МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРІЇ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Гайдук Ірина Іванівна

Керівник кандидатка педагогічних наук
Григор'єва Валентина Борисівна

Рецензент доцентка кафедри природничо-наукової підготовки Херсонської державної морської академії, кандидатка педагогічних наук
Спичак Тетяна Сергіївна

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Комплексні числа широко застосовуються в сучасній математиці і в її прикладних галузях. Особливо часто застосовуються функції комплексної змінної. Їх вивчення має самостійний інтерес. Разом з тим алгебру комплексних чисел можна успішно використовувати і в елементарній геометрії, тригонометрії, теорії геометричних перетворень, а також в електротехніці і різних задачах з механічним та фізичним змістом.

Метод комплексних чисел дозволяє вирішувати планіметричні задачі безпосередньою підстановкою вихідних даних в формули. В цьому полягає надзвичайна простота цього методу в порівнянні з координатним, векторним та іншими методами, що вимагають кмітливості та зазвичай тривалих пошуків розв’язку задачі.

Не менш важливо і те, що в результаті застосування комплексних чисел при розв'язуванні задач та аналізі отриманих формул і співвідношень вдається зробити цікаві узагальнення та уточнення.

В даний час спостерігається тенденція розвитку суспільства, яка викликає необхідність у здобувачів середньої освіти мати достатньо широкі та глибокі математичні знання. Така необхідність пов’язана з тим, що випускних переходить у новий цикл свого розвитку – оволодіння майбутньою професією. Як відомо, оволодіння майже будь-якою спеціальністю передбачає явних математичних знань та умінь. Тому освітній стандарт середньо освіти виділяє одну із основних задач навчання математики в закладах середньої освіти – це «надати усвідомлений комплекс математичних знань та умінь, що необхідні не лише у повсякденному житті, але й у професійній діяльності» [4].

Навчання математики у закладах середньої освіти, окрім вирішення основних завдань, дозволяє також сформувати стійкий розвиток інтересу учнів до предмету, підготовку до подальшого навчання у закладах вищої освіти.

Актуальність даної теми полягає у тому, що комплексні числа відносяться до того розділу, який недостатньо досліджений методистами, а його значимість в математичній культурі учнів не викликає сумнівів. вивченням теми «Комплексні числа» завершується одна з основних ліній шкільного курсу математики – розвиток поняття числа. Цілісне завершене уявлення про число є важливим кроком в процесі формування наукового світогляду учнів. Проте не зважаючи за широке застосування комплексних чисел, прикладний аспект лише іноді розглядається суто оглядово при вивченні комплексних чисел у школі, в результаті чого в учнів формується помилкове уявлення про формальність їх введення.

Мета дослідження – розкрити питання застосування комплексних чисел при розв’язуванні задач планіметрії та тригонометрії та при доведенні тверджень.

Об'єктом дослідження є теорія чисел, а ***предметом дослідження*** є безпосередньо поле комплексних чисел.

Виходячи з мети, визначені основні завдання дослідження:

- розглянути основні положення, що стосуються поняття комплексного числа, властивості операцій над комплексними числами;
- розкрити питання стосовно геометричної інтерпретації комплексних чисел з метою застосування її при розв’язуванні задач планіметрії та доведенні тверджень;
- розглянути питання стосовно можливості застосування комплексних чисел в тригонометрії.

Теоретичне значення роботи полягає у систематизації основних положень, що стосуються геометричної інтерпретації комплексних чисел з метою їх подальшого застосування при розв’язуванні задач планіметрії та доведенні тверджень.

Практичне значення дипломної роботи полягає тому, що запропоновані завдання на застосування комплексних чисел в планіметрії та тригонометрії можуть бути запропоновані для проведення факультативних занять та елективних курсів з математики в класах з поглибленим вивченням математики.

Для вирішення поставлених завдань було застосовано наступні ***методи***: вивчення літератури з теми дослідження, порівняльний аналіз та узагальнення.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в збірнику тез Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (16-17 вересня 2021 р., Херсонський державний університет), а також тези у збірнику магістерських наукових робіт «Магістерські студії» (жовтень 2021 р., Херсонський державний університет).

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ присвячено теоретичним основам теорії комплексних чисел. У другому розділі розглянуто питання про геометричну інтерпретацію комплексних чисел. Розділ містить приклади застосування комплексних чисел при розв’язуванні різноманітних задач шкільного курсу планіметрії та доведенні тверджень, які стосуються властивостей фігур площини. Третій розділ присвячено питанню застосування комплексних чисел в тригонометрії.

РОЗДІЛ 1
ПОЛЕ КОМПЛЕКСИХ ЧИСЕЛ

1.1. Історія вивчення комплексних чисел. Основна теорема алгебри

Ще в давнину при розв’язуванні задач, що виражаються на сучасній мові квадратними рівняннями, зустрічались випадки, пов’язані з комплексними коренями рівнянь. В таких випадках вважали задачу нерозв’язною. Однак розв’язання в радикалах кубічного рівняння, знайдене італійськими математиками в першій половині XVI ст., приводило до представлення дійсних коренів рівнянь з дійсними коефіцієнтами через квадратні корені з від’ємних чисел. Це змусило математиків того часу оперувати з новими числами, які називали «уявними», «неможливими» тощо. При цьому до них застосовували ті ж правила дій, що й до дійсних чисел. Однак значення нових чисел залишалося незрозумілим, що і знайшло своє відображення в термінології. Так, наприклад, Кардан називав нові числа «хибними, істино софістичними» числами [19]. Перше формальне обґрунтування дій з комплексними числами наведено в «алгебрі» італійського математика Бомбеллі (1572 р.).

Одне з важливих питань алгебри, яке хвилювало математиків XVII–XVIII ст. полягало в наступному: скільки коренів має алгебраїчне рівняння n-го степеня, тобто рівняння вигляду

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,. \qquad (1.1)$$

Не тільки рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ або $x^n - 1 = 0$ розв'язні в полі комплексних чисел, але й будь-яке алгебраїчне рівняння степеня n з дійсними або комплексними коефіцієнтами розв'язне в полі комплексних чисел.

Для випадку рівнянь 3-го і 4-го степенів ця теорема була встановлена Тартальей, Кардано та іншими. Виявилося, що такі рівняння розв’язуються за допомогою формул, подібних формулам квадратного рівняння, але більш складних.

Корені рівняння:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1.2)$$

можуть бути обчислені за формулою, яку називають формулою Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{D}} \ ,$$

де D=$(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$

Ця формула не дає бажаного результату в тому випадку, коли рівняння (1.2) має три різні (дійсні) корені. Наприклад, легко перевірити, що коренями рівняння $x^3 - x = 0$ будуть числа 0, 1, -1. Але якщо б ми розв’язали це рівняння за формулою Кардано, то отримали б:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$$

Яким чином можна отримати числа 0, 1, -1? Щоб дати відповідь на це питання математикам XVI – XVII ст. необхідно було навчитися оперувати з виразами виду $A + \sqrt{B}$, де $B < 0$, і частково, виділяти із таких виразів кубічні корені.

Протягом майже двох століть тривало наполегливе вивчення загального рівняння 5-го і більш високих степенів, але всі зусилля були марними. Коли Гаусу в його докторській дисертації (1799 р.) вдалося вперше довести, що розв'язки існують, то це вже було проривом. Але питання про можливість узагальнити класичні формули (на випадок степенів більших ніж чотири), що дозволяють знаходити розв’язки за допомогою раціональних операцій і добування кореня, залишалося на той час відкритим.

Теорема Гауса стверджує, що, яке б не було алгебраїчне рівняння вигляду (1.1) де n – ціле додатне число, а коефіцієнти дійсні або навіть комплексні числа, існує принаймні одне таке комплексне число $\alpha = a + bi$, що

$$f(\alpha) = 0.$$

Число α називається *коренем* рівняння (1.1). З неї випливає інша теорема, відома за назвою *основна теорема алгебри*.

Теорема 1.1. Будь-який алгебраїчний поліном степеня n

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \quad (1.3)$$

може бути представлений у вигляді добутку, рівно n множників:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n), \quad (1.4)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – комплексні числа, корені рівняння $f(x) = 0$.

Так, наприклад, поліном $f(x) = x^4 - 1$ розкладається на множники в такий спосіб:

$$f(x) = (x-1)(x-i)(x+i)(x+1).$$

Що числа α є коріннями рівняння $f(x) = 0$, є очевидним з самого розкладу (1.4), оскільки при $x = \alpha_r$ один із множників $f(x)$, а отже, і сам поліном $f(x)$, обертається в нуль.

В інших випадках не всі множники $(x - \alpha_1), (x - \alpha_2), ..., (x - \alpha_n)$ полінома $f(x)$ степеня n виявляються різними. Так, наприклад,

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$$

має тільки один корінь $x = 1$ кратності 2. У всякому разі, поліном степеня n не можна розкладати в добуток більш ніж n різних множників виду $(x - \alpha)$, що й відповідає тому, що рівняння не може мати більш ніж n коренів.

Ейлер першим поставив питання: чи будь-який многочлен можна представити у вигляді многочлена не вище другого степеня? Багато математиків XVIII ст. вважали, що відповідь повинна бути негативною [46]. Але, між тим, відповідь виявилася позитивною. Це вдалося показати за допомогою уявних чисел. У XVIII ст. Ейлер з іншими математиками виявили, що вивчення різних коливальних процесів зводяться до пошуку функцій $u = u(t)$, які задовольняють умову виду

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{du}{dt} + a_n u = 0. \quad (1.5)$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – константи.

Наприклад, вивчення гармонічних коливань зводяться до розгляду рівняння $\frac{d^2u}{dt^2} + k^2 u = 0$, де k^2 – константа, t – час, u – відхилення маятника від деякого нейтрального положення. Ейлер виявив, що для знаходження функції $u(t)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (1.5), необхідно знати корені алгебраїчного рівняння

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0 = 0, \quad (1.6)$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – ті ж числа, що і в рівнянні (1.5). При цьому необхідно знайти всі корені рівняння (1.6) – не тільки дійсні, але й уявні.

Наочне геометричне зображення комплексних чисел (як точок або векторів на площині) було запропоновано тільки на початку XIXст.. Першими, незалежно один від одного, це зробили датський землемір Бессель в 1799 р. і французький математик Арганд в 1806 р.. Однак загальне визнання геометричне представлення комплексних чисел отримало після нового обґрунтування, яке запропонував Гаус у 1831 р. [6].

Комплексні числа знайшли чисельні застосування. Так, наприклад, за допомогою комплексних чисел Гаус знайшов відповідь на геометричне питання: при яких натуральних значеннях *n* можна побудувати циркулем та лінійкою правильний *n*-кутник [43]?

І до цього часу теорія функцій комплексної змінної є вагомою частиною математичного аналізу [28, 36, 40, 42, 45, 50]. На цей час властивості комплексних чисел так само добре обґрунтовані та вивчені як , наприклад, властивості натуральних чи дійсних чисел.

Широке застосування знайшли комплексні числа в картографії, теоретичній фізиці, електро- та радіотехніці, гідро- та аеродинаміці тощо.

Комплексні числа і комплексні функції успішно застосовувалися математиками та механіками Н. Жуковим, С. Чаплигіним, М. Келдишем та іншими. Вітчизняні математики Г. Колосов і Н. Мусхелішвілі вперше стали застосовувати комплексні функції в теорії пружності. Із застосуванням комплексних змінних в теоретичній фізиці пов’язані досліди Н. Боголюбова і В. Владимирова.

1.2. Система комплексних чисел, як мінімальне розширення системи дійсних чисел. Різні способи введення комплексних чисел

Першою числовою системою, яка виникла і розвивалася в результаті розвитку людства та пізнання ним навколишнього світу, є система натуральних чисел, яка виникла з потреб лічби, а поняття натурального числа стало розглядатися як числова характеристика скінченної сукупності предметів [13]. У результаті розвиток теорії натуральних чисел здійснювався у таких двох напрямках:

– вивчення кількісної характеристики натурального числа, у результаті чого отримується теоретико-множинна теорія натурального числа або, як називають, теорія кількісних натуральних чисел, яка вперше була розроблена видатним німецьким математиком Г. Кантором у 1879 р.;

– дослідження порядкової характеристики натурального числа, в результаті чого отримується аксіоматична теорія натуральних чисел, яка була вперше запропонована італійським логіком і математиком Пеано у 1891 р.; зазначимо, що основні ідеї цієї теорії були закладені німецьким математиком Дедекіндом у 1888р., який вперше ввів принцип повної математичної індукції.

