МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ПАРАМЕТРИ ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконав: студент 421 групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: вчитель математики
Овдійчук Максим Сергійович

Керівник: Григор’єва В.Б., кандидатка педагогічних наук, ст. викладачка
Рецензент: Спичак Т.С., кандидатка педагогічних наук, доцентка

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Метод підрахунку параметрів (параметризація) широко використовується в фізиці, механіці, математиці та інших областях науки та техніки. В методичній літературі не має систематичного викладу даного методу, проте він має певне значення при розв'язуванні різноманітних задач. Параметричний метод дає можливість, проаналізувавши умову задачі, з'ясувати, чи є дана задача визначеною, невизначеною або надвизначеною [7].

Дане дослідження знайомить з параметризацією геометричних фігур. Знайомство з методами параметризації необхідне для майбутніх вчителів математики, оскільки на уроках геометрії учні вивчають форми, визначають розміри геометричних тіл, обчислюють шукані елементи за даними умовами. Корисно привчати учнів самостійно задавати необхідну і достатню кількість даних, які визначають геометричну фігуру. Під параметрами розуміють незалежні величини, які дозволяють виділити задану фігуру із множини фігур відповідно до їх означення.

Визначення множини фігур грає важливу роль в питаннях параметризації. Так, для побудови трикутника необхідно і достатньо задати три незалежних параметри. Якщо відомо, що трикутник рівнобедрений, то достатньо задати не три, а лише два параметри. Для побудови чотирикутника необхідно (і достатньо) задати п'ять незалежних параметрів. Легко встановити ціну кожного із термінів, що відносяться до чотирикутника: «вписаний» – один параметр; «трапеція» – один параметр; «прямокутна трапеція» – два параметри; «паралелограм» – два параметри; «прямокутник» – три параметри; «ромб» – три параметри; «правильний чотирикутник» – чотири параметри. Плоский n-кутник характеризується $2n$ – 3 параметрами; правильний n-кутник – одним параметром; відповідно, ціна слова «правильний» (многокутник) рівна $(2n – 3) – 1 = 2n – 4$ параметрам [16].

Мета даної роботи полягає у розкритті питання застосування параметризації при розв'язуванні геометричних задач на обчислення та побудову.

Об'єктом дослідження виступає клас планіметричних та просторових фігур, а *предметом* дослідження – внутрішня та зовнішня параметризація цих фігур.

Виходячи з мети, визначені основні *завдання* роботи:

1. Розкрити поняття внутрішньої та зовнішньої параметризації та визначити їх для основних геометричних об'єктів.

2. Розглянути питання застосування параметризації при розв'язуванні геометричних задач на обчислення.

3. Розкрити питання стосовно застосування параметрів при розв'язуванні конструктивних задач та визначити кількість незалежних параметрів, які необхідні для побудови геометричних фігур.

Основні *методи*, що використовувалися в дослідженні – це метод проектування, метод перерізів та метод параметризації.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Робота складається з двох основних розділів.

В першому розділі наведено деякі теоретичні положення стосовно поняття параметризації. Зокрема, в ньому розглянуті поняття внутрішньої та зовнішньої параметризації та наведено характеристику цих понять для основних геометричних об'єктів. Твердження цього розділу є допоміжними при розв'язуванні основної задачі дослідження.

Другий розділ практичного характеру і містить розв'язання основної задачі дослідження. В ньому розкривається питання щодо застосування параметризації при розв’язуванні різноманітних геометричних задач, зокрема, при розв’язуванні задач на відшукання лінійних елементів та обчислення площ та об’ємів фігур. Крім того, розділ містить приклади розв’язування конструктивних задач, при знаходженні розв'язку яких застосовується принцип підрахунку параметрів, які визначають шукану фігуру.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів, а також вчителями загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій.

РОЗДІЛ 1
ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

1.2. Внутрішня параметризація

Метод підрахунку параметрів (параметризація) широко використовується в фізиці, механіці, математиці та інших областях науки та техніки. В методичній літературі не має систематичного викладу даного методу, проте він має певне значення при розв'язуванні різноманітних задач. Тому потрібно надати обґрунтування принципів параметризації і тим самим запобігти появи помилок при підрахунку параметрів.

Дана робота знайомить з параметризацією геометричних фігур. Знайомство з методами параметризації необхідне для майбутніх вчителів математики, оскільки на уроках геометрії учні вивчають форми, визначають розміри геометричних тіл, обчислюють шукані елементи за даними умовами. Корисно привчати учнів самостійно задавати необхідну і достатню кількість даних, які визначають геометричну фігуру.

Наведемо приклад: відомо, що для визначення трикутника можна вказати два кути і сторону або три сторони і т. д. Очевидно, що для визначення трикутника потрібно задати три незалежні величини. При цьому вони повинні задовольняти деяким обмежувальним умовам (нерівностям).

Під параметрами ми будемо розуміти незалежні величини, які дозволяють виділити задану фігуру із множини фігур відповідно до їх означення. Визначення множини фігур грає важливу роль в питаннях параметризації [8]. Виділимо два види параметризації: внутрішню і зовнішню.

Під *внутрішньою параметризацією* будемо розуміти підрахунок числа параметрів, які необхідно задати, щоб виділити окрему фігуру з множини різних фігур, які відповідають їх означенню. При цьому положення фігури в просторі не береться до уваги. Число параметрів внутрішньої параметризації позначимо через p.

Під *зовнішньою параметризацією* будемо розуміти операцію підрахунку числа параметрів, необхідних для виділення окремого положення фігури із даної множини всіх конгруентних фігур в просторі. Число параметрів зовнішньої параметризації позначимо через q.

Таким чином, наприклад, конкретна чотирикутна піраміда може бути виділена з даної множини чотирикутних пірамід шляхом визначення p параметрів.

Положення чотирикутної піраміди в просторі може бути визначене шляхом завдання q параметрів [19].

Внутрішня параметризація

Підрахуємо кількість внутрішніх параметрів для наступних геометричних фігур.

1) *Точка*. Нехай ми маємо множину всіх точок. Підрахуємо кількість параметрів p, яка потрібна для виокремлення індивідуальної точки із заданої множини. Враховуючи те, що будь-яка точка відрізняється від всіх інших точок множини лише своїм положенням, то кількість параметрів внутрішньої параметризації для точки рівна нулю: $p=0$.

2) *Пряма.* Проводячи аналогію розмірковувань, отримуємо для прямої: $p=0$.

3) *Площина.* Всі площини нерозрізнені одна від одної, тому $p=0$.

4) *Відрізок.* Припустимо, що задана множина всіх відрізків. Підрахуємо кількість p. Індивідуальний відрізок відрізняється від всіх останніх відрізків множини тільки довжиною. З цього випливає, що для відрізка отримуємо: $p = 1$.

5) *Трикутник.* Для виокремлення трикутника із множини всіх трикутників потрібно задати 3 параметри. Наприклад, три сторони, два кути і сторону і т. д. Отже очевидно, що $p = 3$.

6) *Тетраедр* (рис. 1.1). Нехай ми маємо множину всіх тетраедрів. Підрахуємо кількість внутрішніх параметрів для тетраедра.

