МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ГЕОМЕТРИЧНІ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАЧ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "бакалавр"

Виконала: студентка 421 групи

Спеціальності 014 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка

кваліфікація: вчитель математики

Віниченко Аліна Степанівна

Керівник: Григор'єва В.Б., кандидатка педагогічних наук, ст. викладачка

Рецензент: Спичак Т.С., кандидатка педагогічних наук, доцентка

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією з актуальних проблем математичної освіти є проблема інтеграції математичних знань, формування цілісних уявлень про математику як науку. Особливо важливим є розв’язання цієї проблеми для основної школи, де вивчаються дві математичні дисципліни: алгебра та геометрія.

Оскільки у навчанні математики основним видом діяльності учнів є розв’язування задач, то доцільно інтеграцію алгебри та геометрії здійснювати по лінії їх методів. Кожен метод складається з певних прийомів, а кожен прийом – з дій. Таким чином, інтеграція алгебраїчного та геометричного методів – це процес поєднання даних методів. В галузі розв’язування задач інтеграція цих методів передбачає паралельне розв’язування задачі різними методами або розв’язування геометричної задачі засобами алгебри.

Проблемою розв’язування задач займалася в свій час достатня кількість математиків та методистів. Зокрема, у дослідженнях Фрідмана Л.М. знайшла своє відображення проблема організації діяльності по розв’язуванню задач, в достатньо загальному вигляді Пойа Д. була розроблена методика розв’язування задач. Проте дана проблема залишається актуальною і в наш час, що і обумовило вибір теми дослідження.

Розв’язання будь-якої задачі з геометрії залежить від рівня сформованості навичок використання конкретних методів розв’язування та їх сукупностей. Велике значення при цьому має вміння знаходити різні способи розв’язування задач. При відшуканні цих способів формується пізнавальний інтерес, розвиваються творчі здібності, відпрацьовуються дослідницькі навички. Тому пошук різних способів розв’язування задач є передумовою успішного її розв’язання.

При цьому слід зазначити, що геометричні задачі та прийоми їх розв’язання настільки різноманітні, що неможливо запропонувати яку-небудь зручну класифікацію, за якою можна було б визначити спосіб розв’язання кожної конкретної задачі. Майже кожна задача може бути вирішена різними способами. Вдалий вибір невідомих, зручний малюнок, додаткові геометричні побудови і охайне оформлення розв’язання допомагають правильно зрозуміти задачу і знайти найпростіший спосіб її розв'язання. Саме методам розв’язування геометричних задач і присвячена дана робота.

Мета даної роботи полягає у розгляді алгебраїчних та геометричних методів розв’язування задач з геометрії.

Об’єктом дослідження виступають загальні методи та прийоми розв’язування геометричних задач, а ***предметом*** дослідження – частинні способи відшукання розв’язків цих задач.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання*** роботи:

1. Розглянути формальні геометричні способи розв’язування задач з геометрії, які передбачають застосування властивостей планіметричних фігур та допоміжні побудови.

2. Розглянути деякі алгебраїчні методи розв’язування геометричних задач, які пов’язані із застосуванням певних співвідношень та тверджень алгебраїчного характеру.

Основні ***методи***, що використовувалися в дослідженні – це метод додаткової побудови, метод подібності та алгебраїчний метод розв’язування геометричних задач.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Робота складається з двох основних розділів.

Перший розділ присвячений геометричним методам розв’язування задач. Зокрема, в ньому на конкретних прикладах продемонстровано застосування допоміжних побудов, використання додаткових елементів або частин фігур, а також допоміжних фігур, в якості яких найчастіше виступають трикутники та кола.

Другий розділ присвячений алгебраїчним способам розв’язування задач з геометрії. В ньому наведено приклади використання так званого алгебраїчного методу, що полягає у зведенні розв’язання геометричної задачі до розв’язання алгебраїчного рівняння або системи рівнянь, а також приклади застосування елементів тригонометрії при обчисленні лінійних елементів фігур або їх площ та об’ємів.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів, а також вчителями загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій.

РОЗДІЛ 1
ГЕОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1.1. Добудова фігури

Розв'язання задачі в деяких випадках значно прискориться, якщо заздалегідь визначити вид, який може (або не може) мати початкова фігура.

Задача 1.1. Навколо трикутника AMB описано коло, центр якого віддалений від сторони AM на відстань 10. Продовження сторони AM за вершину M відсікає від дотичної до кола, проведеної через вершину B, відрізок BC, рівний 29. Знайти площу трикутника BMC, якщо відомо, що кут ACB дорівнює $arctg\frac{20}{21}$.

Визначимо вид трикутника BMC, проведемо його висоту BM_1, продовжмо її до перетину з колом в точці M_2 та зпроектуємо центр кола O на сторону AM та хорду BM_2 (рис. 1.1).

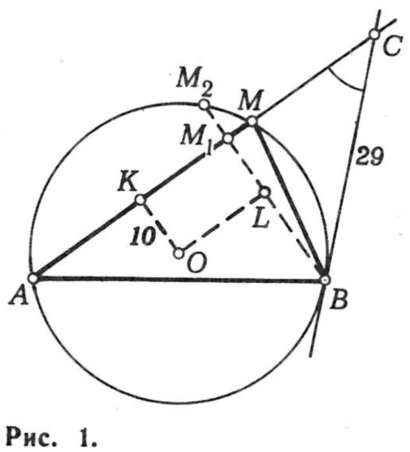

Рис. 1.

Тоді, за умовою ,

$$|OK| = 10,\ |BM_1| = |BC|\sin ACB = 29\sin\left(arctg\frac{20}{21}\right) = 29\cdot\frac{20}{29} = 20 = 2|OK|,$$

$$|BM_2| = 2|BL| = 2\big(|BM_1| - |KM_1|\big) = 2\big(|BM_1| - |OK|\big) =$$
$$= 2|BM_1| - 2|OK| = 2|BM_1| - |BM_1| = |BM_1|$$

Це означає, що точки M, M_1 і M_2 співпадають (рис. 1.2),

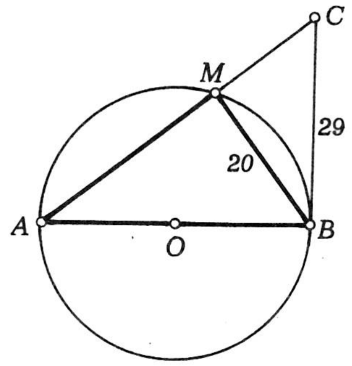

Рис. 2.

отже, точка O належить $[AB]$ і трикутник BMC – прямокутний.

Задача 1.2. В трикутнику ABC сторона $|AC| = 3$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{6}$ та радіус описаного кола дорівнює 2. Довести, що площа трикутника ABC строго менше 3.

Покажемо, що ΔABC не може бути прямокутним. Справді, проведемо в колі радіуса 2 з точки A хорди AC, AB_1, AB_2 і діаметр AD (рис. 1.3).

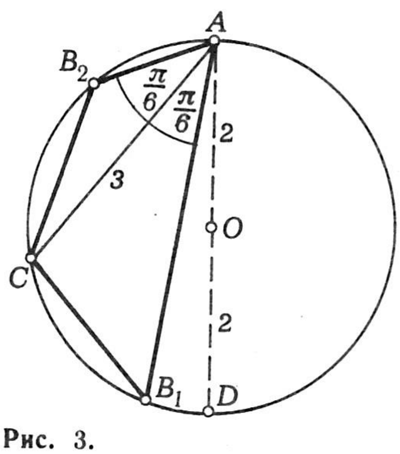

Рис. 3.

так, щоб $|AC| = 3, \angle B_1AC = \angle B_2AC = \dfrac{\pi}{6}$. Відрізок AB_1 не співпадає з відрізком AD, оскільки $\angle CAB_1 = \dfrac{\pi}{6} \neq \arccos\dfrac{3}{4} = \arccos\dfrac{|AC|}{|AD|} = \angle CAD$. Отже,

$\angle ACB_1 \neq \dfrac{\pi}{2}$ і $|AB_1| < |AD|$. Тому,

$$S_{\Delta AB_1C} = \frac{1}{2}|AC|\cdot|AB_1|\sin B_1AC < \frac{1}{2}|AC|\cdot|AD|\sin B_1AC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin\frac{\pi}{6} = 3.$$

Нерівність $S_{\Delta AB_2C} < 3$ легко слідує з $|AB_2| < |AC| = 3$.

Всяке геометричне розв'язання геометричної задачі починається з роботи над кресленням. При цьому іноді на «природному» кресленні (тобто на кресленні, на якому тільки «зображено» умова) важко помітити зв'язки між даними і шуканими величинами, а якщо фігуру «добудувати», ці зв'язки стають очевидними.

