МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ДОСКОНАЛІ ЧИСЛА

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка 421 групи
Спеціальності 014 середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми
"Середня освіта (Математика)" першого
(бакалаврського) рівня вищої освіти
Гошкович Світлана Володимирівна

Керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Савченко О. Г.

Рецензент: докторка педагогічних наук,
кандидатка фізико-математичних наук,
професорка Літвінова М. Б.

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Людство в практичному житті стикалися з натуральними числами, але їх детальне вивчення почалося значно пізніше. І чим більше дослідники розбудовували теорію чисел, тим більше проблем математичного характеру поставало перед ними. Прості числа знайшли найширше застосування в багатьох додатках, включаючи сучасні методи і алгоритми шифрування інформації.

Але досі люди шукають і не можуть поки знайти відповіді на багато, нібито, простих питань. І одне з них – це структура непарного досконалого числа.

Досконалі числа не вивчені в повній мірі. Це одна з цікавих і до кінця не вивчених сторінок історії математики.

Теорія чисел – це один з найстаріших розділів, її розвиток має велике значення для багатьох розділів математики. Методи, які були використані при розв’язанні, нібито, суто технічних задач з теорії чисел у подальшому відіграли велику роль в розвитку і вдосконаленні науки в цілому. Прикладом цього можуть бути результати отримані при спробах довести велику теорему Ферма, саме це призвело до відкриття іррегулярних чисел Кумманом.

Мета дослідження: розглянути поняття та історію досконалого числа та дослідити його властивості, визначити структуру парних досконалих чисел та розширити уявлення про багатогранність чисел.

Завдання дослідження:

- дослідити та проаналізувати літературу з теми дослідження;
- розглянути історичні аспекти виникнення досконалих чисел;
- визначити та систематизувати властивості досконалих чисел.

Об’єктом дослідження є натуральні числа.

Предметом дослідження є парні досконалі числа та їх властивості.

Зібраний матеріал показує, що в математиці не була винайдена проста формула для пошуку простого числа по порядку, тому побудова списку простих чисел здійснюється ітераціями з використанням всіляких правил перевірки простоти.

Методами шкільної математики у роботі демонструється можливість повного дослідження структури парного досконалого числа.

Також у роботі розглядаються числа Мерсена, які тісно пов’язані з досконалими числами.

Для розкриття теми даного дослідження були використані такі **методи:** вивчення, аналіз та систематизація науково-методичної літератури.

Опрацьовуючи тему дослідження, стає зрозуміло, що числа, як раніше, так і зараз мають багато секретів. Перед математиками постає багато цікавих проблем, пов'язаних з простими і досконалими числами, числами Мерсена та ін.

Практичне значення дослідження. Знайомство здобувачів середньої освіти з пошуком досконалих чисел та чисел Мерсена, яких на сьогодні відомо 51, буде сприяти розширенню їх світогляду. Крім того, здобутки останніх часів з пошуку чисел Мерсена ще раз підкреслюють взаємозв’язок «чистої» математики та сучасних інформаційних технологій.

Робота включає в собі два розділи. В першому розділі розкриваються теоретичні основи проблеми дослідження: наводиться аналіз психолого-педагогічної і методичної шкільної літератури з проблеми дослідження, розглядається історія виникнення досконалих чисел та їх властивості. В другому розділі розглядаємо числа Марена Мерсена, які є основою знаходження парних досконалих чисел, числа Ферма, теорему Евкліда про досконалі числа та надаємо інформацію про непарні досконалі числа.

РОЗДІЛ 1

Теоретичні основи проблеми дослідження

1.1. Аналіз психолого-педагогічної та методичної шкільної літератури з проблеми дослідження.

Аналіз психолого-педагогічної літератури, методичних досліджень показує, що дослідження теми досконалих чисел є актуальними і на даному етапі вивчення математики. Найдавніші за походженням числа - натуральні. Ще в початковій школі ми знайомилися з парними і непарними числами, на уроках математики в 6 класі з'являються прості числа. Виявляється, серед натуральних чисел є ще і досконалі числа.

Вперше з темою «Основи теорії подільності» учні знайомляться у 8 класі. Вона є однією з найважчих для вивчення. Для розв’язування задач з даної теми, в учнів має бути сформована потреба використання відповідних знань до тієї чи іншої задачі. Отже, це та тема, де найбільше проявляється в учнів здатність до евристичного мислення, а отже, до вивчення математики на поглибленому рівні. Учні знайомляться з ключовими поняттями теорії чисел, розширюють знання отримані в попередніх класах з теорії подільності, вчаться на практиці застосовувати засвоєну раніше теорію знайомляться з дослідженнями в галузі теорії чисел.

Для зацікавлення учнів до вивчення матеріалу доцільно використовувати відомості щодо історії дослідження досконалих чисел, чисел близнюків, простих чисел та ін. Розглядання таблиць простих чисел, дозволяє встановити між предметні зв’язки, і може бути додатковим завданням для опрацювання на уроках інформатики.

Не одне тисячоліття математиків цікавило питання існування досконалих чисел. Першим міркував про парне досконале число Піфагор. Евклід у своїх «Началах» дав побудову теорії подільності. Він вперше запропонував теорему про однозначність розкладу натурального числа на прості множники, яка відіграє основну роль у теорії подільності цілих чисел. Евкліду були відомі чотири досконалі числа: 6,28,496,8128, а також він вперше показав і довів, який вид мають парні досконалі числа.

1.2 Досконалі числа в доевклідовий період

Нумерологія (або гематрія, як ще іноді її називають) була поширеним захопленням у стародавніх греків. Єдиним поясненням цьому є те, що числа в Стародавній Греції зображувалися буквами грецького алфавіту, і тому кожному написаному слову, кожному імені відповідало деяке число. Люди могли порівнювати властивості чисел, відповідних їм іменам.

Дільники або аліквотні частини чисел відігравали важливу роль в нумерології, в цьому сенсі ідеальних, або, як їх називають, досконалими числами були такі числа, які складалися зі своїх аліквотних частин, тобто дорівнювали сумі своїх дільників (Оре О.)[18].

Існує велика кількість визначень поняття «число». Про числа перший почав міркувати Піфагор, і йому ж належить вислів «все прекрасне завдяки числу». За його вченням число 2 означало гармонію, 5 - колір, 6 - холод, 7 – розум і здоров'я, 8 - любов і дружбу. А число 10 називали «Священною четвіркою», так як $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Воно вважалося священним числом і уособлювало весь Всесвіт (Голдобин Н.О.)[4].

Перше наукове визначення числа дав Евклід у своїх «Началах»: «одиниця є те, відповідно, з чим кожна з існуючих речей називається однією. Число є, складене з одиниць»[2].