Аксіоми Пеано:

*A*1. Існує натуральне число 1, яке безпосередньо не слідує ні за яким натуральним числом;

*A*2. Для довільного натурального числа існує єдине натуральне число, яке безпосередньо слідує за ним;

*А*3. Будь-які натуральні числа, які безпосередньо слідують за різними натуральними числами, різні;

*А*4. Довільна підмножина натуральних чисел, яка містить число 1 і з кожним числом a , що міститься в ній, містить і число a', яке безпосередньо слідує за a , співпадає з множиною *N* всіх натуральних чисел.

Потреби науки і практики весь час приводять до необхідності розширення поняття числової системи таким чином, щоб попередня числова система послужила основою побудови нової більш широкої числової системи. У результаті система натуральних чисел стала тим фундаментом, на якому були побудовані інші числові системи – такі, як системи цілих чисел, раціональних чисел, дійсних чисел, комплексних чисел тощо. При цьому слід підкреслити, що кожне нове розширення числової системи будується щоразу за однією і тією ж схемою, а саме – щоб воно задовольняло нові вимоги, які зводяться до наступних чотирьох. Нехай система *В* є безпосереднім розширенням числової системи *А*, а *В, А* – відповідні їм базові множини. Тоді повинні виконуватися такі умови:

1. $A \subset B, A \neq B, A \neq \varnothing$, тобто A – не порожня власна підмножина множини *В*.

2. Основні операції, відношення та її властивості, що мають місце для елементів системи $\overline{A}$, зберігається для цих елементів, які розглядаються вже як елементи розширеної системи $\overline{B}$.

3. В системі $\overline{B}$ повинна виконуватись операція, яка в системі $\overline{A}$ була лише частковою.

4. Система $\overline{B}$ повинна бути мінімальним розширенням системи $\overline{A}$.

Четверта вимога, яку іноді називають *умовою мінімальності* є аналогом аксіоми індукції для системи натуральних чисел. Вона забезпечує модельну повноту розширеної системи, тобто її категоричність, і вказує на те, що така розширена до системи $\overline{A}$ система $\overline{B}$ єдина з точністю до ізоморфізму.

На практиці мають місце два основні методи побудови розширення числової системи – *аксіоматичний метод* і *конструктивний метод*. При аксіоматичному методі по суті перелічують спочатку аксіоми попередньої числової системи, а потім аксіоми, які розкривають вказані вище чотири вимоги 1 – 4 розширення системи, після чого показується існування відповідної моделі розширеної системи, модельна повнота цієї системи, її властивості, незалежність аксіом тощо. Таким, наприклад, шляхом побудовані числові системи цілих чисел, раціональних чисел, дійсних чисел, комплексних чисел в [13]. При конструктивному методі побудови нова розширена числова система виникає як результат конструктивного процесу, при якому задається базова множина нової розширеної числової системи, вказуються правила утворення нових об’єктів на базі об’єктів попередньої числової системи. Безперечно, що і при конструктивному методі побудови нова розширена числова система повинна задовольняти вказаним вище чотирьом вимогам розширення числової системи. Після цього аналогічним чином вводяться операції та відношення між елементами розширеної системи та вивчаються їх властивості, застосування, тощо [7].

У шкільному курсі математики загальноприйнятий конструктивний метод побудови розширення числової системи, який полягає в наступному. До елементів базової множини A числової системи A приєднуються нові елементи і отримується базова множина B відповідної розширеної числової системи B [14]. При цьому у вигляді означення вказується, коли вважати, що певні позначення для чисел системи B дають одне і те ж число.

Далі вводяться основні операції та відношення для елементів множини B, встановлюються їх властивості, застосування, тощо. Розглянемо коротко, як саме здійснюється таке розширення для цілих чисел, для раціональних чисел, для дійсних чисел і для комплексних чисел. 1. Для цілих чисел вводиться $Z = N \bigcup (-N) \bigcup \{0\}$.

Далі вводиться поняття модуля цілого числа, з використанням якого даються означення дій додавання, множення, віднімання елементів з множини Z, відношення порядку $<, \leq$, розглядаються їх властивості і т.д.

Для раціональних чисел вводиться множина $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z, q \in N \right\}$.

Далі спочатку вводиться означення рівності нових чисел, а саме: $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ тоді і тільки тоді, коли $p \cdot s = q \cdot r$, а потім вводяться чотири арифметичні операції над цими числами, відношення порядку $<, \leq$, розглядаються їх властивості і т.д.

3. Для дійсних чисел вводиться множина $R = Q \bigcup I_r$, де Q множина всіх раціональних чисел, які представляються у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів, I_r – множина нових ірраціональних чисел, які представляються у вигляді нескінченних неперіодичних дробів; далі вводяться операції над числами множини R, відношення порядку $<, \leq$, розглядаються їх властивості, застосування і т.д.

4. Для комплексних чисел вводиться множина

двочленних виразів $C = \{a + bi | a, b \in R \wedge i \cdot i + 1 = 0 \wedge i \notin R\}$, розглядається поняття рівності таких виразів, а саме: $a + bi = c + di$ тоді і тільки тоді, коли $a=c$, $b=d$, вводяться операції для цих виразів, які називаються комплексними числами, вивчаються їх властивості, застосування тощо.

Існують й інші способи введення комплексних чисел [5]. Розглянемо деякі з них.

Спосіб 1. Будується множина упорядкованих пар дійсних чисел, $C = \{(a, b) | a, b \in R\}$. На цій множині визначається відношення рівності і дві бінарні алгебраїчні операції додавання та множення наступним чином:

1). $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$;

2). $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

3). $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

Далі доводиться, що алгебраїчна система $(C,+,\cdot)$ утворює мінімальне поле, яке містить підполе, ізоморфне полю дійсних чисел і в якому має розв'язок рівняння

$$x^2+(1{,}0)=(0{,}0).$$

Пара (1,0) – одиниця поля С, пара (0,0) є нулем поля С.

Оскільки розглядається спосіб побудови саме мінімального розширення певної числової системи, то насправді дану ідею теорії впорядкованих пар слід назвати ідеєю теорії конгруентних, тобто рівносильних впорядкованих пар [3]. Адже, бажаючи побудувати мінімальне розширення певної числової системи, ми будуємо не лише відповідну алгебру впорядкованих пар чисел, а і фактор-алгебру конгруентних впорядкованих пар, тобто таких рівносильних упорядкованих пар чисел, для яких виконується узгодження з операціями, що розглядаються у відповідній числовій системі.

Спосіб 2. Замість пар (a,b) дійсних чисел можна розглянути точки (a,b) у декартовій прямокутній системі координат (рис. 1.1.) і вжити відповідну геометричну термінологію.

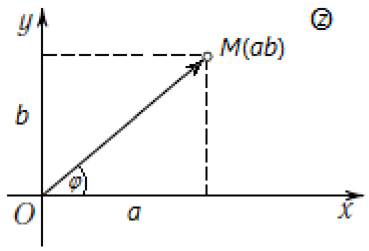

Рис.1.1.

Інакше кажучи, між комплексними числами й відповідними точками (векторами) комплексної площини існує взаємно однозначна відповідність. Далі над точками визначаються операції додавання і множення тощо. Такий підхід більш наочний.

Отже, в полі дійсних чисел операція добування кореня не завжди виконувана. Саме корінь парного степеня з від'ємного числа не має дійсних значень, тобто при дійсному $a < 0$ і парному натуральному n не існує дійсного b, для якого $b^n = a$. Слідуючи плану розширення числових областей, ми розширимо поле дійсних чисел до поля комплексних чисел, в якому операція добування кореня завжди виконувана.

При цьому отримується суттєво новий результат і для тих випадків, коли ця операція була виконувана в полі дійсних чисел. А саме: в полі комплексних чисел розв'язні всі алгебраїчні рівняння, тобто рівняння вигляду $f(x) = 0$, де $f(x)$ – будь-який многочлен степеня $n \geq 1$ з будь-якими комплексними коефіцієнтам.

Без сумніву, розширення певної числової системи має не лише теоретичне значення, але й величезне значення для практичних застосувань. Адже поява нових більш широких числових систем, які збагачені новими операціями, відношеннями та їх властивостями, значно розширює можливості їх практичних застосувань для розв'язування більш широкого кола складних задач як науки, так і практики.

Розширення певної числової системи викликано не лише потребами практики або, іноді говорять, зовнішніми потребами, але викликано також і внутрішніми потребами, коли, наприклад, у заданій числовій системі розглядається певна операція, яка не скрізь визначена, а тому виникає потреба так розширити дану числову систему, щоб ця операція в новій розширеній системі уже була скрізь визначеною.

Кожна наступна з перелічених систем: системи натуральних чисел, цілих чисел, раціональних чисел, дійсних чисел, комплексних чисел є мінімальним розширенням попередньої, що вказує на їх модельну повноту, тобто єдиність з точністю до ізоморфізму [34]. Слід також зазначити, що всі ці системи мають дві основні комутативні та асоціативні операції – додавання та множення чисел, причому множення дистрибутивне відносно додавання, всі вони мають один і той же нейтральний елемент відносно множення – одиницю і в кожній із систем відсутні дільники нуля.

Постає питання: а чи не можна і далі розширити поняття про числа та дії над ними, і щоб збереглися при цьому по можливості їх спільні властивості? В середині XIX ст. вдалося розширити поле комплексних чисел до так званого *тіла кватерніонів* і вказати на можливості застосування кватерніонів у геометрії та фізиці. Правда, при цьому прийшлося відмовитися від комутативності множення таких чисел [7, 13, 27].

РОЗДІЛ 2

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

2.1. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Повернемось до геометричної інтерпретації комплексних чисел [25].

Ми вже з’ясували, що при заданій прямокутній декартовій системі координат на площині комплексному числу $z = x+iy$ можна взаємно однозначно поставити у відповідність точку M площини з координатами (x, y) (рис. 2.1):

$$z = x + iy \leftrightarrow M(x,y) \leftrightarrow M(z).$$

Число z тоді називають *комплексною координатою* точки M.

Оскільки множина точок евклідової площини є взаємно однозначною відповідній множині комплексних чисел, то цю площину називають також *площиною комплексних чисел.*

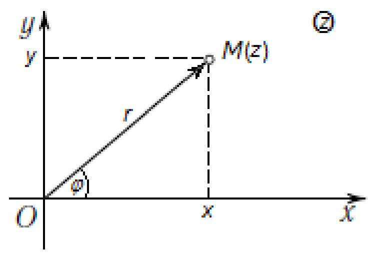

Рис. 2.1.

При y=0 число z дійсне. Дійсні числа зображуються точками вісі x, тому вона називається дійсною віссю. При x=0 число z чисто уявне: $z=iy$. Уявні числа зображуються точками вісі y, тому вона називається *уявною віссю.* Нуль є одночасно дійсним й чисто уявним числом.

Відстань від початку координат до точки $M(z)$ називається *модулем* комплексного числа z і позначається $|z|$ або r:

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Якщо φ – орієнтований кут, утворений вектором $\overrightarrow{OM}$ з віссю x, то *за* визначенням функції синуса *і* косинуса

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \cos\varphi = \frac{x}{r}.$$

Звідки $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ і тому $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - *тригонометрична форма комплексного числа*.

При тригонометричному представленні кут φ називають *аргументом* комплексного числа і позначають через $arg\ z$:

$$\varphi = arg\ z\,.$$

Якщо задано комплексне число $z=x+iy$, то число $\bar{z} = x - iy$ називається *спряженим* цьому числу z. Тоді, очевидно, і число z спряжене числу $\bar{z}$. Точки $M(z)$ і $M_1(\bar{z})$ симетричні відносно вісі x (рис.2.2).