Задача 1.3. Довжини основи CD, діагоналі BD і бічної сторони AD трапеції $ABCD$ рівні між собою і дорівнюють p. Довжина бічної сторони BC дорівнює q. Знайти довжину діагоналі AC.

У даній трапеції $ABCD$ (рис. 1.4) нелегко побачити зв'язок між шуканої діагоналлю AC та іншими відрізками.

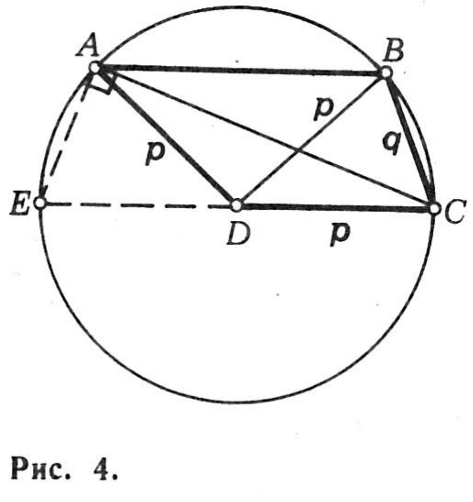

Рис. 4.

Якщо ж, врахувати, що точка D рівновіддалена від точок A, B і C, провести коло $O(D, p)$ і «добудувати» дану трапецію до рівнобедрений трапеції $ABCE$, з прямокутного трикутника ACE легко знайдемо $|AC| = \sqrt{4p^2 - q^2}$.

Задача 1.4. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD бісектриса кута B перпендикулярна бічній стороні AD і перетинає її в точці E. У якому відношенні пряма BE ділить площу трапеції, якщо відомо, що довжина відрізка AE в два рази більше довжини відрізка DE ?

Якщо «добудувати» дану трапецію $ABCD$ до трикутника AFB (рис. 1.5), отримаємо рівнобедрений трикутник, від якого відрізок DC

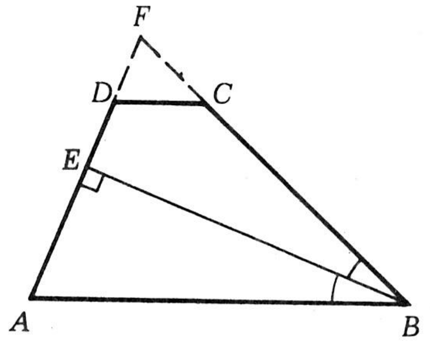

Рис. 5.

відсікає подібний трикутник DFC з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{4}$. Тому шукане відношення дорівнює

$$\frac{S_{EDCB}}{S_{\Delta AEB}} = \frac{S_{\Delta EFB} - S_{\Delta DFC}}{S_{\Delta AEB}} = \frac{\frac{1}{2}S_{\Delta AFB} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_{\Delta AFB}}{\frac{1}{2}S_{\Delta AFB}} = \frac{7}{8}.$$

У деяких випадках суттєвим моментом в геометричному розв'язанні задачі є встановлення конгруентності деяких кутів. Найчастіше такі кути є відповідними в подібних трикутниках або багатокутниках. Проте можливі такі ситуації, коли конгруентність розглянутої пари кутів випливає з конгруентності іншої пари кутів, величини яких відомі. Наприклад, близько чотирикутника $ABCD$ тоді і тільки тоді можна описати коло, коли $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Легко довести, що ця умова рівносильна умові $\angle ABD = \angle ACD$. Таким чином, рівності

$$\angle ABD = \angle ACD,\ \angle ACB = \angle ADB, \angle BAC = \angle BDC, \angle CAD = \angle CBD$$

рівносильні (рис. 1.6).

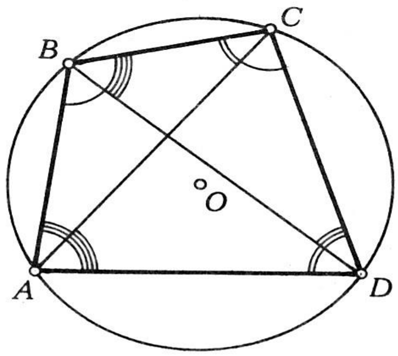

Рис. 6.

Задача 1.5. Точка E лежить на стороні AC правильного трикутника ABC; точка K – середина відрізка AE. Пряма,що проходить через точку E перпендикулярно (AB), і пряма, що проходить через точку C перпендикулярно (BC), перетинаються в точці D. Знайти кути трикутника BKD.

Нехай пряма ED перетинає пряму AB в точці F (рис. 1.7).

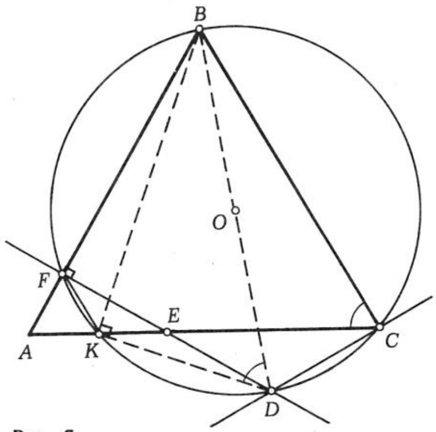

Рис. 7.

Тоді трикутник AFE – прямокутний, причому $[FK]$ – медіана. Отже, трикутник AFK – правильний трикутник, гомотетичний даному трикутнику ABC. Тому $[FK] \parallel [BC]$ і чотирикутник $BFKC$ – рівнобедрена трапеція. Отже, навколо нього можна описати коло. З $\angle BFD + \angle BCD = 90° + 90° = 180°$ випливає, що точка D належить тому самому колу. Тому $\angle BKD = \angle BFD = 90°, \angle KDB = \angle KCB = 60°$ і $\angle DBK = 30°$.

Задача 1.6. На бісектрисі кута з вершиною L взята точка A. Точки K і M – основи перпендикулярів, опущених з A на сторони кута. На відрізку KM взята точка $P(|KP|<|PM|)$ і через точку P перпендикулярно до відрізка AP проведена пряма, яка перетинає пряму KL в точці Q (K між Q і L), а пряму ML – у точці S. Відомо, що $\angle KLM = \alpha, |KM| = a, |QS| = b$. Знайти довжину відрізка KQ.

Як відомо, $|AK| = |AM|$. Легко збагнути, що $\angle AKM = \angle ALK = \frac{\alpha}{2}$. Тому $|AK| = \dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Навколо чотирикутників $APKQ(\angle APQ = \angle AKQ = 90°)$ і $APSM(\angle APS + \angle AMS = 90° + 90° = 180°)$ можна описати кола (рис. 1.8).

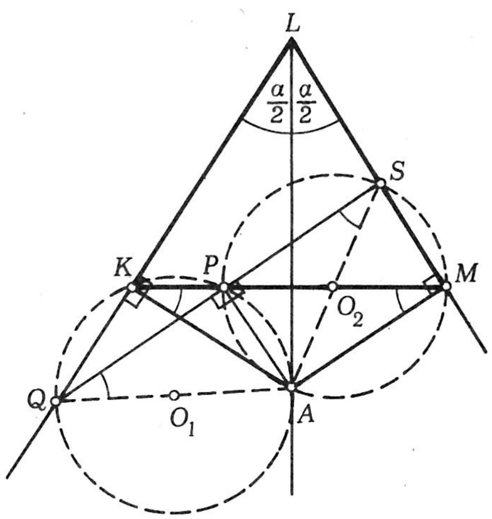

Рис. 8.

Оскільки

$$\angle AQS = \angle AQP = \angle AKP = \angle AKM = \angle AMK = \angle AMP = \angle ASP = \angle ASQ = \frac{\alpha}{2},$$

трикутник AQS – рівнобедрений. З трикутника AQS знаходимо $|AQ|$, потім з прямокутного трикутника AKQ – $|KQ| = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Пошук геометричного рішення задачі можна вести в напрямку розгляду фігур, властивості яких добре вивчені. Однією з таких фігур, безсумнівно, є трикутник. Вірний і добрий помічник - трикутник -

справді всюдисущий і часом незамінний в наших міркуваннях, у знаходженні простих і зрозумілих розв'язків.

Задача 1.7. Дана прямокутна трапеція, основи якої рівні a і b $(a<b)$. Відомо, що деяка пряма, паралельна основам, розтинає її на дві трапеції, в кожну з яких можна вписати коло. Визначити радіуси цих кіл.

Добудуємо дану трапецію $ABCD$ до трикутника (рис. 1.9).