Античні математики вважали дуже важливим розглядати разом з кожним числом всі його дільники, відмінні від самого цього числа. Всі дільники, на які дане число ділиться, можна отримати з розкладання числа на прості множник. Такі дільники називають власними. Числа, що мають багато власних дільників називають надлишковими, а ті, що мають мало – недостатніми. При цьому в якості міри використовувалася не кількість, а сума власних дільників, яку порівнювали з самим числом. Так, наприклад, для 10 сума дільників $1 + 2 + 5 = 8 < 10$, так що дільників «недостатньо». Для 12 – $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$, тобто дільників «надлишок». Тому 10 – «недостатнє», а 12 – «надлишкове» число.

Зустрічаються й інші випадки, коли сума дільників дорівнює самому числу. Такі числа стародавні греки вважали досконалими (Депман И.Я.)[5].

Вивчення «досконалих чисел» бере свій початок в передісторії теорії чисел, коли числам приписували якісь магічні властивості. Число називається «досконалим» , якщо воно дорівнює сумі своїх власних дільників. Наприклад, число 6 досконале, оскільки $6 = 1 + 2 + 3$ (Эдвардс Г.М.)[1]. Помітимо, що жодне просте число не буде досконалим. Оскільки дільники простого числа p – це 1 і p, і $1 + p < 2p$, тому що $p > 1$. Сучасному математику це поняття вже не здається ні занадто захоплюючим, ні занадто цікавим.

Нікомах Гераський(I-II століття н. е.), відомий грецький філософ і математик, писав: «Досконалі числа красиві. Красиві речі рідкісні і нечисленні, потворні ж зустрічаються в достатку. Надлишковими і недостатніми бувають всі числа, у той час як досконалих чисел небагато» (Глейзер И.Г.) [7].

Скільки ж їх? Ніхто цього не знав. Першим досконалим числом, про яке знали математики стародавньої Греції, було число 6. Особливими містичними властивостями володіло число 6 у вченні піфагорійців, до яких належав і Нікомах. Багато уваги приділяє цьому числу великий Платон (V–IV століття до н. е.) в своїх «Діалогах». Недарма і в біблійних переказах стверджується, що світ створений за 6 днів, оскільки більш досконалого числа серед досконалих чисел, ніж 6, немає, тому що воно перше серед них.

Наступним досконалим числом, відомим стародавнім грекам, було число 28. В Римі в 1917 році при підземних роботах було відкрито дивну споруду: навколо великого залу, що знаходився в центрі, були розташовані 28 келій. Це була споруда неопіфагорійської академії наук. В ній було 28 членів. До останнього часу стільки ж членів, зазвичай просто за традицією, причини якої давно забуті, передбачалося мати у багатьох вчених спільнотах (Голдобин Н.О.) [4].

Дискусія про досконалі числа велася в широкому масштабі. За часів Ферма інтерес до досконалих чисел далеко не згас, і в кінці 1630-х років між Ферма, Мерсенном, Декартом, Френіклем та іншими велося обширне листування з приводу досконалих чисел і споріднених питань (Эдвардс Г.М.)[1].

До Евкліда були відомі тільки ці два числа, а ніхто не знав, чи існують ще досконалі числа, а також, скільки їх взагалі можне бути. Засновник математики багато займався вивченням властивостей чисел, звичайно, його не могли не цікавити досконалі числа. Евклід довів, що будь-яке число, яке може бути представлене у вигляді множення множників 2^{p-1} і $2^p - 1$, де $2^p - 1$ – просте число, є досконалим числом, - ця теорема тепер носить його ім'я. Якщо в формулу Евкліда $2^{p-1}(2^p - 1)$ підставити $p = 2$, то отримаємо $2^{2-1}(2^2 - 1)) = 2^1 \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$ – перше досконале число, тоді як якщо $p = 3$, то $2^{3-1}(2^3 - 1) = 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$ - друге.

Завдяки своїй формулі Евклід зміг знайти ще два досконалих числа: третє при $p = 5$ і четверте при $p = 7$. Ось ці числа: $2^{5-1}(2^5 - 1) = 2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$ і $2^{7-1}(7 - 1) = 2^6(2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128$.

Також, за межі шкільного курсу математики не виходить доведення теореми Ейлера про те, що будь-яке парне досконале число може бути представлене у вигляді $2^{p-1}(2^p - 1)$, де p і $2^p - 1$ – прості числа.

Майже півтори тисячі років люди знали тільки чотири досконалих числа, не знаючи, чи є такі, і, взагалі, чи можливі досконалі числа, що не задовільняють формулі Евкліда. Нерозв'язна загадка досконалих чисел, безсилля розуму перед їх таємницею, їх незбагненність досконалі привели до визнання божественності цих дивовижних чисел (Депман И.Я.)[6].

Один з найбільш видатних вчених середньовіччя, друг і вчитель Карла Великого, абат Алкуїн (735-804), один з найвизначніших діячів просвітництва, організатор шкіл і автор підручників з арифметики, був твердо впевнений, що людський рід тільки тому недосконалий, і в ньому панує зло, горе і насилля, що він утворився від восьми людей, що врятувалися в ноєвому ковчезі, а 8 – число не досконале. До потопу рід людський був більш досконалий - він походив від одного Адама, а одиниця може бути віднесена до досконалих чисел: вона дорівнює самій собі, своєму єдиному дільнику. Алкуїн жив у VIII столітті. Але навіть у XII столітті церква вчила, що для спасіння душі цілком достатньо вивчати досконалі числа, і тому, хто знайде нове божественне досконале число, уготовано вічне блаженство. Але і жага цієї нагороди не змогла допомогти математикам середньовіччя.

Наступне, п'яте досконале число виявив німецький математик Регіомонтан (1436-1476) лише в XV столітті. Виявилося, що і п'яте досконале число також підпорядковується умові Евкліда. Не дивно, що його так довго не могли знайти. Набагато більше вражає те, що у п'ятнадцятому столітті взагалі змогли його виявити. П'яте досконале число дорівнює 33 550 336, йому відповідає значення $p = 13$ у формулі Евкліда (Депман И.Я.)[6].

Італієць П'єтро Антоніо Катальді (1548-1626), колишній професор математики у Флоренції і Болоньї, теж для порятунку своєї душі займався пошуками досконалих чисел. В його записках були вказані значення шостого і сьомого досконалих чисел: 8 589 869 056 – шосте число, 137 438 691 328 – сьоме число.

Назавжди залишилася в історії загадкова таємниця, як він зумів знайти їх. Досі запропоновано лише одне пояснення цієї загадки - воно було дано ще його сучасниками: допомога божественного провидіння, підказав своєму обранцеві вірні значення двох досконалих чисел (Глейзер И.Г.)[7].