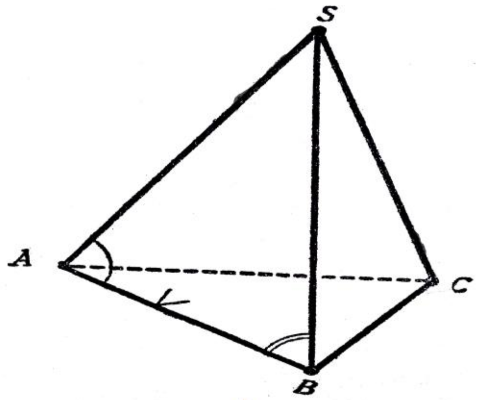

Рис. 1.1

Основою тетраедра є трикутник; очевидно, що основа визначається трьома параметрами. Вершина тетраедра також визначається трьома параметрами. Наприклад, двогранний кут *S (AB) C* і двома плоскими кутами *SAB* і *SBA*. Всього: $p=3+3=6$.

7) *n-кутник на площині.* Розглянемо *n*-точок, розміщених в одній площині. Перенумеруємо їх, тобто встановимо порядок послідовності вершин *n*-кутника. Будемо вважати, що ніякі три сусідні точки не лежать на одній прямій (рис. 1.2).

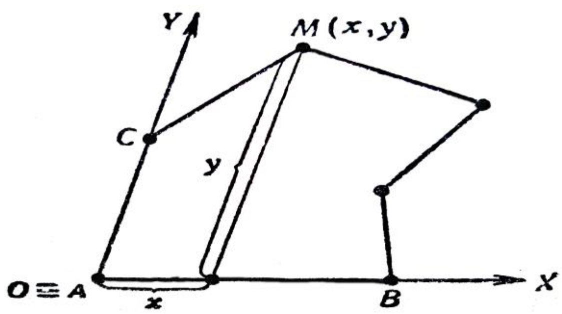

Рис. 1.2

Оберемо декартову систему координат, де *Ox* та *Oy* співпадають з двома сусідніми сторонами *n*-кутника $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AC$. Такий вибір системи координат дозволяє запобігти зовнішній параметризації, так як вона не враховує положення n-кутника на площині.

На визначення вершин *A, B* і *C* використаємо три параметри, а саме: довжини сторін *AB* – 1 параметр, *AC* – 1 параметр та $\angle BAC$ - 1 параметр. Будь-яка із останніх вершин визначається двома її координатами. Наприклад: *M(x, y)* – 2 параметри (рис. 1.2). Так як кількість останніх вершин рівна (n - *3*), то на їх визначення витратимо $2 \bullet (n - 3)$ параметрів,

$$p=2n-3. \qquad (1.1)$$

Наведемо приклад. Дано чотирикутник $ABCD$ (рис. 1.3). Підрахуємо кількість незалежних величин, що визначають його.

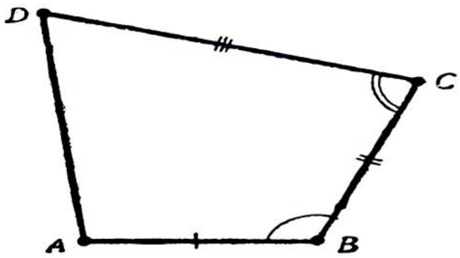

Рис. 1.3

Сторона *AB* – 1 параметр, $\angle ABC$ - 1 параметр, *BC* – 1 параметр, $\angle BCD$ - 1 параметр, сторона *CD* – 1 параметр. Всього: $p=5$. Остання сторона і прилеглий до неї кут будуються.

З іншої сторони, підрахуємо кількість p за формулою

$$p=2\bullet 4-3=5,\ p=5.$$

Таким чином, для того, щоб задати чотирикутник $ABCD$, необхідно задати п'ять незалежних величин.

8) Многогранники.

А) *Прості многогранники.* Многогранник, у якого всі грані трикутники, називається *простим многогранником*.

Оберемо декартову систему координат, початок якої співпадає з будь-якою вершиною *A* багатогранника; осі *Ox, Oy, Oz* співпадають з трьома ребрами *AB, AC* та *AD* многогранника, які виходять із вершини *A* (рис. 1.4). Підрахуємо кількість внутрішніх параметрів для цього многогранника.

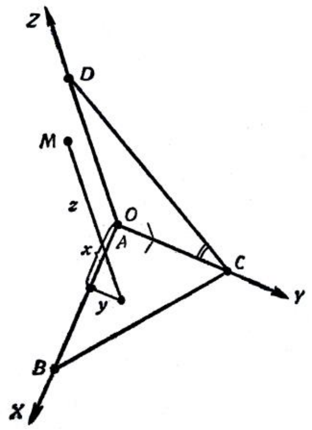

Рис. 1.4.

Система координат визначається 6 параметрами. Наприклад, три параметри повинні бути використані на визначення ΔABC і три параметри для визначення вершини *D*. (Наприклад, $\angle CAD$ і $\angle ACD$ і двогранний кут *B (AC) D)* [5].

Будь-яка з решти *(n - 4)* вершин визначається трьома параметрами. Так маємо для вершини *M(x, y, z)* – 3 параметри. Звідси маємо:

$$p=6+3(n-4)=3n-6,\ p=3n-6. \qquad (1.2)$$

Б) *n-кутна піраміда.* В основі *n*-кутної піраміди лежить *(n – 1)*–кутник. Кількість параметрів, що визначають *(n – 1)*–кутник, розраховується за формулою $p=2n-3$. Кількість параметрів, що визначають вершину піраміди рівна трьом. Так, наприклад, вершина *S* піраміди визначається шляхом завдання трьох двогранних кутів її граней з площиною основи. Всього

$$p=2(n-1)-3+3=2(n-1),\ p=2(n-1). \qquad (1.3)$$

Порівняємо формули (1.2) та (1.3). Як формула (1.2), так і формула (1.3) виведені для *n*-кутника в просторі. Але для визначення *n*-кутної піраміди потрібно було на $(n-4)$ параметри менше. Чим пояснити цю різницю на $(n-4)$ параметри при визначенні *n*-кутної піраміди?

Виявляється, що для визначення основи піраміди, потрібно визначити три вершини основи. Останні $(n-4)$ вершини основи повинні лежати в тій же площині. Умова того, що точка повинна лежати в площині, рівносильна визначенню одного параметра, наприклад, припустимо, що відстань точки до площини рівна нулю. Отримаємо: $(n-4)\bullet 1 = n-4$ параметра. Остання обставина дуже важлива при внутрішній параметризації довільного многогранника [21].

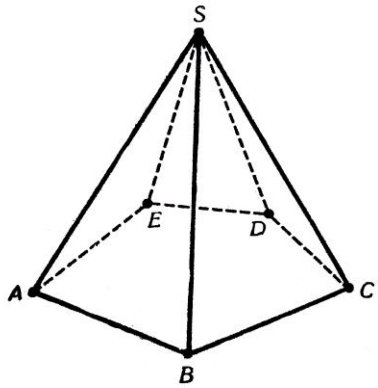

Рис. 1.5.

Розглянемо, наприклад, скільки параметрів потрібно для визначення 6-кутної піраміди (рис. 1.5). Підрахуємо кількість параметрів, що визначають п'ятикутник в основі піраміди. Вона рівна 7. Вершина піраміди визначається трьома параметрами. Всього $p = 7 + 3 = 10$. Підрахунок за формулою (3) дає: $p = 2\bullet(6-1) = 10$.

