МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ПРИ ФОРМУВАННІ ОСНОВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОНЯТЬ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізація 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Цимбалюк Анастасія Олександрівна
Керівник кандидат фізико-математичних наук, доцент Кузьмич Валерій Іванович
Рецензент старший вчитель, вчитель вищої категорії Херсонської загальноосвітньої школи I-III ступенів № 44 Херсонської міської ради
Перегняк Олександр Адамович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Розвиток просторової уяви учнів, як опори геометричного мислення, представляє собою одну зі змістовних задач викладання математики в школі. Отож, вивчення геометрії не має сенсу без постійного поповнення запасу та систематичного розвитку просторових уявлень учнів, а також без вивчення учнів вільного володіння геометричними поняттями. Наразі, в сучасній шкільній програмі, у багатьох учнів є з цим певні проблеми. Також ще однією проблемою, яка нас цікавить, є проблема введення елементів неевклідової геометрії в шкільний курс геометрії (бажано для класів з поглибленим вивченням математики). Отже, *актуальність* пропонованого дослідження обумовлена тим, що в теперішній час є досить великий розвиваючий потенціал матеріалу про неевклідові геометрії, але, при цьому, всьому слабко розвинена орієнтація базового і факультативного геометричних курсів відповідної тематики в реальній шкільній практиці. Вирішення даного протиріччя становить основну *проблему дослідження*.

Мета кваліфікаційної роботи полягає у проектуванні окремих понять метричної геометрії у шкільний курс геометрії, висвітлення таких основних геометричних об’єктів як точка, відстань, відрізок та кут з метою розширення сприйняття учнями відомостей про метричну геометрію, а також у методичному обґрунтуванні структури та змісту факультативного курсу розвиваючої спрямованості «Метрична геометрія для школярів».

Завдання дослідження

– дослідити вивчення основних геометричних понять в шкільному курсі математики;
– провести детальних огляд окремих неевклідових геометрій;
– ознайомитися з основними поняттями метричної геометрії на шкільному рівні;

- дослідити методичну літературу з метою створення факультативного курсу «Метрична геометрія для школярів»;
- розробити програму (зміст та структуру) факультативу.

Об'єктом дослідження є процес навчання геометрії на факультативних заняттях у старших класах середньої школи.

Предметом дослідження є теоретичні основи та методичні умови організації факультативного курсу розвиваючої спрямованості «Метрична геометрія для школярів».

Для вирішення поставлених завдань використовувалися такі **методи дослідження**:

- теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури в ракурсі теми дослідження;
- вивчення педагогічного досвіду викладачів, що спеціалізуються на тематиці кваліфікаційної роботи;
- аналіз організації процесу викладання математики на факультативних заняттях в закладах середньої освіти;
- порівняльний аналіз підручників і навчальних посібників, навчальних планів і програм з математики для факультативних курсів;
- педагогічний експеримент з перевірки ефективності методичного забезпечення факультативу розвиваючої спрямованості «Метрична геометрія для школярів».

Наукова новизна виконаного дослідження полягає у формулюванні основних принципів, що визначають структуру і зміст факультативного курсу «Метрична геометрія для школярів»; побудові і дослідженні структурно-логічної моделі даного курсу; визначенні специфіки пошукової роботи старшокласників при вирішенні завдань неевклідової геометрії.

Практичне значення одержаних результатів, вироблених в ході дослідження, полягає в можливості їх безпосереднього використання вчителями при організації та проведенні факультативу «Метрична геометрія для школярів», а також викладачами педагогічних вузів при розробці спецкурсів, спрямованих на підготовку студентів до проведення факультативних занять в школі.

Апробація результатів дослідження проводилися у формі доповідей на таких конференціях: Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів і молодих вчених «Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО : історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти», Всеукраїнській науково-практичній конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» та Всеукраїнській науково-практичній конференції «Математичні, природничі та комп’ютерні науки, технології, навчання: науково-практичні рішення та підходи молодих науковців».

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ПОНЯТТЯ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Історичні відомості виникнення геометрії.

Геометрія – частина математики. Вона вивчає геометричні властивості предметів – їх форму, розміри і взаємне розташування.ЇЇ своєрідність полягає в тому, що геометрія поєднує просторову уяву зі строгою логікою. Слово «геометрія» грецьке, що переводиться так: «гео» – Земля і «метріо» – міряти. Тобто з грецькою «геометрія» – це «земле вимірювання». Зараз геометрія не обмежується задачами землевимірювання. Її методи та висновки застосовуються в багатьох сферах людської діяльності: в різні сфери математики, в різні науки, конструкторську справу, виробництво, архітектуру, живопис тощо. В свою чергу наука та виробництво сприяють розвитку геометрії, ставлячи перед нею все більшу кількість нових задач.

Геометрія виникла в давнину у зв'язку з необхідністю виміряти відстань, площу земельних ділянок, виготовляти знаряддя праці тощо. Так поступово нагромаджувалися простіші геометричні відомості. Зі стародавнього Єгипту дійшов твір, що називається папірусом Ахмеса, в якому містяться задачі (їх близько 84) на обчислення площ трикутника, прямокутника, трапеції. Тоді геометричні твердження формувалися у вигляді правил, які приймалися або без логічних доведень, або доведення були досить примітивними. Від 7 ст. до н.е. й до 1 ст. н.е. розвиток геометрії проходив в основному у Стародавній Греції. А саме, встановлювалися основні відомості про метричні відношення в трикутнику, задачі на побудову, пропорції та подібні фігури, вимірювання площ та об'ємів. В цей час вчені намагалися систематизувати одержані відомості, почали з'являтися порівняно строгі доведення геометричних тверджень.

У 3 ст. до нової ери Евклід систематизував роботу старогрецьких вчених у своїй відомій праці «Начала». В яких було сформульовано основні геометричні поняття та основні положення (аксіоми або постулати) про них. Цим твором було започатковано аксіоматичний метод в математиці.

В історії розвитку геометрії виділяється кілька етапів. Спочатку геометрія представляла собою фізичну науку, в її положеннях описувалися вимірювання геометричних величин та результати спостережень відношень між фігурами. Далі до другої половини 19 ст. предметом геометрії є відношення та форми тіл простору, що описуються аксіомами Евкліда, тобто евклідовою геометрією, яку вивчають в школі. Так до 19 ст. евклідова геометрія ототожнювалася з реальним простором. У 1826 році світ дізнався про геометрію Лобачевського, геометричну теорію якої побудував М. І. Лобачевський (російський математик). Саме завдяки роботі Лобачевського почалося створення так званих неевклідових геометрій.

Предметом вивчення геометрії, з її розвитком, стають все нові й нові відношення та форми дійсності. У сучасному світі геометрія вивчає які завгодно відношення і форми, які виникають при розгляді однорідних об’єктів.

1.2. Основні геометричні поняття шкільного курсу геометрії.

Елементи геометрії вивчаються в школі з першого і до 11 (12) класу, оскільки вона широко використовується в практичні діяльності людини. Отож всі вивчення геометрії можна розбити на два курси:

1) Пропедевтичний курс (1-6 класи);
2) Основний систематичний курс (7-11(12) класи).

Пропедевтичний курс називають ще експериментальною або фізичною геометрією. Тут учні знайомляться з першими геометричними поняттями. Зокрема, учні початкових класів знайомляться з такими поняттями як: точка, відрізок, лінія, пряма, ламана, коло, круг, многокутник. Та також встановлюють окремі властивості та характеристики геометричних фігур: довжина відрізка, площа певних геометричних фігур, периметр многокутника тощо.

У 1-6 класах в учнів закладаються основи графічної культури – вчаться будувати й читати графічні зображення, орієнтуються в схемах, кресленнях і планах тощо.

Отож перейдемо до означення геометричних понять.

Предмети, що відрізняються тільки за геометричними властивостями (їх формами і розмірами), прийнято називати *геометричними фігурами*.

Багато геометричних фігур нам уже відомі. Такі як точка, пряма, площина, коло, трикутник, круг, куля, куб, прямокутний паралелепіпед тощо.

Будь-яку фігуру розуміють у геометрії як множину точок. Множина всіх точок називається простором (математичним простором). Фігура – частина простору, іншими словами його підмножина.

Геометричні фігури бувають плоскими та неплоскими. Плоскою називають таку фігуру, всі точки якої належать одній площині. Уявлення про площину дає добре відшліфована верхня поверхня стола, в розумінні без границь і без товщини. Якщо кажуть, що дано фігуру, то тим самим виділено всі множини точок, що утворюють дану фігуру.

Розділ геометрії, що вивчає властивості тільки плоских фігур, називають *планіметрією.*

Розділ геометрії в якому вивчають неплоскі фігури, тобто такі фігури, у яких не всі точки належать одній і тій же площині, називають *стереометрією*.

Поверхню деяких неплоских фігур, наприклад многогранників, можна розрізати по границям граней (ребрам) так, щоб вона не розпадалася на окремі плоскі фігури, і потім «розгорнути» цю поверхню на площині. Отриману таким чином плоску фігуру називають *розгорткою* многогранника. Поверхню кулі (сфери) або будь-якої її частини, вирізаної зі сфери, на площині «розгорнути» не можна. Поверхні ж циліндра і конуса можна розгорнути на площині.

У геометрії кожне нове поняття визначають через інші, уже відомі поняття. Очевидно, повинен існувати набір первісних понять, які не означуються. В сучасних підручниках геометрії виділено такі первісні поняття:

1) Точка, пряма, площина, градусна міра кута та довжина відрізку;
2) Належати (бінарне відношення), лежати між (тернарне відношення).

Всі інші поняття геометрії будемо визначати через ці первісні поняття. Ми будемо також користуватися поняттям *множини,* яка є одним з первинних понять всієї математики.

Система аксіом є неявними означеннями цих понять, які спочатку називаються основними властивостями. Аксіоми розбито на дві групи:

1) Аксіоми планіметрії;
2) Аксіоми стереометрії.

Аксіоми планіметрії поділяються на 5 груп.

1. «Аксіоми належності точок і прямих:

1.1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать їй, і точки, що не належать їй.

1.2. Через будь-які дві різні точки проходить пряма і тільки одна» (див. [28, с.5]).

2. «Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і на площині:

2.1. З трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

2.2. Пряма розбиває множину точок площини що їй не належать, на дві підмножини, які називаються *півплощинами,* так, що відрізок, який з’єднує точки однієї півплощини, не перетинається з прямою, а відрізок, який з’єднує точки різних півплощин, перетинається з нею» (див. [28, с.5]).

3. «Аксіоми вимірювання відрізків і кутів:

3.1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

3.2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами» (див. [28, с.5]).

4. «Аксіоми відкладання відрізків і кутів:

4.1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.

4.2. Від будь-якої півпрямої в даній півплощині можна відкласти кут із даною градусною мірою, меншою 180°, і тільки один.

4.3. Який не був би трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно даної прямої» (див. [28, с.5]).

5. Аксіома паралельності:

«На площині через точку, що не належить прямій, проходить не більше як одна пряма, яка не перетинає дану пряму» (див. [28, с.5]).

Аксіоми стереометрії.

1. «Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що їй не належать» [28, с.5].

2. «Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій» [28, с.5].

3. «Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них проходить площина, і до того ж тільки одна» [28, с.5]

Поговоримо більш детально про поняття «відстань». Якщо брати одиницю виміру, то кожним двом різним точкам можна поставити у відповідність додатне число, що називається *відстанню* між ними. Якщо ці точки співпадають, то відстань між ними приймається рівною нулю. Відстань між будь-якими точками A і B будемо позначати AB. В геометрії прийнято вважати одиницю виміру обраною і про відстань кажуть як про невід'ємні числа. Наприклад, запис $AB = 7$ означає, що відстань між точками A і B дорівнює семи обраним одиницям.

Відстань характеризується такими властивостями:

1. *Для будь-яких двох точок A і B існує невід'ємна величина, що називається відстанню від A до B.. Відстань дорівнює нулю в тому випадку, коли точки A і B співпадають:*

$$AB \geq 0, \qquad \begin{cases} AB > 0, \text{якщо } A \neq B, \\ AB = 0, \text{якщо } A = B. \end{cases}$$

2. *Відстань від точки A до точки B дорівнює відстані від точки B до точки A:* $AB = BA$.

Наведені властивості відстані в геометрії приймаються без доведення.

Розглянемо тепер означення двох важливих геометричних понять – кола і круга.

Означення 1.1. *Колом* називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на заданій додатній відстані від даної точки цієї ж площини, що називається *центром кола*.

Поняття «коло» означено через основні геометричні поняття: «площина», «точка», «відстань». *Радіус* – це відстань від центра кола до будь-якої його точки.

Означення 1.2. *Кругом* називається множина всіх точок площини, відстань від кожної з яких до даної точки цієї ж площини не перевищує дану додатну відстань.

В геометрії множина всіх точок, кожна з яких володіє однією й тією ж властивістю, пов'язаною з її відстанню до інших точок або фігур, нерідко називають *геометричним місцем точок* площини (ГМТ). Дамо, наприклад, означення кола з центром O радіуса r в термінах ГМТ:

Колом з центром O радіуса r називається геометричне місце точок площини, кожна з яких знаходиться на відстані r від точки O цієї ж площини.

Нерівність трикутника

Розглянемо тепер питання про розташування трьох точок. Нехай маємо три точки A, B і C. Кожній парі точок A і B, B і C, A і C відповідають різні числа – відстань між ними.

Для будь-яких трьох точок A, B і C кожна з відстаней AB, BC, AC не перевищує (менше або дорівнює) сумі двох інших:

$$AB \leq BC + AC;\ BC \leq AB + AC;\ AC \leq AB + BC.$$

Наведенні відношення називаються *нерівностями трикутника.*

Буде істинним і твердження, що називається зворотнім по відношенню до сформульованого твердження: *якщо три відстані такі, що сума будь-яких двох з них не менше третього, то існують три точки, попарні відстані між якими відповідно рівні даним відстаням.*

Якщо заданий трикутник ABC з довжинами сторін c, b, a, то в відповідності з нерівністю трикутника маємо:

$$c < a + b.$$

Такі ж відношення справедливі і для інших сторін, наприклад,

$$b < c + a \text{ і } a < c + b$$

Якщо з обох частин нерівності, наприклад, нерівності $AC \leq AB + BC$, відняти по AB, то отримаємо

$$AC - AB \leq BC \text{ або } BC \geq AC - AB.$$

Ця нерівність каже про те, що відстань BC не менше (більше або дорівнює) різниця двох інших відстаней AC і AB. Аналогічно можна довести, що

$$AC \geq BC - AB \quad \text{і } AB \geq BC - AC.$$

Сформулюємо теорему.

