} dt = f(x), \tag{2.19}$$

де α – стала, $0 < \alpha < 1$, називається узагальненим рівнянням Абеля. При цьому вважають, що функція $f(x)$ має неперервну похідну на деякому відрізку $[0,a]$.

Приклади.

1. Розвязування інтегральних рівнянь Вольтера:

а) $\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau = 1 - \cos t.$

$$Y(p)\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} = p + \frac{1}{p} - p = \frac{1}{p}$$

$$y(t) = 1$$

б) $\int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau = y(t) - e^t.$

$$Y(p)\cdot\frac{1}{p-1} = Y(p) - \frac{1}{p-1}$$

$$Y(p) = Y(p)(p-1) - 1$$

$$1 = Y(p)(p-2)$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-2)}$$

$$y(p) = e^{2t}.$$

2. Розв’язати інтегральне рівняння 2-го роду типу згортки:

$$x(t) = \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2\, x(\tau)d\tau.$$

Маємо $x \to X, \quad \sin t \to \frac{1}{p^2+p}$,

$$\int_0^t (t-\tau)^2\, x(\tau)d\tau = t^2 * x \to \frac{2}{p^3}X(p).$$

Операторне рівняння має вигляд

$$X = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^3}X$$

звідси

$$X(p) = \frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}.$$

Розкладемо X на звичайні дроби:

$$\frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)} =$$

$$= \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1} + \frac{Dp+E}{p^2+p+1},$$

або

$$p^3 = A(p^2+1)(p^2+p+1) +$$

$$+(Bp+C)(p^3-1) + (Dp+E)(p-1)(p^2+1).$$

Знаходимо

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = -\frac{2}{3}, \quad E = -\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$X = \frac{1}{6(p-1)} + \frac{p+1}{2(p^2+1)} - \frac{2p+1}{3(p^2+p+1)}.$$

Звідси,

$$x(t) = \frac{1}{6}(e^t + 3\cos t + 3\sin t - 4e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

3. Розв’язати інтегральне рівняння 1-го роду типу згортки

$$1 - \cos t = \int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, f(\tau)d\tau.$$

Оскільки ядро $k(t) = \operatorname{sh}(t)$ є диференційованою функцією $k'(0) \neq 0$, то дане рівняння має розв’язок.

Перейшовши до зображень, отримаємо

$$1-\cos t \to \frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}$$

і

$$\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, f(\tau)d\tau = \operatorname{sh} t * f(t) \to \frac{1}{p^2-1}F(p).$$

Операторне рівняння має вид

$$\frac{1}{p(p^2+1)}=\frac{1}{p^2-1}F(p)$$

Звідси

$$F(p)=\frac{p^2-1}{p(p^2+1)}=\frac{2p}{p^2+1}-\frac{1}{p}\,.$$

Перейшовши до оригіналу, отримаємо розв’язок:

$$f(t)=2\cos t-1\,.$$

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні положення.

Операційне числення – це символічний метод, який дозволяє значно спрощувати розв'язання багатьох задач, зокрема, задач відшукання розв'язків диференціальних рівнянь різного типу. В деяких випадках безпосередньо класичними методами математичного аналізу не вдається знайти точний розв'язок диференціального рівняння, проте його можна знайти методом операційного числення. Цінність операційного числення полягає у тому, що методи операційного числення дозволяють замінити операцію диференціювання на операцію множення; замінити операцію інтегрування на операцію ділення. Завдяки цьому лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами можна перевести у алгебраїчні рівняння. В основі операційного числення лежать перетворення, серед яких основними є перетворення Лапласа, перетворення Лапласа-Карсона, перетворення КарсонаХевісайда та ін.

При вивченні операційного числення досить важливо розуміти його основну його ідею. Суть даного математичного методу полягає в тому, що функції дійсної змінної за певним правилом ставиться у відповідність функція комплексної змінної так, що операції диференціювання та інтегрування над функцією дійсної змінної $f(t)$ зводяться до алгебраїчних операцій над функцію комплексної змінної. Це дозволяє диференціальним рівнянням відносно функції $f(t)$ ставити у відповідність алгебраїчні рівняння відносно функції комплексної змінної, що спрощує розв'язання даних рівнянь.

Що стосується застосування операційного числення до розв'язування інтегральних рівнянь, то можна відмітити наступне. Інтегральному рівнянню першого роду

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t k(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

відповідає операторне рівняння $\Phi(p) = \lambda\, K(p)\, F(p)$, розв'язок якого $F(p) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{K(p)} \Phi(p)$ не можна перевести за допомогою теореми множення в простір оригіналів, так як функція $\frac{1}{K(p)}$ не є зображенням ($\lim_{p\to\infty} K(p) = 0$ – необхідна умова існування зображення). Але в деяких випадках розв'язання рівняння можна знайти. Якщо функції $k(t)$ і $\varphi(t)$ диференційовані і $k(0) \neq 0$, то, продиференціювавши рівняння, отримаємо інтегральне рівняння 2-го роду:

$$\varphi'(t) = \lambda \int_0^t k'(t-\tau) f(\tau) d\tau + k(0) f(t),$$

розв'зяок якого існує.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. Ван дер Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. – М.: Изд-во иностр. лит.,1952. – 507 с.
3. Васильева А. Б., Тихонов Н. А., Интегральные уравнения . – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 156 с.
4. Деч Густав, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука,1965. – 287 с.
5. Диткин В.А., Прудников А.П., Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 465 с.
6. Иосида К. Операционное исчисление: Теория гиперфункций / перевод с англ. В.И. Машанова, Я.В. Радыно. – Минск : Университетское, 1989. – 167 с.
7. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, Харьков: ДНТВУ, 1948. – 226 с.
8. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1981. – 197 с.
9. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1964. – 103 с.
10. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Интегральные уравнения, некорректные задачи и улучшение сходимости. – Минск: Наука и техника, 1984. – 235 с.
11. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1981. – 582 с.
12. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 686 с.
14. Ленюк М.П., Трасковецкая Л.М. Конечные интегральные преобразования с применением к задачам математической физики. – К.: Ин-т математики АН Украины, 1992. – 64 с.
15. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
16. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. – Гостехиздат, 1950. – 145 с.
17. Макаров И.П. Теория функций действительного переменного. – М.: Высшая школа, 1962. – 196 с.
18. Мартыненко В.С. Операционное исчисление: учеб. пособие для техн. вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – К.: Высшая школа, 1990. – 358 с.
19. Микусинский Я. Операторное исчисление.-М., ИЛ, 1956 . – 127с.
20. Мюнтц Г., Интегральные уравнения. – М.: ГТТИ, 1934. – 137 с.
21. Смышляева Л.Г. Преобразования Лапласа функций многих переменных. Изд-во ЛГУ, 1981. – 204 с.
22. Трикоми Ф., Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 299 с.
23. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: Высшая школа,1968. – 249 с.
24. Штокало И.З. Операционное исчисление. – К.: Наук. думка, 1972. – 303 с.