З рівності $\bar{z} = z$ випливає y=0 і навпаки. Це значить, що *число, рівне своєму спряженому, є дійсним* і навпаки [6].

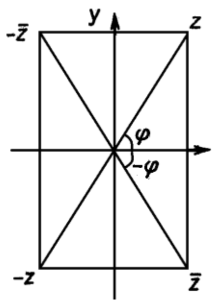

Рис. 2.2.

Точки з комплексними координатами z і $-z$ симетричні відносно початку координат О. Точки з комплексними координатами z і $-\bar{z}$ симетричні відносно вісі y. З рівності $z = -\bar{z}$ випливає x=0 і навпаки. Тому умова $z = -\bar{z}$ є критерієм чисто уявного числа.

Для будь-якого числа z, очевидно, $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$.

Сума й добуток двох спряжених комплексних чисел є дійсними числами:

$$z + \bar{z} = 2x, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Число, спряжене із сумою, добутком або ж часткою комплексних чисел, є відповідно сума, добуток або ж частка чисел, спряжених з даними комплексними числами:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$
$$\overline{z_1 : z_2} = \overline{z_1} : \overline{z_2}$$

Кожній точці $M(z)$ площини взаємно однозначно відповідає вектор $\overrightarrow{OM}$. Тому комплексні числа можна розглядати як вектори [55].

Якщо a та b – комплексні координати точок A та B відповідно, то число $c=a+b$ є координатою точки C, таке, що $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (рис.2.3.).

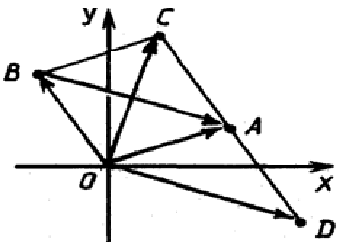

Рис.2.3.

Комплексному числу $d=a-b$ відповідає така точка D, що

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

Відстань між точками A та B дорівнює $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{OD}| = |a-b|$:

$$|AB| = |a-b|. \qquad (2.1)$$

Оскільки $|z|^2 = z\bar{z}$, то

$$|AB|^2 = (a-b)(\bar{a} - \bar{b}). \qquad (2.2)$$

Рівняння $z\bar{z} = r^2$ визначає коло з центром O і радіусом r.

Відношення $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda, (\lambda \neq -1)$, в якому точка C ділить даний відрізок AB, виражається через комплексні координати цих точок наступним чином:

$$\lambda = \frac{c-a}{b-c}, \lambda = \bar{\lambda},$$

звідки отримуємо

$$c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}. \qquad (2.3)$$

Якщо покласти $\frac{1}{1+\lambda} = \alpha$ і $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \beta$, то

$$c = \alpha a + \beta b, \alpha + \beta = 1, \alpha = \overline{\alpha}, \beta = \overline{\beta}. \qquad (2.4)$$

Умови (2.4) необхідні й достатні для того, щоб точки *A*, *B*, *C* були колінеарні.

При $\lambda = 1$ точка *C* є серединою відрізка *AB*, і навпаки.

Тоді:

$$c = \frac{1}{2}(a+b). \qquad (2.4.1)$$

Нехай задано паралелограм *ABCD*. Його центр має комплексну координату $\frac{1}{2}(a+c)$ = $\frac{1}{2}(b+d)$ за умови, що точки *A, B, C, D* мають відповідно комплексні координати *a*, *b*, *c*, *d*. Якщо не виключати випадок виродження паралелограма, коли всі його вершини виявляються на одній прямій, то рівність

$$a+c = b+d \qquad (2.5)$$

є необхідною і достатньою умовою того, щоб чотирикутник *ABCD* був паралелограмом.

Задача 1. Точки *M* та *N* – середини діагоналей *AC* і *BD* чотирикутника *ABCD* (рис.2.4). Довести, що

$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 = |AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2$ [7].

Розв'язання. Нехай точкам *A, B, C, D, M, N* відповідають комплексні числа a, *b, c, d, m, n.*

Оскільки $m = \frac{1}{2}(a+c)$ і $n = \frac{1}{2}(b+d)$, то

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2$$

$$= (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) + (b-c)(\overline{b}-\overline{c}) + (c-d)(\overline{c}-\overline{d}) + (d-a)(\overline{d}-\overline{a}) =$$

$$= 2(a\overline{a} + b\overline{b} + c\overline{c} + d\overline{d}) - (a\overline{b} + \overline{a}b + b\overline{c} + \overline{b}c + c\overline{d} + \overline{c}d + d\overline{a} + \overline{d}a),$$

$$|AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2=(a\text{-}c)(\bar{a}\text{-}\bar{c})+(b\text{-}d)(\bar{b}\text{-}\bar{d})+4(m\text{-}n)(\bar{m}\text{-}\bar{n})=$$

$$=(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})\text{-}(a\bar{c}+\bar{a}c+b\bar{d}+\bar{b}d)+(a+c\text{-}b\text{-}d)(\bar{a}+\bar{c}\text{-}\bar{b}\text{-}\bar{d})\ =$$

$$=2(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+d\bar{d})\text{ - }(a\bar{b}+\bar{a}b+b\bar{c}+\bar{b}c)+(c\bar{d}+\bar{c}d+d\bar{a}+\bar{d}a)\,.$$

Рівність доведена.

Задача 2. Довести, що якщо в площині паралелограма *ABCD* існує така точка *M,* що $|MA|^2+|MC|^2=|MB|^2+|MD|^2$, то *ABCD* - прямокутник (рис.2.5.). [7]

Розв'язання. Якщо за початкову точку прийняти центр паралелограма *ABCD,* то при прийнятих раніше позначеннях $c=-a$, $d=-b$, і тому задана в умові рівність буде еквівалентною рівності $a\bar{a}=b\bar{b}$, яка означає, що діагоналі паралелограма рівні, тобто він прямокутник.

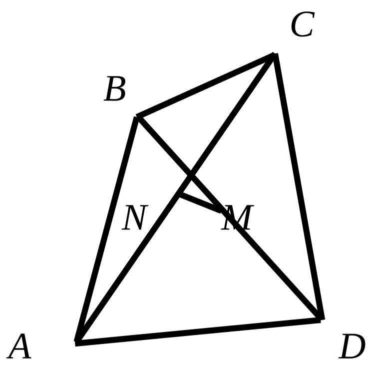

Рис. 2.4.

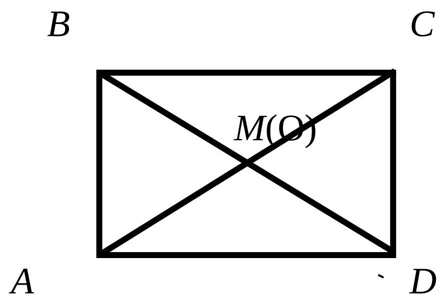

Рис. 2.5.

Задача 3. Довести, що сума квадратів діагоналей *AC, BD* чотирикутника *ABCD* дорівнює подвоєній сумі квадратів відрізків *MN, PQ,* що з'єднують середини протилежних сторін (рис.2.6).

Розв'язання. Потрібно довести, що $|AC|^2+|BD|^2=2(|MN|^2+|PQ|^2)$.

Запишемо ліву частину рівності в комплексній формі: $(a-c)(\bar{a}-\bar{c})+(b-d)(\bar{b}-\bar{d})$. Скориставшись (2.4.1), знаходимо комплексну рівність правої частини і безпосереднім підрахунком переконуємося, що вона рівна лівій.

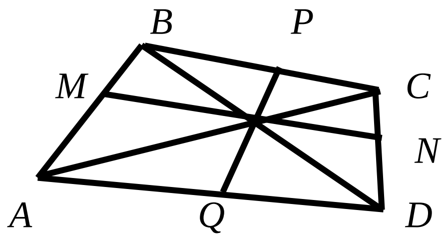

Рис.2.6.

Задача 4. Довести, що сума квадратів медіан *BM, AN, CP* трикутника *ABC* рівна $\frac{3}{4}$ суми квадратів його сторін (Рис.2.7.) [9].

Розв'язання. Потрібно довести:

$$|AN|^2+|BM|^2+|CP|^2=|AB|^2+|BC|^2+|AC|^2 .$$

Запишемо ліву частину, скориставшись формулами (2.2) і (2.4.1), і переконаємося в тому, що вона рівна правій.

Задача 5. Довести, що відстань від вершини *Із* трикутника *ABC* до точки *D,* симетричної центру описаного кола відносно прямої *AB,* обчислюється за формулою $|CD|^2=R^2+|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2$, де *R* - радіус описаного кола (рис.2.8.).

Розв'язання. Точка *M* є серединою *AB,* оскільки центр описаного кола лежить на перетині серединних перпендикулярів.

точка *M* – середина *OD* (за умовою).

Тоді, $$\begin{cases} m=\frac{1}{2}(o+d) \\ m=\frac{1}{2}(a+b) \end{cases} \Rightarrow o+d=a+b \Rightarrow o-a=b-d .$$

Скористаємося цією рівністю, формулами (2.2) і (2.4.1) і переконаємося в справедливості

$$|CD|^2=R^2+|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2.$$

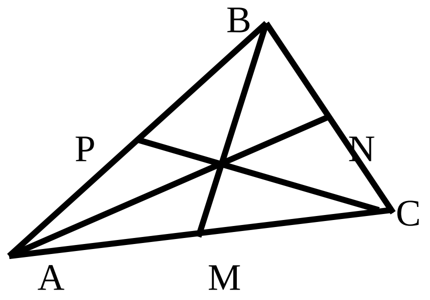

Рис. 2.7.

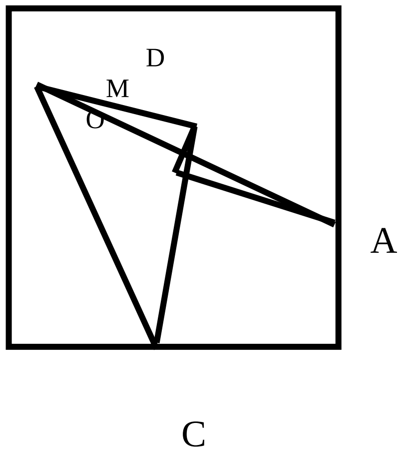

Рис. 2.8.

2.2. Паралельність та перпендикулярність. Колінеарність трьох точок

Нехай на площині комплексних чисел задано точки $A(a)$ і $B(b)$. Вектори $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{OB}$ співнапряплені тоді і тільки тоді, коли $arg\ a = arg\ b$, тобто при

$$arg\ a - arg\ b = arg\frac{a}{b} = 0\ .$$

Очевидно, що ці вектори протилежні в тому й тільки в тому випадку, якщо

$$arg\ a - arg\ b = arg\frac{a}{b} = \pm\pi\ .$$

Комплексні числа з аргументами $0, \pi$, $-\pi$ є дійсними [55].

Теорема 2.1. (Критерій колінеарності точок). Для того щоб точки $A(a)$ *і* $B(b)$ були колінеарні з точкою О, необхідно і достатньо, щоб частка $\frac{a}{b}$ була дійсним числом, тобто

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \quad \text{або} \quad a\overline{b} = \overline{a}b \qquad (2.6)$$

Дійсно, оскільки в цьому випадку число $\frac{a}{b} = k \neq 0$ дійсне ($k=\bar{k}$), то критерій (2.6) еквівалентний наступному:

$$a = kb, k \neq 0, k = \bar{k}\,. \qquad (2.7)$$

Зафіксуємо тепер точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$.

Вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{DC}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли точки, що визначаються комплексними числами a-b і c-d, колінеарні з точкою О.

Зауваження 2.1.