Теорема 1.1. *Для будь-яких трьох точок A, B, C кожна з відстаней*

AB, BC, AC *не менше різниці двох інших відстаней.*

Отриману теорему та властивість про нерівність трикутника можна сформулювати так:

Для будь-яких трьох точок A, B і C кожна з відстаней AB, BC, AC не більше суми і не менше різниці двох інших відстаней.

Наприклад,

$$BC - AC \leq AB \leq BC + AC$$

Отримана подвійна нерівність читається так: AB не менше $BC - AC$ і не більше $BC + AC$.

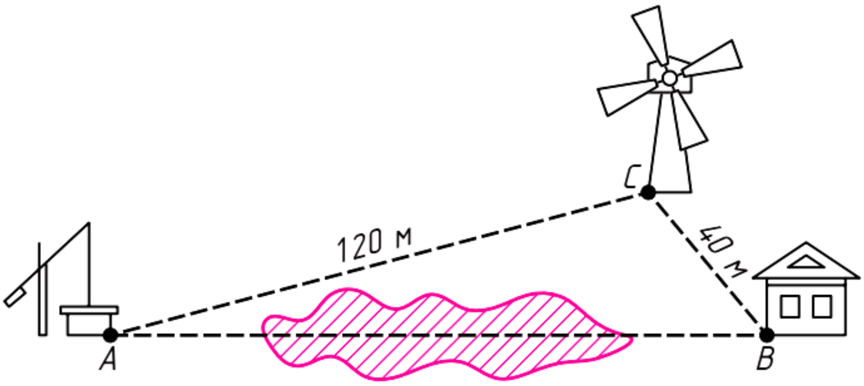


Рисунок 1. 1 – Приклад задачі, що показує нерівність трикутника

Отриманий висновок дає можливість приблизно оцінити відстань між двома точками. Наприклад, відстань між точками A і B (рис.1.1) безпосередньо виміряти не можна. Але можна виміряти відстань від точок A і B до деякої «доступної» точки C. В цьому випадку можна вказати приблизне значення відстані AB. Відомо, що відстань AB не менше різниці відстане AC і CB і не більше їх суми: $80 \leq AB \leq 160$.

Отож, якщо три точки A, B, C не належать одній прямій, то для кожної з відстаней AB, BC, AC виконуються строгі нерівності: кожна з них менше суми і більше різниці двох інших.

РОЗДІЛ 2
ОГЛЯД НЕЕВКЛІДОВИХ ГЕОМЕТРІЙ

2.1. Аксіоми геометрії Евкліда.

Евклід (3 ст. до н.е.) – вихованець школи Платона, викладав математику в Александрії. «Начала», що були написані Евклідом, дають систематичний виклад основ геометрії того часу. Евклід застосовував в «Началах» аксіоматичний метод. Вони складаються з 13 книг (глав). Книги I-IV і VI присвячені планіметрії, XI-XIII – стереометрії, а інші глави містять елементи теорії чисел і геометрично викладеної арифметики.

Кожна книга починається з визначень тих понять, які вперше зустрічаються в ній. Перша глава починається з 23 означень. Наприклад, деякі з них:

1. Точка є те, що не має частин.
2. Лінія – довжина без ширини.
3. Кінці лінії – точки.
4. Пряма є така лінія, що однаково розташована по відношенню до всіх точок, що їй належать.
5. Поверхня – це те, що має тільки довжину та ширину.
6. Границі поверхні – лінії.
7. Площина є поверхня, яка однаково розташована по відношенню до всіх прямих, що їй належать.

(див. [12, с.53])

Останнє означення в першій книзі пов’язане з паралельними прямими. Після означень йдуть постулати (5) і аксіоми, їх – 9.

Постулати Евкліда.

I. «Вимагається, щоб від всякої точки до всякої іншої точки можна було провести пряму лінію» [12, с.53].

II. «І щоб кожну пряму можна було неперервно продовжувати по прямій» [12, с.53].

III. «З будь-якого центру можна описати коло будь-якого радіусу» [12, с.53].

IV. «Всі прямі кути рівні між собою» [12, с.53].

V. «Якщо пряма, що падає на дві прямі утворює внутрішні односторонні кути, сума яких менше двох прямих, то при необмеженому продовженні ці прямі перетинаються з того боку, де ця сума менше двох прямих» [12, с.53].

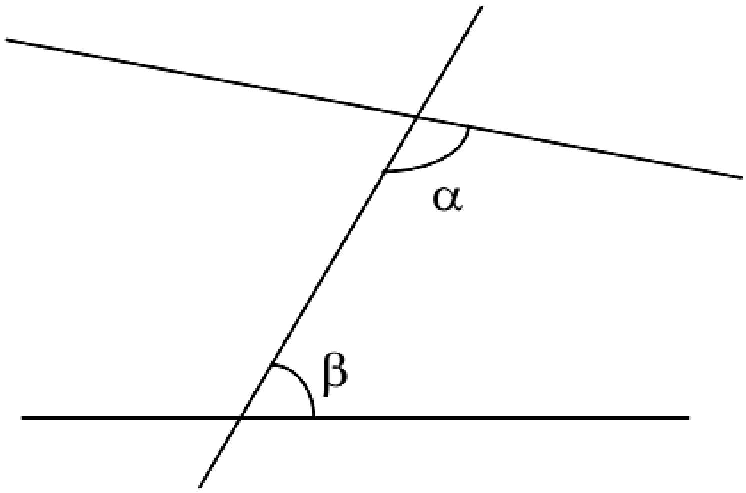


Рисунок 2. 1 – Зображення 5-го постулату. $\alpha + \beta > 2d,\ d -$ прямий кут

Далі перераховуються аксіоми, їх – 9. Ось деякі з них.

1. Рівні окремо третьому рівні між собою.
2. Якщо до рівних додати рівні, то отримаємо рівні.
3. Якщо від рівних відняти рівне, то і залишки рівні.
4. Якщо до не рівних додати рівні, то цілі будуть нерівні.
5. Подвоєння одного й того ж рівні між собою.
6. ....
7. І, які суміщаються, рівні.
8. ....
9. .... (див. [12, с.54])

Далі Евклід розташовує теореми, які він доводить строго логічним шляхом на основі постулатів, аксіом та попередніх теорем.

Евклід першим поставив задачу обґрунтування геометрії, тобто перелік означень і аксіом, на основі яких можна розвивати геометрію строго логічним шляхом. В цьому історична заслуга Евкліда перед наукою. «Начала» служили зразком наукового викладу протягом 2000 років. З часів Евкліда всі вчили геометрію по його «Началам». Шкільні підручники практично до останнього часу представляли, по суті, популярний виклад «Начал».

Але з точки зору сучасної математики «Начала» Евкліда мають і недоліки.

Евклід означує всі поняття, немає неозначених понять. Жодне з означень 1-5 не застосовується в доведенні теорем.

Список припущень, прийнятих без доведень (постулатів і аксіом) є неповним. Так, наприклад, немає аксіом, що визначають поняття «лежати між». Рівність фігур Евклід визначає через рух (7 аксіома), однак, аксіом руху немає, немає також аксіом неперервності.

Система аксіом Евкліда не є незалежною. Наприклад, IV постулат можна довести як теорему.

Із всіх постулатів і аксіом Евкліда п’ятий виділяється своєю громіздкістю формулювання. Він порівняно пізно використовується в «Началах» (починаючи з 29-ї пропозиції). Це наводить на думку, що Евклід намагався довести V постулат як теорему. Тому з виходом «Начал» встала проблема п’ятого постулату: довести п’ятий постулат на основі інших чотирьох постулатів і дев’яти аксіом, тобто було поставлено питання незалежності п’ятого постулату.

Було безліч спроб сформулювати доведення п’ятого постулату. Це була задача, над розв’язком якої внаслідок безуспішно боролося сотні геометрів: Посідоній (I ст. до н.е.), Прокл (V ст. н.е.), Омар Хайям (11-12 ст. н.е.), англійський математик Валліс (17 ст.) при доведенні п’ятого постулату припустив існування подібних (але не рівних один одному) трикутників, що є еквівалентом п’ятого постулату.

Італійський математик Саккері (18 ст.) розглядав, як і Хайям, чотирикутник $ABCD$ з двома прямими кутами при основі AD і рівними бічними сторонами AB і DC.

Таким чином, всі спроби доведення п’ятого постулату закінчувалися невдачею. Автори доведень використовували явним або прихованим чином пропозиції, які при ретельному аналізі виявлялися еквівалентними п’ятому постулату.

Наведемо пропозицію, що еквівалентно п’ятому постулату Евкліда, так називаємо пропозиція Плейфера (19 ст.).

«Через точку А в площині, що визначається точкою А і прямою a, можна провести не більше однієї прямої, що не перетинає пряму a» [12, с.56]. Цю пропозицію стали називати аксіомою паралельності Евкліда і використовувати замість п’ятого постулату.

Проблема п’ятого постулату займала математиків більше двох тисяч століть. Вперше її розв’язав великий російський математик М. І. Лобачевський.

М. І. Лобачевський створив нову геометрію, замівши Евклідів V постулат більш загальною аксіомою паралельності, при цьому зберіг інші постулати і аксіоми Евкліда.

Наведемо *аксіому паралельності Лобачевського V*:*

«Через точку А, що не лежить на прямій а, в площині (А, а), що визначається точкою А і прямою а, можна провести принаймні дві прямі, що не перетинають пряму а» [12, с.57].

Дослідження Лобачевського показали, що на ряду з геометрією Евкліда, що вважалася єдиною можливою геометричною системою, має місце інша логічна бездоганна система – геометрія М. І. Лобачевського. Це відкриття стало поштовхом до відкриття інших неевклідових геометрій.

2.2. Геометрія Лобачевського.

М. І. Лобачевський народився в 1972 році в Нижньому Новгороді, він закінчив гімназію при Казанському університеті, потім Казанський університет, після чого залишився там викладати. Ставши професором, продовжував працювати в тому ж університеті. Протягом 19 років (1827-1846) М. І. Лобачевський був ректором Казанського університету, з 1846 по 1855 рр. – помічником попечителя Казанського учбового округа. У 1856 р. Н. І. Лобачевський помер.

Геометрію Лобачевського можна визначити, як теорію побудовану на основі системи аксіом $\sum_{\Gamma}^{*}(I - IV, V^{*})$.

Можна сказати, що геометрія Лобачевського отримується з абсолютної геометрії при припущенні, що виконується аксіома паралельності Лобачевського V* (яку ми сформулювали в попередньому пункті).

Розглянемо основні факти планіметрії Лобачевського.

Теорема 2.1. Сума кутів трикутника на площині Лобачевського менше $2d$ $(180°)$.

Доведення. За першою теоремою Саккері-Лежандра сума кутів трикутника на площині абсолютної геометрії $S \leq 2d.$ Якщо сума кутів трикутника рівна $2d$, то виконується аксіома паралельності Евкліда V – теорема Лежандра, а на площині L^2 виконується її заперечення V*, отже сума кутів трикутника на площині Лобачевського менше $2d$ $(180°)$. ■

Теорема 2.2. Сума кутів чотирикутника на площині Лобачевського менше $4d$ $(360°)$.

Доведення. Розіб'ємо чотирикутник $ABCD$ на два трикутники. Тоді сума кутів чотирикутника S буде дорівнювати $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$. Але сума кутів кожного трикутника менше $2d$, тоді сума кутів чотирикутника менше $4d$. ■

Теорема 2.3. Сума кутів трикутника на площині Лобачевського непостійна.

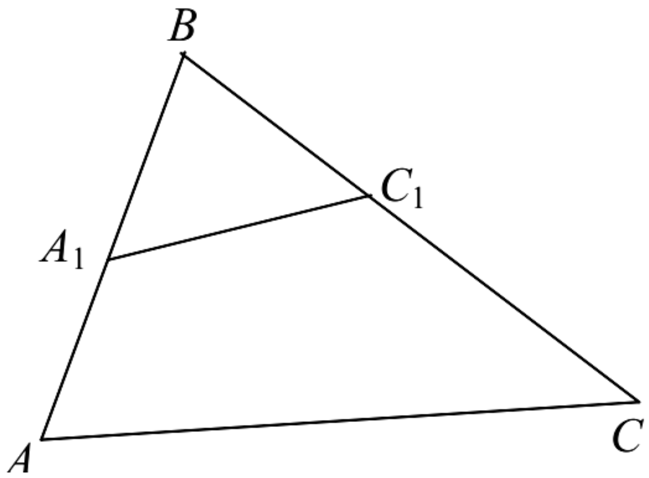


Рисунок 2. 2 – Ілюстрація до доведення теореми 2. 3

Доведення.

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що сума кутів трикутника постійна: $S_{ABC} = S_{A_1BC_1}$. Тоді $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B + \angle C_1$, звідси

$$\angle A + \angle C = \angle A_1 + \angle C_1. \quad (2.1)$$

Розглянемо чотирикутник AA_1C_1C і знайдемо суму його кутів:

$$S_{AA_1C_1C} = \angle A + 180° - \angle A_1 + 180° - \angle C_1 + \angle C = 360°$$

в силу формули (2.1). А це не можливо за теоремою 2. Отже, сума кутів трикутника на площині Лобачевського – непостійна, залишаючись менше $2d$, вона змінюється від трикутника до трикутника.

Теорема 2.4. Якщо три кути одного трикутника відповідно рівні трьом кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$

Довести: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

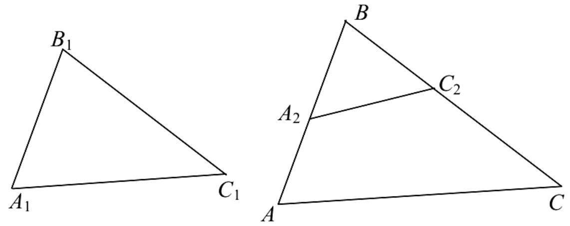


Рисунок 2. 3 – Зображення умови теореми 2. 4

Доведення.

Застосовуємо метод від супротивного. Припустимо, що $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$, нехай, наприклад, $AB \neq A_1B_1$, для визначеності нехай $AB > A_1B_1$, відкладемо від точки B на стороні BA відрізок $BA_2 = B_1A_1$ і від точки $A_2 = B_1$ в на півплощину з границею (BA), що містить точку C, відкладемо $\angle BA_2C_2 = \angle B_1A_1C_1$. Можливі три випадки положення точки C_2 на промені BC:

1) Точка C_2 лежить між точками B і C. Розглянемо суму кутів чотирикутника AA_2C_2C:

$$S_{AA_2C_2C} = \angle A + 180° - \angle A + 180° - \angle C + \angle C = 360°,$$

чого не може бути.