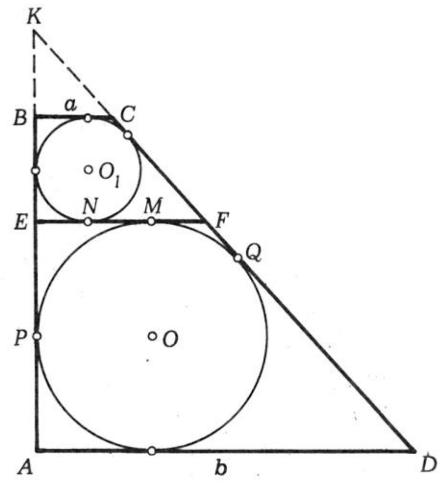

Рис. 9.

Нехай кола, вписані в трапеції $AEFD$ і $EBCF$, дотикаються $[EF]$ в точках M і N, а радіуси їх будуть R і r відповідно. Оскільки дана трапеція – прямокутна, $|EM|=R$, $|EN|=r$. З рівності $|KP|=|KQ|$ легко вивести $|EN|=|MF|$. (Це твердження має загальний характер: у будь-якому трикутнику точки дотику вписаного і позавписаного кіл рівновіддалені від кінців сторони, якої вони дотикаються. Позавписане коло - це коло, що дотикається сторони трикутника і продовжень двох інших.) Значить, $|EF|=R+r$. З подібності трикутників BKC, EKF і AKD отримуємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{a}{R+r}=\dfrac{r}{R}, \\ \dfrac{R+r}{b}=\dfrac{r}{R} \end{cases}$$

(у подібних трикутниках як радіуси вписаних, так і радіуси позавписаних кіл відносяться як відповідні сторони), з якої $R=\dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,

$$r=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Задача 1.8. У прямокутнику $ABCD$ $\left(|BC|>|CD|\right)$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Бісектриса кута CAD перетинає $[BD]$ в точці E. Нехай F – основа перпендикуляра, опущеного з точки E на сторону AD; точка K – середина $[AD]$. Через точку E проведено також перпендикуляр до $[AE]$ до перетину з діагоналлю AC в точці H. Знайти площу $ABCD$, якщо $|OH|=b, |KF|=\frac{4}{3}b.$

Проведемо $[EL]\parallel [AD]$, де $L\in[AO]$ (рис. 1.10).

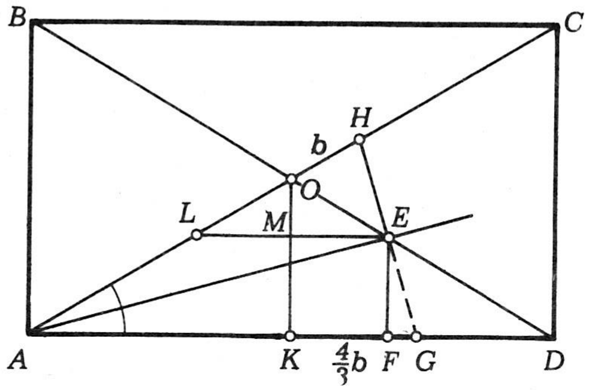

Рис. 10.

Оскільки

$$\angle AEL=\angle EAD=\angle EAC\,,\;|AL|=|LE|=2|ME|=2|KF|=\frac{8}{3}b\,.$$

Продовжимо перпендикуляр HE до перетину з $[AD]$ у точці G. Трикутник AHG – рівнобедрений ($[AE]$ – бісектриса і висота). Оскільки $[LE]$ середня лінія в ньому, трикутник LHE також буде рівнобічним. Тому

$$|OM|=\sqrt{|OL|^2-|LM|^2}=$$

$$=\sqrt{\left(|LH|-|OH|\right)^2-|ME|^2}=\sqrt{\left(|LE|-|OH|\right)^2-|KF|^2}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}b-b\right)^2-\left(\frac{4}{3}b\right)^2}=b\,.$$

Використовуючи подібність трикутників ACD і LOM з коефіцієнтом подібності

$$k=\frac{|AC|}{|LO|}=\frac{2|AO|}{|LH|-|OH|}=\frac{2(|AL|+|LH|-|OH|)}{|LE|-|OH|}=\frac{2\left(\frac{8}{3}b+\frac{8}{3}b-b\right)}{\frac{8}{3}b-b}=5{,}2$$

знаходимо шукану площу

$$S_{ABCD}=2S_{\Delta ACD}=2k^2S_{\Delta LOM}=k^2\cdot|LM|\cdot|OM|=(5{,}2)^2\cdot\frac{4}{3}b\cdot b=\left(36\frac{4}{75}\right)b^2.$$

Задача 1.9. Навколо кола описана рівнобедрена трапеція з основами AD і BC $(|AD|>|BC|)$. Пряма, паралельна діагоналі AC, перетинає сторони AD і CD відповідно в точках M і N і дотикається кола в точці P. Визначити кути трапеції, якщо $\frac{|MP|}{|PN|}=k$.

Розгляд подібних трикутників ACD і MND (рис. 1.11) приводить до нескладного геометричного розв'язання.

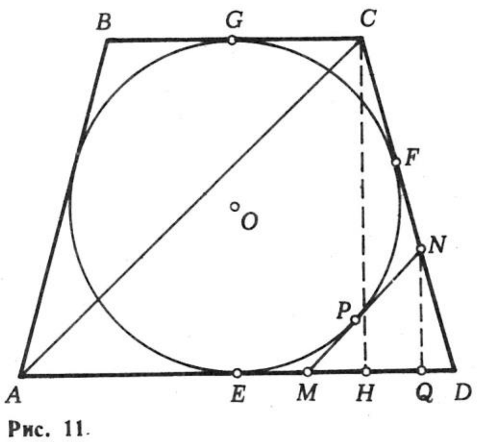

Рис. 11.

Позначимо через E, F і G точки дотику кола зі сторонами AD, CD і BC відповідно, через H і Q – проекції точок C і N на сторону AD. Положимо $|PN|=1$. Тоді

$$|MP|=k,\ |AH|=|AE|+|EH|=|ED|+|GC|=|DF|+|FC|=|DC|.$$

За властивістю подібності в трикутнику MND буде $|MQ|=|DN|$.

Тому

$$|MN|=|MP|+|PN|=k+1, |DQ|=|DE|-|QM|-|ME|=|DF|-|DN|-|MP|=$$

$$=|NF|-|MP|=|NP|-|MP|=1-k,$$

$$2|NQ|^2 = \left(|MQ^2| + |NQ|^2\right) - \left(|DN|^2 - |NQ|^2\right) = |MN|^2 - |DQ|^2 = (k+1)^2 - (1-k)^2 = 4k ,$$

$$|NQ| = \sqrt{2k}.$$

Отже,

$$tg\angle D = \frac{|NQ|}{|DQ|} = \frac{\sqrt{2k}}{1-k},\ \angle A = \angle D = arctg\frac{\sqrt{2k}}{1-k},\ \angle B = \angle C = \pi - arctg\frac{\sqrt{2k}}{1-k}.$$

1.2. Застосування подібних трикутників

При розв'язуванні геометричних задач «ключем» часто є подібні трикутники. В одних задачах подібні трикутники задані в умові, в інших вони «замасковані» і тому відразу не кидаються в очі; зустрічаються і такі задачі, в яких подібних трикутників взагалі немає, а щоб їх отримати, потрібно зробити деякі додаткові побудови. Навчитися «бачити» подібні трикутники дуже корисно – зазвичай вони полегшують розв’язання задачі.

Задача 1.10. Всередині трикутника ABC взята довільна точка O і через неї проведено три прямі, паралельні сторонам трикутника. Ці прямі ділять трикутник ABC на шість частин, три з яких є трикутниками. Радіуси кіл, вписаних в ці трикутники, рівні r_1, r_2, r_3; радіус кола, вписаного в трикутник ABC, дорівнює r. Довести, що $r = r_1 + r_2 + r_3$.

Відразу видно, що побудовані трикутники подібні трикутнику ABC (рис.1.12).

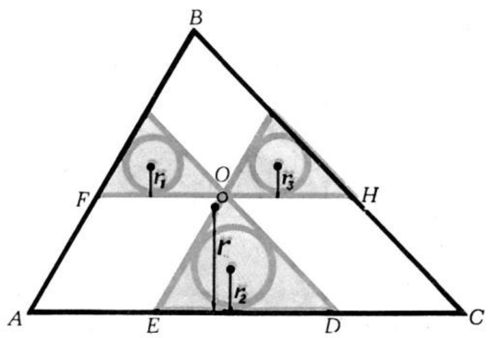

Рис. 1.