1. З критерію (2.6) отримуємо:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d)\,; \qquad (2.8)$$

2. Якщо точки A, B, C, D належать одиничному колу $z\bar{z}=1$, то

$$\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}\,,$$

і тому умова (2.8) приймає вигляд:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ab = cd\,; \qquad (2.9)$$

3. Колінеарність точок A, B, C характеризується колінеарністю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Використовуючи (2.8), отримуємо:

$$(a\text{-}b)(\bar{a}\text{-}\bar{c}) = (\bar{a}\text{-}\bar{b})(a\text{-}c)\,. \qquad (2.10)$$

Це критерій належності точок A, B, C одній прямій. Його можна подати в симетричному вигляді

$$a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0 \qquad (2.11)$$

Якщо точки A і B належать одиничному колу $z\bar{z}=1$, то $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}$, і тому кожне із співвідношень (2.10) і (2.11) перетвориться в наступне:

$$c + ab\bar{c} = a + b \qquad (2.12)$$

Точки A та B фіксуємо, а точку С будемо вважати змінною, перепозначивши її координату через z. Тоді кожне з отриманих співвідношень (2.10), (2.11), (2.12) буде рівнянням прямої AB:

$$(\bar{a}\text{-}\bar{b})z+(b\text{-}a)\bar{z}+a\bar{b}\text{-}b\bar{a}=0, \qquad (2.10.1)$$

$$z\ +\ ab\bar{z}=a+b. \qquad (2.12.1)$$

Зокрема, пряма *OA* має рівняння $\bar{a}z=a\bar{z}$.

Переходимо до критеріїв перпендикулярності відрізків. Очевидно, що

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow \arg a-\arg b=\arg\frac{a}{b}=\pm\frac{\pi}{2}$$

Комплексні числа з аргументами $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$ є чисто уявними [9].

Тому,

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

або

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow a\bar{b}+\bar{a}b=0 \qquad (2.13)$$

Відрізки *AB* і *CD* перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли вектори точок з комплексними координатами a-*b* і c-*d* перпендикулярні. В силу (2.13) маємо:

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow(a-b)(\bar{c}-\bar{d})+(\bar{a}-\bar{b})(c-d)=0 \qquad (2.14)$$

Зокрема, коли точки *A, B, C, D* належать одиничному колу $z\bar{z}$ =l, то залежність (2.14) спрощується:

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow ab+cd=0 \qquad (2.15)$$

Виведемо рівняння дотичної до одиничного кола $z\bar{z}$ =l в точці *P*.

Якщо *M* (*z*) – довільна точка цієї дотичної, то $OP\perp MP$ і навпаки. З (2.14) отримуємо:

$$p(\bar{p}-\bar{z})+\bar{p}(p-z)=0$$

або

$$\bar{p}z+p\bar{z}=2p\bar{p}.$$

Оскільки $p\bar{p}=1$, то рівняння дотичної має вигляд:

$$\bar{p}z+p\bar{z}=2. \qquad (2.16)$$

Це частковий випадок рівняння (2.12) при $a=b=p$. Розв'яжемо ще дві допоміжні задачі, необхідних для розв'язку змістовних геометричних завдань [8].

Задача 1. Знайти координати точки перетину січних AB і CD одиничного кола $z\bar{z}=1$, якщо точки A, B, C, D лежать на цьому колі і мають відповідно комплексні координати a, b, c, d.

Розв'язання. Користуючись рівнянням (2.12.1), отримуємо систему

$$\begin{cases} z + ab\bar{z} = a + b \\ z + cd\bar{z} = c + d \end{cases}$$

з якої знаходимо:

$$\bar{z} = \frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd} \qquad (2.17)$$

В тому випадку, коли хорди AB і CD перпендикулярні, в силу (2.15) $ab=-cd$, і тому результат (2.17) зводиться до вигляду

$$\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right),$$

звідки

$$z = \frac{1}{2}(a+b+c+d). \qquad (2.18)$$

У цьому випадку точка перетину визначається тільки трьома точками A, B, C, оскільки $d = -\frac{ab}{c}$, і, отже,

$$z = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right). \qquad (2.19)$$

Задача 2. Знайти комплексну координати точки перетину дотичних у точках $A(a)$ і $B(b)$ одиничного кола $z\bar{z}=1$.

Розв'язання. Для шуканої координати z маємо систему

$$\begin{cases} \bar{a}z + a\bar{z} = 2, \\ \bar{b}z + b\bar{z} = 2, \end{cases}$$

з якої знаходимо:

$$z = \frac{2(a-b)}{a\bar{b} - \bar{a}b.}$$

Оскільки $\bar{a} = \dfrac{1}{a}, \bar{b} = \dfrac{1}{b}$, то:

$$z = \frac{2ab}{a+b},\ \text{або}\ \frac{1}{z} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \qquad (2.20)$$

Розглянемо застосування комплексних чисел при доведенні класичних теорем елементарної геометрії [55].

Теорема 2.2. (Ньютона). В описаному навколо кола чотирикутнику середини діагоналей колінеарні з центром кола.

Доведення.

Візьмемо центр кола за початок, вважаючи його радіус рівним одиниці. Позначимо точки дотикання сторін даного чотирикутника $A_oB_oC_oD_o$ через A, B, C, D (рис. 2.9).

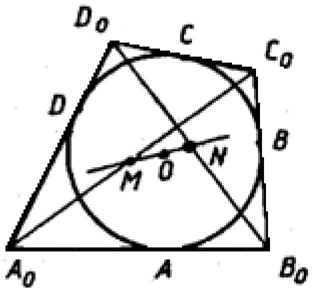

Рис. 2.9.

Нехай M та N – середини діагоналей A_oC_o і B_oD_o відповідно. Тоді згідно (2.20) точки A_o, B_o, C_o, D_0 будуть мати відповідно комплексні координати:

$$a_0 = \frac{2ad}{a+d}, b_0 = \frac{2ab}{a+b}, c_0 = \frac{2bc}{b+c}, d_0 = \frac{2cd}{c+d},$$

де a, b, c, d – комплексні координати точок A, B, C, D.

Тому

$$m = \frac{1}{2}(a_0 + c_0) = \frac{ad}{a+d} + \frac{bc}{b+c}, n = \frac{1}{2}(b_0 + d_0) = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}.$$

Обчислюємо

$$\frac{m}{n}=\frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}.$$

Оскільки $\bar{a}=\dfrac{1}{a}, \bar{b}=\dfrac{1}{b}, \bar{c}=\dfrac{1}{c}, \bar{d}=\dfrac{1}{d}$, то безпосередньо випливає, що

$$\frac{m}{n}=\frac{\bar{m}}{\bar{n}}.$$

Враховуючи (2.6) отримуємо, що точки *O, M, N* колінеарні.

Теорему доведено.

Теорема 2.3. (Гауса). Якщо пряма перетинає прямі, що містять сторони *BP*, *CA*, *AB* трикутника *ABC* відповідно в точках A_1, B_1, C_1, то середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 колінеарні (рис.2.10).

Доведення.

Використовуючи (2.11), запишемо умови колінеарності трійок точок AB_1C, CA_1B, BP_1A, $A_1B_1C_1$:

$$\begin{aligned}
&a(\bar{b}_1\text{-}\bar{c})+b_1(\bar{c}\text{-}\bar{a})+\bar{c}(\bar{a}\text{-}\bar{b}_1)=0,\\
&c(\bar{a}_1-\bar{b})+a_1(\bar{b}-\bar{c})+b(\bar{c}-\bar{a}_1)=0,\\
&b(\bar{c}_1\text{-}\bar{a})+c_1(\bar{a}\text{-}\bar{b})+a(\bar{b}\text{-}\bar{c}_1)=0,\\
&a_1(\bar{b}_1\text{-}\bar{c}_1)+b_1(\bar{c}_1\text{-}\bar{a}_1)+c_1(\bar{a}_1\text{-}\bar{b}_1)=0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

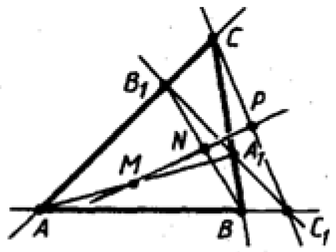

Рис. 2.10.

Якщо *M, N, P* — середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1, то

$$m(\bar{n}-\bar{p})+n(\bar{p}-\bar{m})+p(\bar{m}-\bar{n})=0 \qquad (2.22)$$

Оскіль $m=\dfrac{1}{2}(a+a_1), n=\dfrac{1}{2}(b+b_1), p=\dfrac{1}{2}(c+c_1),$ то рівність (22) еквівалентна:

$$\begin{aligned}
&(a+a_1)(\bar{b}+\bar{b}_1-\bar{c}-\bar{c}_1)+(b+b_1)(\bar{c}+\bar{c}_1-\bar{a}-\bar{a}_1)+\\
&+(c+c_1)(\bar{a}+\bar{a}_1-\bar{b}-\bar{b}_1)=0
\end{aligned}$$

або

$$
\begin{aligned}
&a(\overline{b}_1-\overline{c})+a(\overline{b}-\overline{c}_1)+a_1(\overline{b}_1-\overline{c}_1)+a_1(\overline{b}-\overline{c})+\\
&+b(\overline{c}_1-\overline{a})+b(\overline{c}-\overline{a}_1)+b_1(\overline{c}_1-\overline{a}_1)+b_1(\overline{c}-\overline{a})+\\
&+c(\overline{a}_1-\overline{b})+c(\overline{a}-\overline{b}_1)+c_1(\overline{a}_1-\overline{b}_1)+c_1(\overline{a}-\overline{b})=0
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Тепер легко бачити те, що (2.23) отримується додаванням рівностей (2.21). Теорему доведено.

Теорема 2.4 (Паскаля). Точки перетину прямих, що містять протилежні сторони вписаного шестикутника, лежать на одній прямій.

Доведення.

Нехай в коло вписано шестикутник *ABCDEF* і $(AB)\cap(DE)=M,\ (BC)\cap(EF)=N,\ (CD)\cap(FA)=P$ (рис. 2.11.). Візьмемо центр кола за нульову точку площини, а її радіус – за одиницю довжини. Тоді згідно (2.17) маємо:

$$\overline{m}=\frac{a+b-(d+e)}{ab-de},$$
$$\overline{n}=\frac{b+c-(e+f)}{bc-ef},$$
$$\overline{p}=\frac{c+d-(f+a)}{cd-fa},$$

Обчислюємо

$$\overline{m}-\overline{n}=\frac{(b-e)(bc-cd+de-ef+fa-ab)}{(ab-de)(bc-ef)}$$

і аналогічно

$$\overline{n}-\overline{p}=\frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-fa)}.$$

Далі знаходимо:

$$\frac{\overline{m}-\overline{n}}{\overline{n}-\overline{p}}=\frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-de)}.$$

Оскільки числа $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d},\overline{e},\overline{f}$ рівні відповідно

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}, \frac{1}{f},$$

то усна перевірка виявляє, що знайдене вираження є дійсним числом. Це свідчить про колінеарність точок *M, N, P*.

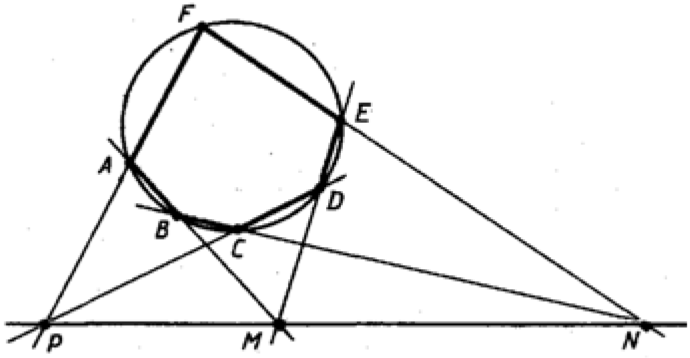

Рис.2.11.

Теорему доведено.

Теорема 2.5. (Монжа). В уписаному в коло чотирикутнику прямі, що проходять через середини сторін і кожної діагоналі перпендикулярно протилежним сторонам і відповідно до іншої діагоналі, перетинаються в одній точці. Вона називається точкою Монжа вписаного чотирикутника.

Доведення.

Серединні перпендикуляри до сторін чотирикутника *ABCD* перетинаються в центрі описаного кола, який візьмемо за початок координат. Для кожної точки *M*(*z*) серединного перпендикуляра до [AB] число $\dfrac{z-\frac{1}{2}(a+b)}{a-b}$ чисто уявне.