В) Довільний n-кутник. Нехай маємо довільний n-кутник, тобто n-кутник, у якого m_3 трикутних граней, m_4 чотирикутних граней …, m_k k-кутних граней. Підрахуємо кількість параметрів внутрішньої параметризації для згадуваного n-кутника. Саме означення чотирикутної грані несе додаткову інформацію, що рівноцінне визначенню одного параметра. Означення п'ятикутної грані несе додаткову інформацію, рівноцінну визначенню двох параметрів. Означення k-кутної грані несе додаткову інформацію, рівноцінну визначенню (k – 3) параметрів. Таким чином, отримуємо, що визначення згадуваного вище n-кутника несе додаткову інформацію, рівноцінну визначенню

$$m_4 + m_5 \bullet 2 + ... + m_k \bullet (k-3) \text{ параметрів.}$$

Звідси кількість параметрів, визначаючих довільний *n*-кутник, рівне:

$$p = 3n - 6 - [m_4 + m_5 \bullet 2 + ... + m_k \bullet (k-3)]. \qquad (1.4)$$

Наведемо приклад. Нехай дано семикутник (рис. 1.6), у якого одна грань – п'ятикутник, друга грань – чотирикутник, а останні грані – трикутники.

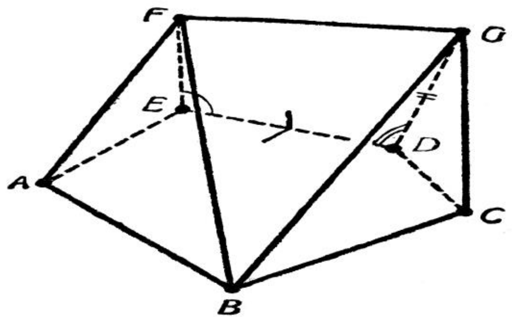

Рис. 1.6.

Підрахуємо кількість *p* для цього семикутника.

1-й спосіб. Підрахуємо кількість *p* для вказаного семикутника за формулою (4)

$$p = 3 \bullet 7 - 6 - (1+2) = 12; \; p = 12.$$

2-спосіб. Підрахуємо за формулою кількість параметрів, визначаючих п'ятикутну грань: $2 \bullet 5 - 3$ параметрів. Для визначення вершин F і G потрібно задати двогранний кут між площинами п'ятикутної і чотирикутної граней [15] – один параметр, плоскі кути DEF і EDG – два параметри, величини відрізків EF, DG – два параметри.

Всього використали:

$$p = 2 \bullet 5 - 3 + 1 + 2 + 2 = 12; \; p = 12.$$

Покажемо, що, використовуючи різні системи підрахунку незалежних параметрів, визначаючих дану геометричну фігуру Ф, отримаємо одне і те ж число.

Нехай при системі підрахунку $\{i\}$ отримали p_1 параметрів $\{x_i\}$, де $i = 1, 2, \ldots, p_2$. Доведемо, що $p_1 = p_2$.

Припустимо протилежне: $p_1 \neq p_2$; нехай, наприклад: $p_1 < p_2$. Якщо задано p_1 параметрів першої системи $\{i\}$, то фігура Ф визначається, а також тим самим визначені і p_2 параметрів системи $\{j\}$.

З цього слідує:

$$p_1 \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{p_1} = y_{p_1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}) \end{cases}$$

$$p_2 - p_1 \begin{cases} y_{p_1+1} = y_{p_1+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{p_2} = y_{p_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}) \end{cases}$$

Виражаючи параметри $x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}$ через $y_1, y_2, \ldots, y_{p_1}$ із перших p_1 рівнянь і підставляючи отримані вирази в останні $p_2 - p_1$ рівняння, отримаємо:

$$p_2 - p_1 \begin{cases} y_{p_1+1} = y_{p_1+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}) = \bar{y}_{p_1+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{p_1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{p_2} = y_{p_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}) = \bar{y}_{p_2}(y_1, y_2, \ldots, y_{p_1}). \end{cases}$$

З цього випливає, що параметри $\{y_j\}$ не є незалежними. А це суперечить нашому припущенню.

Аналогічно отримаємо суперечність, якщо припустимо, що $p_1 > p_2$. Отже, $p_1 = p_2$.

Проілюструємо вище сказане на прикладі n-кутної піраміди. Вище ми підрахували число внутрішніх параметрів n-кутної піраміди. Воно рівне $p = 2(n-1)$.

Використаємо іншу систему параметрів. Задамо ΔABS - три параметри (рис. 1.7). Для того, щоб визначити положення точки C, потрібно використати три параметри, наприклад, задати двогранний кут $A(BS)C$, $\angle SBC$ і відрізок BC. Для визначення вершини D потрібно використати два параметри. Наприклад, можна задати двогранний кут $B(SC)D$ величину відрізка CD і т.д. Всього використаємо: $p = 3 + 3 + (n-4) \bullet 2 = 2(n-1)$ параметрів.

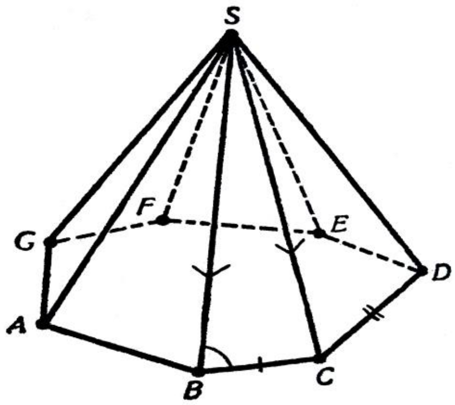

Рис. 1.7

1.2. Зовнішня параметризація

Тепер звернемося до питання зовнішньої параметризації. Підрахуємо, яку кількість параметрів потрібно задати для визначення фігури в просторі, враховуючи цю фігуру незмінною.

1) *Точка.* Положення точки визначається її координатами. З цього отримуємо:

А) *Точка на прямій.* В цьому випадку положення точки визначається одним параметром, координатою *x*; $q = 1$ (рис. 1.8).

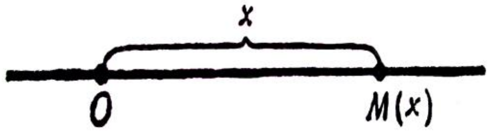

Рис. 1.8

Б) *Точка на площині.* Будемо мати: $q = 2$ (рис. 1.9).

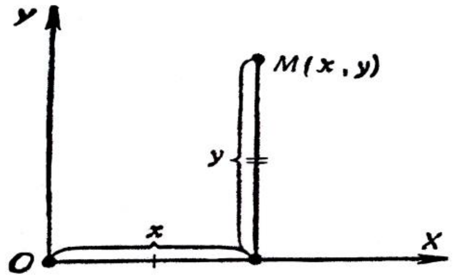

Рис. 1.9

В) *Точка в просторі.* Положення точки в просторі визначається трьома координатами, тобто трьома параметрами $q = 3$ (рис. 1.10).