Тому

$$\frac{r_1}{r}=\frac{FO}{AC};\ \frac{r_2}{r}=\frac{ED}{AC};\ \frac{r_3}{r}=\frac{OH}{AC}.$$

Додавши ці рівності почленно, отримаємо

$$\frac{r_1+r_2+r_3}{r}=\frac{FO+ED+OH}{AC}=\frac{AE+ED+DC}{AC}=1\ ,$$

звідки $r_1+r_2+r_3=r$.

Задача 1.11. Довести, що висоти гострокутного трикутника є бісектрисами трикутника, утвореного відрізками, що з'єднують основи висот.

З подібності трикутників $AB'B$ і $AC'C$ (рис. 1.13)

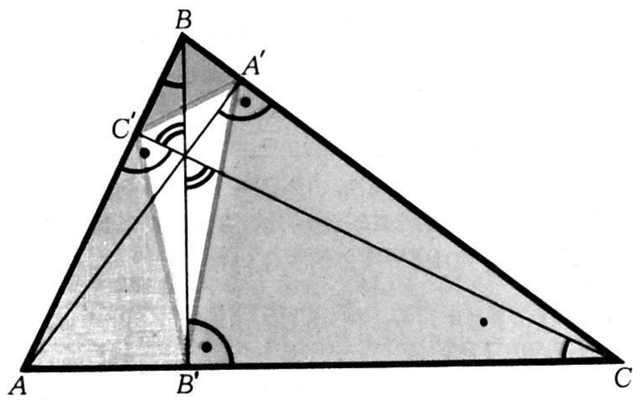

Рис. 2.

слідує те, що $\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{AB}$, тому і трикутники $AC'B'$ і ABC подібні, так як кут A в них спільний, а сторони які утворюють даний кут пропорційні. Аналогічно можна довести, що подібні трикутники $CA'B'$ і ABC, $BA'C'$ і ABC. Отже, $\angle AB'C'=\angle CB'A'=\angle ABC$, звідки $\angle C'B'B=\angle A'B'B$. Аналогічно доводиться, що $A'A$ і $C'C$ є бісектрисами трикутника $A'B'C'$.

Задача 1.12. Коло радіуса R проходить через вершину B рівнобедреного трикутника ABC, дотикається основи AC в точці A і перетинає бічну сторону BC у точці D. Знайти довжину бічної сторони AB, якщо $\frac{BD}{DC}=k$.

Нехай $AB=x$. Зауважимо, що трикутники ABC і EOB подібні (рис. 1.14).

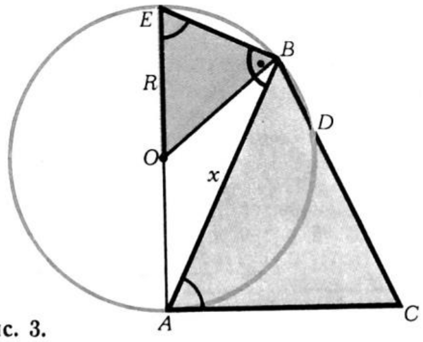

Рис. 3.

Дійсно, обидва вони рівнобедрені, а кути при основах вимірюються половиною однієї і тієї ж дуги BDA. Тому $\frac{x}{R}=\frac{CA}{BE}$. Враховуючи, що $BE^2=4R^2-x^2$ за теоремою Піфагора з прямокутного трикутника ABE, $CA^2=CD\cdot CB$ за теоремою про дотичну і січну

$$x=BC=BD+CD=(k+1)CD,$$

отримуємо рівняння

$$\frac{x^2}{R^2}=\frac{\frac{x}{k+1}x}{4R^2-x^2},$$

з якого знаходимо $x=R\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}$.

Прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного з них дорівнює гострому куту іншого. Це часто використовується при розв'язанні задач.

Задача 1.13. Серединний перпендикуляр до гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC перетинає катет AC в точці M, а продовження катета BC – в точці N. Визначити AB, якщо $MP=a$, $MN=b$.

Нехай $AB=x$. Легко переконатися, що трикутники AMP і NBP подібні (рис. 1.15), тому $\frac{a}{x}=\frac{x}{a+b}$, звідки

$$x=\sqrt{a(a+b)},\ AB=2\sqrt{a(a+b)}.$$

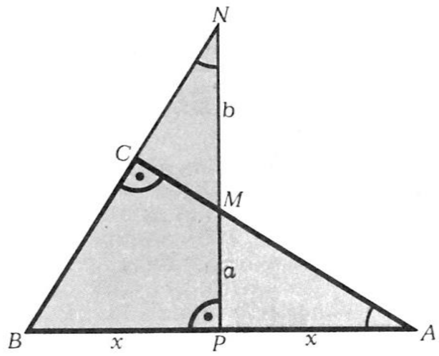

Рис. 4.

Задача 1.14. Знайти площу ромба $ABCD$, якщо радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABC і ABD, рівні відповідно R і r.

Насамперед зазначимо, що центрами кіл будуть точки O_1 і O_2, перетину серединного перпендикуляра до сторони AB з діагоналями ромба (рис. 1.16).

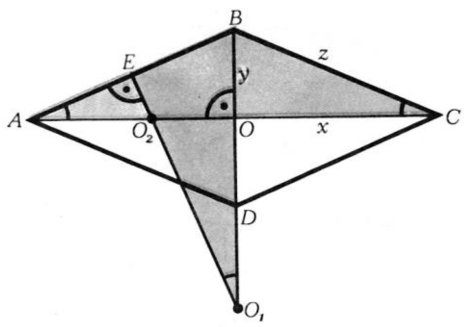

Рис. 5.

Тепер неважко побачити, що трикутники AO_2E, O_1BE, ABO (або CBO) подібні. Нехай $AO = x$, $BO = y$ і $AB = z$, тоді

$$\frac{z}{2r} = \frac{x}{z}, \ -\frac{z}{2R} = \frac{y}{z} \ .$$

Знайдемо $z^2 = \dfrac{4r^2R^2}{r^2 + R^2}$ та площу ромба

$$S = 2xy = \frac{z^4}{2Rr} = \frac{8r^3R^3}{\left(r^2 + R^2\right)^2} \ .$$

Задача 1.15. В рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) на висоті BO як на діаметрі побудовано коло. Через точки A і C до кола проведені дотичні AM і CM, продовження яких перетинаються в точці

O. Визначити відношення $\frac{AB}{AC}$, якщо $\frac{OM}{AC}=k$ і висота BD менше основи AC.

За умовою задачі $BD<AC$, тобто діаметр кола менше основи трикутника, тому точка O лежить на продовженні BD за точку B (рис. 1.17).

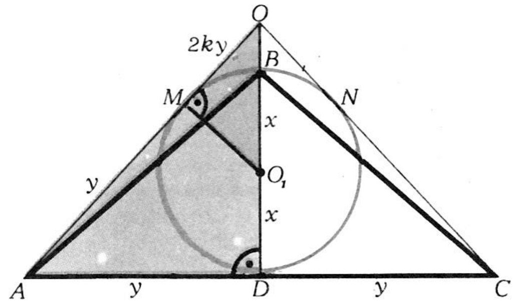

Рис. 6.

Нехай $BD=2x$, $AC=2y$, тоді

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{BD^2+AD^2}}{2AD}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{BD^2}{AD^2}+1}=\frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

Далі, трикутники O_1OM і AOD подібні, тому $\frac{O_1M}{AD}=\frac{OO_1}{OA}$, тобто

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{x^2+4k^2y^2}}{y+2ky},$$

звідки

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{k}{k+1},\ \frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}.$$

Задача 1.16. В рівнобедреному трикутнику ABC $(AB=BC)$ висота AF перетинає висоту BD в точці О, причому $\frac{BO}{OD}=n$. В якому відношенні бісектриса AE ділить висоту BD?

За властивістю бісектриси $\frac{BG}{GD}=\frac{AB}{AD}$, а за теоремою Піфагора $AB=\sqrt{BD^2+AD^2}$, тому $\frac{BG}{GD}=\frac{\sqrt{BD^2+AD^2}}{AD}=\sqrt{\frac{BD^2}{AD^2}+1}$ (рис. 1.18).

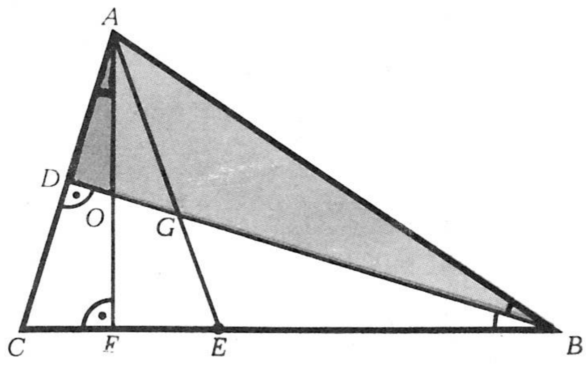

Рис. 7.