Зокрема, при *z*=0 воно рівне $-\dfrac{(a+b)}{2(a-b)}$. Для кожної точки *N*(*z*) прямій, що проходить через середину сторони *CD* перпендикулярно (*AB*), число $\dfrac{z-\frac{1}{2}(c+d)}{a-b}$ чисто уявне і навпаки. Але для *z*=$\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ воно рівне $\frac{a+b}{2(a-b)}$, тобто чисто уявне. Отже, точка E з комплексною координатою $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ лежить на зазначеній прямій. Тому й інші п'ять аналогічно побудованих прямих містять точку E.

Теорему доведено.

Розв'яжемо ще кілька основних планіметричних задач [1, 6, 14].

Задача 3. Довести, що діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли сума квадратів двох його протилежних сторін дорівнює сумі квадратів двох інших протилежних сторін.

Розв'язання. Потрібно довести:

$$|BC|^2+|AD|^2=|AB|^2+|CD|^2 \Leftrightarrow AC\perp BD.$$

Запишемо $AC\perp BD$ використовуючи (2.15): $ac+bd=0$.

Тоді, скориставшись формулами (2.15), (2.2) і тим, що точки A, B,C, D належать колу $(z\bar{z}=1)$, отримуємо, що

$$|BC|^2+|AD|^2=|AB|^2+|CD|^2 \Leftrightarrow ac+bd=0.$$

Задача 4. Довести, що якщо середні лінії MP, NQ чотирикутника $ABCD$ рівні, то його діагоналі AC і BD перпендикулярні і навпаки.

Розв'язання. Потрібно довести: $|MP|=|NQ|\Leftrightarrow AC\perp BD$.

(a)$|MP|=|NQ|\Leftrightarrow|MP|^2=|NQ|^2\Leftrightarrow(m-p)(\bar{m}-\bar{p})=(n-q)(\bar{n}-\bar{q})$,

оскільки

$$m=\frac{1}{2}(a+b),\ n=\frac{1}{2}(b+c),\ p=\frac{1}{2}(c+d),\ q=\frac{1}{2}(a+d),$$

згідно (2.4.1). Підставимо ці вирази в рівності (2.10.1), (2.12.1) і одержимо:

$$((a-c)(\bar{b}-\bar{d})+(\bar{a}-\bar{c})(b-d))=0,$$

але це і є умова того, що $AC\perp BD$.

2.3. Кути та площі. Критерій належності чотирьох точок колу

Домовимося позначати символом $\angle(\overline{AB}, \overline{CD})$ додатно орієнтований кут, на який треба повернути вектор $\overrightarrow{AB}$, щоб він став співнаправлений з вектором $\overrightarrow{CD}$. Якщо $\overline{OP} = \overline{AB}$ і $\overline{OQ} = \overline{CD}$, то точкам P та Q відповідають комплексні числа *b-a* та *d-c* (рис.2.12.) і

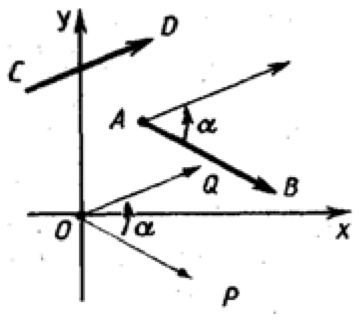

Рис.2.12.

$$\alpha = \angle(\overline{\mathrm{AB}} = \overline{CD}) = \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg\frac{d-c}{b-a} \qquad (2.24)$$

Ця формула в застосуванні до додатно орієнтованого трикутника *ABC* дає:

$$\angle A = \arg\frac{c-a}{b-a}, \angle B = \arg\frac{a-b}{c-b}, \ \angle C = \arg\frac{b-c}{a-c}. \qquad (2.25)$$

Якщо z=r($\cos\ \varphi + i\sin\varphi$) ,то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Звідси

$$\cos\varphi = \frac{z+z}{2|z|}, \sin\varphi = \frac{z-z}{2i|z|}. \qquad (2.26)$$

Тоді

$$cos(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\dfrac{d-c}{b-a} + \dfrac{\overline{d}-\overline{c}}{\overline{b}-\overline{a}}}{2\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|} = \frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2|d-c||b-a|},$$

оскільки $(b-a)(\overline{b}-\overline{a}) = |b-a|^2$.

Отже,

$$\cos(\angle(\overline{AB}, \overline{CD})) = \frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2|d-c||b-a|}. \qquad (2.27)$$

Аналогічно знаходимо:

$$\sin(\angle(\overline{AB},\overline{CD}))=\frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a})+(\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2i\,|\,d-c\,\|\,b-a\,|}. \quad (2.28)$$

Виведемо формулу для площі S додатно орієнтованого трикутника *ABC:*

$$S=\frac{1}{2}\,|\,AB\,||\,AC\,|\,sin(\angle(\overline{AB},\overline{AC}))=\frac{1}{4i}((c-a)(\overline{b}-\overline{a})-(b-a)(\overline{c}-\overline{a}))=$$

$$=-\frac{1}{4i}(a(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b})),$$

або

$$S=\frac{i}{4}(a(\overline{b}-\overline{c})+b(\overline{c}-\overline{a})+c(\overline{a}-\overline{b})), \qquad (2.29)$$

що можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$S=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} \qquad (2.30)$$

Якщо трикутник *ABC* вписаний в коло $z\overline{z}=1$, то формула (2.29) перетвориться

$$S=\frac{i}{4}\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}. \qquad (2.31)$$

Для площі S додатно орієнтованого чотирикутника *ABCD* маємо:

$$S=\frac{1}{2}\,|\,AC\,\|\,BC\,|\sin(\angle(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}))=$$
$$=\frac{1}{4i}((d-b)(\overline{c}-\overline{a})-(c-a)(\overline{d}-\overline{b})). \qquad (2.32)$$

Якщо чотирикутник *ABCD* уписаний в коло $z\overline{z}=1$, то з (2.32) отримаємо:

$$s=\frac{1}{4i}\frac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}. \qquad (2.33)$$

Три довільно взяті точки завжди належать або одному колу, або одній прямій. Критерії належності трьох точок одній прямій розглянуті вище.

Візьмемо чотири довільні точки *A*, *B*, *C*, *D* відповідно з комплексними координатами *a*, *b*, *c*, *d*. Комплексне число

$$\omega = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)} \qquad (2.34)$$

називається *подвійним відношенням* точок *A*, *B*, *C*, *D* і позначається (*AB*, *CD*). Порядок точок істотний.

Теорема 2.5. Для того щоб, чотири точки лежали на одній прямій або на колі, необхідно і достатньо, щоб їх подвійне відношення було дійсним числом.

Задача 1. В колі проведено три паралельні хорди AA_1, BB_1, CC_1. Довести, що для довільної точки *M* кола прямі MA_1, MB_1, MC_1 утворюють рівні кути відповідно із прямими *BP, CA, AB* [30].

Розв'язання. Візьмемо коло за одиничне, відмітимо точками *A*, *B*, *C*, A_1, B_1, C_1 комплексні числа a, b, c, a_1, b_1, c_1. Тоді за умовою (2.9) паралельності хорд маємо $aa_1 = bb_1 = cc_1$. Слід довести, що

$$\angle(MA_1, CB) = \angle(MB_1, CA) = \angle(MC_1, BA) \text{ (рис.2.13).}$$

Перша рівність еквівалентна

$$\arg\frac{b-c}{a_1-m} = \arg\frac{a-c}{b_1-m},$$

або

$$\arg\frac{(b-c)}{(a_1-c)}\frac{(b_1-m)}{(a_1-m)} = 0,$$

тобто цей дріб повинен бути числом дійсним. А це має місце, оскільки

$$\frac{(c-b)(m-b_1)aa_1}{(c-a)(m-a_1)bb_1} = \frac{(b-c)(b_1-m)}{(a-c)(a_1-m)}$$

Аналогічно доводиться й друга рівність кутів.

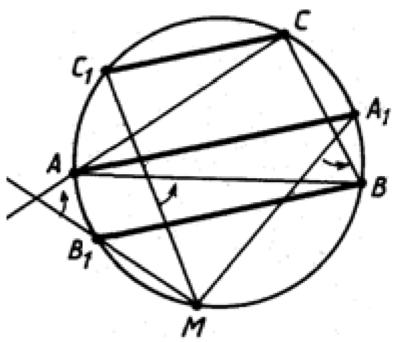

Рис.2.13.

Задача 2. На площині задано чотири кола $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ так, що кола σ_1 і σ_2 перетинаються в точках A_1 і B_1; кола σ_2 й σ_3 перетинаються в точках A_2 і B_2, кола σ_3 й σ_4 – в точках A_3 і B_3 й кола σ_4 й σ_1 – в точках A_4 і B_4. Довести, що якщо точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежать на колі або прямій, то й точки B_1, B_2, B_3, B_4 також лежать на колі або прямій (рис.2.14.) [30].

Розв'язання. Наступні числа дійсні

$$\omega_{12} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - a_2} : \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1}, \omega_{23} = \frac{a_2 - a_3}{b_3 - a_3} : \frac{a_2 - b_2}{b_3 - b_2},$$
$$\omega_{34} = \frac{a_3 - a_4}{b_4 - a_4} : \frac{a_3 - b_3}{b_4 - b_3}, \omega_{41} = \frac{a_4 - a_1}{b_1 - a_1} : \frac{a_4 - b_4}{a_1 - b_1}.$$

Тому буде дійсним і число

$$\frac{\omega_{12}\omega_{34}}{\omega_{23}\omega_{41}} = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_3 - a_2} : \frac{a_1 - a_4}{a_3 - a_4}\right)\left(\frac{b_1 - b_2}{b_3 - b_2} : \frac{b_1 - b_4}{b_3 - b_4}\right) =$$
$$= (A_1A_3, A_2A_4)(B_1B_3, B_2B_4).$$

Отже, з того, що подвійне відношення (A_1A_3, A_2A_4) дійсне число, випливає, що відношення (B_1B_3, B_2B_4) дійсне число.

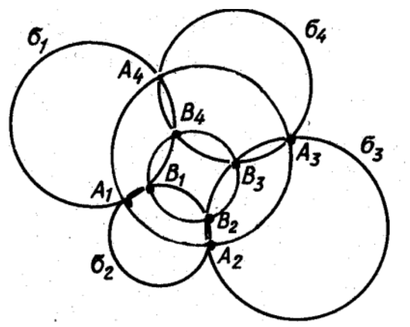

Рис.2.14.

2.4. Подібні та рівні трикутники. Правильний трикутник

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні й однаково орієнтовані (подібність першого роду), якщо $|A_1B_1| = k|AB|, |A_1C_1| = k|AC|$ і $\angle(B_1A_1C_1) = \angle(BAC)$ (кути орієнтовані) [18].

Ці рівності за допомогою комплексних чисел можна записати так:

$$|a_1 - b_1| = k|a-b|, |a_1 - c_1| = k|a-c|, \arg\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg\frac{c-a}{b-a}.$$

Дві рівності $\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|c-a|}{|b-a|}$ і $\arg\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg\frac{c-a}{b-a}$ еквівалентні одній

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c-a}{b-a},$$

або

$$\frac{c_1 - a_1}{c-a} = \frac{b_1 - a_1}{b-a} = \sigma, \qquad (2.35)$$

де $\sigma-$ комплексне число, $|\sigma|-$ коефіцієнт подібності.

Якщо, зокрема, σ – число дійсне, то $\sigma = \bar{\sigma} = \frac{c_1 - a_1}{c-a} = \frac{\bar{c}_1 - \bar{a}_1}{\bar{c} - \bar{a}}$ і за (2.8) буде $(AC) \parallel (A_1C_1)$. Аналогічно $(AB) \parallel (A_1B_1)$ і $(BC) \parallel (B_1C_1)$. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ гомотетичні.