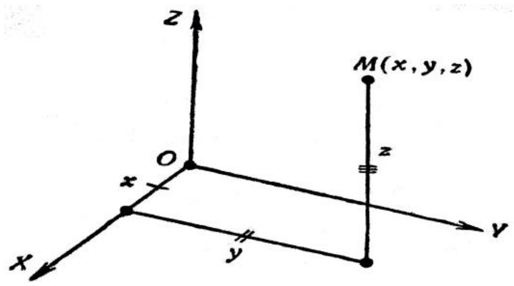

Рис. 1.10

2) *Відрізок.* Щоб визначити положення відрізка на площині, потрібно визначити положення на площині одного із його кінців $A(x, y)$ - два параметри і задати кут φ його нахилу з додатнім напрямком на осі Ox – один параметр, $q = 2 + 1 = 3$ (рис. 1.11).

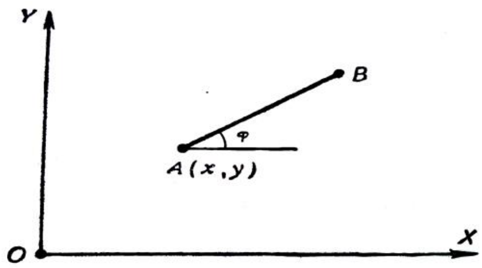

Рис. 1.11

А) *Відрізок в просторі.* Для визначення положення відрізка в просторі потрібно використати три параметри p_3 на визначення положення одного із його кінців $A(x, y, z)$ і два параметри на визначення двох кутів його нахилу з додатнім напрямком осей координат.

Всього $q = 5$ (рис. 1.12).

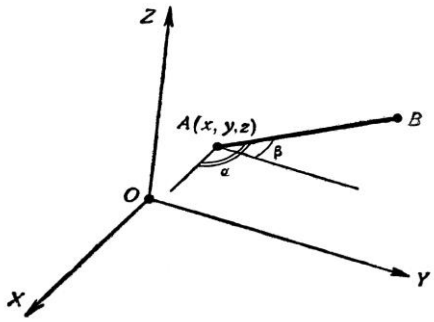

Рис. 1.12

Зауваження: 1) Якщо для визначення положення відрізка на площині ми б задали координати двох його кінців $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$, то окрім положення відрізка, ми б визначили і його довжину. Очевидно, що на визначення положення відрізка ми використали один зайвий параметр [13]. Отримаємо: $q = 2 \bullet 2 - 1 = 3$.

2) Таке ж саме міркування вірне і для відрізка в просторі. Задамо два кінці відрізка їх координатами: $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$ – шість параметрів. За таким визначенням положення відрізка ми визначили і його довжину, тобто один параметр зайвий. Отже, $q = 2 \bullet 3 - 1 = 5$.

3) *Пряма.*

А) *На площині.* Для визначення положення прямої на площині потрібно використати два параметри. Наприклад, задати довжину і кут нахилу із віссю Ox перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму (рис. 13).

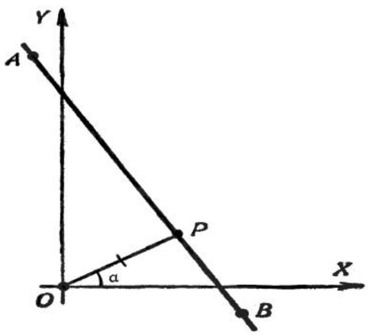

Рис. 1.13

Зауваження: Задамо пряму двома точками $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$, тобто використав 4 параметри. За такого визначення положення прямої на площині ми отримаємо зайві: 1) довжину відрізка AB - один параметр, 2) положення відрізка на прямій - один параметр.

З цього випливає, $q = 4 - 1 - 1 = 2$. Таким чином зовнішня параметризація прямої потребує використання двох параметрів. Це підтверджується також рівняннями прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ або $y = kx + b$ і т.д. [17].

Б) *Пряма в просторі.* Положення прямої в просторі буде визначено, якщо задати сліди прямої на координатних площинах. Іншими словами, потрібно задати чотири параметри $q = 4$ (рис. 1.14).

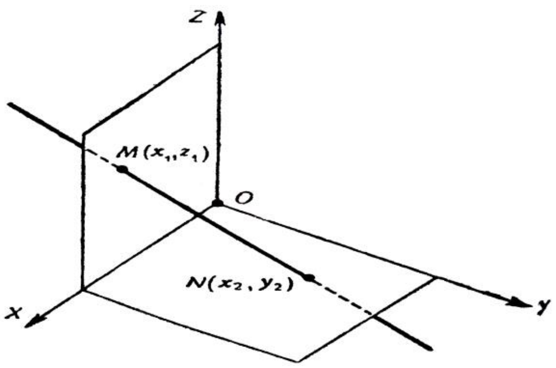

Рис. 1.14

Зауваження: Якщо ми задамо дві точки прямої їх координатами, наприклад $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, то ми визначимо не тільки положення прямої, але і 1) довжину відрізка AB – один параметр; 2) положення відрізка AB на прямій – один параметр. Отже, $q = 2 \bullet 3 - 1 - 1 = 4$. Пряма в просторі визначається чотирма параметрами.

4) *Площина в просторі.* Положення площини в просторі визначається трьома параметрами. Наприклад, довжина перпендикуляра ON, опущеного із початку координат на площину (один параметр), і двома кутами перпендикуляра ON з додатними напрямами Ox та Oy осей координат (два параметри) (рис. 1.15). Очевидно, $q = 3$.

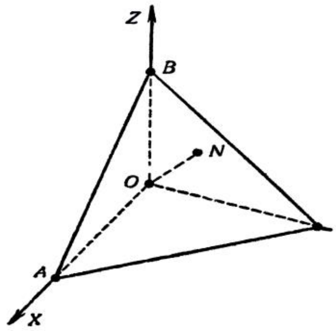

Рис. 1.15

Зауваження. З іншої сторони, площину можна задати трьома точками: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Для цього ми використаємо $3 \bullet 3 = 9$ параметрів. При цьому ми визначили зайве, а саме: 1) трикутник ABC як фігуру (три параметри); 2) положення ΔABC на площині (три параметри). Отже, отримуємо: $q = 3 \bullet 3 - 3 - 3 = 3$.

5) *Визначення положення заданої фігури в просторі (твердого тіла).* Закріпимо будь-яку точку $A(x_1, y_1, z_1)$ фігури Ф. Фігура Ф буде мати можливість руху при нерухомій точці *А*. Закріпимо другу точку $B(x_2, y_2, z_2)$ фігури Ф. Остання точка збереже можливість обертатись навколо прямої AB. Закріпимо третю точку $C(x_3, y_3, z_3)$ фігури. Тоді Ф стане нерухомою [4]. З цього слідує, що для визначення положення заданої фігури в просторі ми використаємо $3 \bullet 3 = 9$ параметрів. При цьому ми визначимо зайве, а саме: трикутник ABC. Обчислюючи зайві параметри, отримаємо: $q = 3 \bullet 3 - 3 = 6$. Таким чином, положення будь-якої фігури (твердого тіла) в просторі визначається шістьма параметрами.

РОЗДІЛ 2
ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Геометричні задачі на обчислення

Як відомо, існують задачі, які мають різні розв'язки для різних допустимих значень параметрів, а також задачі, які не мають розв'язків. Так, наприклад, задачу на побудову трикутника за двома сторонами та кутом, протилежним одній із сторін, не можна розв'язувати формально. Твердження, що при $CD < b < a$ задача має два розв’язки, – невірне. Цю задачу слід розв'язувати так:

Дано: відрізки a і b та кут A.