Зараз зауважимо, що $\angle ABD = \angle CBD = \angle FAC$, отже трикутники AOD і BAD подібні. Тому $\frac{AD}{OD} = \frac{BD}{AD}$, звідки $AD^2 = OD \cdot BD$ і

$$\frac{BG}{GD} = \sqrt{\frac{BD}{OD} + 1} = \sqrt{\frac{BO + OD}{OD} + 1} = \sqrt{n+2}.$$

Рівні кути (та подібні трикутники) нерідко з'являються в задачах, в яких є паралельні прямі. Якщо ж таких прямих немає, то їх можна провести.

Задача 1.17. У трапеції $ABCD$ (AB і CD - основи) $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$). Коло, що проходить через вершини A, B і C, дотикається сторони AD. Знайти діагональ AC.

Зауважимо, що $\angle ACD = \angle BAC$, $\angle ABC = \angle CAD$ (рис. 1.19).

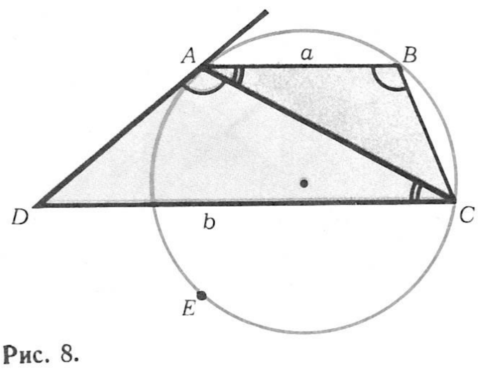

Рис. 8.

Отже, трикутники ABC і CAD подібні. Тому, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC}$, звідки $AC = \sqrt{ab}$.

Задача 1.18. У трапеції $ABCD$ проведено діагоналі AC і BD, що перетинаються в точці F. З вершини C проведена пряма CK, паралельна бічній стороні AD, яка перетинає BD в точці L так, що $DF = BL$. Знайти відношення $AB : CD$.

Позначимо шукане відношення через x. Тоді з подібності трикутників AFB і CFD (рис. 1.20).

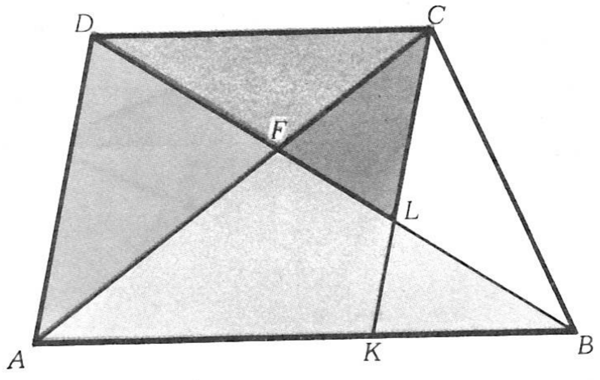

Рис. 9.

отримаємо

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AF}{CF}=\frac{FB}{DF}=\frac{FL+LB}{DF}=\frac{FL+DF}{DF},$$

звідки $\frac{FL}{DF}=x-1$. З іншої сторони, з подібності трикутників ADF і CLF $\frac{FL}{DF}=\frac{FC}{AF}=\frac{1}{x}$. Отже, для визначення x отримуємо квадратне рівняння $x^2-x-1=0$, звідки $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (оскільки $x>0$).

Задача 1.19. У трикутнику ABC через основу D висоти BD проведена пряма паралельно стороні AB до перетину зі стороною BC у точці K. Знайти відношення $BK:KC$, якщо площа трикутника BDK становить $\frac{3}{16}$ площі трикутника ABC.

Позначимо шукане відношення через x. Проведемо $DL\|BC$ (рис. 1.21).

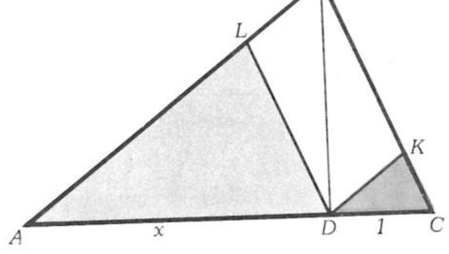

Рис. 10.

і помітимо, що $x = \frac{BK}{KC} = \frac{AD}{DC}$. Далі розв’язуємо задачу користуючись подібністю трикутників ABC, ALD і DKC: з однієї сторони, $S_{\Delta ALD} + S_{\Delta DKC} = S_{\Delta ABC} - 2S_{\Delta BDK} = \frac{5}{8}S_{\Delta ABC}$, а з іншої сторони

$$S_{\Delta ALD} + S_{\Delta DKC} = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2},$$

звідси отримуємо рівняння $\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{5}{8}$, або $3x^2 - 10x + 3 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

1.3. Застосування допоміжного кола

Розв’язання багатьох геометричних задач починається з проведення допоміжних ліній, які допомагають встановити зв'язок між відомими і невідомими елементами фігури. Відшукати вдалу допоміжну побудову часто буває нелегко. Тому до кожної розв’язаної задачі слід придивитися і спробувати з'ясувати, чому ті чи інші допоміжні лінії приводять до мети. Один з цікавих прийомів розв'язання геометричних задач полягає в тому, що в креслення вводиться допоміжне коло.

Задача 1.20. В гострокутному трикутнику проведені висоти AP, BQ, та CR. Довести, що $\angle ABQ = \angle APR$.

Нехай H – точка перетину висот трикутника ABC (рис.1.22).

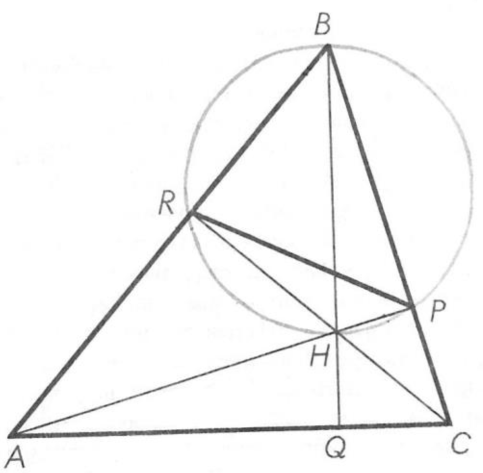

Рис. 1.

Так, як $\angle APB$ та $\angle CRB$ прямі, навколо чотирикутника $BPHR$ можна описати коло, приймаючи BH за діаметр. Побудувавши його, помічаємо, що $\angle ABQ = \angle APR$ (як вписані кути, що спираються на одну дугу). Таким чином, побудова допоміжного кола дозволила використовувати теорему про вписані кути і завдяки цьому встановить зв'язок між зазначеними в задачі кутами.

Задача 1.21. Довести, що відрізок, що з'єднує основи двох висот гострокутного трикутника, відсікає від нього трикутник, подібний даному.

Нехай AA_1 та BB_1– висоти гострокутного трикутника ABC (рис. 1.23).

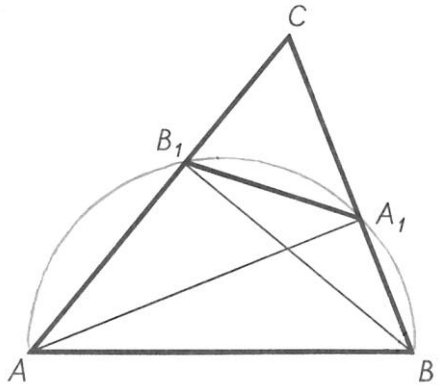

Рис. 2.

$\angle AA_1B$ та $\angle AB_1B$ прямі, тому коло, побудоване на стороні AB трикутника як на діаметрі, пройде через точки A_1 та B_1. Далі,

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle AB_1A_1,\ \angle A_1B_1C = 180^\circ - \angle AB_1A_1,$$

тому $\angle ABC = \angle A_1B_1C$ та трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.

Цю задачу можна розв’язати без допоміжних побудов, якщо замітити, що трикутники AA_1C і BB_1C подібні, та записати пропорцію $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$.

Побудова допоміжного кола дозволяє збільшити число теорем, якими можна користуватися при розв'язанні задачі, і завдяки цьому знаходити залежність між елементами фігури.