2) Точка C лежить між точками B і C_2.

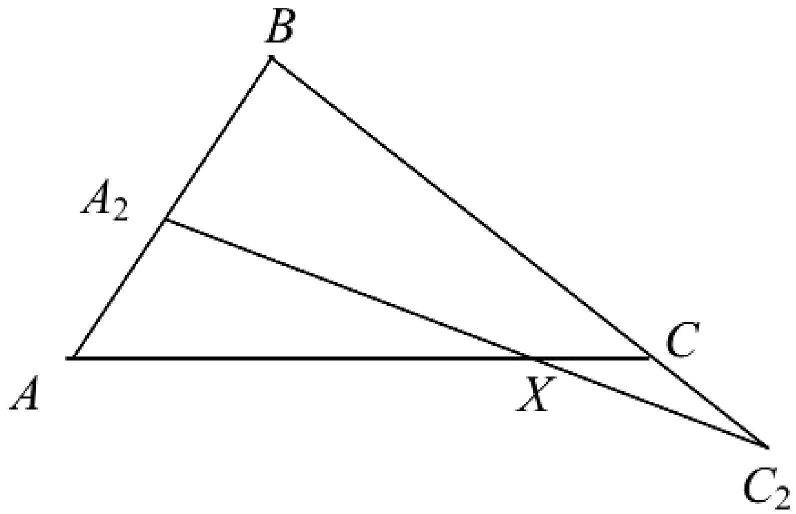


Рисунок 2. 4 – Точка C лежить між точками B і C_2 у ΔABC

Застосуємо до трикутника ΔABC і прямої A_2C_2 аксіому Паша, отримаємо те, що точка X лежить між точками A і C. Розглянемо трикутник ΔAA_2X. Кут $\angle BA_2X$, тобто зовнішній кут дорівнює внутрішньому з ним не суміжному, чого бути не може на площині абсолютної геометрії. Отже, другий випадок неможливий.

3) Нехай $C_2 = C$.

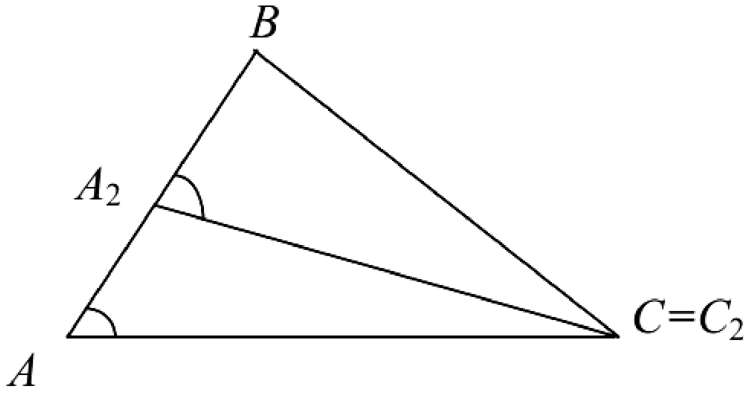


Рисунок 2. 5 – Випадок, коли точки C_2 і C співпадають

Знову зовнішній кут BA_2C трикутника AA_2C дорівнює внутрішньому куту A_2AC , з ним не суміжному, що неможливо.

Отже, серед трьох точок B, C_2, C жодна не лежить між двома іншими, що суперечить аксіомі II_2 системі аксіом Гільберта: серед трьох точок прямої існує єдина точка, що лежить між двома іншими.

Таким чином, наше припущення про те, що $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$ − не вірне, тобто $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ і теорема доведена. ■

Наслідок. На площині Лобачевського не існує подібних трикутників.

Доведена теорема 4 – це четверта ознака рівності трикутників на площині Лобачевського.

Теорема 2.5. Через точку A, що не належить прямій a можна провести на площині Лобачевського нескінчену множину прямих, що не перетинають пряму a.

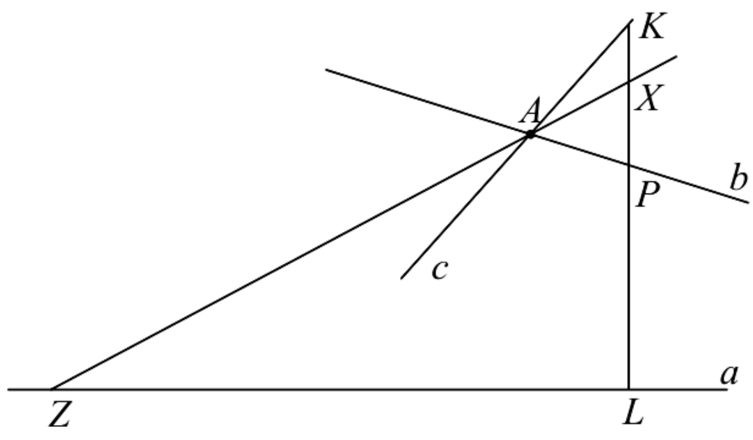


Рисунок 2. 6 – Зображення доведення теореми 2.5

Доведення.

За аксіомою паралельності Лобачевського через точку A можна провести принаймні дві прямі b і c, що не перетинають пряму a. Розглянемо пряму b. Вона розбиває площину на дві півплощини, в одній з них лежить пряма a.

Пряма $c \cap b = A$, тобто c повністю не лежить в одній півплощині з границею b. Один промінь прямої c лежить в півплощині, де лежить a, а інший луч – в іншій півплощині. На другому промені візьмемо точку K, а на прямій a – точку L. Ці точки лежать в різних на півплощинах відносно прямої b, отже, відрізок KL перетинає b в точці P. На відрізку PK візьмемо будь-яку точку X і доведемо, що будь-яка пряма, що проходить через точки A і X, не перетинає пряму a. Тоді теорема буде доведена.

Припустимо супротивне. Нехай пряма AX перетинає пряму a в точці Z. Розглянемо ΔLXZ і пряму c і застосуємо аксіому Паша. Пряма c перетинає сторону ZX трикутника LXZ, тоді вона повинна перетинати сторону LZ або XL. Пряма c перетинає (XL) в точці K, що не належить стороні XL, тоді c перетинає відрізок LZ, тобто пряма c перетинає пряму a, що суперечить умові. Отже, AX не перетинає пряму a, так як X будь-яка точка відрізку PK, то доведено, що через точку A проходить нескінчена множина прямих, що не перетинають пряму a. ■

Серед всіх прямих, що не перетинають a, є дві прямі, які виконують особливу роль, котрі і називаються паралельними прямій a (в одному напрямі та в іншому).

2.3. Сферична геометрія.

Геометрію S^2 евклідового простору E^3 називають *сферичною геометрією.*

Візьмемо в E^3 прямокутну декартову систему координат $R = \{O, i, j\ , k\}$.

Розглянемо сферу з центром в початку координат, радіуса r.

Її рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

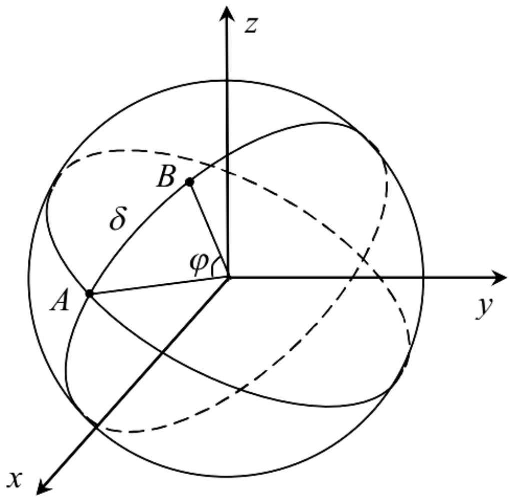


Рисунок 2. 7 – Сфера з центром в початку координат, радіуса r

Роль прямих ліній на сфері виконують великі кола, тобто кола, центр яких співпадає з центром сфери.

Геометрія на сфері відрізняється і від евклідової геометрії, і від геометрії Лобачевського.

Дійсно,

1) Так як будь-які два великих кола на сфері перетинаються в двох точках, то на сфері не виконується ні аксіома паралельності Евкліда, ні аксіома паралельності Лобачевського.
2) Немає поняття «між» для трьох точок, що лежать на одній прямій, немає поняття відрізка.
3) Пряма на сфері замкнута та має кінцеву довжину $l = 2\pi \cdot r$.

Сферична геометрія є метричною. Введемо метрику на сфері. Візьмемо дві точки A і B на сфері (рис. 2.7). *За відстань між точками A і B приймається довжина більшого кола, що проходить через ці точки, меншого півкола.*

Позначимо відстань $\rho(A, B)$ між A і B через δ. $\rho(A, B) = \delta, \overrightarrow{OA} = x$, $\overrightarrow{OB} = y, \angle AOB = \varphi$, тоді $\delta = \varphi \cdot r, \varphi = \frac{\delta}{r}$.

$$\cos\frac{\delta}{r} = \frac{xy}{|x||y|},$$

$\frac{\delta}{r}$ – називається зведеною відстанню між точками A і B. Введемо координати точок: $A\ (x, y, z), B(x_1, y_1, z_1)$, тоді

$$\cos\frac{\delta}{r} = \frac{|xx_1 + yy_1 + zz_1|}{r^2}. \qquad (2.2)$$

Формулою (2.2) вводиться метрика на сфері.

Рух сфери

Означення 2.1. Рухами сфери будемо називати перетворення точок сфери, що зберігають відстань.

Очевидно, рухами сфери будуть рухи тривимірного евклідового простору, що залишатимуть центр сфери незмінним. Прикладами рухів сфери будуть повороти точок сфери навколо діаметра (рис. 2.8) і відображення сфери від діаметральної площини (рис. 2.9):

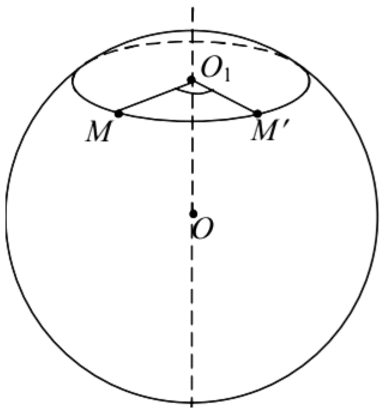


Рисунок 2.8 – Поворот точок сфери навколо діаметра

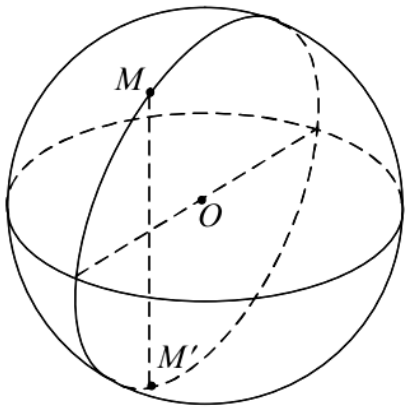


Рисунок 2.9 – Відображення сфери від діаметральної площини

Неважко побачити, що множина всіх рухів сфери утворює групу, що ізоморфна стаціонарній підгрупі точки O в групі рухів простору, а отже, ізоморфна групі ортогональних перетворень простору. Відповідно, порядок групи рухів сфери дорівнює трьом.

Предмет сферичної геометрії можна визначити як сукупність властивостей фігур на сфері, що не змінюються при будь-якому русі сфери.

Найпростіші фігури на сфері.

Означення 2.2. Колом на сфері називається множина точок, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки сфери.

O_1 – центр кола. Дуга O_1A – великого кола – радіус. Ми бачимо, що роль кіл на сфері виконують малі кола.

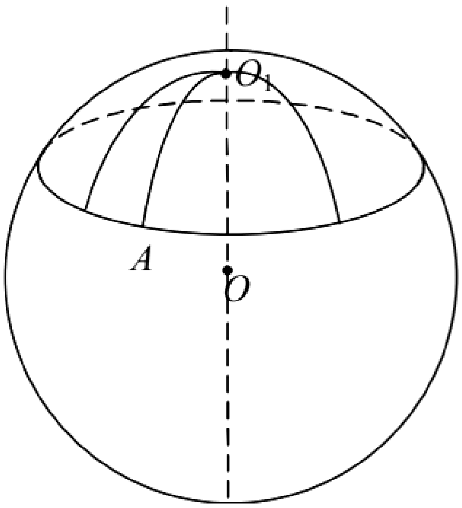


Рисунок 2. 10 – Коло на сфері

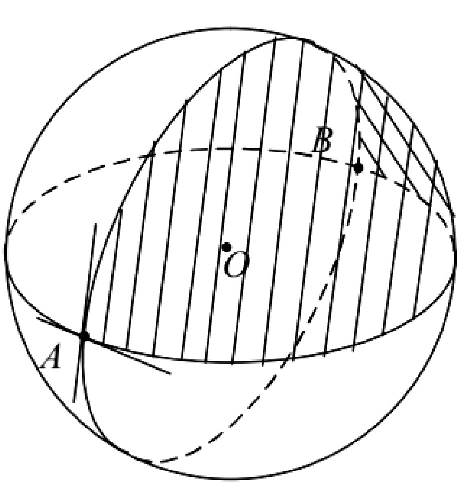


Рисунок 2. 11 – Двокутник сфери

Означення 2.3. Сферичний двокутник це частина сфери, що знаходиться між двома великими колами.

Двокутник на сфері є аналогом кута на площині. Кут двокутника можна розглядати як кут між дотичним до великих кіл в точках A і B.

Означення 2.4. Сферичним трикутником називається сукупність трьох точок A, B, C сфери, що не лежать на одному великому колі, і трьох дуг AB, BC, AC великих кіл, менших півкіл.

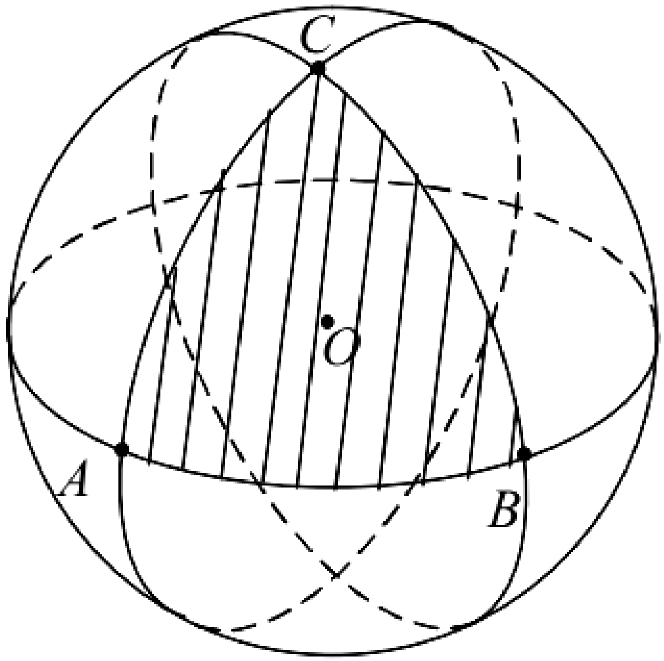


Рисунок 2.12 – Сферичний трикутник

A, B, C – вершини, $\cup AB, \cup BC, \cup AC$ – сторони, $\angle A, \angle B, \angle C$ – кути трикутника, визначаються як кути між дотичними до сторін в вершинах.