Допустимі значення:

$$a > 0;\ b > 0;\ 0^\circ < A < 180^\circ;$$

Перший випадок (схема 1).

$$0^\circ < A < 90^\circ;\ a > 0;\ b > 0;$$

$$BC = a;\ AC = b;\ CD \perp AB.$$

Після відповідних аналізу, побудови і доведення проводимо дослідження.

A) Якщо $CD < a < b$, то задача має два розв'язки.

B) Якщо $a < CD$, то задача не має розв'язків.

C) Якщо $a > b = CD$, то задача має один розв'язок.

D) Якщо $a > b$, то задача має один розв'язок.

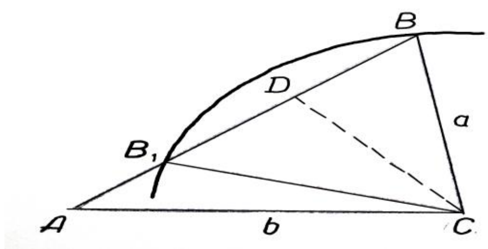

Рис. 2.1

Другий випадок (рис. 2.2 і 2.3).

$$90° \le A < 180°,\ a > 0,\ b > 0.$$

A) Якщо $a > b$, то задача має один розв'язок.

B) Якщо $a \le b$, то задача не має розв'язків.

На прикладі цієї задачі видно, що в різних частинах множини допустимих значень параметра *A* ми отримаємо різні розв'язки, якщо ж це не враховувати, то можливо здійснити велику помилку.

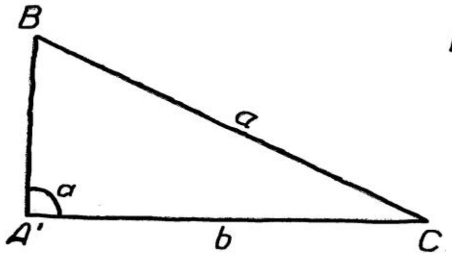

Рис. 2.2

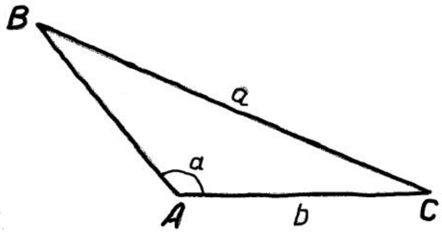

Рис. 2.3

Аналогічні приклади можна назвати і при розв'язанні задач на розрахунок (з параметрами). Розглянемо декілька задач із збірника задач з геометрії, ч.1, Рибкіна.

Задача. Скільки сторін має многокутник, якщо кількість всіх його діагоналей в *m* раз більше кількості сторін.

Відповідь: $n = 2m + 3$.

Якщо ми даємо таку формулу без будь-яких обговорень, то ми формально нав'язуємо її. І справді, не при кожному значенні *m* задача має розв'язок. Для того, щоб розв'язати цю задачу повністю, потрібно довести, що $n \ge 4$ і в залежності від цього доведення отримана відповідь буде мати такий вид: $2m + 3 \ge 4$, $m \ge \frac{1}{2}$. При цьому, якщо *m* – дріб, то його знаменник дорівнює 2.

Задача. Знайти кількість сторін трикутника, якщо сума його внутрішніх кутів в *m* більша суми зовнішніх кутів.

Відповідь: $n = 2 + 2m$.

Якщо обрати число *m=0*, то $n = 2$ не має геометричного образу.

Доведення показують, що $m \geq \frac{1}{2}$ (при цьому якщо m – дріб, то його знаменник дорівнює 2).

Задача. А паралелограмі *ABCD* сторона *AB*=*b* і *BC*=*a*. Пряма *EF* ∥ *CB* відтинає паралелограм *ADEF*, подібний *ABCD*. Знайти відрізок *DE*.

Відповідь: $DE = \frac{a^2}{b}$.

Але якщо $DE > a$, то задача не має розв'язків. Тому формула $\frac{a^2}{2}$ не вказує на те, що ми розв'язали задачу; в даному випадку не можливо обійтися без додаткових доведень.

Доведення.

Якщо $\frac{a^2}{2} < a$, то $a < b$.

Відповідь: 1) Якщо $a < b$, то задача має єдиний розв'язок: $DE = \frac{a^2}{b}$; 2) якщо $a \geq b$, то задача не має розв'язку.

Під час розв'язання таких задач слід мати схему розв'язку задачі та наступне означення. *Розв'язком* задачі на обчислення називається значення невідомої величини, що задовольняє умову задачі. *Розв'язати задачу на обчислення з параметрами* – означає знайти множину всіх її розв'язків для кожного із допустимих значень параметрів.

Схема розв'язування задачі

1. Геометричний аналіз умови задачі.
2. Вираз шуканої (шуканих) величини як функції параметрів.
3. Аналітичне дослідження отриманого розв'язку задачі в загальному вигляді. Перевірити, чи належать всі значення знайденої величини множині допустимих значень.

4. Обчислити значення шуканої величини для даних значень параметрів (завчасно перевіривши, що дані належать множині допустимих значень).

5. Відповідь на питання задачі.

Із вище перечислених етапів суттєве значення мають аналіз задачі та дослідження отриманого результату.

Аналіз задачі необхідний, так як він допомагає краще зрозуміти умову задачі, встановити можливість існування та виявити реальний зміст фігури, є засобом розвитку логічного мислення і просторової уяви учнів. Дослідження отриманого результату запевняє у правильності або неправильності та в повноті відповіді. Аналіз умови задачі передбачає наступні моменти:

- чіткий розгляд умови задачі і властивостей тих фігур, про які йде мова в задачі;
- з'ясування питання про існування даної в умові задачі фігури;
- встановлення множини допустимих значень для параметрів (якщо дані величини виражені буквами) і невідомих величин.

Ігнорування цього важливого етапу під час розв'язування геометричних задач не дає можливості усвідомлено підходити до розв'язку задачі, приводить до грубих помилок і весь розв'язок задачі зводиться до нецілеспрямованих дій. Доведення існування фігури, про яку йде мова в умові задачі, важливо, так як не будь-яка задача має розв'язок. Доведення існування фігури проводиться або шляхом її побудови, або доведенням можливості її побудови.

Звісно, не будь-яка задача на побудову може бути розв'язана за допомогою циркуля і лінійки на площині. Також не будь-яка задача може бути розв'язана в просторі, тай ті задачі, що мають розв'язок бувають достатньо складні. Тому не слід вимагати побудови в кожній із розв'язуваних задач. Але там, де це можливо, розв'язок задачі на побудову потрібно виконувати. Це викликає інтерес і сприяє розвитку логічного мислення.

Для того, щоб переконати у необхідності проведення поетапного аналізу задачі, потрібно періодично пропонувати задачі, які не мають розв'язку. Наприклад:

Задача. Сторони даного трикутника рівні *13 см*, *8см* та *21 см*. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо коефіцієнт подібності дорівнює 2.

Задача. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника лежить на даній площині *P*, а його вершина розміщена від площини *P* на відстані *a*. Проекції катетів даного трикутника на площину рівні половинам відповідних катетів. Знайти площу трикутника *ABC* та обчислити її при *a = 3см* (рис. 2.4).