РОЗДІЛ 2
АЛГЕБРАЇЧНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Переклад геометричної задачі на мову рівнянь

Умови більшості задач з геометрії формулюються досить просто: в деякій геометричній фігурі задається декілька елементів або співвідношень між елементами і потрібно знайти невідомий елемент або невідоме співвідношення між елементами. Такі «стандартні» умови задач зрозумілі кожному. Однак геометричні задачі та прийоми їх розв’язування настільки різноманітні, що неможливо придумати якусь зручну класифікацію, за якою можна було б дізнаватися рецепт вирішення кожної конкретної задачі. Саме тому в підручниках і навчальних посібниках майже немає описів методів розв'язування задач. Щоб навчитися розв'язувати геометричні задачі, потрібно твердо знати і добре розуміти основні теореми геометрії і, головне, постійно тренуватися, регулярно розв'язувати різноманітні задачі.

В останні роки більшість школярів розв'язують геометричні задачі тільки «алгебраїчним способом» який полягає в наступному. Невідомі елементи геометричної фігури позначаються через $x,\ y,\ z,\dots$, і виписуються кілька співвідношень між відомими і невідомими елементами. Потім розв'язується отримана система алгебраїчних і тригонометричних рівнянь і знаходять ті елементи або співвідношення між елементами, які потрібно знайти за умовами задачі. Такий формальний підхід до розв’язування геометричних задач часто є одним з найпростіших і дозволяє швидко отримати відповідь. Природно, виникає бажання розв’язувати таким способом всі завдання. Однак учень, який звик, не замислюючись, «переробляти» будь-яку геометричну задачу в алгебраїчну, зустрічає нездоланні труднощі, якщо виявляється, що його спосіб розв’язання не призводить до бажаного результату.

Майже кожна задача може бути вирішена різними способами. Вдалий вибір невідомих, зручний малюнок, додаткові геометричні побудови і охайне оформлення розв’язання допомагають правильно зрозуміти задачу і знайти найпростіший спосіб її розв'язання. Розв’язування задачі в деяких випадках значно прискориться, якщо попередньо визначити вид, який може (або не може) мати початкова фігура. Будь-яке геометричне розв’язання геометричної задачі починається з роботи над малюнком. При цьому іноді на «природному» кресленні (тобто на кресленні, на якому тільки «зображена» умова) важко помітити зв'язки між даними і шуканими величинами, а якщо фігуру «добудувати», ці зв'язки стають очевидними.

Розглянемо приклади.

Задача 2.1. Бісектриса AM і BN трикутника ABC перетинаються в точці О. Відомо, що $AO = \sqrt{3}MO$, $NO = (\sqrt{3}-1)BO$. Знайти кути трикутника ABC.

Цю задачу можна розв’язати наступним чином.

Нехай $AB = a$, $\angle BAC = x$, $\angle ABC = y$ (рис.2.1)

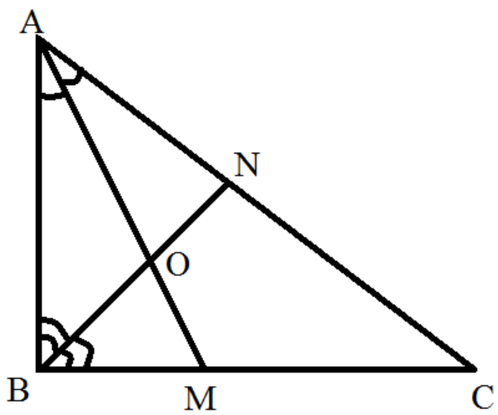

Рис. 2.1

Знайдемо довжину відрізка AN з трикутника ABN (за властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника и за теоремою синусів):

$$AN = AB\frac{NO}{BO} = a\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{a\sin\frac{y}{2}}{\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)}.$$

Аналогічно з трикутника ABM знаходимо:

$$BM = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)}.$$

Таким чином, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}+y\right) = \sqrt{3}\sin\frac{x}{2}, \\ \left(\sqrt{3}-1\right)\sin\left(x+\frac{y}{2}\right) = \sin\frac{y}{2}. \end{cases}$$

Але цю систему доволі складно розв’язати, можна знайти інший спосіб розв’язання цієї задачі.

Нехай $AB = x,\ \ BC = y,\ \ AC = z.$ З трикутника ABM і ABN за властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника отримуємо:

$$\frac{BM}{AB} = \frac{MO}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{AN}{AB} = \frac{NO}{BO} = \sqrt{3}-1.$$

Звідси $BM = \frac{x}{\sqrt{3}}, AN = x\left(\sqrt{3}-1\right).$ З трикутника ABC маємо: $\frac{AN}{CN} = \frac{AB}{BC}$, $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$, тобто

$$\begin{cases} \frac{x\left(\sqrt{3}-1\right)}{z - x\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{x}{y}, \\ \frac{x}{y\sqrt{3}-x} = \frac{x}{z}. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь знаходимо: $y = x\sqrt{3}, z = 2x.$ Звідси слідує, що $x^2 + y^2 = z^2$ и за оберненою теоремою Піфагора, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}.$ Отже, $\angle BAC = \arcsin\frac{y}{z} = \frac{\pi}{3}, \angle ACB = \frac{\pi}{6}.$

Розглянемо ще одну задачу.

Задача 2.2. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника ABC розташована точка M, а на стороні AC – точка N така, що $MN \parallel AB$. Відомо, що $AB = AN = 1$ см, $CM = \sqrt{3}$ см. Знайти довжину відрізка MN.

Нехай $MN = x$ (рис. 2.2).

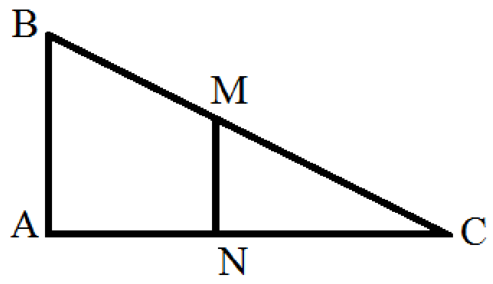

Рис. 2.2

Тоді, $CN = \sqrt{3 - x^2}$ та з подібності трикутників отримуємо рівняння $\frac{\sqrt{3 - x^2}}{1 + \sqrt{3 - x^2}} = x$, яке можна подати у вигляді

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 3 = 0.$$

Знайти розв'язок важко, тому треба знайти інший спосіб розв'язання.

Позначимо MN через x, CN через y. Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ \dfrac{y+1}{y} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

З другого рівняння системи знаходимо:

$$y - x = xy, \; x^2 + y^2 - 2xy = x^2 y^2$$

Віднявши з цього рівняння перше рівняння системи, отримаємо:

$$(xy)^2 + 2xy - 3 = 0, \; xy = -1 \pm 2.$$

Враховуючи, що $x > 0, y > 0$, отримуємо систему:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

з якої знаходимо відповідь: $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ (см).

З розглянутих прикладів видно, як вдалий вибір невідомих величин допомагає спростити розв'язання геометричних задач алгебраїчним способом. Наведемо приклади завдань, для розв'язання яких корисно зробити додаткові геометричні побудови.

Задача 2.3. В трапеції $ABCD$ бічна сторона AB перпендикулярна основам, діагоналі взаємно перпендикулярні та $\frac{AD}{BC} = k$. Знайти відношення $\frac{BD}{AC}$.

Через точку B проведемо пряму, паралельну діагоналі AC, до перетину з прямою AD в точці M (рис. 2.3).

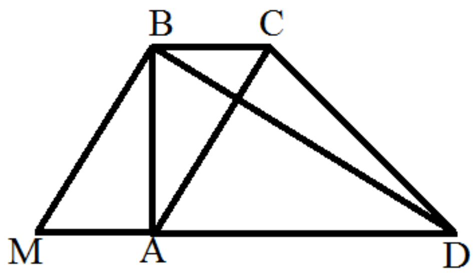

Рис. 2.3

Тоді за теоремою про властивість перпендикуляра, опущеного з вершини прямого кута трикутника BMD, маємо:

$$BD = \sqrt{DM \cdot AD},$$

$$BM = \sqrt{DM \cdot AM}.$$

Враховуючи, що $AC = BM$, $AM = BC$, знаходимо

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BD}{BM} = \frac{\sqrt{DM \cdot AD}}{\sqrt{DM \cdot AM}} = \sqrt{\frac{AD}{BC}} = \sqrt{k}.$$

Задача 2.4. На сторонах AC і BC трикутника ABC розташовані відповідно точки N і M так, що $\frac{AN}{CN} = n$, $\frac{BM}{CM} = m$. Прямі AM і BN перетинаються в точці O. Знайти відношення $\frac{AO}{MO}$ та $\frac{BO}{NO}$.

Проведемо $MK \| BN$ (рис. 2.4).