Так як геодезичним на сфері є великі кола, то сферичний трикутник є геодезичним, відповідно, $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$, тобто сума кутів сферичного трикутника більше $180°$.

Далі розглянемо *елементи сферичної тригонометрії.*

1. *Формули прямокутного трикутника*.

Трикутник ABC на сфері називається прямокутним, якщо $\angle C$ – прямий.

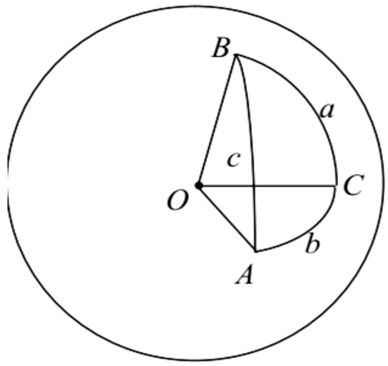


Рисунок 2.13 – Зображення трикутника на сфері

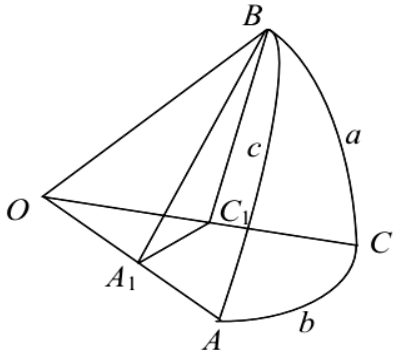


Рисунок 2.14 – Прямокутний трикутник на сфері

Позначимо довжини сторін ΔABC a, b, c відповідно. Тоді центральні кути $\angle COB = \varphi = \frac{a}{r}, \angle AOC = \psi = \frac{b}{r}, \angle AOB = \frac{c}{r}$.

Проведемо $BC_1 \perp OC, BA_1 \perp OA$, тоді $\Delta\ OBC_1$ – прямокутний,

$$BC_1 = r\sin\varphi = r\sin\frac{a}{r}$$

$\Delta\ OBA_1$ – прямокутний,

$$BA_1 = r\sin\frac{c}{r} \qquad (2.3)$$

$$\Delta\ A_1BC_1, \qquad BC_1 = BA_1\sin A \qquad (2.4)$$

Підставимо в (2.4) вираз BA_1 з (2.3)

$$BC_1 = r\sin\frac{c}{r}\sin A \qquad (2.5)$$

Прирівняємо праві частини (2.3) і (2.5)

$r\sin\frac{a}{r} = r\sin\frac{c}{r}\sin A$ або

$$\sin\frac{a}{r} = \sin\frac{c}{r}\sin A$$

Ми отримаємо наступне:

«Синус зведеного катету дорівнює добутку синуса зведеної гіпотенузи на синус протилежного кута» [12, с.116].

Неважко вивести теорему Піфагора. (див рис. 2. 14.)

Із $\Delta\, OBC_1 \colon OC_1 = r\cos\frac{a}{r}$

Із $\Delta\, OBA_1 \colon OA_1 = r\cos\frac{c}{r}$ (2.6)

Із $\Delta\, OC_1A_1 \colon OA_1 = OC_1\cos\frac{b}{r}$ (2.7)

В останній рівності замінимо OC_1:

$$OA_1 = r\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}$$

Прирівняємо перші частини (2.6) і (2.7)

$$r\cos\frac{c}{r} = r\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r} \text{ або}$$

$$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r} \text{ – теорема Піфгора.}$$

«Косинус зведеної гіпотенузи дорівнює добутку косинусів зведених катетів» [12, с.117].

Наведемо без доведення теореми косинусів і синусів для довільного сферичного трикутника.

2. *Теорема косинусів:*

$$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r} + \sin\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}\cos C.$$

3. *Теорема синусів:*

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin C}.$$

Якщо лінійні розміри трикутника на сфері будуть маленькі в порівнянні з радіусом сфери, то неважко отримати, що формули сферичної тригонометрії будуть співпадати з відповідним формулами евклідової геометрії (див. [2, с.110]).

2.4. Система аксіом Гільберта.

Аксіоматичне обґрунтування геометрії вперше було дано Гільбертом в 1899 р., вже після того як була відкрита неевклідова геометрія. Пізніше з'явилися системи аксіом Пеано, Кагана, Шура тощо.

В аксіоматиці Гільберта міститься 20 аксіом і описують вони вісім основних понять. Основні поняття: точки, прямі, площини – називаються основними образами. Основні поняття p_1 – інцидентності точки і прямої, p_2 – інцидентності точки і площини, p_3 – лежать між або коротше «між» для трьох точок, інцидентних прямих, p_4 – конгруентність відрізка відрізку і p_5 – конгруентність кута куту – називаються основними відношеннями. Система аксіом Гільберта евклідової геометрії складається з п'яти груп, що описують відношення між основним образами.

Перша група аксіом називається *аксіомами сполучення (інцидентності).* Вона описує відношення інцидентності точки і прямої, точки і площини.

Друга група називається *аксіомами порядку*. Вона описує основні відношення «лежати між», пов'язані з трьома точками, інцидентними прямій.

Третя група аксіом називається *аксіомами конгруентності*. Вона описує відношення конгруентності відповідно відрізка відрізку і кута куту.

Четверта група аксіом називається *аксіомами неперервності* і описує властивості неперервності розташування точок на прямій.

П'ята група називається також *аксіомою паралельності.*

Перша група містить вісім аксіом, друга – 4, третя – 5, четверта – 2 і п'ята – одну аксіому. Відмітимо також, що в першій групі аксіом маємо дві аксіоми $[I(3), I(4)]$ з двома вимогами, в другій групі маємо одну таку аксіому. В третій групі перша аксіома містить дві вимоги, четверта – три вимоги. У всій системі аксіом, що складається з 20 аксіом, міститься 26 вимог.

У геометрії Евкліда розглядаються три множини M_1, M_2, M_3 елементи яких є відповідно точками, прямими і площинами. Між елементами цих множин визначені основні відношення $p_1 - p_5$ так, що ці образи і відношення задовольняють всім аксіомам гільбертової аксіоматики. Сукупність елементів вказаних трьох множин $M_1 - M_3$ з відношенням $p_1 - p_5$ між ними і називається *евклідовим простором.*

Якщо в першій групі аксіом зберегти лише перші три аксіоми, то вони разом з аксіомами інших груп аксіом складають систему аксіом евклідової площини. Евклідова площина визначається як сукупність точок і прямих. Ці точки і прямі з основним відношеннями $p_1, p_3 - p_5$ задовольняють вимогам всіх 15 аксіом гільбертової аксіоматики планіметрії.

Відмітимо також, що ті поняття, теореми, наслідки, які можуть бути отримані на основі перших чотирьох груп аксіом системи аксіом Гільберта складають зміст *абсолютної геометрії.* Отож познайомимося вибірково з системою аксіом Гільберта і наведемо поняття, теореми, наслідки, що відносяться до абсолютної геометрії.

I. Аксіоми сполучення

Ця група аксіом характеризує *бінарні* відношення p_1, p_2 інцидентності (*синоніми:* належності, лежати на, проходити через) відповідно точок і прямих, а також точок і площин.

1. Будь-яким двом різним точкам можна віднести пряму, їм інцидентну.
2. Двом різним точкам можна віднести не більше однієї прямої a, їм інцидентної.
3. На кожній прямій існує принаймні пара точок, їй інцидент них. Існує три точки, не інцидент них одній прямій.
4. Будь-яким трьом точкам, не інцидентним прямій, можна віднести площину, їм інцидентну. На кожній площині є принаймні одна точка, їй інцидент на.
5. Трьом різним точкам, не інцидентним одній прямій, можна

віднести не більше однієї площини, їм інцидентної.

6. Якщо дві точки прямої належать площині, то і кожна точка цієї прямої належить площині.

Пряма називається *інцидентною площині,* якщо всяка точка, інцидент на в сенсі p_1 даної прямої, інцидентна в сенсі p_2 даній площині.

7. Якщо дві площини мають спільну точку, що їм належить, то вони мають принаймні ще одну точку, також їм належну.
8. Існує чотири точки, не інцидентних одній площині.

II. Аксіоми порядку

Основне призначення аксіом цієї групи складається в тому, щоб ввести *тернарне* відношення p_3 «лежати між», що відноситься до будь-яких трьох різних точок, інщидентних прямій. Відношення p_3 представляється підмножиною множини $M \times M \times M$, де M позначає множину точок, що належать даній прямій: $p_3 \subset M \times M \times M$. В цю групу входить чотири аксіоми.

1. Якщо A, B, C – три точки, що належать прямій, і точка B лежить в сенсі p_3 між точками A, C, то: а) точки A, B, C – різні; б) точка B лежить між точками C, A.

2. Для будь-яких двох точок A, B, що належать прямій a, існує точка C прямої a така, що точка B лежить між точками A і C в сенсі p_3 (аксіома необмеженого продовження прямої).

3. Для трьох різних точок, що належать прямій, існує не більше однієї з них, яка лежить в сенсі p_3 між двома іншими.

Наведенні аксіоми називаються *лінійними аксіомами порядку*. Сукупність двох точок A і B і всіх точок, які володіють властивістю p_3 бути між точками A і B, називається *відрізком*. Точки, що лежать між A і B, називаються *точками відрізка*.

Сукупність трьох точок A, B, C, що не належать прямій, і трьох відрізків, що утворені парами цих точок, називається *трикутником*; точки A, B, C називаються *вершинами*, а відрізки AB, AC, DC – *сторонами* *трикутника*. Пряма a називається *прямою, що перетинається з відрізком* AC, якщо існує точка O відрізка AC, що належать прямій a.

4. *Аксіома Паша.* Нехай задано трикутник ABC і в його площині пряма a, що не проходить через точки A, B, C. Якщо пряма a перетинає одну сторону AC трикутника, то вона перетинає також або другу AB, або третю його сторону BC (рис. 2. 15).

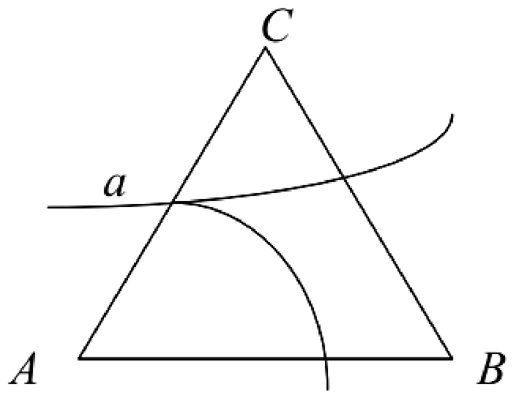


Рисунок 2. 15 – Схематичне зображення аксіоми Паша.

III. Аксіоми конгруентності

Основне призначення аксіом цієї групи складається втому, щоб описати *бінарні* відношення конгруентності p_4 відрізка відрізку і конгруентності p_5 кута куту.

1. Нехай дано відрізок AB, а також пряма a' і точка на ній A'. На прямій a' існує B' з тієї або з іншої сторони, відносно A' така, що відрізок AB конгруентний відрізку $A'B'$ або $AB \equiv A'B'$; вимагається також, щоб $AB \equiv BA$.

2. Якщо $AB \equiv A''B''$, $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A'B'$.

3. Нехай AB і BC два відрізки без спільних очок на прямій a і якщо $AB \equiv A'B', BC \equiv B'C'$, причому B' лежить між точками A', C', то $AC \equiv A'C'$.

4. Нехай $\angle(a_1 b_1)$ кут з вершиною O. При будь-якій точці O', що виходить з неї промені $a_1{}'$, по будь-яку сторону прямої a' можна побудувати в заданій півплощині, що належить a', один і тільки один другий промінь $b_1{}'$ такий, що $\angle(a_1 b_1) \equiv \angle(a_1{}' b_1{}')$. Вимагається також,

щоб $\angle(a_1 b_1) \equiv \angle(a_1' b_1{}')$, $\angle(a_1 b_1) \equiv \angle(b_1 a_1)$.

5. Нехай задані два трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle A'B'C'$ такі, що $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, тоді $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$.

IV. Аксіоми неперервності

Основне призначення цієї групи аксіом складається в тому, щоб «ввести» довжини відрізків і величини кутів, а також описати властивості неперервності розміщення точок на прямій.

Аксіома Архімеда. Нехай задані два довільних відрізки AB і CD;

Рисунок 2. 16 – Довільні відрізки аксіоми Архімеда.

існує таке натуральне n, що

$$nCD > AB$$

Відрізок nCD за означенням означає відрізок CD_n, де D_n точка променя CD отримана при послідовному відкладанні відрізків: $CD \equiv DD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \cdots \equiv D_{n-1}D_n$ (рис. 2.16).

Аксіома Архімеда дозволяє в геометрії перших трьох груп аксіом побудувати теорію довжин відрізків.

Аксіома Кантора. Нехай на прямій дана послідовність відрізків, що задовольняють двом умовам: 1) кожен наступний відрізок вкладений попередній; 2) не існує відрізка, що належить всім відрізкам послідовності. Тоді існує точка, що належить всім відрізкам послідовності.

Ця аксіома дозволяє побудувати відрізок заданої довжини. Неважко довести, що точка в аксіомі Кантора, що належить всім відрізкам послідовності, єдина.

V. Аксіома паралельності Евкліда

Через будь-яку точку A, не інцидентну прямій a, можна провести в площині (A, a) не більше однієї прямої, що не перетинається з прямою a.

РОЗДІЛ 3
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Поняття метричного простору.

Метрична геометрія [37] – галузь геометрії, що характеризує та вивчає множини точок, базуючись лише на задані значень попарних відстаней між ними. Її розвиток пов'язаний з іменами К. Менґера [40], Л. Блюменталя [35], Дж. Кріппена [36], Т. Гавела [36] та ін. Метрична геометрія має безпосереднє відношення до таких областей науки, як біологія, геодезія, картографія, фізика та ін. Тісно пов'язаними з нею є поняття метричного відрізка, $d\ -$ відрізка та $d\ -$ опуклості.