Співвідношення (2.35) – необхідна і достатня ознака того, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ є подібними й однаково орієнтованими. Або:

$$ab_1 + bc_1 + ca_1 = ba_1 + cb_1 + ac_1, \qquad (2.36)$$

або

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 1 \\ b & b_1 & 1 \\ c & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.37)$$

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні й протилежно орієнтовані (подібність другого роду),

$$\Leftrightarrow |A_1B_1| = k\,|AB|, |A_1C_1| = |AC| \text{ і } \angle(B_1A_1C_1) = -\angle(BAC).$$

Остання рівність дає:

$$\arg\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = -\arg\frac{c-a}{b-a} = \arg\frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}.$$

Дві рівності

$$\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|\bar{c}-\bar{a}|}{|\bar{b}-\bar{a}|} \text{ і } \arg\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg\frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}$$

еквівалентні одній

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}},$$

або

$$\frac{c_1 - a_1}{\bar{c}-\bar{a}} = \frac{b_1 - a_1}{\bar{b}-\bar{a}} = \sigma, \qquad (2.38)$$

де σ – комплексне число, $|\sigma| = k$ – коефіцієнт подібності.

Співвідношення (2.38) є необхідною і достатньою ознакою того, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні й орієнтовані протилежно [32]. Або:

$$\bar{a}b_1 + \bar{b}c_1 + \bar{c}a_1 = \bar{b}a_1 + \bar{c}b_1 + \bar{a}c_1 \qquad (2.39)$$

або:

$$\begin{vmatrix} \bar{a} & a_1 & 1 \\ \bar{b} & b_1 & 1 \\ \bar{c} & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.40)$$

Якщо $|\sigma| = 1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ будуть рівні (конгруентні).

Тоді співвідношення (2.35) і (2.38) стають ознаками рівності трикутників відповідно до однакової й протилежній орієнтації.

Розглянуті ознаки подібності трикутників дозволяють обґрунтувати простий спосіб побудови добутку й частки двох комплексних чисел. Нехай дані точки A, B, E з комплексними координатами $a, b, 1$ і потрібно побудувати точку *M* з координатою $z=ab$.

Тоді, очевидно,

$$\frac{z-0}{a-0} = \frac{b-0}{1-0}.$$

Ця рівність говорить про те, що трикутники *OEA* та *OBM* подібні і однаково орієнтовані. Звідси й випливає спосіб побудови точки *M,* відповідної до добутку ab (рис. 2.15).

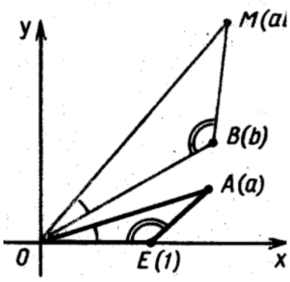

Рис.2.15.

Навпаки: якщо задано точки *M* та *A* відповідно з координатами ab і a, то точка *B*, будується за допомогою тих, же подібних трикутників.

Слід звернути увагу на один важливий окремий випадок. Якщо $|a|=1$, то точка *M* буде образом точки *B* при повороті близько нульової точки на кут $\varphi = \arg a$. Щоб орієнтований трикутник *ABC* був подібний орієнтованому трикутнику *BCA*, то трикутник *ABC* повинен бути правильним. Тому з умови (2.36) отримуємо необхідну й достатню умову того, щоб трикутник ABC був правильним

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca, \qquad (2.41)$$

або

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0. \qquad (2.42)$$

Нехай $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, є одним з коренів рівняння $z^3 = 1$. Інші два корені якого рівні

$$1 \text{ і } \varepsilon^2 = \bar{\varepsilon} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}, |\varepsilon| = |\varepsilon^2| = 1 \quad .$$

По теоремі Вієта для кубічного рівняння $z^3 - 1 = 0$ маємо $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Тоді рівність (2.41) буде еквівалентна:

$$(a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c) = 0,$$

або після множення першого тричлена на ε^2:

$$(a + c\varepsilon + b\varepsilon^2)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c) = 0 . \qquad (2.43)$$

Отже, для того щоб трикутник ABC був правильним, необхідно і достатньо виконання хоча б однієї з рівностей:

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0 \qquad (2.44)$$

або ж

$$a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0. \qquad (2.45)$$

Виявляється, перша з цих рівностей відповідає тільки тому випадку, коли трикутник ABC орієнтований додатно, а друга виконується лише при від’ємній його орієнтації. Дійсно, оскільки множенню на ε відповідає поворот на $\frac{2\pi}{3}$, то при додатній орієнтації трикутника

$$b - a = \varepsilon(a - c), c - b = \varepsilon(b - a) \text{ (рис. 2.16)},$$

звідки $a = b - \varepsilon a + \varepsilon c, \varepsilon b = c - b + \varepsilon a,$ і тому

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = c(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0.$$

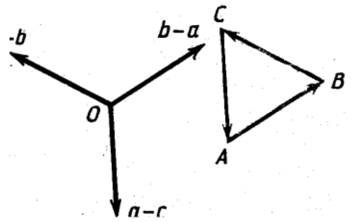

Рис.2.16.

Аналогічно перевіряється виконання рівності (2.45). Очевидно, одночасно рівності (2.44) і (2.45) виконуватися не можуть [41].

Якщо правильний трикутник ABC уписаний в коло $zz = 1$, то при його додатній орієнтації $b\varepsilon = c$ і $c\varepsilon^2 = b$, а при від'ємній орієнтації $b\varepsilon = a$ і $a\varepsilon^2 = b$Тому кожна з умов (2.44) і (2.45) приймає вид:

$$a + b + c = 0. \qquad (2.46)$$

Задача 1. Довести, що трикутник $A_1B_1C_1$, сторони якого належать дотичним у вершинах трикутника ABC до його описаного кола, гомотетичний трикутнику з вершинами в основах $A_2, B_2, C_2,$ висот трикутника ABC [12].

Розв'язання. Приймемо описане коло за одиничне $z\bar{z} = 1.$ Керуючись формулами (2.20) і (2.19), отримуємо:

$$a_1 = \frac{2bc}{b+c}, b_1 = \frac{2ac}{a+c}, c_1 = \frac{2ab}{a+b},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a + b + c - \frac{bc}{a}),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(a + b + c - \frac{ac}{b}),$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(a + b + c - \frac{ab}{c}).$$

Перевіряємо виконуваність (2.35):

$$\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} = \frac{-4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \sigma,$$

причому $\sigma = \bar{\sigma}$, тобто σ – дійсне число. Отже, трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ гомотетичні.

Задача 2. Два рівні однаково орієнтовані трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ вписані в одне коло. Довести, що трикутник з вершинами в точках перетину прямих BP і B_1C_1, CA і C_1A_1, AB і A_1B_1 подібний даним трикутникам [12].

Розв'язання. Рівняння кола $z\bar{z} = 1$. Вершини трикутника $A_1B_1C_1$ є образами вершин трикутника ABC при повороті на деякий кут $\arg\alpha$,

$|\alpha|=1$. Тому $a_1=\alpha\, a, b_1=\alpha\, b, c_1=\alpha\, c.$ Якщо A_2, B_2, C_2 – точки перетину прямих BP і B_1C_1, CA і C_1A_1, AB і A_1B_1 відповідно, то за (2.17)

$$a_2=\frac{b+c-(\alpha\, b+\alpha\, c)}{bc-\alpha^2 bc}=\frac{b+c}{bc(1+\alpha)},$$

звідки $a_2=\dfrac{b+c}{1+\overline{\alpha}}$. Аналогічно $b_2=\dfrac{a+c}{1+\overline{\alpha}}$, $c_2=\dfrac{a+b}{1+\overline{\alpha}}$.

Залишилося перевірити умови (2.17):

$$ab_2+bc_2+ca_2=ba_2+cb_2+ac_2,$$

за допомогою безпосередньої підстановки.

Задача 3. Довести, що середини відрізків, що з'єднують відповідні вершини двох рівних і протилежно орієнтованих трикутників, колінеарні.

Розв'язання. Скористаємося:

1) Формулою (2.38), – необхідна і достатня умова рівності двох протилежно орієнтованих трикутників ABC і

$$A_1B_1C_1\ \ \frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}=\frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}};$$

2) Формулою (2.4.1) для точок M, N, P:

$$m=\frac{1}{2}(a+a_1),\ n=\frac{1}{2}(b+b_1),\ p=\frac{1}{2}(c+c_1)\ \text{ (з умови задачі);}$$

3) Формулою (2.11), – колінеарності точок M, N, P:

$$m(\overline{n}-\overline{p})+n(\overline{p}-\overline{m})+p(\overline{m}-\overline{n})=0$$

Тепер простою перевіркою переконуємося в тому, що з $1)\wedge 2)\Rightarrow 3)$.

2.5. Пряма та коло на площині комплексних чисел

Розглянемо геометричний зміст рівняння $az+b\overline{z}+c=0$.

Знайдемо множину точок площини, спряжені комплексні координати яких задовольняють рівнянню

$$az+b\overline{z}+c=0 \qquad (2.47)$$

Спочатку розглянемо випадок, коли c=0. Тоді маємо систему відносно z та $\bar{z}$

$$\begin{cases} az + b\bar{z} = 0 \\ \bar{b}\bar{z} + \bar{a}\bar{z} = 0 \end{cases}$$

друге рівняння якої виходить із першого переходом до спряжених чисел [34]. Порівнюючи коефіцієнти при $\bar{z}$, шляхом віднімання другого рівняння з першого отримуємо:

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z = 0.$$

Якщо $a\bar{a} \neq b\bar{b}$, тобто $|a| \neq |b|$, то розв'язком отриманого рівняння, а отже, і розв'язком вихідного рівняння $az + b\bar{z} = 0$ буде z=0. При $|a| = |b|$ рівняння $az + b\bar{z} = 0$ запишемо у вигляді $z = -\frac{b}{a}\bar{z}$. Модулі лівої й правої частин рівні. Необхідно, щоб $arg\, z = arg(-\frac{b}{a}) + arg\, z$, звідки $\arg z = \frac{1}{2}\arg(-\frac{b}{a})$. Цій умові задовольняє кожна точка прямої m, що проходить через початок під кутом $\alpha = \frac{1}{2}\arg(-\frac{b}{a})$ до дійсної осі (рис.2.17.). Так, рівнянням

$$az + b\bar{z} = 0 \qquad (2.48)$$

задається пряма при $|a| = |b|$ і точка $z = 0$ при $|a| \neq |b|$.

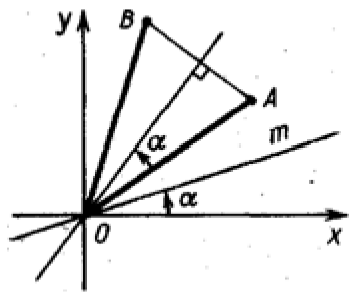

Рис.2.17.

Нехай тепер $c \neq 0$. Вільний член рівняння (2.47) можна завжди зробити дійсним числом шляхом множення обох частин рівняння на c. Тому відразу будемо вважатися $c = \bar{c} \neq 0$. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + c = 0, \end{cases}$$

з якої отримуємо: $(a - \bar{b})z + (b - \bar{a})\bar{z} = 0$.

Розглянемо можливі випадки.

Якщо $a \neq \bar{b}$, то $\bar{z} = \dfrac{a - \bar{b}}{\bar{a} - b} z$ і підстановкою у вихідне рівняння отримуємо: $az + \dfrac{b(a - \bar{b})}{a - b} z + c = 0,$ або $(a\bar{a} - b\bar{b})z + c(\bar{a} - b) = 0$.

При $|a| \neq |b|$ його розв'язок єдиний:

$$z = \frac{c(b - \bar{a})}{a\bar{a} - b\bar{b}}.$$

При $|a| = |b|$ $(c \neq 0, a \neq \bar{b})$ розв'язків немає.

Якщо $a = \bar{b}$, то $\bar{a} = b$ і $a\bar{a} = b\bar{b}$, тобто $|a| = |b|$. У цьому випадку рівнянням (2.47) при $c = \bar{c}$ є пряма.

Дійсно, оберемо точку $Q(-\dfrac{c}{2a})$ і вектор $\overrightarrow{OB}$ точки $B(b)$ і розглянемо множину точок $M(z)$, для кожної з яких $(MQ) \perp (OB)$:

$$(z + \frac{c}{2a})\bar{b} + (\bar{z} + \frac{\bar{c}}{2\bar{a}})b = 0. \qquad (2.49)$$

Очевидно, ця множина є прямою. При $a = \bar{b}$ і $c = \bar{c}$ рівняння (2.49) еквівалентно рівнянню (2.47).