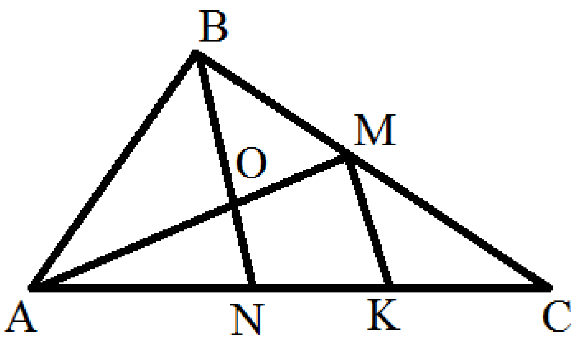

Рис. 2.4

З подібності трикутників BCN та CKM знаходимо CK:

$$CK = CN\frac{CM}{BC} = CN\frac{CM}{CM + BM} = CN\frac{1}{1+m}.$$

Отже,

$$KN = CN - CK = CN\left(1 - \frac{1}{1+m}\right) = CN\frac{m}{1+m}.$$

З подібності трикутників AON та AMK знаходимо шукані відношення:

$$\frac{AO}{MO} = \frac{AN}{KN} = \frac{AN}{CN}\frac{1+m}{m} = \frac{n}{m}(1+m),$$

та аналогічно

$$\frac{BO}{NO} = \frac{m}{n}(1+n).$$

2.2. Застосування тригонометрії

При вирішенні геометричних задач досить часто доводиться звертатися за допомогою до тригонометрії. Іноді це звернення обов'язкове – коли заданий який-небудь кут і для обчислення лінійних елементів використовуються тригонометричні функції кута, іноді це звернення бажано – коли ми самі вводимо в розгляд допоміжні кути, щоб, використовуючи потім тригонометричні функції, обчислити потрібні нам лінійні елементи або встановити деякий співвідношення між лінійними елементами. Якщо ж говорити про форми застосування тригонометрії при розв'язуванні геометричних задач, то до числа основних слід віднести звичайні тригонометричні перетворення, теорему косинусів і, більшою мірою, теорему синусів, тригонометричні тотожності та тригонометричні рівняння, використання обернених тригонометричних функцій.

Задача 2.5. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, двогранний кут при основі α. У піраміду вписано кулю, до кулі проведена дотична площина, паралельна основі піраміди. Визначити бічну поверхню отриманої зрізаної піраміди.

Немає необхідності зображувати на малюнку вписану кулю. Цілком достатньо показати центр кулі (рис. 2.5) - це точка O перетину висоти піраміди з бісектрисою лінійного кута SDH - і врахувати, що висота HH_1 зрізаної піраміди дорівнює діаметру кулі.

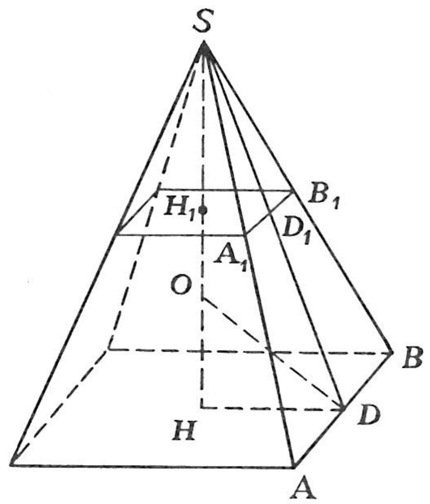

Рис. 1.

Маємо:

$$OH = r = HD \cdot tg\angle ODH = \frac{a}{2} tg\frac{\alpha}{2}, \quad HH_1 = 2r = a tg\frac{\alpha}{2},$$

$$S_{\text{біч}} = 4 \cdot \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot DD_1 = 2(a + A_1B_1) \cdot DD_1 .$$

Для подальших обчислень нам знадобиться допоміжний малюнок (рис. 2.6).

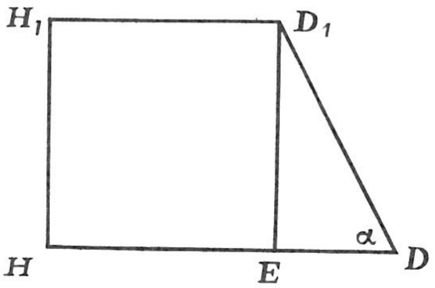

Рис. 2.

$$A_1B_1 = 2H_1D_1 = 2HE = 2(HD - DE) = 2\left(\frac{a}{2} - D_1E ctg\alpha\right) = a - 2HH_1 ctg\alpha = a - 2atg\frac{\alpha}{2}ctg\alpha$$

$$, \ DD_1 = \frac{D_1E}{\sin\alpha} = \frac{HH_1}{\sin\alpha} = \frac{atg\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha},$$

$$S_{\text{біч}} = 2\left(a + a - 2atg\frac{\alpha}{2}ctg\alpha\right)\cdot\frac{a\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{4a^2tg^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}.$$

Задача 2.6. Визначити радіус кола, якщо вписаний в нього кут із сторонами a і b спирається на дугу α .

Вписаний кут дорівнює $\frac{\alpha}{2}$. Позначимо хорду, що сполучає кінці вписаного кута, через x (рис. 2.7).

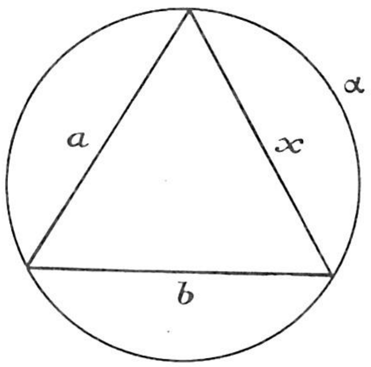

Рис. 3.

Тоді за теоремою косинусів

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Далі, за теоремою синусів $\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$, звідки

$$R = \frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 2.7. Плоскі кути тригранного кута рівні відповідно α, β, γ. Знайти його двогранні кути.

Нехай S - вершина тригранного кута (рис. 2.8) SM - спільна сторона плоских кутів α і β.

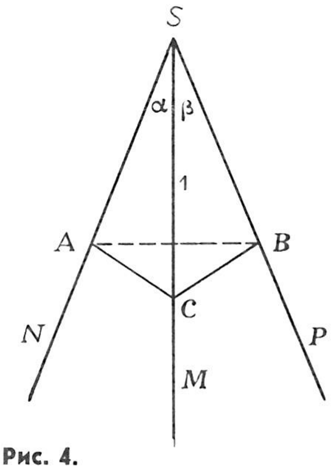

Рис. 4.

Знайдемо величину двогранного кута при ребрі SM. Відкладемо відрізок $SC = 1$, через точку C проведемо площину, перпендикулярну прямій SM, і позначимо через A і B точки перетину цієї площини з променями SN і SP. Тоді $\angle ACB$ - лінійний кут даного двогранного кута.

Нехай $\angle ACB = x$, тоді

$$AC = tg\alpha,\ BC = tg\beta,\ AS = \sec\alpha,\ BS = \sec\beta.$$

З трикутника ABS за теоремою косинусів маємо

$$AB^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS \cdot BS \cdot \cos\gamma,$$

тобто

$$AB^2 = \sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma.$$

З іншого боку, з трикутника ABC за теоремою косинусів, маємо

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos x,$$

тобто

$$AB^2 = tg^2\alpha + tg^2\beta - 2tg\alpha tg\beta\cos x.$$

Таким чином,

$$\sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma = \; = tg^2\alpha + tg^2\beta - 2tg\alpha tg\beta\cos x \;,$$

звідки

$$\cos x = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Отже, двогранний кут, протилежний плоскому куті γ, дорівнює $\arccos\left(\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)$. Аналогічно знаходяться інші двогранні кути.

Якщо три плоских і три двогранних кута вважати основними елементами тригранного кута, то розглянута задача дозволяє зробити висновок про те, що з будь-яких трьох основних елементів тригранного кута можна знайти інші три.

Задача 2.8. Через вершину кута α при основі рівнобедреного трикутника проведена пряма, яка перетинає протилежну бічну сторону і складає з основою кут β $(\beta < \alpha)$. У якому відношенні ця пряма ділить площу трикутника?

Нехай $AB = BC = a$, $DC = x$, $BD = a - x$ (рис. 2.9).

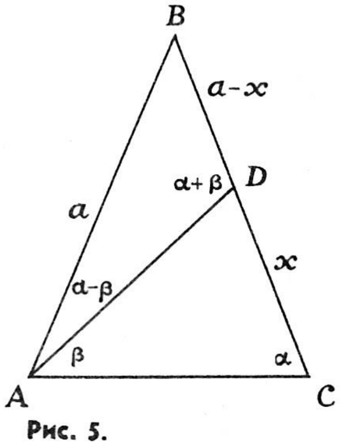

Рис. 5.