У 1644р. М. Мерсен знайшов восьме досконале число ($p = 31$). Це число, тобто $2^{30}(2^{31} - 1)$, виражається квінтиліонами. Лише біля 250 років по тому російський математик-самоучка Іван Михайлович Первушин(1827-1900) довів, що число $2^{61} - 1$ теж просте, і таким чином було знайдене дев’яте досконале число. У 1911 – 1914 рр. були знайдені ще 3 досконалих числа (для $p = 89;\ 107; 127$). Ніякі інші досконалі числа, окрім вище зазначених, не були відомі до середини минулого століття. Починаючи з 1952 року великі прості числа виду 2^p – 1 вчені знаходили за допомогою електронних обчислювальних машин. Так стали відомі ще 6 досконалих чисел (для $p = 521; 607; 1279; 2203; 2281$ і 3217). Вісімнадцяте досконале число $2^{3216}(2^{3217} - 1)$ має 2000 цифр (Глейзер И.Г.)[7].

Надалі пошук загальмувався аж до середини XX століття, коли з появою комп'ютерів стали можливими обчислення, які перевершували людські можливості.

На Січень 2018 року відомо 50 парних досконалих чисел, пошуком нових чисел займається проект розподілених розрахунків GIMPS (Голдобин Н.О.) [4].

1.3 Властивості досконалих чисел

Історичні відомості про парні досконалі числа подаються у підручнику алгебри для 8 класу з поглибленим рівнем вивчення математики. Тому пропоную деякі з властивостей довести учням самостійно.

Формула Евкліда дозволяє легко доводити численні, іноді досить несподівані, але красиві властивості досконалих чисел. Наприклад, всі досконалі числа трикутні. Це означає, що, взявши досконале число зерен, ми завжди зможемо розкласти їх у вигляді рівностороннього трикутника так само, як 15 більярдних куль. Інакше кажучи, будь-яке досконале число збігається з однією з часткових сум ряду $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$. На уроці математики пропонуємо учням самостійно перевірити дану властивість.

Не менш легко доводиться другу цікаву властивість досконалих чисел: всі досконалі числа, крім 6, можна представити у вигляді частинних сум ряду кубів послідовних непарних чисел $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots$ Сума величин, зворотних всім дільникам досконалого числа, включаючи його самого, завжди дорівнює 2. Наприклад, взявши дільники досконалого числа 6, отримаємо $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$. На факультативних заняттях пропонується учням довести це твердження з іншим досконалим числом самостійно.

Відрахування будь-якого досконалого числа, крім 6, по модулю 9 (або, що те ж саме, залишок від ділення на 9) рівний 1. Для доведення цього твердження необхідно показати, що при непарних n числа $2^{n-1}\,(2^n - 1)$ порівнянні по модулю 9 (тобто при діленні на 9 дають однаковий залишок) з 1, а оскільки всі прості числа, крім 2, непарні, досконалі числа також можна порівняти з 1 по модулю 9. Єдине парне просте число 2 породжує єдине досконале число 6, що дає при діленні на 9 залишок, відмінний від 1.

Оскільки досконалі числа тісно пов'язані зі степенями 2, заздалегідь зрозуміло, що в двійковому записі досконалих чисел повинна спостерігатися якась проста закономірність. І вона дійсно спостерігається, дозволяючи за формулою Евкліда миттєво виписувати двійкове представлення будь-якого досконалого числа. Всі парні досконалі числа в двійковому записі містять спочатку p одиниць, за якими слід $p-1$ нулів (наслідок із загального виду). Наприклад : $6_{10} = 110_2$, $28_{10} = 11100_2$, $33\,550\,336_{10} = 1111111111111000000000000_2$ [20].

Всі парні досконалі числа, крім 6 і 496, закінчуються в десятковому запису на 16, 28, 36, 56 або 76.

Всі парні досконалі числа є шестикутними. Тому що, можуть бути представлені у вигляді $n \cdot (2n-1)$, для деякого натурального числа n.

$$6 = 2 \cdot 3, n = 2;$$

$$28 = 4 \cdot 7, n = 4;$$

$$496 = 16 \cdot 31, n = 16;$$

$$8128 = 64 \cdot 127, n = 64.$$

У теорії досконалих чисел є два фундаментальних питання, відповіді на які досі невідомі. Чи існує непарне досконале число? Чи існує найбільше досконале число (Гарднер М.)[8]?

Цікаво помітити, що при накресленні квадрата можна провести в ньому діагоналі. Тоді нескладно буде помітити, що його вершини з'єднані 6 відрізками.

Пропоную на уроці геометрії виконати ті ж самі дії з кубом, і порахувати загальну кількість ребер і діагоналей.

Восьмикутник теж має причетність до досконалого числа 28 (20 діагоналей плюс 8 сторін).

Також можна перевірити, чи має відношення семигранна піраміда до досконалого числа. Треба порахувати кількість ребер, сторін та діагоналей (в сумі маємо отримати 28).

Непарних досконалих чисел до цих пір не виявлено, хоча, на сьогоднішній день перевірено всі числа до 10^{300}. Доведено, що непарне досконале число, якщо воно існує, має не менше дев'яти різних простих дільників і не менше 75 простих дільників з урахуванням кратності. Однак не доведено і те, що непарних досконалих чисел не існує. Пошуком непарних досконалих чисел займається проект розподілених розрахунків OddPerfect.org. Розподілені розрахунки – спосіб вирішення громіздких розрахункових задач з використанням декількох комп'ютерів, частіше з'єднаних в паралельну розрахункову систему (Голдобин Н.О.) [4].

РОЗДІЛ 2

Числа Мерсена, як шлях до знаходження досконалих чисел

2.1 Числа Мерсенна

Один з кращих способів генерування дуже великих простих чисел використовує експоненціальні формули. Найстаріша експоненціальна формула для простих чисел названа на ім'я Мерсенна. Нехай n - натуральне число. Згадаємо, що n -им числом Мерсенна називається $M(n) = 2^n - 1$.

Ми вже бачили, що число $M(n)$ складене, якщо n є таким. для $n = r \cdot s$ маємо

$2^n - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)(2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} + \cdots + 2^r + 1)$.

Отже, $M(r)$ - дільник числа $M(n) = M(rs)$. Звичайно, М(s) теж ділить $M(n)$.