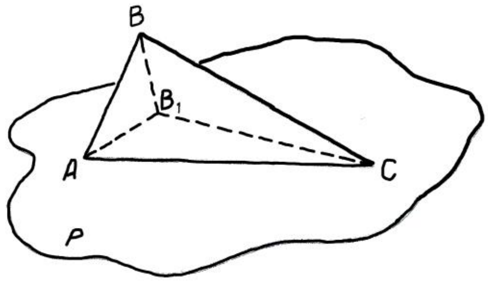

Рис. 2.4

Дано:

$\angle ABC = 90°;\ BB_1 \perp P;\ BB_1 = a = 3$(см); $B_1C = \frac{1}{2}BC;\ B_1A = \frac{1}{2}AB.$

Знайти: *S* трикутника *ABC*.

Відповідь: $S = \frac{2}{3}a^2 = 6$*(см).*

Можна навіть «дослідити» отриманий розв'язок і говорити про те, що площа трикутника *ABC* зростає при збільшенні *a*. Необхідно показати, що отримана відповідь, виражена додатнім числом, ще не говорить про те, що задача має розв'язок. І справді:

$$\angle BAB_1 = \angle BCB_1 = 60°;\ \angle BAC = \angle BAB_1 = 60°$$

(відповідно до теореми про кут між прямою і площиною). Але це невірно, так як $\angle BAC = 45°$.

Задача. Знайти периметр трапеції, кути якої при більшій основі α і β, висота h і середня лінія m. Обчислити периметр, якщо $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $h = 10$ *см*, $m = 12$ *см* (рис. 2.5).

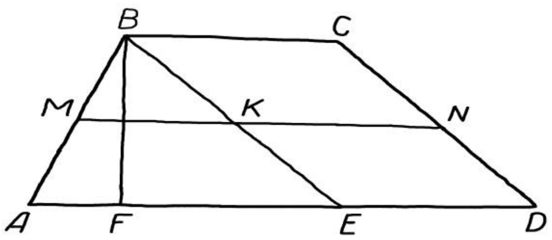

Рис. 2.5

Відповідь: $p = \dfrac{h}{\sin\alpha} + \dfrac{h}{\sin\beta} + 2\,m$; $p = (44 + 10\sqrt{2})$*см.*

Але ця відповідь невірна, так як при даних числових параметрів задача не має розв'язку. І на справді, якщо задача має розв'язок, то $MK < MN$, тобто $\frac{1}{2}AE < m$, або

$$h(ctg\,\alpha + ctg\,\beta) < 2\,m,$$

але в даному випадку: $10(1 + \sqrt{3}) \approx 27{,}2 > 24$.

Задача. Ребро правильної n-кутної піраміди дорівнює a; Плоский кут при вершині рівний α. Знайти бічну поверхню цієї піраміди і обчислити її при $a = 10$ *см*, $\alpha = 30°$, $n = 16$.

Відповідь: $S = \dfrac{1}{2}a^2 n \sin\alpha$, $S = 400\ см^2$.

Слід звернути увагу на умову можливості розв'язку задачі:

$$\begin{cases} n\alpha < 360°; \\ n \geq 3; \\ n - ціле\,число; \end{cases}$$

При $n = 16$ повинно бути $\alpha = 22°30'$.

Задача. Обчислити площу осьового перерізу обрізаного конуса, якщо висота конуса h, творча l і бічна поверхня S виражаються відповідно числами 6, 10, 50 π (рис. 2.6).

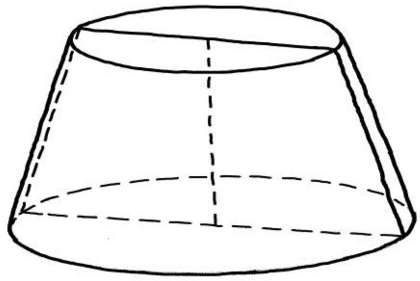

Рис. 2.6

Відповідь: $S_{січ.} = \frac{Sh}{\pi l} = 30.$

В цій задачі

$$R - r = \sqrt{l^2 - h^2} = 8(см);\quad R + r = \frac{50\pi}{10\pi} = 5(см),$$

звідси отримується безглуздий результат: $r < 0$. Задачі, подібні вказаним, можна складати самим, використовуючи числові дані не із множини допустимих значень параметрів.

Якщо аналіз задачі проведений повністю, то дослідження відповіді зводиться до звичайного констатування, що шукана величина належить множині її допустимих значень. Щоправда, у деяких задачах корисно розглядати зміну шуканої величини в залежності від зміни параметрів, а також розглядати «граничні» значення.

Деякі автори статей пропонують розглядати шукану величину як функцію деякого параметра і досліджувати її «поводження» без встановлення області її визначення. Така постановка питання невірна, так як перш ніж досліджувати функцію, потрібно встановити область її визначення. Наведені вище приклади показують необхідність цього.

На практиці вчитель не повинен вимагати від учнів розв'язку всіх задач з повним аналізом і проведенням або описом побудови. На це витрачається багато часу. Крім того, існують задачі, у яких учням складно проводити повний аналіз. Про такі випадки вчитель повинен завчасно попередити учнів. Під час розв'язку таких задач дослідження розв'язання грає велику роль. Не рідко учні знаходять множину допустимих значень величини і можливість існування фігури з дослідження розв'язку. Але дослідження формули розв'язку не завжди встановлює множину допустимих значень для параметрів, а приводить до більш ширшої множини. Крім того, можливий випадок того, що умова задачі дозволяє надати не один розв'язок, а два або декілька; досліджувати ж формули, які нами не знайдені, ми не можемо. Для підтвердження сказаного твердження про те, що аналітичне дослідження розв'язку не завжди встановлює множину значень параметрів, наведемо наступну задачу.

Задача. В трикутній піраміді всі бокові ребра і дві сторони основи рівні між собою. Бічне ребро рівне b, а кут між різними сторонами основи рівний α. Визначити повну поверхню цієї піраміди і обчислити її при $b = 6$ *см*, $\alpha = 150°$.

Формула розв'язку:

$$S_n = 2b^2 \sin(\frac{\alpha}{2} + 30°) \bullet \cos(\frac{\alpha}{2} - 30°)$$

дає можливість встановити, що $0° < \alpha < 240°$ при $b = 6$ *см*, $\alpha = 150°$ $S_n = 49{,}18$ *см*^{2}. В свою чергу, геометричний аналіз встановлює, що піраміда існує при $0° < \alpha < 120°$, а тому обчислити її поверхню при $\alpha \geq 120°$ не можна, а також не можна і дослідити розв'язок, не визначивши завчасно множину допустимих значень параметрів.

2.2. Параметри при розв’язуванні конструктивних задач

Розглянемо приклади застосування параметризації при розв’язуванні задач на побудову.

Задача 1. В трикутник з основою a, висотою h і кутом при основі, рівним α, вписаний квадрат так, що дві його вершини знаходяться на основі, а дві інші на бокових сторонах. Знайти сторону квадрата.

Аналіз.

Припустимо, що задача розв'язана. Трикутник з основою $AC = a$, висотою $BD = h$ і кутом $\angle A = \alpha$ побудувати легко. Відкинувши умову того, що дві сторони квадрата лежать на сторонах AB і BC, ми можемо побудувати один, із множини можливих, квадрат ACC_1A_1, а після цього подібно перетворити його, взявши за центр подібності точку B.

Маємо: $a > 0$; $h > 0$; $MK < h$; $MK < a$; $0 < \alpha < 180^\circ$.

Побудова.