***Означення 3.1**. «**Метричним простором** називається сукупність непорожньої множини X елементів якої завгодно природи й однозначної дійсної невід'ємної функції $\rho(x;\ y)$ означеної для будь-яких елементів x і y з X і яка задовольняє такі умови:*

1) $\rho(x;\ y)\ =\ 0$ *тоді й тільки тоді, коли* $x\ =\ y$,

2) $\rho(x;\ y)\ =\ \rho(y;\ x)$ *(аксіома симетрії),*

3) *для будь-яких трьох елементів* x, y *і* z *виконується нерівність* $\rho(x;\ y)\ \leq\ \rho(x;\ z)\ +\ \rho(z;\ y)$ *(аксіома трикутника)»* (див. [21, с 44.]).

«При цьому елементи множини X називають точками метричного простору, функцію ρ – метрикою простору X, а числове значення функції $\rho(x;\ y)$ – відстанню між елементами (точками) x і y. Метричний простір X з метрикою ρ позначають $(X;\ \rho)$. Умови 1) – 3) означення ще називають *аксіомами відстані»* [21, с.44].

Множину тих точок метричного простору (X, d), які перетворюють нерівність трикутника у рівність називають d *−відрізком,* що з'єднує точки A та B. Поняття d −відрізка базується на так званих метрично проміжних точках та метричному відношенні "бути між", що були вперше розглянуті

Менгером [40] та Блюменталем [35] у контексті повних опуклих метричних просторів. Далі розглянемо побудову деяких геометричних кривих, базуючись на їх метричних інваріантах. А саме, у метричних просторах (R^2, d_1) та (R^2, d_∞)побудовано еліпс та гіперболу в сенсі d −відрізка.

Означення різних типів відрізків та зв'язки між ними.

Нехай (X, d) – лінійний метричний простір і $A, B \in \mathrm{X}$ – довільні точки. Нагадаємо, що *лінійним відрізком,* що з'єднує точки A та B, є геометричне місце точок

$$[A,B]_l = \{(1-\alpha)A + \alpha\, B: 0 \leq \alpha \leq 1\}. \tag{3.1}$$

Відомо, що у кожному метричному просторі виконується нерівність трикутника. Множину тих точок метричного простору (X, d), які перетворюють нерівність трикутника у рівність, називають d −*відрізком,* що з'єднує точки A та B, тобто

$$[A,B]_d = \{C \in \mathrm{X}: d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)\}. \tag{3.2}$$

Підмножину $[A,B]_m \subset \mathrm{X}$ називають *метричним відрізком,* що з'єднує точки $A, B \in \mathrm{X}$, якщо існує лінійний відрізок $[A,B]_l$ та ізометрія $\gamma: [A,B]_l \to \mathrm{X}$ такі, що $\gamma([A,B]_l) = [A,B]_m$, $\gamma(A) = A$ та $\gamma(B) = B$.

Нехай $x\ (x_1, \ldots, x_d)$ та $y\ (y_1, \ldots, y_d) \in \mathrm{R}^d$. *Метрика Мінковського* – це відстань на евклідовому просторі, яку задають за формулою

$$d_p(x,y) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|, \qquad p = \infty. \end{cases}$$

Еліпсом $E_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_p) називають геометричне місце точок цього простору, для кожної з яких сума відстаней до фокусів F_1 та F_2 є сталою величиною, більшою за відстань між F_1 і F_2, тобто

$$E_{d,a} = \{C \in \mathrm{R}^2: d_p(C, F_1) + d_p(C, F_2) = 2a\}, \tag{3.3}$$

причому $d_p(F_1, F_2) = 2d, a > d > 0$.

Гіперболою $H_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_p) називають геометричне місце точок цього простору, абсолютна величина різниці відстаней від кожної з яких до фокусів F_1 та F_2 є сталою величиною, меншою за відстань між F_1 і F_2, тобто

$$H_{d,a} = \{C \in \mathrm{R}^2 \colon \left|d_p(C, F_1) - d_p(C, F_2)\right| = 2a\},$$

причому $d_p(F_1, F_2) = 2d, d > a > 0$.

Наведемо деякі властивості метричних просторів, що носять геометричний характер [8]:

I. Для довільних точок A та B метричного простору $\left(\mathrm{R}^2, d_p\right), p \geq 1$, виконується вкладення $[A, B]_l \subset [A, B]_d$.

II. Для довільних точок A та B метричного простору (R^2, d_2) виконується рівність $[A, B]_d = [A, B]_m = [A, B]_l$.

III. Нехай $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ – точки площини R^2. У метричному просторі (R^2, d_1) $d -$ відрізок $[A, B]_d$ є прямокутником у звичайному геометричному сенсі з вершинами у точках $A(x_1, y_1), F(x_1, y_2), B(x_2, y_2), D(x_2, y_1)$ і сторонами, паралельними до осей координат.

IV. Нехай $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ – точки площини R^2. У метричному просторі (R^2, d_∞) $d -$ відрізок $[A, B]_d$ є прямокутником у звичайному геометричному сенсі.

V. Еліпс $E_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_1) є шестикутником у звичайному геометричному сенсі з вершинами у точках $A(-a, 0), B(-d, a - d), C(d, a - d), D(a, 0), E(d, d - a),$ $F(-d, d - a)$.

VI. Еліпс $E_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_∞) є восьмикутником у звичайному геометричному сенсі з вершинами у точках $A(a, a - d)$, $B(a, d - a), C(a - d, -a), D(d - a, -a), E(-a, d - a),$ $F(-a, a - d)$, $G(d - a, a), H(a - d, a)$.

VII. Якщо фокуси еліпса $E_{d,a}$ співпадають, то еліпс стає колом у метричному просторі (R^2, d_1).

VIII. Якщо фокуси еліпса $E_{d,a}$ співпадають, то еліпс стає колом у метричному просторі (R^2, d_∞).

IX. Гіпербола $H_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_1) – це дві паралельні прямі $x = a$ та $x = -a$ у звичайному геометричному сенсі.

X. Гіпербола $H_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_∞) – це дві ламані, з вершинами у точках $A(a, d-a), B(a, a-d), C(-a, a-d), D(-a, d-a)$.

Означення 3.2. *Множину $M \subset (X, d)$ називають $d-$опуклою, якщо для довільних точок $A, B \in M$ виконується вкладення $[A, B]_d \subseteq M$.*

Означення 3.3. *Множину $M \subset (X, d)$ називають слабко опуклою, якщо для довільних точок $A, B \in M$ існує метричний відрізок $[A, B]_m$ такий, що має місце вкладення $[A, B]_M \subseteq M$.*

Тепер перейдемо до фактичного вивчення матеріалу, який можна було б представити для учнів при вивченні метричної геометрії. Сформулюємо дещо спрощене, але більш об’ємне, означення метричного простору та відстані між його точками. Це означення використовує поняття множини та її елементів, що сформовані у восьмому класі.

Означення 3.4. *«Непорожню множину X Елементів якої завгодно природи будемо називати метричним простором, якщо кожній парі $(x; y)$ різних елементів цієї множини за певним правилом ρ поставлене у відповідність єдине додатне число $\rho(x; y)$, що називається відстанню між елементами x і y, і яке задовольняє умовам:*

1) *для будь-яких двох різних елементів x і y відстань між елементами x і y дорівнює відстані між елементами t і x, тобто виконується рівність $\rho(x; y) = \rho(y; x)$ (умова симетрії);*
2) *для будь-яких трьох різних елементів x, y, z відстань між елементами x і y не більша, ніж сума відстаней між елементами x і z та між елементами z і y, тобто виконується*

нерівність $\rho(x;y) \leq \rho(x;z) + \rho(z;y)$ *(нерівність трикутника)»*[21,с.44].

Вкажемо декілька найпростіших прикладів метричних просторів, доступних для легкого засвоєння учнями.

<u>Приклад 3.1.</u> Найпростішим прикладом метричного простору є множина усіх точок числової осі. Такий простір називають одновимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^1. Як відомо [23] відстань між двома точками x і y числової осі знаходять як абсолютну величину (модуль) різниці відповідних чисел x і y: $\rho(x;\ y) = |x - y|$.

Виконання усіх умов Означення 3.4. для простору R^1 перевіряється досить просто. У 9-му класі їх можна перевірити за допомогою властивостей множини дійсних чисел, а у 7-му на інтуїтивному рівні, використовуючи числову пряму.

У дев'ятому класі можна розглянути більш складніший приклад метричного простору – координатну площину, яка детально вивчається у курсі геометрії для дев'ятого класу [23].

Наведемо ще один простий випадок метричного простору точок координатної площини.

<u>Приклад 3.2</u>. Візьмемо у якості відстані між точками $M_1(x_1;\ y_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2)$ координатної площини число:

$$\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}.$$

Перевірити виконання умов Означення 3.4. для такого простору також не складно, тому розглянутий простір є метричним, його позначають R_0^2. Простір R_0^2 теж може бути прикладом простору, у якому відстань між точками не завжди є довжиною відрізка, що з'єднує ці точки.

3.2. Прямолінійне та плоске розміщення точок метричного простору.

Розглянемо більш детально поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Воно є частинним випадком означення 3.4. у випадку, коли нерівність трикутника перетворюється в рівність.

Означення 3.5. *«Будемо казати, що точки* x, y, z *метричного простору* (X, ρ) *розміщені прямолінійно в цьому просторі, якщо виконується рівність».* [21,с.47]

$$\rho(x; y) = \rho(x; z) + \rho(z; y) \tag{3.4}$$

При виконанні рівності (3.4) природно казати, що точка z «лежить між» точками x і y, або називати її «внутрішньою» для точок x, y, z. Одночасно про точку x (точку y) можна казати, що вона «лежить поза» точками y і z (точками x і z), або називати її «крайньою» для точок x, y, z (порівняйте [8, с.16; 36, с.16]).

Можна звернути увагу учнів на те, що рівність (3.2) має виконуватись для деяких двох точок із трьох заданих (наприклад, для точок x і y). Для інших пар точок при цьому буде виконуватись рівність $\rho(x; z) = \rho(x; y) - \rho(z; y)$ або рівність $\rho(z; y) = \rho(x; y) - \rho(x; z)$, які теж можуть вказувати на прямолінійне розміщення точок x, y, z.

Можна дати означення прямолінійного розміщення множини точок метричного простору. Для цього необхідно вимагати прямолінійного розміщення будь-яких трьох точок цієї множини.

Означення 3.6. *«Будемо казати, що множина точок метричного простору прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені».* [21,с.47]

Отож, розглянемо декілька прикладів прямолінійного розміщення точок у метричному просторі.

Приклад 3.3. Розглянемо множину лінійних функцій $y = kx$, що визначенні на відрізку $x \in [0; 1]$. Графік цих лінійних функцій – прямі, що проходять через початок координат. На заданому відрізку $[0; 1]$ графіками будуть відрізки цих прямих. Учні більш ґрунтовно знайомляться з властивостями функцій у дев’ятому класі [4, с.73; 15, с.68]. Але, з окремими елементарними функціями, зокрема з лінійною, та її властивостями учні знайомляться ще у сьомому класі [5,с.141; 16,с.130]. Зауважимо, що дві функції означені на деякому проміжку, ми будемо різними, якщо хоча б в одній точці цього проміжку вони мають різні значення.

Уведемо метрику на цій множині, вибравши за відстань між двома різними її елементами $y = k_1 x$ і $y = k_2 x$ число: $\rho(k_1 x;\ k_2 x) = \max_{x\in[0;1]}|k_1 x - k_2 x|$. Покажемо, що при такому виборі відстані між елементами множина функцій $y = kx$ є метричним простором. У подальшому для зручності будемо користуватися позначеннями: $k_i x = y_i,\ \rho(k_i x; k_j x) = \rho(y_i; y_j) = \rho_{ij}\,(i, j = 1,2,3, \dots)$.

Для двох різних функцій внаслідок означення модуля числа відстань ρ_{12} є додатною. Якщо припустити, що ця відстань дорівнює нулю, то в кожній точці відрізка $[0; 1]$ значення обох функцій повинні бути однаковими, тобто функції повинні збігатися.

Властивість симетрії, що випливає з властивостей модуля числа: $\rho(y_1;\ y_2) = \max_{x\in[0;1]}|k_1 x - k_2 x| = \max_{x\in[0;1]}|k_2 x - k_1 x| = \rho(y_2;\ y_1)$.

Розглянемо на відрізку $[0; 1]$ три функції: $y_1 = k_1 x, y_2 = k_2 x, y_3 = k_3 x$, де k_1, k_2, k_3 – різні числа. Нехай, наприклад, виконуються нерівності: $k_1 < k_2 < k_3$. Знайдемо відстані між функціями:

$\rho_{12} = \max_{x\in[0;1]}|k_1 x - k_2 x| = \max_{x\in[0;1]}|k_1 - k_2||x| = k_2 - k_1$,

Аналогічно отримуємо: $\rho_{13} = k_3 - k_1, \rho_{23} = k_3 - k_2$.

Із отриманих значень слідує справедливість рівності:

$$\rho_{13} = k_3 - k_1 = (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2). \tag{3.5}$$

Отже, нерівність трикутника для точок y_1, y_2, y_3 виконується. Таким чином, вибрана відстань є метрикою, а множина функцій $y = kx$, що визначені на відрізку $x \in [0; 1]$ є метричним простором.

Узагальнимо наш попередній приклад, розглянувши функцію $y = kx + b$.

Розглянемо множину функцій неперервних на відрізку $[a; b]$. Якщо за відстань між двома функціями $f(x)$ і $g(x)$ цієї множини взяти число, що визначається за формулою:

$$\rho(f;g) = \max_{x\in[a;b]}\left|f(x)-g(x)\right|, \tag{3.6}$$

то ця множина стає метричним простором, який позначають $C_{[a;b]}$ [6, с. 104].

Приклад 3.4. Розглянемо множину лінійних функцій $y = kx + b$ для довільних дійсних значень k і b. Із властивостей границі функції у точці слідує, що лінійна функція є неперервною у кожній точці числової осі (для будь-яких дійсних значень x), а отже і на будь-якому відрізку. Тому на відрізку $[0;1]$ лінійні функції є елементами метричного простору $C_{[0;1]}$. Позначимо, для зручності, цю множину $M_{[0;1]}$.

У аксіоматиці Д. Гільберта дві точки визначають пряму. Покажемо, як, задавши дві точки у множині $M_{[0;1]}$, можна побудувати прямолінійний образ у цій множині. Зафіксуємо, наприклад, дві лінійні функції: $y_1 = 0$ і $y_2 = x$. Покажемо, що функції y_1, y_2 і y_3, де $y_3 = kx$, прямолінійно розміщені при довільному значенні k. Для цього спочатку за формулою (3.6) знайдемо відстані між цими точками.