Таким чином, при пошуку простих чисел Мерсенна ми можемо обмежитися дослідженням $M(p)$ з простими p. Однак твердження про простоту всіх таких $M(p)$ не вірно. В цьому параграфі описується метод розкладання на множники чисел Мерсенна з простим, але не занадто великим показниками. Головну рушійну пружину методу дає загальна формула дільників числа $M(p)$, відкрита Ферма. Для доведення цієї формули нам буде потрібно ще один результат з теорії груп.

Ключова Лема. Нехай G-кінцева група з операцією * і $a \in G$. натуральне число t задовольняє умові $a^t = $ е тоді і тільки тоді, коли t ділиться на порядок елемента a.

Позначимо через s порядок елемента a. Подільність t на s означає рівність: $t = rs$ при деякому натуральному r. В цьому випадку

$$a^t = (2^s)^r = e.$$

Для доведення зворотного твердження припустимо, що $a^t = e$. Оскільки порядок елемента а є найменшим натуральним числом, при $a^s = e$, то $s \leq t$. Розділимо t на s із залишком:

$$t = sq + r, \text{ де } 0 \leq r < s.$$

Звідси

$$e = a^t = (a^s)^q * a^r = a^r$$

(за умовою, $a^s = e$). Але через нерівність $r < s$ і вибору s останнє співвідношення можливо, тільки якщо $r = 0$.

Повернемося до чисел Мерсенна. Припустимо, що q - простий дільник числа $M(p) = 2^n - 1$, відповідного простому р $\neq 2$. Тоді $2 \equiv 1 \ (mod\ q)$.

Це порівняння можна інтерпретувати як рівність в групі $U(q) = Z_p \backslash \{0\}$, а саме: $\overline{2}^p = \overline{1}$.

Що можна сказати про порядок елемента $\overline{2}$ групи $U(q)$? Із попереднього співвідношення і ключової леми випливає, що він ділить p. Але p - просте число, значить, порядком елемента $\overline{2}$ може бути тільки або 1, або p. Припущення про те, що $\overline{2}^1 = \overline{1}$ приводить до протиріччя: $\overline{1} = \overline{0}$ (зважаючи на рівність $\overline{2} = \overline{1} + \overline{1}$). Отже, елемент $\overline{2}$ має порядок p в групі $U(q)$. З іншого боку, за теоремою Ферма

$$\overline{2}^{q-1} = \overline{1} \text{ в } U(q).$$

І знову ключова лемма говорить нам, що порядок елемента $\overline{2}$ ділить $q - 1$. Оскільки, як ми вже встановили, він дорівнює p, ми робимо висновок, що $q - 1 = kp$ для якогось натурального k.

Отримане співвідношення можна посилити. Дійсно, число $M(p) = 2^n - 1$, непарне, так що всі його дільники теж непарні. Зокрема, різниця $q - 1$ парна. Далі, з непарності p випливає, що число k в розкладанні $q - 1$ на множники має бути парним. Отже, $q - 1 = 2rp$ для деякого натурального числа r. ми довели наступний результат.

Метод Ферма. Нехай р $\neq 2$ - просте число, q – простий дільник числа $M(p)$. Тоді знайдеться таке натуральне r, що $q = 1 + 2rp$.

Застосуємо сформульований метод до пошуку дільника числа $M(11) = 2047$. Згідно з формулою, будь-який простий дільник числа $M(11)$ має вигляд: $q = 1 + 22r$. Тепер нам належить вирахувати q при $r = 1, 2, ...$, і вибрати з отриманих результатів дільники числа $M(11)$.Нагадаємо, що якщо $q = 1 + 2rp$ - найменший простий дільник складеного числа $M(p)$, то

$$\sqrt{M(p)} \geq q = 1 + 2rp.$$

А так як у $\sqrt{M(p)} < 2^{\frac{p}{2}}$, з останньої нерівності випливає, що $r < \frac{2^{\frac{p}{2}}-1}{2p}$. При $p = 11$ це обмеження залишає нам тільки два можливих значення для r: 1 і 2. Підстановка $r = 1$ в формулу $q = 1 + 22r$ дає $q = 23$. Елементарне ділення показує, що 23 дійсно є множником числа $M(11) = 2047$. Інший його простий дільник - це $89 = 1 + 22 \cdot 4$. Цікаво відзначити, що якби ми шукали дільники числа $M(11)$ методом проб, то нам довелося б безуспішно ділити $M(11)$ на кожне просте число, менше 23. А таких чисел 8 (Коутинхо С.К.)[3].

2.2Теорема Евкліда

Евклід в «Початках» показав (Книга IX, пропозиція 36), що якщо $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ - просте число, то число $2^{n-1}(2^n - 1)$ досконале [2]. Наприклад, $3 = 1 + 2$ - просте, тому $2 \cdot 3 = 6$ - досконале; $7 = 1 + 2 + 4$ - просте, тому досконале $2^2 \cdot 7 = 28$. В сучасних позначеннях це твердження доводиться дуже просто. Дійсно, якщо $p = 2^n - 1$- просте, тобто дільниками числа $2^{n-1}p$ є $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}, p, 2p, 4p, \dots, 2^{n-2}p$ і їх сума рівна $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + p(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2}) = p + p(2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}p$, що і потрібно було довести. Умова Евкліда є достатньою для того, щоб число було досконалим.

Твердження, зворотне до твердження Евкліда, що будь-яке досконале парне число а має вигляд:

$$A = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

де $2^n - 1$ - просте число, було доведено Леонардом Ейлером у вісімнадцятому столітті, однак стаття з доказом цього факту була опублікована лише в 1849 році, через багато років після його смерті.
З доведення цієї теореми можна ознайомитися у підручнику Попова І.Н. «Досконалі і дружні числа»(Попов И.Н.)[19].

Декарт стверджував (а Ейлер довів це твердження), що досконале число має евклідів вид тоді і тільки тоді, коли воно парне. Питання про те, чи існують непарні досконалі числа, є знаменитою невирішеною проблемою.

Згідно з умовою Евкліда, для знаходження досконалих чисел достатньо знайти прості числа в послідовності 3, 5, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, 8191, … . Коротше кажучи, для яких значень n число $2^n - 1$ є простим. Вирішуючи це завдання, Ферма зробив важливе відкриття, відоме тепер як теорема Ферма.
По-перше, числа 15, 63, 255, 1023 ($1023 = 3 \cdot 341$), 4095, очевидно, не є простими. Взагалі, якщо n парне і більше 2, то $2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$- не просте. Непарні значення n -3, 5, 7 призводять до простих 7, 31, 127, але непарне значення n - 9 дає 511 і, як легко бачити, 511 ділиться на 7. Це призводить до припущення, що якщо n не просте, то число $2^n - 1$ також не є простим. Це легко перевірити, якщо помітити, що $2^{km} - 1 = (2^k - 1)(2^{k(m-1)} + 2^{k(m-2)} + \cdots + 2^k + 1)$.
Останнє зауваження зводить розглянуте питання до питання про те, для яких простих p число $2^p - 1$ є простим. Прості числа виду $2^p - 1$ називаються простими Мерсенна на честь постійного кореспондента Ферма преподобного Марена Мерсенна (1588 -1648) (Эдвардс Г.М.)[1].