1. На прямій XY відкладемо відрізок $AC = a$ і в точці A проведемо промінь AB під кутом α до AC.

2. Проведемо пряму $EF \parallel AC$ на відстані h від AC. Точку перетину (B) цієї прямої та сторони AB кута α з'єднаємо з C. Отримаємо трикутник ABC, що задовольняє умовам задачі.

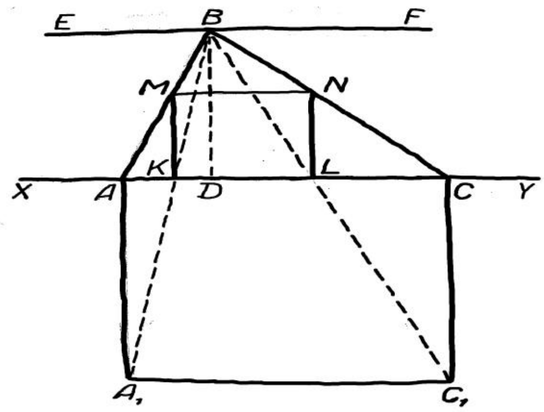

Рис. 2.7

3. На AC будуємо квадрат ACC_1A_1. З'єднаємо B з A_1 та C_1. В точках перетину (K, L) променів A_1B і C_1B з AC проводимо $KM \perp AC$ і $NL \perp AC$. Точки M і N з'єднаймо. $KM\,NL$ – шуканий квадрат.

Доведення.

$$\Delta A_1AB \sim \Delta MKB \rightarrow \frac{AA_1}{MK} = \frac{A_1B}{KB};$$

$$\Delta\, A_1BC_1 \sim \Delta\, KBL \rightarrow \frac{A_1C_1}{KL} = \frac{A_1B}{KB} = \frac{BC_1}{BL};$$

$$\Delta\, C_1BC \sim \Delta\, LBN \rightarrow \frac{CC_1}{NL} = \frac{BC_1}{BL} = \frac{BC}{BN}.$$

Порівнюючи ці пропорції, визначаємо, що

$$\frac{AA_1}{MK} = \frac{A_1C_1}{KL} = \frac{CC_1}{NL} \rightarrow MK = KL = LN.$$

Дослідження.

1. Якщо $\alpha \le 90^{\circ}$, то задача має один розв'язок. При цьому $MK < a$ і $MK < h$.

2. Якщо $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$, то задача не має розв'язків, так як при цьому одна із вершин квадрата буде лежати не на основі трикутника, а на її продовженні.

Розв'язання задачі.

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, MBN \rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{NM}{BD};\ MN = \frac{ah}{a+h}.$$

Перевіримо, чи належить розв'язок множині допустимих для нього значень. І справді, при $a > 0$; $h > 0$ маємо: $\frac{ah}{a+h} < a$, $\frac{ah}{a+h} < h$.

Відповіді:

1. При $90^{\circ} \ge \alpha > 0$ задача має єдиний розв'язок: $MK = \frac{ah}{a+h}$.

2. При $\alpha > 90^{\circ}$ задача не має розв'язків.

Задача 2. В трапеції бокові сторони рівні 3*см* і 2,6 *см*, основа 5 *см*, висота 2,4*см*. Знайти другу основу трапеції.

Побудова.

1. Відкладемо $AD = 5$*см*.

2. Проведемо пряму, паралельну AD, на відстані 2,4*см*.

3. Із A, як із центра, радіусом 3*см*, та із D, як із центра, радіусом 2,6*см* проведемо два кола відповідно.

4. Точки перетину цих кіл з прямою MN з'єднаємо з A і D.

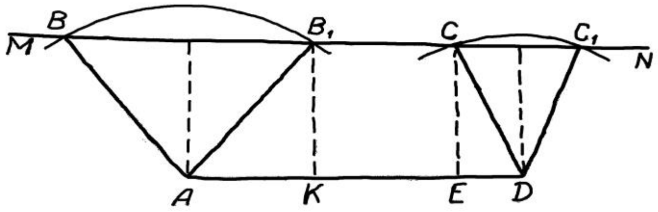

Рис. 2.8

Розв'язання.

$AK = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = 1{,}8\ (см);\ ED = \sqrt{2{,}6^2 - 2{,}4^2} = 1\ (см).$

Відповіді:

1. $B_1C = 5 - 1{,}8 - 1 = 2{,}2\ (см).$
2. $BC_1 = 5 + 1{,}8 + 1 = 7{,}8\ (см).$
3. $B_1C_1 = 5 - 1{,}8 - 1 + 1 = 4{,}2\ (см).$
4. $BC = 5 + 1{,}8 - 1 = 5{,}8\ (см).$

Задача 3. В правильній чотирикутній піраміді сторона основи рівна *a*, а кут при вершині в діагональному перерізі рівний *α*. Визначити площу перерізу, проведеного через вершину основи перпендикулярно протилежному боковому ребру.

Визначити площу перерізу при:

1. *a = 10 см, α = 68°;*
2. *a = 15 см, α = 115°.*

Побудова.

1. В фронтальній площині креслимо квадрат зі стороною a і на його діагоналі AC, як на стороні, будуємо рівнобедрений трикутник ASC с кутом при основі AC, рівним $90° - \dfrac{\alpha}{2}$; проводимо $CK \perp AS$.

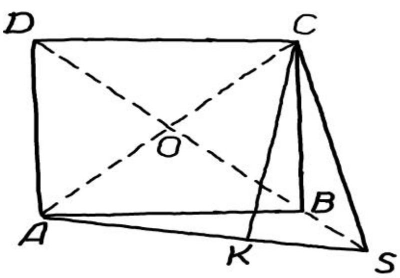

Рис. 2.9

2. В горизонтальній площині будуємо квадрат *ABCD*, користуючись правилом довільного положення оригіналу.

3. В центрі квадрата (точка *O*) проводимо перпендикуляр до площини *ABCD*.

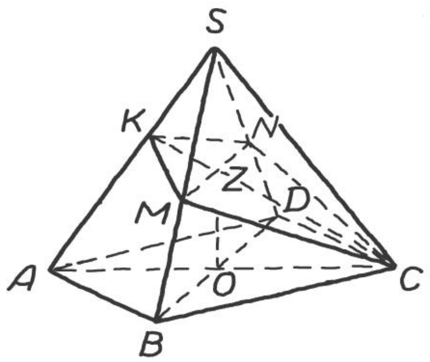

Рис. 2.10

4. На цьому перпендикулярі відкладаємо відрізок, рівний *SO* (від точки *O*) і з'єднуємо його кінець *S* з вершинами квадрата.

5. Для побудови перерізу проводимо $KC \perp AS$. Знайдемо точку *Z* через яку проведемо $MN \| BD$.

6. З'єднаємо точки *M, K, N, C.*

Доведення.

Переріз перпендикулярний ребру *AS.* І справді, за побудовою $SA \perp KC$; $MN \| BD$; $SA \perp BD$; $CA \perp MN$. Тому пряма *AS* перпендикулярна площині перерізу. Переріз являє собою дельтоїд.

Дослідження.