Для зручності подальших записів введемо позначення: $\rho(y_i;y_j) = \rho_{ij}$. Отримаємо:

$$\rho_{12} = \max_{x\in[0;1]}\left|0-x\right| = \max_{x\in[0;1]}\left|x\right| = \max_{x\in[0;1]} x = 1;$$

$$\rho_{13} = \max_{x\in[0;1]}\left|0-kx\right| = \max_{x\in[0;1]}\left|kx\right| = \max_{x\in[0;1]}\left|k\right|\left|x\right| = \left|k\right|;$$

$$\rho_{23} = \max_{x\in[0;1]}\left|x-kx\right| = \max_{x\in[0;1]}\left|(1-k)x\right| = \max_{x\in[0;1]}\left|1-k\right|\left|x\right| = \left|1-k\right|.$$

Тепер перевіримо виконання рівності (3.4) у трьох можливих випадках.

Нехай спочатку число k задовольняє нерівність $k < 0$. Тоді отримуємо: $\rho_{13} = -k$ і $\rho_{23} = 1-k$. І отже рівність (3.4) у цьому випадку набирає вигляду: $\rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}$, тому точки y_1, y_2 і y_3 розміщені прямолінійно. Причому, точка y_1 лежить між точками y_2 і y_3.

Нехай тепер число k задовольняє нерівність $0<k<1$. Тоді справедливі рівності: $\rho_{13}=k$ і $\rho_{23}=1-k$. І отже рівність (3.4) у цьому випадку набирає вигляду: $\rho_{12}=\rho_{13}+\rho_{23}$. Звідси слідує, що точки y_1, y_2 і y_3 знову розміщені прямолінійно. Причому, тепер точка y_3 лежить між точками y_1 і y_2.

Розглянемо нарешті останній випадок, коли число k задовольняє нерівність $k>1$. Тоді справедливі рівності: $\rho_{13}=k$ і $\rho_{23}=k-1$. Тепер виконується рівність $\rho_{13}=\rho_{12}+\rho_{23}$. Тому точки y_1, y_2 і y_3 розміщені прямолінійно і точка y_2 лежить між точками y_1 і y_3.

Ми розглянули усі можливі випадки (значення $k=0$ і $k=1$ ми не беремо до уваги, оскільки у цих випадках не матимемо трьох різних функцій).

Остаточно маємо, що множина функцій $\{0;x;kx\}$, при $k\neq 0$ і $k\neq 1$, є прямолінійним образом у множині $M_{[0;1]}$.

Означення 3.7. *«Будемо казати, що точки* x, y, z *простору* П *прямолінійно розміщені, якщо хоча б для однієї з цих точок (наприклад для точки* y*) виконується рівність»* [20,с.197]

$$\varphi^2(x,y,z)=1. \tag{3.7}$$

За допомогою поняття кута у метричному просторі можна розглянути питання прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору.

Простір з метрикою ρ, у якому введені поняття кута, будемо позначати П.

Означення 3.8. *Будемо казати, що три різні точки простору* П *розміщені прямолінійно, якщо квадрат кутової характеристики одного із кутів, утворених цими точками, дорівнює одиниці.* [20,с.197]

Якщо виконується рівність $\varphi(a,b,c)=1$, то кут $\angle(a,b,c)$ природно назвати нульовим, і казати, що точка b лежить поза точками a і b, а якщо виконується рівність $\varphi(a,b,c) = -1$ – кут є розгорнутим і можна казати, що точка b лежить між точками a і b . Тобто, маємо, що для трьох прямолінійно розміщених точок справедлива теорема, що вказує на певну їх упорядкованість.

Теорема 3.1. *Якщо точка* b *простору* П *лежить між точками* a *і* c *цього простору, то точка* a *лежить поза точками* b *і* c*, а точка* c *лежить поза точками* a *і* b. [20,c.197]

Далі природно вести наступне означення прямолінійності розміщення множини точок метричного простору П [11, c.527].

Означення 3.9. *Якщо будь-які три точки деякої підмножини простору* П *розміщені прямолінійно, то будемо казати, що ця підмножина розміщена прямолінійно.* [20,c.197]

Використовуючи вище наведенні означення ми можемо ввести поняття плоского розміщення точок метричного простору [19, c.11-12].

Означення 3.10. *Будемо казати, що точки* a,b,c,d *простору* П *плоско розміщені, якщо виконується рівність* [20,c.198]

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.8)$$

Для множини точок метричного простору П введемо означення плоского розміщення її точок.

Означення 3.11. *«Будемо казати, що множина точок простору* П *плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені»* [20,c.198].

«З цього означення ми маємо можливість ввести поняття суміжності двох кутів» [18, c.11].

Означення 3.12. *«Якщо точки* a,b,c *простору* П *прямолінійно розміщені, причому, кут* $\angle(a,b,c)$ *є розгорнутим, а точка* d *цього простору така, що виконується рівність»* [20, c.198]

$$\varphi(a,b,d) = -\varphi(c,b,d), \tag{3.9}$$

то кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ будемо називати *суміжними.*

У просторі П, використовуючи поняття суміжності кутів, на основі трьох базових прямолінійно розміщених точок можна будувати плоско розміщені множини точок. Це підтверджує наступна теорема [19,с.12].

Теорема 3.2. *«Нехай точки a,b,c простору* П *прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим.*

Для того, щоб точки a,b,c,d цього простору були плоско розміщеними, необхідно і достатньо, щоб $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ були суміжними». [20, с.198]

Якщо буде виконуватись рівність $\varphi(a,b,c) = 0$, то кут $\angle(a,b,c)$ природно назвати прямим. Тобто, справедливий наступний результат [18, с.12].

Теорема 3.3. *Нехай для точок a,b,c,d простору* П *кут $\angle(a,b,c)$ є прямим.*

Для того, щоб ці точки були плоско розміщені у просторі П, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність* [20, с.199]

$$\varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) = 1.$$

Також, з рівності (2) ми можемо отримати еквівалентну їй рівність, яка теж дає критерій плоского розміщення чотирьох точок простору П [19, с.11].

Теорема 3.4. *«Для того, щоб точки a,b,c,d простору* П *були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a,b,c) = \varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d))(1-\varphi^2(c,b,d))} \tag{3.10}$$

хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки b)». [20, с.199]

Рівність (3.10) – це аналог формули косинуса суми та різниці двох кутів, і у геометрії Евкліда означає, що одна із вершин тетраедра, спільна для ребер з довжинами a,b і c, лежить у площині трьох інших вершин і, таким чином, його об'єм дорівнює нулю.

Отже, завдяки формулам (3.6) – (3.10) ми можемо здійснювати побудови прямолінійно і плоско розміщених множин точок у конкретних метричних просторах.

З наших міркувань можна зробити висновок про те, що матеріал шкільного курсу математики, починаючи з сьомого класу, достатній для поступового знайомства учнів з найпростішими елементами метричної геометрії. Систематичне ознайомлення з цими елементами необхідно розпочинати в дев'ятому класі. Основні геометричні поняття (числова вісь, координатна площина), тісно пов'язані з метричною геометрією. Знайомство учнів з елементами метричної геометрії сприятиме формуванню в них більш широкого розуміння основних геометричних понять і готуватиме їх до адекватного сприйняття в подальшому основних понять і положень неевклідових геометрій.

3.3. Кут, як упорядкована трійка точок метричного простору.

З поняттям кута на пропедевтичному рівні учні знайомляться у другому класі, а саме, вводяться нові фігури – ламана, багатокутник, тоді учні вимірюють довжину ламаної, знаходять периметр багатокутника, вивчають кути багатокутника, прямий кут. Більш детально вивченням кутів учні починають займатися з п'ятого класу. У п'ятому класі учням безпосередньою побудовою вводять: поняття кута, його видів (прямий, гострий, тупий), одиницю виміру кутів. Формується уміння вимірювати кути транспортиром і будувати кути заданої величини. У підручнику для п'ятого класу [25] означують поняття кута так: «Фігуру, утворену двома променями, які мають спільний початок, називають кутом. Ці промені називають **сторонами** кута, а їх спільний початок – **вершиною** кута» [25]. Усі відомості, які учням відомі про кут у початковій школі та у 5-6 класу подаються за допомогою конкретно-індуктивного методу навчання. Але, починаючи з 7-го класу доречно вивчати на дедуктивній основі. Так, наприклад, Евклід у своїх «Началах» означує кут так: «Плоский кут є нахил одна до одної двох ліній, що зустрічаються у площині одна з одною, але які не розміщені по (одній) прямій» [27]. У чинних підручниках з математики, означуючи кут, дотримуються геометричної системи Гільберта: «Нехай α є довільна площина, а h, k які небудь два різні промені у площині α, що виходять з точки O і належать різним прямим. Систему цих двох променів h, k ми називаємо кутом і позначаємо $\angle(h, k)$ або $\angle(k, h)$» [10]. Також, автори Мерзляк, полонський, Якір у підручнику з геометрії для 7 класу означують «кут, як частину площини, яка обмежена двома променями зі спільним початком». [24]

Тепер перейдемо до фактичного вивчення матеріалу, який можна було б представити для учнів при вивченні метричної геометрії. А саме, введення поняття кута, як упорядкована трійка метричного простору.

Означення 3.13. *«Нехай a, b, c – три різні точки множини X. Упорядковану трійку (a, b, c) цих точок будемо називати кутом із вершиною у точці b множини X, і позначати $\angle(a, b, c)$. Пари точок (a, b) і (b, c), при цьому, будемо називати сторонами цього кута».* [20,с. 197]

З метою порівняння кутів між собою введемо поняття характеристики кута, яке основане на теоремі косинусів.

Означення 3.14. *«Нехай x, y, z – три різні точки метричного простору (A, ρ). Характеристикою кута $\angle(x, y, z)$ (або кутовою характеристикою) будемо називати дійсне число $\varphi(x, y, z)$, що знаходиться за формулою»* [20, с.197]

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\rho^2(x, y) + \rho^2(y, z) - \rho^2(x, z)}{2\rho(x, y)\rho(y, z)}. \tag{3.11}$$

«З цього означення легко отримати означення наступних кутів. Прямим кутом назвемо кут $\angle(x, y, z)$ для якого виконується рівність $\varphi(x, y, z) = 0$; розгорнутим кутом – кут, для якого виконується рівність $\varphi(x, y, z) = -1$; нульовим кутом – кут, для якого виконується рівність $\varphi(x, y, z) = 1$.» [38, с. 8]

З Означення 3.14 можна отримати оцінку значень кутової характеристики.

Теорема 3.5. *«Характеристика кута $\angle(x,y,z)$ задовольняє подвійній нерівності»* [38, с. 8]:

$$-1 \le \varphi(x,y,z) \le 1.$$

Дійсно, використовуючи аксіоми відстані між точками метричного простору, будемо мати:

$$-1 \le \varphi(x,y,z) = \frac{\rho^2(x,y)+\rho^2(y,z)-\rho^2(x,z)}{2\rho(x,y)\rho(y,z)} \le 1;$$

$$-2\rho(x,y)\rho(y,z) \le \rho^2(x,y)+\rho^2(y,z)-\rho^2(x,z) \le 2\rho(x,y)\rho(y,z);$$

$$\begin{cases} \rho^2(x,y)+\rho^2(y,z)-\rho^2(x,z) \le 2\rho(x,y)\rho(y,z), \\ -2\rho(x,y)\rho(y,z) \le \rho^2(x,y)+\rho^2(y,z)-\rho^2(x,z); \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\rho(x,y)-\rho(y,z))^2 \le \rho^2(x,z), \\ (\rho(x,y)+\rho(y,z))^2 \ge \rho^2(x,z); \end{cases}$$

Добуваючи квадратний корінь з обох частин нерівностей, будемо мати:

$$\begin{cases} -\rho(x,z) \le \rho(x,y)-\rho(y,z) \le \rho(x,z); \\ \left[\begin{array}{l} \rho(x,y)+\rho(y,z) \ge \rho(x,z), \\ \rho(x,y)+\rho(y,z) \le -\rho(x,z); \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} \rho(x,y)-\rho(y,z) \le \rho(x,z), \\ \rho(x,y)-\rho(y,z) \ge -\rho(x,z); \end{cases} \\ \rho(x,y)+\rho(y,z) \ge \rho(x,z); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(x,y)-\rho(y,z) \le \rho(x,z), \\ \rho(x,y)-\rho(y,z) \ge -\rho(x,z), \\ \rho(x,y)+\rho(y,z) \ge \rho(x,z); \end{cases} \quad \begin{cases} \rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(y,z), \\ \rho(x,y)+\rho(x,z) \ge \rho(y,z), \\ \rho(x,y)+\rho(y,z) \ge \rho(x,z). \end{cases}$$

Кожна з нерівностей отриманої системи виконуються внаслідок третьої аксіоми відстані між точками метричного простору – «нерівності трикутника». Таким чином, твердження теореми справедливе.

Кути між прямими і променями. Орієнтовані кути на площині.

З поняттям прямої та променя учні знайомляться у п'ятому класі. А саме, формулюються вони так: *«…на площині можна накреслити відрізок дуже великої довжини. Більше того, будь-який відрізок можна за допомогою лінійки продовжити в обидві сторони. В уяві це можна зробити необмежено, і тоді ми отримаємо геометричну фігуру, яку називають* ***прямою****. Пряма не має кінців. Вона нескінченна. Тому на рисунку ми можемо зобразити тільки частину прямої — відрізок.»,* *«Проведемо пряму AB і позначимо на ній точку O. Ця точка ділить пряму на дві частини. Кожну з цих частин разом з точкою O називають* ***променем****. Точку O називають початком променя. Кінця у променя немає»* [25].

Кути між прямими і просторами досить складний матеріал для школярів, тому, ми вважаємо, що пояснювати його можна в 11 класі учням з поглибленим вивченням математики. Перш ні вводити цю тему на розгляд учнів потрібно познайомити з поняттям векторного простору та норми. Перейдемо детально до фактичного матеріалу.

Нехай E – довільний дійсний векторний простір. Променем в E називається будь-яка підмножина виду $R_{+}^{*}x$, де $x \in E\backslash 0$. Множина всіх променів в просторі E позначається $\widetilde{\mathcal{D}}(E)$. Множина всіх прямих в E позначається $\mathcal{D}(E)$. Маємо відображення $\rho: \widetilde{\mathcal{D}}(E) \to \mathcal{D}(E)$, при якому кожен прообраз складається з двох елементів. А саме, для будь-якого променя $\Delta \in \widetilde{\mathcal{D}}(E)$ означений *протилежно напрямлений промінь* $(-\Delta)$, такий що $\rho(-\Delta) = \rho(\Delta) = Rx$, якщо $x \in \Delta$.