Трикутники ABD і ACD мають спільну висоту, тому їх площі відносяться як основи, тобто як сторони BD і CD: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1$.

Таким чином, для розв'язання задачі нам достатньо знайти відношення $\frac{a}{x}$. Застосуємо до трикутника ABD теорему синусів

$$\frac{a-x}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Звідси,

$$\frac{x}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

В результаті,

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{a}{x}-1=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}-1= \;=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}.$$

Задача 2.9. Всі бічні грані правильної чотирикутної піраміди нахилені до основи під кутом α, а апофема бічної грані дорівнює a. Через одну з сторін основи проведено переріз, який складає з площиною основи кут β $(\beta<\alpha)$. Обчислити площу перерізу.

З'ясуймо насамперед, що являє собою переріз (рис. 2.10).

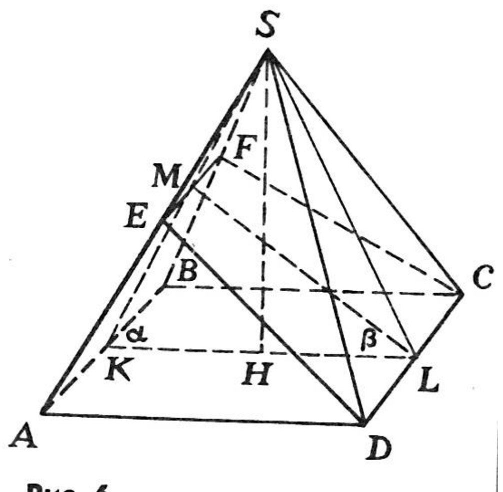

Рис. 6.

Він паралельний стороні AB, а бічна грань, що проходить через AB, перетинає переріз по прямій EF. Але якщо через пряму, паралельну деякій площині, проведено площину, що перетинає першу площину, то лінія перетину паралельна даній прямій, а значить, і прямої CD. Отже, переріз - трапеція.

Маємо

$$KH=SK\cdot\cos\alpha=a\cdot\cos\alpha,\; KL=CD=2a\cos\alpha.$$

Застосуємо до трикутника MKL теорему синусів:

$$\frac{ML}{\sin\alpha}=\frac{KL}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]},$$

звідки

$$ML=\frac{KL\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Застосуємо до трикутника MSL теорему синусів:

$$\frac{SL}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{MS}{\sin(\alpha-\beta)},\ MS=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

З подібності трикутників SEF і ABS маємо: $\frac{MS}{KS}=\frac{EF}{AB}$. Звідси маємо

$$EF=\frac{AB\cdot MS}{KS}=\frac{2a\cos\alpha\cdot a\sin(\alpha-\beta)}{a\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Тепер у нас є все необхідне для обчислення площі перерізу. Маємо

$$S=\frac{1}{2}(CD+EF)\cdot ML=\frac{1}{2}\left[2a\cos\alpha+\frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right]\times\frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a^2\sin^2 2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто формальні геометричні способи розв’язування задач з геометрії, які передбачають застосування властивостей планіметричних фігур та допоміжні побудови, а також розглянуто деякі алгебраїчні методи розв’язування геометричних задач, які пов’язані із застосуванням певних співвідношень та тверджень алгебраїчного характеру. Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступне.

Будь-яке геометричне розв'язання геометричної задачі починається з роботи над кресленням. При цьому іноді на «природному» кресленні (тобто на кресленні, на якому тільки «зображено» умова) важко помітити зв'язки між даними і шуканими величинами, а якщо фігуру «добудувати», ці зв'язки стають очевидними. При цьому розв'язання задачі в деяких випадках значно прискориться, якщо заздалегідь визначити вид, який може (або не може) мати початкова фігура.

У деяких випадках суттєвим моментом в геометричному розв'язанні задачі є встановлення конгруентності деяких кутів. Найчастіше такі кути є відповідними в подібних трикутниках або багатокутниках. Проте можливі такі ситуації, коли конгруентність розглянутої пари кутів випливає з конгруентності іншої пари кутів, величини яких відомі.

Розв’язання багатьох геометричних задач починається з проведення допоміжних ліній, які допомагають встановити зв'язок між відомими і невідомими елементами фігури. Відшукати вдалу допоміжну побудову часто буває нелегко. Тому до кожної розв’язаної задачі слід придивитися і спробувати з'ясувати, чому ті чи інші допоміжні лінії приводять до мети. Один з цікавих прийомів розв'язання геометричних задач полягає в тому, що в креслення вводиться допоміжне коло. Побудова допоміжного кола дозволяє збільшити число теорем, якими можна користуватися при розв'язанні задачі, і завдяки цьому знаходити залежність між елементами фігури

В останні роки більшість школярів розв'язують геометричні задачі «алгебраїчним способом», який полягає в наступному. Невідомі елементи геометричної фігури позначаються через x, y, z,..., і виписуються кілька співвідношень між відомими і невідомими елементами. Потім розв'язується отримана система алгебраїчних і тригонометричних рівнянь і знаходять ті елементи або співвідношення між елементами, які потрібно знайти за умовами задачі. Такий формальний підхід до розв’язування геометричних задач часто є одним з найпростіших і дозволяє швидко отримати відповідь.

При розв’язуванні геометричних задач досить часто доводиться звертатися за допомогою до тригонометрії. Іноді це звернення обов'язкове – коли заданий який-небудь кут і для обчислення лінійних елементів використовуються тригонометричні функції кута, іноді це звернення бажано – коли ми самі вводимо в розгляд допоміжні кути, щоб, використовуючи потім тригонометричні функції, обчислити потрібні нам лінійні елементи або встановити деякий співвідношення між лінійними елементами. Якщо ж говорити про форми застосування тригонометрії при розв'язуванні геометричних задач, то до числа основних слід віднести тригонометричні перетворення, теореми косинусів і синусів, тригонометричні тотожності та рівняння, використання обернених тригонометричних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айерлэнд К. Классическое введение в теорию чисел / К. Айерленд. – М.: Мир, 1987. – 462 с.
2. Алексеева В.М. Избранные задачи / В.М. Алексеев. – М.: Мир, 1977. – 164 с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник / Г.П. Бевз. – 3-тє вид., перероб. і доп. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
4. Бурда М.І. Розв‘язування задач на побудову в 6-8 класах / М.І. Бурда. – К.: Рад. шк., 1986. – 112 с.
5. Великина П.Я. Сборник задач по геометрии / П.Я. Великина. – М.: Просвещение, 1971. – 236 с.
6. Виноградов И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М.: Наука, 1969. – 238 с.
7. Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах / Диофант. – М.: Наука, 1974. – 196 с.
8. Дринфельд Г.И. Квадратура круга и трансцендентность числа / Г.И. Дринфельд. – К.: Вища школа, 1976. – 84 с.
9. Жаров В.А. Основные принципы задачника по геометрии / В.А. Жаров. – Ярославль, 1970. – 125 с.
10. Жаров В.А. Вопросы и задачи по геометрии / В. А. Жаров, П.С. Марголите, З.А. Скопец. – М.: Наука, 1975. – 216 с.
11. Карнацевич Л.С. Уроки геометрии в 9 классе / Л.С. Карнацевич. – К.: Рад. шк., 1979. – 167 с.
12. Кушнір І.А. Методи розв‘язання задач з геометрії: Кн. для вчителя / І.А. Кушнір. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.
13. Медяник А.Г. Учителеві про шкільний курс геометрії: Кн. для вчителя: Пер. з рос. / А.Г. Медяник. – К.: Рад. шк., 1988. – 156 с.
14. Методика розв‘язування задач на побудову / За ред. О.М.Астряба, О.С.Смогоржевського. – К.: Рад. шк., 1962. – 387 с.

15. Михелович Ш.Х. Теория чисел / Ш.Х. Михелович. – М.: Высшая школа, 1967. – 358 с.
16. Рибкін М.О. Збірник задач з геометрії / М.О. Рибкін. – К.: Рад. шк., 1973. – Ч.1 – 128 с.
17. Рибкін М.О. Збірник задач з геометрії / М.О. Рибкін. – К.: Рад. шк., 1973. – Ч. 2. – 88 с.
18. Саранцев Г.И. О методике решения планиметрических задач / Г.И. Саранцев // Преподавание геометрии в 6-8 классах. – М.: Просвещение, 1979. – С.84-125.
19. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов / Под ред. Гусева В.А., Маслова Г.Г. – М.: Высшая школа, 1979. – 196 с.
20. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии / И.Р. Шафаревич // Успехи математических наук. – 24, № 6. – 1969. – С. 12-19.