Піраміда можлива при умові $0^{o} < \alpha < 180^{o}$, $a > 0$, але переріз можливий при умові $0^{o} < \alpha < 90^{o}$. Очевидно, що задача має один розв'язок лише при $0^{o} < \alpha < 90^{o}$; $a > 0$:

$$S_{пер.} = a^2 \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ кв.од.}$$

Якщо *а* – дане число, то при збільшенні *α* від 0^o до 90^o площа перерізу зменшується від a^2 до 0. При цьому $S > 0$, так як $\cos\alpha > 0$ і $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.

Відповіді:

1. При $0^o < \alpha < 90^o$ задача має єдиний розв'язок: $S_{пер.} = a^2 \dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ *кв.од.*

2. При $90^o < \alpha < 180^o$ задача не має розв'язку.

3. При $a = 10$ *см*, $\alpha = 68°$ $S_{пер.} = 45 см^2$.

4. При $a = 15$ *см*, $\alpha = 115°$ задача не має розв'язку, так як значення *α* не належить множині допустимих для нього значень.

Враховуючи слабкі сторони учнів, слід направляти їх увагу на окремі етапи розв'язання, опускаючи ті моменти, які все добре засвоєнні. Але встановлення множини допустимих значень для параметрів і невідомих повинно бути під час розв'язку будь-якої задачі (як з геометрії, так і з алгебри). При цьому учень повинен розуміти, чого йому не вистачає для повноти розв'язку. Корисно при цьому давати домашні самостійні (контрольні) роботи, вимагаючи повного розв'язку.

Необхідно показати учням, що не будь-яка задача може бути розв'язана з побудовою. Можна навіть показати умову можливості або неможливості розв'язку задачі на побудову за допомогою найпростіший інструментів.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розкрито поняття внутрішньої та зовнішньої параметризації та визначити їх для основних геометричних об'єктів, розглянуто питання застосування параметризації при розв'язуванні геометричних задач на обчислення, а також розкрито питання стосовно застосування параметрів при розв'язуванні конструктивних задач та визначити кількість незалежних параметрів, які необхідні для побудови геометричних фігур. Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступне.

Під параметрами розуміють незалежні величини, які дозволяють виділити задану фігуру із множини фігур відповідно до їх означення. Визначення множини фігур грає важливу роль в питаннях параметризації. Розрізняють два види параметризації: внутрішню і зовнішню. Під внутрішньою параметризацією розуміють підрахунок числа параметрів, які необхідно задати, щоб виділити окрему фігуру з множини різних фігур, які відповідають їх означенню. При цьому положення фігури в просторі не береться до уваги. Під зовнішньою параметризацією розуміють операцію підрахунку числа параметрів, необхідних для виділення окремого положення фігури із даної множини всіх конгруентних фігур в просторі.

Параметрами фігури можуть бути не тільки основні елементи (довжини сторін і ребер, плоскі і двогранні кути), але і будь-які інші їх елементи, наприклад, радіус вписаної кулі, кут між висотою і бісектрисою тощо, а також їх комбінації: сума трьох медіан; добуток вписаного, описаного і поза вписаного кіл; частка від ділення об'єму тіла на його бічну поверхню; відношення площі бічної поверхні піраміди до площини основи тощо; і нарешті, можуть бути сформульовані різні умови, наприклад, площа плоскої фігури повинна бути найменшою.

Кількість n незалежних параметрів, які в повному обсязі визначають дану фігуру, залежить тільки від самої фігури, але зовсім не залежить від того, які саме параметри ми вибираємо. Вибір n параметрів в кожному окремому випадку визначається конкретними умовами; зокрема, тим, чи йде мова про проектування нової фігури, вимірюванні існуючої, виготовлення за кресленням чи за моделлю і т. д. Якщо замість необхідних n параметрів відомо тільки $n - k$ параметрів фігури, то відома не одна конкретна фігура, а родина фігур, які мають $n - k$ загальних параметрів.

Як відомо, існують задачі, які мають різні розв'язки для різних допустимих значень параметрів, а також задачі, які не мають розв'язків. В різних частинах множини допустимих значень параметра ми отримаємо різні розв'язки, якщо ж цього не враховувати, то можна зробити грубу помилку. Розв'язати задачу на обчислення з параметрами означає знайти множину всіх її розв'язків для кожного з допустимих значень параметрів. При цьому суттєве значення мають аналіз задачі і дослідження отриманої відповіді. Аналіз задачі необхідний, оскільки він допомагає учням краще зрозуміти умову задачі, встановити можливість існування і з'ясувати реальний сенс фігури, служить засобом розвитку логічного мислення і просторової уяви учнів. Дослідження отриманого розв'язку переконує учнів в правильності або неправильності і в повноті відповіді.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амелькин В.В. Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике / В.В. Амелькин, В.Л. Рабцевич. – Мн. : ООО «Асар», 2004. – 464 с.
2. Болтянский В.Г. Выпуклые многоугольники и многогранники / В. Г. Болтянский, И. М. Яглом // Математика в школе. – 1966. – № 3. – С. 12-18.
3. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / В.И. Голубев. – М. :Наука, 2007. – 252 с.
4. Горбачев В.И. Методы решения уравнений и неравенств с параметрами / В.И. Горачев. – Брянск : Атлант, 1999. – 148 с.
5. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами / П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – К. : РИА "Текст"; МП "ОКО", 1992. – 290 с.
6. Горнштейн П.И. Задачи с параметрами / П.И. Горнштейн. – М. : Гимназия, 2002. – 198 с.
7. Ефимов Е.А. Задачи с параметрами: Учебное пособие для факультета довузовской подготовки СГАУ / Е.А. Ефимов, Л.В. Коломиец. – Самара, 2006. – 64 с.
8. Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор. – М. : ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. – 416 с.
9. Иванов С. О. Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5 / С. О. Иванов, Е. А. Войта, А. С. Ковалевская, Л. С. Ольховая; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. – 48 с.
10. Козко А.И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А.И. Козко, В.Г. Чирский. – М. : МЦНМО, 2007. – 296 с.

11. Локоть В.В. Задачи с параметрами / В.В. Локоть. – М. : Айки, 2003. – 168 с.
12. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники / Л. А. Люстерник. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1986. – 96 с.
13. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практик / В.В. Мирошин. – М. : Экзамен, 2009. – 286 с.
14. Моденов В.П. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие / В.П. Моденов. – М. : Издательство «Экзамен», 2007. – 285 с.
15. Натяганов В.Л. Методы решения задач с параметрами: Учеб. пособие / В.Л. Натяганов, Л.М. Лужина. – М. : Изд-во МГУ, 2003. – 368 с.
16. Нырко В.А. Задачи с параметрами / В.А. Нырко, В.А. Табуева. – Екатеринбург : УГТУ, 2001. – 218 с.
17. Потапов М.К. Уравнения и неравенства с параметрами / М.К. Потапов, Н.Н. Олехник, Ю.В Нестеренко. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 126 с.
18. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами: пособие по математике для учащихся старших классов / А.А. Прокофьев. – М. : МИЭТ, 2004. – 258 с.
19. Севрюков П. Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. – Изд. 2-е, испр. и доп. – Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 212 с.
20. Субханкулова С.А. Задачи с параметрами / С.А. Субханкулова. – М.: Изд-во МГУ, 2010. – 208 с.
21. Тиняков Г.А. Задачи с параметрами / Г.А. Тиняков, И.Г. Тиняков. – М. : Наука, 1996. – 98 с.
22. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами / Г.А. Ястребинецкий. – М. : Просвещение, 1988. – 132 с.