Означення 3.15. Нехай E – евклідовий векторний простір; $\Delta, \Delta' \in \widetilde{\mathcal{D}}(E); D, D' \in \mathcal{D}(E)$.[5,с.211-214] Тоді:

1) *число* $\frac{|(x|x')|}{\|x\| \cdot \|x'\|}$ *залежить тільки від вибору* D *і* D' *і не залежить від вибору* $x \in D\backslash 0$ *і* $x' \in D'\backslash 0$*, і його арккосинус (який лежить на відрізку* $[0; \frac{\pi}{2}]$*) ми називаємо кутом між прямими* D *і* D' *і позначаємо* $\overline{DD'}$ *або* $\overline{D, D'}$*:*

$$\overline{DD'} = \arccos\left(\frac{|(x|x')|}{\|x\| \cdot \|x'\|}\right), x \in D\backslash 0, x' \in D'\backslash 0$$

2) *аналогічно, число* $\frac{(x|x')}{\|x\| \cdot \|x'\|}$ *залежить тільки від* Δ, Δ'*, а не від* $x \in \Delta\backslash 0$, $x' \in \Delta'\backslash 0$. *Число* $\overline{\Delta\Delta'} = \arccos\left(\frac{(x|x')}{\|x\| \cdot \|x'\|}\right) \in [0, \pi]$ *називається кутом між променями* Δ *і* Δ'.

Інакше кажучи,

$$\cos(\overline{DD'}) = \frac{|(x|x')|}{\|x\| \cdot \|x'\|}, \cos(\overline{\Delta\Delta}) = \frac{(x|x')}{\|x\| \cdot \|x'\|}.$$

Також, доцільно учнів буде ознайомити з таким поняттям метричної геометрії, як орієнтовані кути на площині.

Означення 3.16. Множина $\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$ називається множиною *орієнтованих кутів* між *орієнтованими прямими* на площині. Вона має структуру групи, індуковану з $O^+(E)$ відображенням $\underline{\Phi}$ (групова операція позначається «+»). *Орієнтованим кутом* між променями $\Delta, \Delta' \in \widetilde{\mathcal{D}}(E)$ називається елемент $p((\Delta, \Delta'))$ множини $\widetilde{\mathfrak{A}}(E)$; він позначається $\widehat{\Delta\Delta'}$ або $\widehat{\Delta, \Delta'}$.

Випишемо тепер деякі корисні властивості орієнтованих кутів.

Властивості. *Для будь-яких орієнтованих прямих маємо:*

1) $\Delta' = f(\Delta), f \in O^+(E) \Leftrightarrow \underline{\Phi}(\widehat{\Delta, \Delta'}) = f$, зокрема $\widehat{\Delta\Delta'} = 0 \Leftrightarrow \Delta = \Delta'$;

2) $\widehat{\Delta\Delta'} = \widehat{\Delta_1\Delta_1'} \Leftrightarrow \exists f \in O^+(E): f(\Delta) = \Delta_1, f(\Delta') = \Delta_1'$;

3) $\widehat{\Delta\Delta'} = \widehat{\Delta_1\Delta_1'} \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Delta_1} = \widehat{\Delta'\Delta_1'}$;

4) $\widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta'\Delta''} = \widehat{\Delta\Delta''}$ *(відношення Шаля), зокрема* $\widehat{\Delta'\Delta} = -\widehat{\Delta\Delta'}$;

5) $\forall f \in O^+(E)$ *(відповідно* $O^-(E)$*)*: $f(\widehat{\Delta)f(}\Delta') = \widehat{\Delta\Delta'}$ *(відповідно* $-\widehat{\Delta\Delta'}$*)* [див. 5, с.214-226].

Зауваження. Отже, для визначення орієнтованих кутів зовсім необов'язково орієнтувати E, але для вимірювання цих кутів в E необхідно фіксувати деяку орієнтацію.

Означення 3.17. *Бісектрисою* двох орієнтованих прямих Δ, Δ' називається така орієнтована пряма Σ, що $\widehat{\Delta\Sigma} = \widehat{\Sigma\Delta'}$. [5,с.214-226]

РОЗДІЛ 4
ЕЛЕМЕНТИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У НЕФОРМАЛЬНІЙ ОСВІТІ УЧНІВ СЕРЕДНІХ ЗАКЛАДІВ ОСВІТИ

4.1. Програма факультативу з основ метричної геометрії.

В даний час математика займає особливе положення в ряду базисних напрямків розвитку особистості учня і, зокрема, розвитку його мислення. Саме математична освіта, що характеризується рядом специфічних особливостей, таких, як відносно високий рівень абстракції розглянутого понятійного апарату; діалектичне поєднання строгих логічних умовиводів і правдоподібних міркувань; наявність можливості опису досліджуваних фактів і закономірностей в термінах різних "математичних мов", володіє досить значним потенціалом для розвитку творчих компонентів інтелекту людини, його здатності до продуктивної діяльності, логічного і абстрактного мислення, його свідомості і самосвідомості, тобто всього того, що допомагає особистості в самих різних обставинах проявити свою неповторну індивідуальність.

Аналіз розвиваючих можливостей математичного змісту представлений у працях таких відомих математиків і педагогів, як А. Д. Александров, Ж. Адамар, Г. Вейль, А. Пуанкаре, А. Я. Хінчін, Д. Пойа, Ю. М. Колягін, В. В. Фірсов, Л. М. Фрідман, П. М. Ерднієв і багато інших. У цих роботах підкреслюється, що зміст освіти, спрямований на формування особистості учня засобами математики, може бути встановлено лише з урахуванням специфіки творчої математичної діяльності, і, зокрема, її структури і якісної своєрідності.

Разом з тим, багато авторів вказують на те, що традиційний зміст математичної освіти, спочатку зорієнтований на набуття школярами зафіксованого у відповідних нормативних документах набору знань, умінь і навичок, не може повністю забезпечити ефективне формування всіх компонентів мислення в цілісній структурі особистості.

Одним із засобів посилення розвиваючих можливостей шкільного математичної освіти є організація факультативних курсів відповідної спрямованості.

Вивчення геометрії як науки про просторові форми і просторові відношення матеріального світу не мають уяви без постійного поповнення запасу просторових уявлень учнів, без систематичного розвитку їх просторової уяви і вивчення учнів вільного володіння геометричних понять.

Але, на жаль, на сьогоднішній день залишається актуальною проблема розвитку геометричного уявлення учнів. Також, іншою проблемою, що нас цікавить і є предметом нашого дослідження є проблема введення елементів неевклідової геометрії в курсі геометрії середньої школи.

Традиційний курс шкільної геометрії орієнтує учнів на одну із звичних інтерпретацій геометрії Евкліда, коли під точкою маємо на увазі «слід від кінчика гостро відточеного олівця при його дотику до паперу», під прямою – туго натягнута нитка або пряма, що отримана за допомогою лінійки.

Цими прикладами і обмежуються первісні геометричні уявлення учнів.

Однак рівень розвитку сучасної науки і техніки і потреби самої науки математики ставлять перед школою задачу розвитку різносторонніх геометричних представлень учнів.

В умовах середньої школи можливо здійснити спільне вивчення основ евклідової геометрії з елементами неевклідових геометрій. Важливими моментами в процесі вивчення геометрії виділені наступні:

1. Знайомство учнів з аксіометричним методом.

а) Знайомство з аксіометричним методом і через нього з евклідовою та неевклідовими геометріями розкриває широкі можливості для формування в учнів різносторонніх геометричних уявлень, так як кожній системі аксіом можуть задовольняти різні інтерпретації, що є досить цікавим та повчальним.

б) Розширюється представлення про взаємне розташування прямих.

в) Розширюється стереометричне уявлення учнів про паралельність прямих і площин в просторі.

г) Формується поняття про інтерпретацію геометричних систем.

2. Знайомство з евклідовою та неевклідовими геометріями розширює уявлення учнів про геометричні фігури, формуються нові геометричні поняття. А саме, розширюється поняття про найкоротшу відстань; представлення про відрізок, кут і трикутник; розширюється представлення про геометричне місце точок; про подібні фігури; про вписані та описані фігури; формується представлення про різні простори (виконання всіх геометричних операцій в звичайному евклідовому просторі обмежує уявлення учнів про простір).

3. При спільному вивченні евклідової та неевклідових геометрій формуються такі важливі поняття як відстань, величина, вимір величини.

4. Знайомство з евклідовою та неевклідовими геометріями формує в учнів поняття про методи розв’язку задач.

При знайомстві з неевклідовими геометріями:

а) Учні дізнаються про методи розв’язування задач на побудову (на моделях і в інтерпретаціях).

б) Учні дізнаються про нові методи розв’язування задач на доведення і на розрахунки, розв’язуються задачі такого роду і по неевклідовим геометрія.

Нами було проведено ***педагогічний експеримент*** під час проходження практики у 10 класі Херсонському загальноосвітньому навчально-виховному комплексі № 48 Херсонської міської ради, який показав, що вивчення елементів неевклідових геометрій є доступним учням 10 класу.

При викладені питань пропедевтичного курсу ставилася задача виявити відношення учнів до пропонованого матеріалу і його розуміння учнями різних класів середньої школи (7-10 клас). З цією метою учням пропонувалися опитування, після ознайомлення з достатньою кількістю фактів проводилися контрольні роботи. Як показали спостереження, учні всіх експериментальних класів виявили інтерес до вивчення неевклідових геометрій, особливо до вивчення метричної геометрії. До фактів з якими учні знайомилися відносилися серйозно, зацікавлено, вдумливо, особливо учні старших класів.

Результати проведених контрольних робіт показали, що велика кількість учнів сприймають ті факти неевклідової геометрії, про які їм повідомляли, розуміють їх місце і значення в загальній системі геометричних знань.

Мета педагогічного експерименту:

1) Виявити доступність учнями середньої школи елементів неевклідової геометрії, що вивчається на факультативних заняттях;
2) Виявити ефективність в використання цих матеріалів з метою поглиблення знань учнів з геометрії;
3) Прослідкувати за розвитком просторової уяви, логічного мислення учнів при ознайомлені їх з елементами неевклідової геометрії.

Зміст елементів неевклідових геометрій, який можна застосовувати для вивчення, визнається необхідністю познайомити учнів з основними системами фактів неевклідових геометрій. Отож, нам поставлена мета розвитку просторового уявлення учнів.

Звичайно, що при підборі матеріалу неевклідових геометрій приймалося до уваги загальна математична підготовка учнів, яку вони отримали до моменту вивчення неевклідових геометрій.

Оскільки після проведення порівняльного експерименту з метою визначення доцільності введення факультативного курсу по неевклідовій геометрії в 9 і в 10 класах. Ми дійшли висновку, в результаті експерименту, що розроблений нами факультативний курс слід проводити в 10 класі, так як учні 9-го класу:

1) Не накопичили достатньо матеріалу з геометрії Евкліда для необхідного співставлення з неевклідовими геометріями;
2) Не володіють достатнім запасом просторових уявлень і не мають достатньо розвиненої просторової уяви, оскільки вони тільки починають знайомитися зі стереометрією.

Результати експерименту свідчать, що зміст пропонованого факультативного курсу «Метрична геометрія для школярів» виявився цілком доступним для успішних учнів старших класів (а саме 10-го класу) і ефективним в контексті розглянутої проблематики.

Отож, перейдемо до змісту факультативного курсу по вивченню елементів неевклідових геометрій в середній школі.

Відомо, що факультативне заняття з математики розв'язує дві задачі: 1) поглиблення програмного матеріалу; 2) розширення математичного кругозору учнів.

Факультативний курс «Метрична геометрія для школярів» побудовано з урахуванням цих задач. Застосовувати даний курс можливо у класах з поглибленим вивченням і більш доцільним є у 10 класі, оскільки учні вже детально знайомі з програмою геометрії (алгебри).

Ми вважаємо, що доцільно на програму факультативу виділити 34 годин. А саме:

1) Це дати можливість учням познайомитися з системою неевклідових геометрій, а саме з геометрією Лобачевського, сферичною геометрією та метричною геометрією.

2) Дає можливість не тільки вивчити деякі поняття метричної геометрії, а спів ставити ці поняття з відповідними поняттями геометрії Евкліда.

3) В цьому випадку курс має закінчений характер.

При написанні програми факультативного курсу ми розраховували на наступне:

1) Факультативний курс з метричної геометрії розрахований на учнів 10 класів з поглибленим вивченням математики, коли учні уже набули достатній матеріал по евклідовій геометрії і отримали деякі пропедевтичні відомості про неевклідові геометрії.

2) Викладання метричної геометрії повинно бути таким, щоб введення нових понять не викликало в учнів непорозуміння та внутрішній протест щодо сприйняття нового матеріалу.

3) При викладанні матеріалу слід широко використовувати співставлення відповідних припущень метричної геометрії з геометрією Евкліда. Цим буде досягнуто більш глибоке розуміння припущень як геометрії Евкліда так і метричної геометрії.

4) В учнів не повинно бути переконання, що метрична геометрія є суто теоретичною побудовою.

З цією метою слід учнів познайомити з різними інтерпретаціями метричної геометрії і розв'язати якомога більше задач, щоб учні більш детально розібралися з новим матеріалом.

Отож перейдемо до знайомства з програмою факультативу.

Пояснювальна записка

Програма даного факультативу є загальною частиною програми з геометрії в 10 класі для класів з поглибленим вивченням математики.

Факультатив покликаний підвищити теоретичну та практичну підготовку учнів.

Програма факультативу доповнює та розширює курс задач з геометрії, тобто дозволяє учням поглибити знайомство з прикладними задачами математики, знаходячись в рамках її шкільного курсу.

Програма розрахована на 34 навчальні години, передбачених навчальним планом для класів з поглибленим вивченням математики.

Мета програми – сприяти формуванню знань, вмінь та навичок, необхідних для успішного вивчення математики в шкільній підготовці, до навчання у вищих навчальних закладах.

Факультатив з геометрії заснований на двох ідеях:

1) знайомство з неевклідовими геометріями, проводиться чітка класифікація метричних (пов'язані з поняттям відстані) задач;
2) там, де це можливо, викладання ілюструється за допомогою наочних засобів.

В програмі наведено тематичний план, який відображає певний досвід роботи по цій програмі.

До кожної теми сформульовані загальні цілі навчання, приведені основні вимоги до рівня засвоєння теми, її змісту.