Простим 2, 3, 5, 7 відповідають прості Мерсенна 3, 7, 31, 127 (і, отже, досконалі числа 6, 28, 496, 8128). Перевіримо, чи є простим $2^{11}-1$. На це питання легко відповісти знайшовши число - $2^{11}-1=2047$ в явному вигляді і намагаючись ділити його на всі прості, менші $\sqrt{2047}$, щоб дізнатися, чи ділить яке-небудь з них 2047 націло. Однак повчальніше підійти до цього завдання іншим способом, який можна використовувати потім для більших, ніж 11, показників p.

Подивимося, чи ділиться $2^{11}-1$ на 7. Уявімо собі, що степені числа 2 записані в один рядок, а під ними записані їх залишки при діленні на 7(табл.1.1):

Таблиця 2.1

Степені числа	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
залишки	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1

Закономірність в розташуванні залишків очевидна, і ясно, що залишок від ділення 2^n на 7 дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли n ділиться на 3, тобто 7 ділить 2^n-1 тоді і тільки тоді, коли 3 ділить n. Отже, 7 не ділить $2^{11}-1$. Той самий метод можна використовувати і для інших простих. Деякі результати наведені в табл. 1.2.

Ясно, що для кожного простого p залишки розташовані в циклічному порядку і існує таке ціле d, що p ділить 2^n-1 тоді і тільки тоді, коли d ділить n.

Таблиця 2.2

p=3	1	2	4	8	16	32	64	…							
	1	2	1	2	1	2	1	…							d=2
p=5	1	2	4	8	16	32	64	…							
	1	2	4	3	1	2	4	…							d=4
p=11	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	…		
	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1	2	…		d=10
p=13	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	…
	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1	2	… d=12

p=17	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	…	
	1	2	4	8	16	15	13	9	1	2	4	8	…	d=8

Як тільки цей факт помічений, його легко довести. Оскільки при діленні на p можливі тільки $p-1$ залишків, у послідовності залишків принаймні два залишки повинні збігатися; нехай, скажімо, числа 2^n і 2^{n+m} мають один і той же залишок. Тоді p ділить їх різниця$2^{n+m}-2^n=2^n(2^m-1)$, але p просте число і не ділить 2, отже, p ділить 2^m-1. Тому залишок від ділення числа 2^mна p дорівнює 1. Отже, число 1 входить в послідовність залишків. Нехай 2^d – найменша степінь числа 2, яка дає в залишку 1. Тоді 2^{md} при діленні на p також дає в залишку 1, оскільки - $2^{md}-1=(2^d-1)(2^{(m-1)d}+\cdots+2^d+1)$ ділиться на p. Обернено, єдинними степенями числа 2, які дають у залишку 1, є степені, відповідають кратним d. Дійсно, якщо 2^m дає у залишку 1 і якщо $m=qd+r$ $(q\geq 0; 0\leq r<d)$, тоді як $2^m=2^{qd}2^r$, так як 2^{qd} дають в залишку 1, і їх різниця $2^{qd}(2^r-1)$ ділиться на p. Так як 2^{qd} не ділиться на p, то це суперечить визначенню d(нагадаємо, що $0\leq r<d$), за винятком випадку, коли $r=0$ і m кратне d, що і потрібно довести. Крім того, раніше ми помітили, що 2^n і 2^{n+m} дають однакові залишки тільки тоді, коли 2^m дає в залишку 1, тобто залишки повторюються тільки через інтервали, довжина яких ділиться на d. Отже, існує в точності d різних залишків і вони циклічно повторюються, як і в розглянутих прикладах.

З цього зауваження про залишки випливає, що якщо ми хочемо визначити, чи ділиться $2^{11}-1$ на p, досить знайти відповідне значення d і з'ясувати, чи ділиться 11 на d. Оскільки 11 – просте число, остання умова рівносильна тому, що $d=11$. Для всіх розглянутих досі простих відповідь на це питання негативна.

Існує більш простий спосіб знаходження послідовності залишків, який не вимагає прямого обчислення 2^n і ділення його на p (для $n=1,2,3,\ldots$). Наприклад, оскільки відомо, що при діленні 128 на 13

отримуємо залишок 11, то залишок від ділення 256 на 13 легко знайти шляхом подвоєння 11 і віднімання 13 від отриманого результату: таким чином, наступний залишок рівний $22 - 13 = 9$. Далі вийде залишок $2 \cdot 9 - 13 = 5$, а за ним $2 \cdot 5$. Взагалі, кожен залишок дорівнює або подвоєному попередньому, або подвоєному попередньому мінус p і будь-який з них лежить в області значень залишків $1 \leq r \leq p - 1$. Дійсно, якщо $2^n - r$ ділиться на p, то $2^{n+1} - 2r$ ділиться на p, і звідси негайно випливає один і той самий залишок при діленні на p. Таким чином, для $p = 19$ залишками є 1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 1, 2, 4,… , тому $d = 18 \neq 11$; отже,
$2^{11} - 1$ не ділиться на 19. Для наступного простого $p = 23$ залишаються залишки 1, 2, 4, 8, 16, 9, 18, 13, 3, 6, 12, 1, 2, 4, … , звідси випливає, що $d = 11$ і 23 ділить $2^{11} - 1$. Таким чином, $2^{11} - 1$ не є простим, і дійсно, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

Аналогічним чином можна підійти до завдання, чи є простим число $2^{13} - 1$ (а тим самим чи є досконалим $2^{12}(2^{13} - 1)$). Ми повинні з'ясувати, чи існує просте p довжина якого $d = 13$. Всі розглянуті досі прості
можна виключити (оскільки відповідні їм d виявилися відмінними від 13), і нам залишається перевірити, чи дорівнює d числу 13 для $p = 29, 31, 37, \dots$ - до останнього простого, яке менше ніж $\sqrt{2^{13} - 1} = \sqrt{8191} < 91$. Ферма помітив одну нескладну закономірність у значеннях d, яка дозволяє негайно виключити з розгляду все, окрім дуже невеликого числа таких простих. Ось кілька перших значень d:

Таблиця 2.3

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
d	2	4	3	10	12	8	18	11	28	5	36

Звичайно, оскільки d-число різних залишків, не перевищує $p - 1$. Ферма помітив, що насправді d ділить $p - 1$. Звідси випливає, що d

може дорівнювати 13, тільки якщо 13 ділить $p-1$. Тому можливими значеннями р є $13+1$, $26 + 1$, $39+1$, $52+1$, … . З них тільки непарні числа 27, $27+26=53$, $53+26=79$, … можуть бути простими. Оскільки 27 не є простим, а $79+26$ більше ніж $\sqrt{2^{13}-1}$, то це означає, що потрібно випробувати тільки два простих, а саме: 53 і 79. Відповідні їм значення d, які визначаються використаним вище методом, рівні 52 і 39. Таким чином, якщо ми переконані в тому емпіричному факті, що d ділить $p-1$ то з цих коротких обчислень ми відразу отримуємо, що $2^{13}-1=8191$ - просте число.