Таким чином, при $a = \bar{b}$ і $c = \bar{c}$ рівняння (2.47) є рівнянням прямої, яка проходить через точку $Q(-\dfrac{c}{2a})$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OB}(b)$.

Нарешті, відзначимо випадок, коли $a = \bar{b}$, але $c \neq \bar{c}$. Тоді система

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{c} = 0 \end{cases}$$

приводить до протиріччя: $(a - \bar{b})z + (b - \bar{a})\bar{z} + (c - \bar{c}) = 0$, тобто $c = \bar{c}$.

Отже, рівнянням $az + b\bar{z} + c = 0$, в якому хоча б один з коефіцієнтів a і b відмінний від нуля, задається:

1) пряма при $|a|=|b|$, $c=0$, а також при $a = \bar{b}, c = \bar{c}$;

2) єдина точка при $|a| \neq |b|$;

3) порожня множина в інших випадках, тобто при $|a| = |b|, c \neq 0, a \neq \bar{b}$, а також при $a = \bar{b}$, $c \neq \bar{c}$.

Повернемося знову до системи:

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{c} = 0 \end{cases}$$

не накладаючи обмежень на коефіцієнти a, b, c, крім того, що a і b не дорівнюють нулю одночасно. Порівнюючи коефіцієнти при $\bar{z}$, приходимо до рівняння $(a\bar{a} - b\bar{b})z = b\bar{c} - \bar{a}c$, яке:

а) має єдиний розв'язок при $a\bar{a} \neq b\bar{b}$;

б) має нескінченну множину розв'язків при $a\bar{a} = b\bar{b}$ і $b\bar{c} = \bar{a}c$;

в) не має розв'язків при $a\bar{a} = b\bar{b}$ і $b\bar{c} \neq \bar{a}c$.

Отже, рівняння $az + b\bar{z} + c = 0$ визначає:

а) єдину точку при $a\bar{a} \neq b\bar{b}$

б) пряму при $a\bar{a} = b\bar{b}$ і $b\bar{c} = \bar{a}c$;

в) порожню множину при $a\bar{a} = b\bar{b}$ і $b\bar{c} \neq \bar{a}c$.

Рівняння

$$\bar{u}z + u\bar{z} + v = 0, v = \bar{v} \qquad (2.50)$$

будемо називати *зведеним рівнянням* прямої.

2.5. Дві прямі. Відстань від точки до прямої

Нехай пряма m задана наведеним рівнянням $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, b = \bar{b}$. Оскільки вона перпендикулярна вектору $\overrightarrow{OA}(a)$, то вектор $\overrightarrow{OP}(ai)$ буде їй паралельний (рис. 2.18). Отже, орієнтований кут від осі x до прямої m дорівнює аргументу числа ai:

$$\varphi = arg\, ai = \frac{\pi}{2} + arg\, a\,. \qquad (2.51)$$

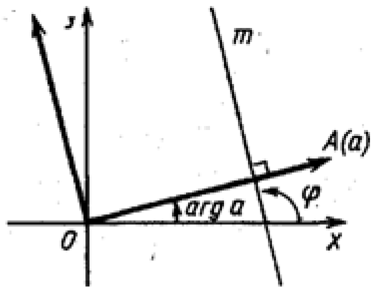

Рис.2.18.

Додатно орієнтований кут Θ від прямої $\bar{a}_1 z + a_1 \bar{z} + b_1 = 0$ до прямої $\bar{a}_2 z + a_2 \bar{z} + b_2 = 0$ дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $a_1 i$ і $a_2 i$:

$$\Theta = arg\,\frac{a_2 i}{a_1 i} = arg\,\frac{a_2}{a_1}\,. \qquad (2.52)$$

Формули (2.51) і (2.52) дозволяють знаходити відповідні кути з точністю до доданка π [35].

З формули (2.52) випливає критерій перпендикулярності і критерій паралельності прямих m_1 і m_2.

Дійсно, $\Theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1}$ чисто уявне число. Це значить, що

$$m_1 \perp m_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}\text{, або}$$

$$m_1 \perp m_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{\bar{a}_1} = -\frac{a_2}{\bar{a}_2}\,. \qquad (2.53)$$

При $\Theta = 0$ або $\Theta = \pi$ одержуємо:

$$m_1 \,||\, m_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}\,. \qquad (2.54)$$

Якщо пряма $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ проходить через точку $M_0(z_0)$, то $\bar{a}z_0 + a\bar{z}_0 + b = 0$ і її рівняння можна записати у вигляді:

$$\bar{a}(z-z_0)+a(\bar{z}-\bar{z}_0)=0. \qquad (2.55)$$

В силу умови (2.8) перпендикулярності для прямої, заданої коефіцієнтами при z і $\bar{z}$ будуть відповідно числа a та $-\bar{a}$. Тому з рівняння (2.55) одержуємо рівняння

$$\bar{a}(z-z_0)-a(\bar{z}-\bar{z}_0)=0. \qquad (2.56)$$

прямої, що проходить через точку $M_0(z_0)$ перпендикулярно прямій $\bar{a}z+a\bar{z}+b=0$. Розв'язок системи

$$\begin{cases}\bar{a}z+a\bar{z}+b=0\\ \bar{a}(z-z_0)-a(\bar{z}-\bar{z}_0)=0\end{cases}$$

дає координату

$$z_1=\frac{\bar{a}z_0-a\bar{z}_0-b}{2\bar{a}} \qquad (2.57)$$

основи M_1 перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(z_0)$ на пряму $\bar{a}z+a\bar{z}+b=0$.

Оскільки відстань d від точки M_0 цієї прямої дорівнює $|M_0M_1|$, то

$$d=|z_1-z_0|=\frac{|\bar{a}z_0+a\bar{z}_0+b|}{2|a|}. \qquad (2.58)$$

Геометричний зміст рівняння $z\bar{z}+az+b\bar{z}+c=0$.

З формули відстані між двома точками отримується рівняння кола за його центром $S(s)$ і радіусом R:

$$(z-s)(\bar{z}-\bar{s})=R^2 \qquad (2.59)$$

Нехай задано рівняння

$$z\bar{z}+az+b\bar{z}+c=0, \qquad (2.60)$$

в якому на комплексні коефіцієнти a, b, c не накладається заздалегідь ніяких умов [5]. Потрібно знайти множину точок, координати яких йому задовольняють. Із цією метою зручно представити його в еквівалентному вигляді:

$$(z+b)(\bar{z}+a)=ab-c. \qquad (2.61)$$

Розглянемо всі можливі випадки для коефіцієнтів a, b, c.

1. Порівнюючи рівняння (2.61) з рівнянням (2.59) кола, отримуємо, що рівняння (2.61), а виходить, і рівняння (2.60) задають кола тоді й тільки тоді, коли $a = \bar{b}$ й ab–*c* – дійсне число. Оскільки в цьому випадку $ab - c = a\bar{a} - c$, то *c* має бути дійсним числом.

Отже, рівняння

$$z\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0,\ c = \bar{c},\ b\bar{b} \rhd c \qquad (2.62)$$

є рівнянням кола з центром *s*=-*b* і радіусом $R = \sqrt{b\bar{b} - c}$.

2. При $a = \bar{b}$ і *c*=*ab* рівнянню (2.61) задовольняє єдина точка *s*=-*b*. Зокрема, цей випадок має місце при *a*=*b*=*c*=*0*. Кажуть, що рівнянням $(z+b)(\bar{z}+\bar{b}) = 0$ задає коло з центром *s*=-*b нульового радіуса.*

3. Якщо $a = \bar{b}$, $c = \bar{c}$, але $b\bar{b} \lhd c$, то $\sqrt{b\bar{b} - c}$ – чисто уявне число. $\sqrt{b\bar{b} - c} = iR$, тоді (2.61) можна записати так:

$$(z+b)(\bar{z}+\bar{b}) = -R^2. \qquad (2.63)$$

Рівнянню (2.63) не задовольняє жодна точка площини, оскільки ліва частина від’ємна, а права від’ємна при будь-якому значенні *z*. Кажуть, що це рівняння є рівнянням кола уявного радіуса *ir* з дійсним центром *S*, що має комплексну координату *s*=-*b*.

4. Коли $a = \bar{b}$, але $c \neq \bar{c}$, рівняння (2.61) суперечливе: ліва частина його дійсна, а права уявна. У цьому випадку воно не задає ніякого геометричного образа.

5. Залишилося розглянути випадок, коли $a \neq \bar{b}$. Тоді з рівняння (2.60) віднімемо рівняння $z\bar{z} + \bar{a}\bar{z} + \bar{b}z + \bar{c} = 0$, що отримується з (2.60) переходом до спряжених комплексних чисел. Одержуємо:

$$(a - \bar{b})z + (b - \bar{a})\bar{z} + c - \bar{c} = 0,$$

звідки

$$\bar{z} = \frac{(a - \bar{b})z + c - \bar{c}}{\bar{a} - b}$$

Виконуючи цю підстановку в рівняння (2.60), приводимо його до виду

$$(a-\overline{b})z^2+(a\overline{a}-b\overline{b}+c-\overline{c})z+\overline{a}c-b\overline{c}=0. \qquad (2.64)$$

При $a\neq\overline{b}$ рівняння (2.60) і (2.64) рівносильні. Залежно від того, відмінний від нуля або дорівнює нулю дискримінант

$$D=(a\overline{a}-b\overline{b}+c-\overline{c})^2-4(a-\overline{b})(\overline{a}c-b\overline{c})$$

квадратного рівняння (2.64), воно буде визначати дві різні (дійсні) або дві точки, що збіглися. При *D=0* точки, що збіглися, мають комплексну координату

$$z=\frac{a\overline{a}-b\overline{b}+c-\overline{c}}{2(\overline{b}-a)}$$

Зокрема, при *c=ab* як рівняння (2.61), так і рівняння (2.64) дає пари точок $z_1=-b$ і $z_2=-a$.

Отже, рівнянням (2.60) задає або коло (дійсне, уявне, нульового радіуса), або дві точки (різні або, що ж ті, що збіглися), або порожню множину точок.

РОЗДІЛ 3
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА В ТРИГОНОМЕТРІЇ

Покажемо, що виконуються такі властивості [15]

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi+\varphi_1)}, \qquad (3.1)$$

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} \qquad (3.2)$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{(n\varphi)i} \qquad (3.3)$$

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi_1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = (\cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1) +$$
$$+ i(\sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1) = \cos(\varphi+\varphi_1) + i\sin(\varphi+\varphi_1) = e^{i(\varphi+\varphi_1)}$$

Отже, формула (3.2) вірна для будь-яких φ і φ_1. Підставивши в (3.2) $\varphi_1 = -\varphi$, отримаємо:

$$e^{i\varphi}e^{i(-\varphi)} = e^{i\cdot 0} = 1,$$

а звідси випливає, що $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$, тобто формула (3.3).

Для доведення формули (3.3) для будь-яких натуральних n скористаємося методом математичної індукції. При $n=1$ формула (3.3) є очевидною. Нехай вона має місце для $n=k$: $(e^{i\varphi})^k = e^{i(k\varphi)}$. Покажемо, що формула (3.3) справедлива для $n = k+1$:

$$(e^{i\varphi})^{k+1} = e^{k(i\varphi)}e^{i\varphi} = e^{i(k\varphi)}e^{i\varphi} = e^{i(k\varphi+\varphi)} = e^{i(k+`1)\varphi}.$$

Отже, формула (3.3) справедлива для будь-якого натурального n. Нехай n – ціле від'ємне число, тобто $n=-m$, де m – натуральне число.

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = \left(e^{i\varphi}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(e^{i\varphi}\right)^m} = e^{i(-m\varphi)} = e^{i(n\varphi)}$$

Отже формула (3.3) справедлива для будь-якого $n \in Z$. Її називають формулою Муавра. Відома інша форма запису:

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

З формули Ейлера випливає дві формули які виражають $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$ через уявні експоненти:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (3.4)$$

Додаючи відповідні формули отримаємо:

$$2\cos\varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi};\ 2i\sin\varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi},$$

які рівносильні формулам: $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.