Враховуючи, що d ділить m тоді і тільки тоді, коли 2^m-1 ділиться на p(див, вище), ми можемо твердження про те, що d ділить $p-1$ переформулювати у вигляді «p ділить $2^{p-1}-1$» або «p ділить 2^p-2». Ферма формулює свою теорему як в останньому вигляді, так і у вигляді $d \mid (p-1)$. Як завжди, Форма стверджує, що у нього є доказ цієї теореми, але опускає його. Можливо, його доказ був наступним.

Згідно з визначенням, існують в точності d можливих залишків 1, 2, 3, … , $p-1$, які можуть зустрітися при діленні степенів 2 на p. Якщо кожен з них зустрічається насправді, то $d=p-1$ і необхідний висновок $d \mid (p-1)$ справедливий. В іншому випадку серед них знайдеться хоча б одне число k, яке не потрапляє в число залишків. Серед можливих залишків 1, 2, 3, … , $(p-1)$ розглянемо ті, які виходять при діленні на p чисел виду $k, 2k, 4k, 8k, \ldots, 2^n k, \ldots$. Таких залишків d, і ні один з них не входить у початкову множену із d залишків. Перше на цих двох тверджень випливає з того, що $2^{n+m}k$ і $2^n k$ дають один і той самий залишок тоді і тільки тоді, коли $2^n k(2^m-1)$ ділиться на p, а це вірно в тому і тільки в тому випадку, коли m ділиться на d. Для доведення другого достатньо помітити, що якщо б 2^n і $2^m k$ давали один і той самий залишок, то тією ж властивістю володіли б 2^{n+1} і $2^{m+1}k$ (оскільки $2^n-2^m k$ ділиться на p тоді і тільки тоді, коли $2(2^n-2^m k)$ ділиться на

p), а також 2^{n+2} і $2^{m+2}k$, т. д.; звідси випливає (якщо обрати $m+j$, що діляться на d), що 2^{n+j} і k при діленні на p дають один і той самий залишок, а це суперечить вибору k. Якщо ці дві множини залишків вичерпують всі $p-1$ можливих залишків, то $p-1=2d$ і $d \mid (p-1)$, що і треба було довести. В іншому випадку знайдемо один можливий залишок k', який не належить ні тій ні іншій множині. Тоді, так само як і раніше, залишки чисел $k', 2k', 4k', \ldots, 2^n k', \ldots$ утворюють множину, що складається ще з d різних залишків, жоден з яких не належить жодному з двох вже знайдених множин. Продовживши цей процес, ми розіб'ємо множину всіх $p-1$ можливих залишків на підмножини, кожна яких складається з d елементів. Звідси, звичайно, випливає, що d обов'язково ділить $p-1$, що і потрібно було довести.

Наприклад, при $p = 31$ степені 2 дають залишки 1, 2, 4, 8, 16. У цей список не входить 3, і числа 3, 2 · 3, 4 · 3, 8 · 3,… дають залишки 3, 6, 12, 24, 17. Жоден з цих списків не включає 5; при діленні чисел 5, 2 · 5, 4 · 5, 8 · 5, ... в залишку отримується 5, 10, 20, 9, 18. Якщо продовжити таким чином, то залишки 1, 2, … , 30 згрупуються в шість множин з п’яти елементів: три перераховані вище і множини (7,14,28,25,19), (11,22,13, 26, 21), (15,30, 29, 27, 23). Той факт, що $p-1$ залишків завжди розпадаються таким чином на множини з d елементів, гарантує, що d завжди ділить $p-1$.

Жодне з цих міркувань не залежить від будь-яких спеціальних властивостей числа 2, яке було вибрано тільки тому, що воно з'являється в зв'язку з знаходженням досконалих чисел, і для іншого додатного цілого ті ж самі судження доводять таку теорему: якщо p - просте, яке не ділить a, то існує таке ціле d, що p ділить 2^m-1 тоді і тільки тоді, коли d ділить m. Теорема Ферма стверджує, що d ділить $p-1$. Згідно з визначальною властивістю d, це твердження зводиться до того, що p ділить $a^{p-1}-1$, або, що те ж саме, що p ділить a^p-a. останнє твердження найкоротше, оскільки в нього взагалі не входить d і оскільки воно справедливо, навіть якщо p ділить a. Це звичайне формулювання теореми Ферма: якщо p-просте число і a-довільне ціле, то p ділить $a^p - a$ (Эдвардс Г.М.)[1].

2.3 Числа Ферма

Теорема Ферма - одне з найважливіших арифметичних властивостей цілих чисел. Це питання про так звані числа Ферма $2^1 + 1$, $2^2 + 1$, $2^4 + 1$, $2^8 + 1$, $2^{16} + 1$, $2^{32} + 1\dots$.

У листуванні Ферма неодноразово висловлював своє переконання в тому, що всі ці числа – прості. (Зауважимо, що $2^n + 1$ не є простим, якщо n не є степінь двійки; дійсно, якщо n має непарний дільник k, наприклад $n = km$, то $2^n + 1 = (2^m + 1) \cdot \left(2^{m(k-1)} - 2^{m(k-2)} + \cdots + 2^{2m} - 2^m + 1\right).)$ Таким чином, він вважав, що вирішив давню задачу знаходження формули, яка дає як завгодно великі прості числа. Наприкінці життя Ферма навіть заявив, що може довести простоту всіх таких чисел.

Кілька перших чисел Ферма – прості. Числа $2^1 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$ і $2^4 + 1 = 17$ безсумнівно, прості. Простоту $2^8 + 1 = 257$можна довести наступним чином. Якщо p ділить $2^8 + 1$, то воно ділить $(2^8 + 1)(2^8 - 1) = 2^{16} - 1$. Отож, відповідне йому d (при $a = 2$) має ділити 16. Але дільниками 16 є тільки 1, 2, 4, 8, 16, і d не може дорівнювати 1, 2, 4 або 8, оскільки в цьому випадку p ділило б $2^8 - 1$, а це суперечить припущенню, що p ділить $2^8 + 1$. Отже, $d = 16$ і за теоремою Ферма $p = 16n + 1$ для деякого цілого n. Але найменше таке просте $p = 17$ вже більше ніж $\sqrt{2^8 + 1}$, і $2^8 + 1$не має власних дільників, що й вимагалося довести (Эдвардс Г.М.)[1].

Аналогічно, єдиними простими дільниками $2^{16} + 1$ можуть бути тільки прості виду $p = 32n + 1$. Оскільки $\sqrt{2^{16} + 1}$ лише трохи більше ніж $2^8 = 256$, то ми повинні випробувати тільки прості числа в списку

33, 65, 97, 129, 161, 193, 225, У якому лише два простих 97, 193. Ні одне них ділить $2^{16}+1$ оскільки залишки, які виходять при діленні степенів 1, 2, 4, 8, 16, … , 2^{16} на 97, рівні 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 31, 62, 27, 54, 11, 22, 44, 88, 79, 61, так, що при діленні $2^{16}+1$ на 97 отримуємо в залишку 62, а залишки при діленні цих степенів на 193 дорівнюють 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 63, 126, 59, 118, 43, 86, 172, 151, 109, і при діленні $2^{16}+1$ на 193 в залишку отримаємо 110. Відповідно, $2^{16}+1$ – просте число.

Аналогічний доказ для $2^{32}+1$ набагато довший, і Ферма, мабуть, не намагався всерйоз його провести або допустив помилку в обчисленнях, згідно з таким же міркуванням, як і вище, єдиними простими дільниками $2^{32}+1$ можуть бути числа виду $p = 64n+1$. Якщо $2^{32}+1$ не є простим, то його найменший простий дільник не може бути більше ніж 2^{16}(Эдвардс Г.М.)[1].

Оскільки числа $64n+1$ розташовані через інтервали в $64=2^6$ одиниць, грубо кажучи, треба перевірити $2^{10}=1024$ числа. Однак кожне третє з них ділиться на 3, кожне п'яте - на 5, і т. д.; тому кількість простих $p = 64n+1$, що лежать у критичній області, тільки близько 500 або в цьому роді. Доводити таким способом, що $2^{32}+1$ – просте число – дуже довга справа, хоча воно і займе не більше кількох днів. Однак число $2^{32}+1$ не є простим; воно ділиться на 641. Якщо слідувати описаній вище процедурі, то ми повинні перевірити послідовно 193, 257, 449, 577, а потім 641. Таким чином, 641 – всього лише п'яте просте число, яке слідує перевірити. Дільник 641 числа $2^{32}+1$ був виявлений Ейлером (Эдвардс Г.М.)[1].

Ця невдача, здається , є єдиною серйозною плямою на репутації Ферма як фахівця з теорії чисел. Справа погіршується тим, що, як нам тепер відомо, наступні кілька чисел Ферма: $2^{64}+1$, $2^{128}+1$, $2^{256}+1$ і кілька інших – всі складні. Не знайдено жодного простого числа Ферма за межами $2^{16}+1$, однак навіть тут є пом'якшувальна обставина, ще одне підтвердження безпомилкового інстинкту Ферма при виборі завдання. Через півтора століття після того, як Ферма висунув свою гіпотезу, юний Гаус показав, що евклідова побудова п'ятикутника за допомогою циркуля і лінійки пов'язано з тим фактом, що $5 = 2^2 + 1$ є числом Ферма. Взагалі, Гаус довів, що якщо n – просте число Ферма, то правильний n-кутники можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки.

Обернено, як стверджував Гаусс і довів Ванцель, за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати тільки ті правильні n-кутники, для яких $n = 2^k p_1 p_2 \dots\, p_m$, де $p_1, p_2, \dots, p_m$ – різні прості числа Ферма і $k \geq 0$(Эдвардс Г.М.)[1].

2.4 Непарні досконалі числа

Не одне тисячоліття математиків цікавило питання існування непарних досконалих чисел. У процесі його вивчення вони склали неймовірний список обмежень для цих гіпотетичних об'єктів. Але нові ідеї на цей рахунок можуть з'явитися завдяки вивченню інших близьких до них об'єктів [21].

Будучи ще старшокласником, Пейс Нільсен в середині 90-х зіткнувся з математичним питанням, над яким б'ється і донині. Гіпотеза про непарні досконалі числа, залишається відкритою вже більше 2000 років, що робить її однією з найстаріших невирішених завдань математики.

Частково таким довгоживучим шармом вона зобов'язана простоті формулювання. Число називається досконалим, якщо це додатнє ціле, n, сума дільників якого дає подвоєне число, $2n$. перший і найпростіший приклад – це 6, дільники якого, 1, 2, 3 і 6, в сумі дають 12, або 2 · 6. Потім йде 28, з дільниками 1, 2, 4, 7, 14 і 28, що дають в сумі 56. Наступні приклади - 496 і 8128.

Леонард Ейлер формалізував це визначення в XVIII столітті, ввівши свою сигма-функцію, що позначає суму дільників числа. Таким чином, для досконалих чисел $\sigma(n) = 2n$.

Нільсен, який сьогодні працює професором в Університеті Бригама Янга, захопився пов'язаним з цим питанням: чи існують непарні досконалі числа? Грецький математик Нікомах Гераський близько 100 року н.е. заявив, що всі досконалі числа повинні бути парними, але ніхто не довів цього твердження.

Як і багато його колег з XXI століття, Нільсен вважає, що досконалих чисел існує не особливо багато. І, разом з ними він вважає, що доказ цієї гіпотези буде отримано не скоро. Проте в нещодавно він натрапив на новий підхід до цього завдання, можливо, здатний просунути його далі. І він пов'язаний з найближчим до непарних досконалим числам об'єктом з усіх поки виявлених [21].

«Я в своїй наївності вирішив, що я можу зробити щось в цій області, якщо в ній взагалі можливий прогрес, - сказав Нільсен. - Це надихнуло мене на вивчення теорії чисел в коледжі, і спроби розвинути прогрес». Його перша робота з непарних досконалих чисел, опублікована в 2003 році, наклала додаткові обмеження на ці гіпотетичні числа. Він показав, що не тільки кількість непарних досконалих чисел з k різними простими дільниками звичайно, як довів в 1913 році Леонард Діксон, але і що розмір цього числа не повинен перевищувати 2^{4^k}.