Формули Ейлера і Муавра дозволяють ефективно розв'язувати різні задачі, яки пов'язані з тригонометричними функціями. Їх можна використовувати при обчисленні різних тригонометричних сум, з якими доводиться зустрічатися в різних прикладних дисциплінах. Загальний принцип обчислення таких сум полягає в тому, що дану дійсну суму замінюють деякою комплексною сумою, яку обчислюють за допомогою використання формул суми членів геометричної прогресії.

Задача 1. Обчислити суму: $A+B$, де

$$A = \cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos 99\alpha,$$

$$B = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin 99\alpha.$$

Розв'язання.

$$S = A + Bi = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) + (\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha) +$$
$$+ \ldots + (\cos 99\alpha + i\sin 99\alpha).$$

За формулами Ейлера і Муавра маємо:

$$S = A + Bi = e^{i\alpha} + (e^{i\alpha})^3 + (e^{i\alpha})^5 + \ldots + (e^{i\alpha})^{99}.$$

Обчислимо S за формулою суми членів геометричної прогресії:

$$S = \frac{(e^{i\alpha})^{99}(e^{i\alpha})^2 - e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha})^2 - 1} = \frac{e^{101i\alpha} - e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha}) - 1}.$$

Для того щоб знайти A і B достатньо з S виділити дійсну і уявну частину.

$$S = \frac{(e^{50i\alpha} - e^{-50i\alpha})e^{i\alpha}e^{50i\alpha}}{e^{i\alpha}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} = \frac{e^{50i\alpha}2i\sin 50\alpha}{2i\sin\alpha} = \frac{\sin 50\alpha}{\sin\alpha}(\cos 50\alpha + i\sin 50\alpha).$$

Отже, $A = \dfrac{\sin 50\alpha \cos 50\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin 100\alpha}{2\sin\alpha}$, $B = \dfrac{\sin^2 50\alpha}{\sin\alpha}$.

Задача 2. Обчислити суму $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$

Розв'язання.

Позначимо через

$$A = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha,$$

$$B = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha.$$

Тоді $A + Bi = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \ldots + (\cos n\alpha + i\sin n\alpha);$

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = a.$$

$A + Bi = a + a^2 + \ldots + a^n =$

$$= \frac{a^n * a - a}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - a}{\mathbf{a} - 1} = \frac{(a^{n+1} - a)(a-1)}{a^2 - 2a + 1} = \frac{a(a^n - a)(a-1)}{a(a - 2 + a^{-1})} =$$

$$= \frac{a^{n+1} - a - a^n + 1}{(a + a^{-1}) + 2} = S.$$

Обчислимо знаменник

$$a + a^{-1} - 2 = \cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x - 2 =$$

$$= 2\cos x - 2 = -2(1 - \cos x) = -4\sin^2\frac{x}{2};$$

$$S = \frac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - \cos nx - i\sin nx - \cos x - i\sin x + 1}{-4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$S = \frac{\cos(n+1)x - \cos nx - \cos x + 1}{-4\sin^2\frac{x}{2}} + i\,\frac{\sin(n+1)x - \sin nx - \sin x}{-4\sin^2\frac{x}{2}};$$

Отже,

$$S = \frac{(\cos(n+1)x - \cos nx) - \cos x + 1}{-4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{-2\sin\frac{(n+1)x + nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x - nx}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2}}{-4\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{-2\sin\frac{2(n+1)x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2}}{-4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{2(n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{2}\right]\frac{1}{2} \cdot \cos\left[\frac{(n+1)x}{2} + \frac{x}{2}\right]\frac{1}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$A = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Задача 3. Представити у вигляді многочлена першого степеня від тригонометричних функцій кутів, кратних *x* $\cos^3 x$.

Розв'язання.

Розглянемо комплексне число $z = \cos x + i\sin x$.

Тоді $\cos x = \frac{z-z^{-1}}{2}$; $\sin x = \frac{z-z^{-1}}{2i}$;

$\cos kx = \frac{z^k-z^{-1}}{2}$; $\sin kx = \frac{z^k-z^{-1}}{2i}$;

$$\cos^3 x = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(z^3 + 3z^2\ z^{-1} + 3z^{-2}\ z + z^{-3}) =$$

$$= \frac{1}{8}((z^3 + z^{-3}) + 3(z + z^{-1})) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{z^{3+}z^{-3}}{2} + 3\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x);$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$$

Формули Ейлера можна використовувати також при вивченні коливальних процесів. Розглянемо два гармонічні коливання точки з одною частотою ω:

$$v_1 = A\sin(\omega t + \alpha),$$
$$v_2 = B\sin(\omega t + \beta),$$

де A, B – амплітуди коливань, а α, β – початкові фази.

Покажемо, що при додаванні гармонічних коливань отримаємо гармонічне коливання v з такою ж частотою ω.

$$v = v_1 + v_2 = A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta).$$

Цю суму можна розглянути як уявну частину комплексного суми $S = Ae^{i(\omega t+\alpha)} + Be^{i(\omega t+\beta)}$, тобто

$$v = \mathrm{Im}\left[Ae^{i(\omega t+\alpha)} + Be^{i(\omega t+\beta)}\right] = \mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}(Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta})\right].$$

Запишемо комплексне число $Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta}$ в показниковій формі:

$$Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta} = Ce^{i\gamma}.$$

Тоді

$$v = \mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}Ce^{i\gamma}\right] = \mathrm{Im}\left[Ce^{i(\omega t+\gamma)}\right] = C\sin(\omega t + \gamma).$$

Отже, ω – частота гармонічного коливання v, C – його амплітуда.

Позначимо різницю початкових фаз через φ. Обчислимо амплітуду C отриманого гармонічного коливання. Враховуючи, що $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$, отримаємо:

$$C = \left|Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta}\right| = \left|Ae^{i\alpha} + Be^{i(\alpha+\varphi)}\right| = \left|e^{i\alpha}\right|\left|A + Be^{i\varphi}\right| =$$
$$= \left|(A + B\cos\varphi) + iB\sin\varphi\right| = \sqrt{A^2 + 2AB\cos\varphi + B^2}.$$

Дана формула показує, що максимальна амплітуда результуючого коливання рівна $A+B$ (при $\varphi = 0$), тобто тоді коли початкові фази в двох коливаннях однакові. Якщо $A = B$ і $\cos\varphi = -1$, то при додаванні коливань точка залишиться в стані спокою.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто основні положення, що стосуються поняття комплексного числа, властивості операцій над комплексними числами; розкрито питання стосовно геометричної інтерпретації комплексних чисел з метою застосування її при розв'язуванні задач планіметрії та доведенні тверджень; розглянуто питання стосовно можливості застосування комплексних чисел в тригонометрії. Підсумовуючи результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні положення.

Будь-який алгебраїчний поліном степеня *n*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

може бути представлений у вигляді добутку, рівно *n* множників:

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n),$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – комплексні числа, корені рівняння $f(x)=0$ (основна теорема алгебри).

Основними методами побудови розширення числової системи є аксіоматичний метод і конструктивний метод.

Існують різні способи введення комплексних чисел.

В роботі була розглянута система аксіом комплексних чисел, доведено, що:

– аксіоматична теорія комплексних чисел несуперечлива та категорична;

– поле комплексних чисел C не можна розташувати;

– якщо поле комплексних чисел пронумерувати по модулю комплексного числа, то воно буде повним;

– комплексні числа мають представлення у векторній, алгебраїчній, тригонометричній, показниковій та матричній формах.

Метод комплексних чисел можна застосовувати при розв’язуванні планіметричних та тригонометричних задач та при доведенні деяких основних планіметричних теорем. Використовуючи комплексні числа, можна довести критерій колінеарності точок, критерій належності чотирьох точок колу, теореми Ньютона, Гауса, Паскаля , Монжа тощо.

Отже, метод комплексних чисел у застосуванні до розв'язування задач з елементарній геометрії можна давати не тільки студентам вищих навчальних закладів, але й школярам на факультативних заняттях. Оскільки цей метод простий у застосуванні, він дає можливість подивитися на задачі з геометрії з іншого боку, привчитися до того, що всі задачі можна розв’язувати аналітичним методом, взагалі не прибігаючи до креслення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамов А.М., Виленкин Н.Я., Дорофєєв Г.В., Егоров А.А., Земляків А.Н., Моркович А.Г. Вибрані питання математики. 10 клас. Факультативний курс. – К., 1999.
2. Александров П.С.. Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, М. – Л., 1948.
3. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел. – М.: Просвещение, 1975.
4. Андронов И.К., Окунев А.К. Арифметика рациональных чисел. – М.: просвещение, 1971.
5. Андронов І.К. Математика дійсних і комплексних чисел. – К., 2005.
6. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов, МЦНМО, 2002.
7. Балк М.Б., Балк Г.Б. Полухин А.А. Реальные применения мнимых чисел. – К.: Рад. шк.,1988. – 255с.
8. Бєляєва Е.С., Потапов А.С. Рівняння й нерівності першого степеня з параметром. Навчальний посібник. - К, 2001.
9. Болтянський В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунін М.И. Лекції й задачі по елементарній математиці. – К., 2001.
10. Вивальнюк Л.М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи.– К.: Вища школа, 1988. –272 с.
11. Виленкин Н.Я., Івашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.І. Алгебра й математичний аналіз для 11 класу. – К., 2006.
12. Галицький М.А., Мошкович М.М., Шварцбурд С.І. Поглиблене вивчання курсу алгебри й математичного аналізу. – К., 2004.
13. Гордієнко Н.А., Бєляєва Е.С., Фирстов В.Е., Серебрякова І.В. Комплексні числа і їхні додатки: Навчальний посібник. – К., 2004.

14. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано.– М.: Знание, 1980.– 191 с.

15. Елисеев В. И. Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного, Центр научно-технического творчества молодежи Алгоритм. – М.: НИАТ, 1990.

16. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа.– М.: Наука, 1973.– 144с.

17. Криволапов В.П. Задачі на геометричну інтерпретацію комплексних чисел // У світі математики. – К.: Рад. шк., 1984. – Вип. 15. – С.194-204.

18. Крутецкий Р.О., Фадеев Д.К. Алгебра и арифметика комплексных чисел: Пособие для учителей средних школ. – Л.: Учпедгиз, ленинградское отделение, 1939.

19. Кузмин Р.О., Фадеев Д.К. Алгебра и арифметика комплексных чисел. – Л.: Изд. Наркомпроса РСФСР, 1939.

20. Кураш А.Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. – М.: Наука, 1983.

21. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, 9 изд., М., 1968.

22. Л. И. Волковский. Сборник задач по теории функций комплексных переменных.- М.: Просвещение, 1985.

23. Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения.– М.: Наука, 1979.– 56 с.

24. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегрированное исчисление для вузов. – М.: Физмат, 1963.

25. Понтрягин Л. Комплексные числа, Квант, № 3, 1982.

26. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел.– М.: Наука, 1986.- 117 с.

27. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1977.- 444 с.

28. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. преобразования Лапласа.- М.: Наука, 1980.- 336 с.

29. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.- М.: Наука, 1967.- 304 с.

30. Скопец З. А. Геометрические миниатюры.- М.: Просвещение, 1990

31. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.3, ч.2.- М.: Наука, 1974.- 672 с.

32. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения.-М.: Высшая школа, 1988.

33. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1969.

34. Уткіна С.В., Наришкіна Л.С. Алгебра і числові системи. – Вища школа, 1995. – 304 с.

35. Фильчакова П.Ф. Справочник по элементарной математике (для поступающих в ВУЗы). – Киев: Наукова Думка – 1972.

36. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

37. Фукс Б.А., Левин В.И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.- М.; Л.: Наука, 1951.- 308 с.

38. Шклярський Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом І.М. Вибрані задачі й теореми елементарної математики. Арифметика й алгебра. – К., 2004.

39. Шостак Р.Я. Операционное исчисление.- М 1968.- 192 с.

40. Яглом И. М. Комплексные числа и их применения в геометрии.– М.: Физматгиз, 1963.– 192 с.

41. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа. Ч2 - М.: 1987.