І це було не першим і не останнім обмеженням, накладеним на гіпотетичні непарні досконалі числа. Наприклад, в 1888 році Джеймс Сильвестер довів, що непарне досконале число не може ділитися на 105. У 1960 році Карл К. Нортон довів, що, якщо непарне досконале число не ділиться на 3, 5 або 7, у нього повинно бути не менше 27 простих дільників. Пол Дженкінс в 2003 році довів, що найбільший простий дільник непарного досконалого числа повинен бути більше 10 000 000.

Паскаль Очем і Міхаель Рао після цього виявили, що непарне досконале число повинно бути більше 10^{1500}, а потім відсунули цю межу до 10^{2000}. Нільсен в 2015 році показав, що непарне досконале число повинно мати не менше 10 різних простих дільників [21].

Навіть у XIX столітті кількість обмежень була такою, що Сильвестер зробив висновок, що «поява непарного досконалого числа – така собі втеча від складної мережі умов, що оточують його з усіх боків – буде практично дивом». Через більше ніж сто років подібного розвитку подій існування таких чисел викликає ще більше сумнівів.

«Довести існування чого-небудь легко, якщо вийде знайти хоча б один приклад, — сказав Джон Войт, професор математики з Дартмуту. - Але довести, що щось не існує, може бути дуже важко».

Основним підходом до цього моменту було порівняння всіх умов, що обмежують непарні досконалі числа з тим, щоб з'ясувати, чи не є якась парочка з них несумісною - тобто, що жодне число не може задовольняти обом обмеженням відразу.

На жаль, несумісних властивостей досі не знайдено. Тому крім додаткових обмежень на непарні досконалі числа математикам, ймовірно, будуть потрібні і нові стратегії.

Для цього Нільсен вже розглядає новий план атаки, заснований на поширеній тактиці математиків: вивчення множини чисел через вивчення їх близьких родичів. У відсутності непарних досконалих чисел, придатних для прямого вивчення, вони з командою вивчають «імітації» непарних досконалих чисел, які дуже схожі на справжні, але володіють деякими цікавими відмінностями [21].

ВИСНОВКИ

Виходячи з мети кваліфікаційної роботи поставлені задачі були розв’язані.

Підсумовуючи результати проведеного дослідження можна зробити висновки

Аналіз психолого-педагогічної літератури, методичних досліджень показав, що дослідження теми досконалих чисел є актуальними і на даному етапі вивчення математики. Питання про існування нескінченної множини парних досконалих чисел та непарного досконалого числа відкриті і досі.

Завдяки формулі Евкліда ми навчилися легко доводити численні, властивості досконалих чисел такі як:

а) Всі досконалі числа трикутні, тобто, будь-яке досконале число збігається з однією з часткових сум ряду $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$.

б) Всі досконалі числа, крім 6, можна представити у вигляді частинних сум ряду кубів послідовних непарних чисел $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots$.

в) Сума величин, зворотних всім дільникам досконалого числа, включаючи його самого, завжди дорівнює 2.

г) Відрахування будь-якого досконалого числа, крім 6, по модулю 9 (або, що те ж саме, залишок від ділення на 9) рівний 1.

д) Всі парні досконалі числа в двійковому записі містять спочатку p одиниць, за якими слід $p\ -1$ нулів (наслідок із загального виду).

е) Всі парні досконалі числа є шестикутними. Тому що, можуть бути представлені у вигляді $n \cdot (2n - 1)$, для деякого натурального числа n.

Також ми знайшли їх практичне застосування на уроках та позакласних заходах з математики у 7-9 класах.

Також, в ході дослідження, вдалося з’ясувати, що, на сьогоднішній день, невідомо чи існують непарні досконалі числа взагалі, а якщо вони, все ж таки існують, то перевищують 10^{1500}.

Для розкриття теми даного дослідницького проекту були використані науково-методичні джерела, інформаційна база з математики, літературні твори, інформація з газет і журналів, а також ресурси мережі Інтернет.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Эдвардс Г.М. Последняя теорема Ферма./ Г.М. Эдвардс.-М.: Мир, 1980. – 486 с.
2. Начала Эвклида книги VII-X./ ред. И.Н. Веселовский. -М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 511 с.
3. Коутинхо С.К. Введение в теорію чисел. Алгоритм RSA./ С.К. Коутинхо. –М.: Постмаркет, 2001.- 328 с.
4. Голдобин Н.О. Совершенные числа./ Н.О. Голдобин// Старт в науке. -2018. - №5. – с. 289-296.
5. Депман И.Я. За страницами ученика математики: пособие для учащихся в 5-6 классах средн. шк./ Депман И. Я., Виленкин Н.Я. –М.:Просвещение,1989. – 287 с.
6. Депман И.Я. Совершенные числа.// - Квант. 1991 . - №5 – с.13-17
7. Глейзер И.Г. История математики в школе./ И.Г. Глейзер. –М.:Просвещение, 1964. – 376 с.
8. Гарднер М. Математические новеллы./ М. Гарднер. – М.: Мир, 1974. – 456 с.
9. Мерзляк А.Г. Алгебра: Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики./ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір.-Х.: Гімназія, 2008. – 368 с.
10. Болл У. Математическое эссе и развлечения. Пер. С англ./ У. Болл, Г. Коксетер. – М.: Мир, 1986. – 474 с.
11. Берман Г.Н. Число и наука о нём./ Г.Н. Берман. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. – 165 с.

12. Боро В. Живые числа. Пять экскурсий. Пер. с неметкого Е.Б.Гладкова./В. Боро, Д.Цагир, Ю. Рольфс, Х. Крафт, Е. Янцен. – М.: Мир,1985. – 128 с.

13. Бухштаб А.А. Теория чисел./ А.А.Бухштаб. – М.: Просвещение, 1966. – 386 с.

14. Депман И.Я. Совершенные числа. // -Квант, 1971 - №8, с. 1-6

15. Лукашова Т.Д. Прості числа та деякі пов'язані з ними проблеми теорії чисел / Т.Д. Лукашова // Фізикоматематична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск № 2 (5). – с. 29-37.

16. Гарднер М. Математические досуги. Пер. с англ./ М. Гарднер. – М.: Мир, 1972. – 496 с.

17. Энциклопедический словарь юного математика. Составитель А.П.Савин – М.: Педагогіка. - 1989. – 352 с.

18. Оре О. Приглашение в теорию чисел./ О. Оре – М.: Наука, 1980. – 128 с.

19.Попов, И.Н. Совершенные и дружественные числа: Учеб. пособие / И.Н. Попов; Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. — Архангельск: Поморский университет, 2005. — 153 с.

20. URL: https://elementy.ru/problems/186/Sovershennye_chisla

21. URL: https://www.quantamagazine.org/mathematicians-open-a-new-front-on-an-ancient-number-problem-20200910/