Використання лекційно-практичної системи забезпечує посилення практичної та прикладної спрямованості викладання, складає умови для самостійної діяльності учнів, а також колективних та групових форм роботи.

Тематичний план програми можна переглянути у Додатку А.

Проведення факультативного курсу базується на геометричних навичках учнів, яких вони досягнули вивчаючи курс геометрії. Теми по неевклідовій геометрії вивчаються в співставленні з геометрією Евкліда. На заняттях факультативного курсу учнів, хоча і не на кожному занятті, але опитують та проводять самостійні (контрольні) роботи. На факультативному курсі ми заохочували учнів сучасними технологіями, а саме: наочно демонстрували приклади, показували історичні фільми та короткометражні ролики.

Отже, в завершені ми можемо сказати, що проведений дослід дозволяє зробити наступні висновки: запропонована система вивчення і підібраний матеріал по неевклідовій геометрії доступний учням середньої школи; ця система дозволяє більш глибоко зрозуміти припущення геометрії Евкліда шляхом співставлення з відповідними припущенням неевклідових геометрій, розвивати просторове уявлення учнів; впливає на зріст рівня математичної культури учнів, зближує шкільний курс геометрії з наукою – геометрія, відображаючи сучасний етап її розвитку; сприяє розкриттю дедуктивного характеру побудови курсу геометрії; дозволяє глибше зрозуміти нові досягнення фізики, космології і закони мікросвіту і макросвіту; пропонована система сприяє успішному продовженню математичної освіти учнів в вишах, відкриває широкий шлях для знайомства з різними геометричними системами.

4.2. Конспект заняття факультативу на тему «Формування понять відстані та прямолінійності засобами метричної геометрії»

Тема: «Формування понять відстані та прямолінійності засобами метричної геометрії»

Мета:

- навчальна: зацікавити школярів вивчати математику засобами метричної геометрії; показати, як можна використовувати засоби метричної геометрії для формування поняття відстані між двома точками та поняття прямолінійності;
- розвиваюча: розвивати в учнів логічне мислення, абстрактне мислення, увагу, пам’ять, уяву, здібності учнів;
- виховна: виховувати наполегливість, пізнавальну цілеспрямованість, інтерес до математики.

ПЛАН

I. Організаційний момент. (2хв.)
II. Мотивація навчальної діяльності учнів(6-7хв.).
III. Актуалізація опорних знань. (5-6 хв.)
IV. Вивчення нового матеріалу. (15 хв.)
V. Формування вмінь. (15 хв.)
VI. Підбиття підсумків. (2-3 хв.)

І. Організаційний момент (2хв.).

Привітання, перевірка готовності класу до початку заняття, перевірка наявності учнів.

ІІ. Мотивація навчальної діяльності учнів(6-7хв.).

Стрімкий розвиток неевклідових геометрій було розпочато з другої половини XIX століття та був спричинений побудовою нової геометрії Миколою Лобачевським (1792-1856). Нова геометрія базувалася на запереченні п'ятого постулату геометрії Евкліда.

На початку XX століття, а саме 1906 року, французький математик Моріс Рене Фреше (1878-1973) увів у розгляд поняття метричного простору, яке базувалося на понятті відстані між двома точками (метрики простору). Саме цю дату прийнято вважати початком розвитку метричної геометрії – геометричних структур та співвідношень між ними, що базуються лише на понятті відстані між точками метричного простору.

Основоположниками метричної геометрії вважаються: англійський математик Артур Келі (1821-1895) та австрійсько-американський математик Карл Менгер (1903-1985). Великий вклад у розвиток метричної геометрії зробив російський математик О. Д. Александров (1912-1999). Також серед математиків, що зробили значний вклад у розвиток метричної геометрії слід згадати Веніаміна Федоровича Кагана (1869-1953), який більшу частину свого наукового життя провів на фізико-математичному факультеті Одеського університету. «Обґрунтовуючи основи геометрії Евкліда, у 1902 році В. Ф. Каган побудував геометричну систему, у якій незалежно від М. Р. Фреше використовував поняття точки, що не означується, та на основі якого означаються інші геометричні образи, що розглядаються як сукупності точок» [21, с.44]. Він увів поняття «відстані» між точками, що не змінюється при русі в просторі. Це дозволяє побудувати геометрію Евкліда, не спираючись на інтуїтивне сприйняття її основних понять. «В. Ф. Каган побудував вичерпну теорію прямої лінії, установивши ізоморфізм множини дійсних чисел і точок прямої» [17, розділ XIX]. «При створенні теорії В. Ф. Каган використовував поняття «прямолінійної розміщеності» точок» [18, с. 527].

Програма шкільного курсу математики дає можливість розглядати окремі поняття метричної геометрії, саме цим ми будемо займатися на нашому факультативному занятті.

ІІІ. Актуалізація опорних знань(5-6 хв.).

Щоб зрозуміти та добре засвоїти тему давайте пригадаємо, що ми знаємо про основні геометричні поняття в шкільному курсі математики.

1. Дати визначення таких понять як: точка, пряма, площина.

«Точка – найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини» [24, с.12]. «Пряма – це геометрична фігура, яка має певні властивості. *Основна властивість прямої*: через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну. *Прямі, що перетинаються:* Дві прямі, які мають спільну точку, називаються такими, що перетинаються. *Теорема про дві прямі, що перетинаються:* Будь-які дві прямі, що перетинаються мають тільки одну спільну точку» [24, с.12-13]. «Площина – поверхня, котра повністю містить кожну пряму, що сполучає її довільні точки; Площина – множина точок, рівновіддалених від двох заданих» [29].

2. Що називається відстанню між двома точками?

«Відстанню між точками А і В називають довжину відрізка АВ. Якщо точки
А і В збігаються, то уважають, що відстань між ними дорівнює нулю» [24, с. 17].

3. Сформулюйте нерівність трикутника.

«Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін…» [1, с. 109; 3, с. 108–109; 8, с. 74; 16, с. 115; 24, с. 113].

4. Сформулюйте характеристичну властивість трьох точок, що належать одній прямій.

«точка B міститься між точками A і C», що є ознакою «прямолінійного розміщення» [18, с. 527] точок A, B, C: «якщо для трьох точок A, B і C виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB» [24, с. 114]; «якщо для трьох точок A, B, C виконується рівність $AB + BC = AC$, то ці точки лежать на одній прямій і точка B міститься між точками A і C» [1, с. 109]; «…якщо точка C лежить між точками A і B…, то правильні такі співвідношення: $AB = BC + CA$, $BC < CA + AB$, $CA < AB + BC$» [3, с. 108-109].

5. Напишіть рівняння лінійної функції та сформулюйте основні властивості функції.

Лінійною функцією називають функцію, що задається формулою $y = kx + b$, де x – аргумент; k, b – константи. Якщо, зокрема, $k = 0$, то одержуємо сталу функцію $y = b$; якщо $b = 0$, то одержуємо пряму пропорційність $y = kx$.

Властивості функції $y = kx + b$:

1.Область визначення – множина всіх дійсних чисел

2. Функція $y = kx + b$ загального виду, тобто ні парна, ні непарна.

3. При $k > 0$ функція зростає, а при $k < 0$ спадає на всій числовій осі.

4. Графіком функції є пряма.

VI. Вивчення нового матеріалу (15 хв.).

Отож, перейдемо безпосередньо до вивчення матеріалу теми факультативного заняття. (див. Додаток Б).

V. Формування вмінь (25 хв.).

Для формування вмінь в учнів ми розробили систему вправ (див. Додаток Б).

VI. Підбиття підсумків. (2-3 хв.).

Отож, можна зробити висновки, що основні геометричні поняття (точка, прямолінійне розміщення точок, числова вісь, координатна площина), тісно пов’язані з метричною геометрією. Знайомство з елементами метричної геометрії сприяє формуванню більш широкого розуміння основних геометричних понять і готує до адекватного сприйняття в подальшому основних понять і положень неевклідових геометрій.

ВИСНОВКИ

В ході проведеного дослідження були вирішені всі поставлені завдання і отримані наступні результати:

1. Нами було досліджено вивчення основних геометричних понять в шкільному курсі математики; ми провели детальний огляд неевклідових геометрій (таких як, геометрія Лобачевського, сферична геометрія, геометрія Гільберта);

2. Було здійснено аналіз навчально-методичної літератури для розробки факультативного курсу «Метрична геометрія для школярів»;

3. Виявлено, що суттєвий потенціал у плані розвитку гнучкості та узагальненості мислення старшокласників містить у собі факультатив «Метрична геометрія для школярів», який, виводячи їх за межі безпосереднього чуттєвого сприйняття, приносить в навчання геометрії ідею альтернативності, тобто дозволяє знайомити учня з різними точками зору на ті чи інші геометричні факти і закономірності;

4. Розроблено зміст факультативного курсу «Метрична геометрія для школярів». Вивчення кожної теми має починатися зі спільної актуалізації необхідних відомостей і постановки базової проблеми. Новий матеріал спочатку представляється вчителем в лекційній формі, а його подальше розкриття передбачає ведення бесіди (дискусії) з учнями, і групової або індивідуальної самостійної роботи.

5. Результати проведеного педагогічного експерименту свідчать про суттєвий розвиваючий ефект розроблених матеріалів в плані формування альтернативності, гнучкості, широти і узагальненості мислення старшокласників. Причому, сформовані в ході факультативних занять пошукові вміння, відповідні даним якостям, виявилися функціонально значимі по відношенню до всього геометричного матеріалу і, зокрема, матеріалу базового курсу геометрії.

Структурні компоненти роботи повністю відповідають структурним компонентам навчально-методичного комплексу дисципліни, нормативні вимоги до якого визначені для навчально-методичних комплексів з дисциплін кафедр Херсонського державного університету.

СПИСОК ВИКОРИСТАННИХ ДЖЕРЕЛ

1. Blumenthal L. Theory and applications of distance geometry, 2nd ed. Chelsea Publishing Company, 1970. P. 347.
2. Crippen G.M. Distance Geometry and Molecular Conformation. John Wiley and Sons, 1988.
3. Distance Geometry: Theory, Methods and Applications / A.Mucherino, C.Lavor, L.Liberty, N.Maculan // Springer, 2013.
4. Kuz’mich V., Kuzmich L., Savchenko A. *Formation of the concept of angle by means of metric geometry on geometric material of 9th grade.*Physical andMathematical Education. 2021. Issue 3(29). P.6-12.
5. Maragos P., Schafer R. W., Butt M.A. Mathematical Morphology and Its Application to Image and Signal. Kluwer Academic Publishers, 1996
6. Menger K. Untersuchungen uber allgemeine Metric.Math. Ann, 1928. P. 75-163.
7. Апостолова Г. В. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2015. 216 с
8. Базылев В. Т., Дуничев В. Т. Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. М.:Просвещение, 1974. – Ч.2
9. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Відродження, 2015. 288 с.
10. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
11. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Відродження, 2015. 192 с.
12. Берже М. Геометрия. Том 1. М.: Мир, 1984. 559 с
13. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 512 с.
14. Бурда М.І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підруч. для 7 кл.

загальноосвіт. навч. закл. К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.

15. Гайбуллаев Н. Формирование геометрических представлений учащихся средней школы при изучении евклидовой геометрии и неевклидовых геометрий: Автореф. дис. канд. пед. наук. Ташкент, 1972. 39 с.
16. Гильберт Д. Основания геометрии / пер. с нем. под ред.: А. В. Васильев. Петроград: Сеятель, 1923. 152 с.
17. Глущак С. І. Деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка. // Прикарпатський вісник НТШ. Число. 2016. С. 157–166.
18. Горшкова, Л. С., Сорокина М. В. Основания геометрии: учебное пособие для студентов педагогических вузов. Пенза: Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, 2009. 144 с.
19. Ермак Е. А. Развитие пространственных представлений учащихся средней школы при изучении евклидовой и неевклидовой геометрии: автореф. дис. канд. пед. наук. Санкт-Петербург, 1991. 18 с.
20. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.:Генеза, 2015. 256 с.
21. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.:Генеза, 2017. 264 с.
22. Істер О. С. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.:Генеза, 2015. – 184 с.
23. Каган В. Ф. Основания геометрии. Часть 2. М.–Л.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
24. Каган В. Ф. Очерки по геометри. М.: Издательство Московского университета, 1963. 571 с.
25. Кузьмич В.І. Кутова характеристика у метричному просторі. Algebraic and geometric methods of analysis: International scientific conference: book of abstracts. May 31-June 5, 2017, Odessa, Ukraine. С.11-12.

URL:https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf

26. Кузьмич В. І. Прямолінійне та плоске розміщення точок метричного простору. *Теоретико-практичні проблеми використання математичних методів і комп'ютерно-орієнтованих технологій в освіті та науці*. К: Київ ун-т ім. Б.Грінченка, 2018. С. 196–200.
27. Кузьмич В. І. Формування в школярів понять відстані та прямолінійності засобами метричної геометрії. *Педагогічний альманах: збірник наукових праць*. Херсон: КВНЗ «Херсонська академія неперервної освіти», 2019. С. 43-50.
28. Кузьмич В. І. Формування понять точки, відстані та прямолінійного розміщення точок засобами метричної геометрії у 7-9 класах. *Фізико-математична освіта*. 2020. С. 74–79.
29. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.:Гімназія, 2017. 304 с.
30. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення: навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. Х.: Гімназія, 2015. 192 с.
31. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика 5 клас: підр. для закладів загальної середньої освіти. Вид.2-ге, доопрац. до чинної програми. Х.: Гімназія, 2018. 272 с.
32. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 512 с.
33. Начала Евклида. Книги I-VI / пер. с греч. и коммент.: Д. Д. Мордухай-Болтовский. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1948. 447 с.
34. Основні поняття геометрії. URL: http://5fan.ru/wievjob.php?id=18302.

35.Площина. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Площина.

36.Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Том 1. Москва: МЦНМО, 2004. 312 с.

37.Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Сердюк О. М., Сердюк З. О. Алгебра: підруч. Для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К.:УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

38.Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Сердюк О. М., Сердюк З. О. Математика: підруч. Для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. К.:Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.

39.Титова Н. В. Факультативный курс "неевклидовы геометрии" как средство реализации развивающей функции школьного математического образования: автореф. дис. канд. пед. наук. Саранск, 2006. 19 с.

40.Титова Н.В. Возможности изучения элементов геометрии Лобачевского в школе (постановка проблемы). Вестник молодых ученых: межвуз. сб. науч. Трудов. Пенза: ПГПУ, 2003. С.112-114.

ДОДАТКИ

Додаток А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Цимбалюк Анастасія Олександрівна,
учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:
- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:
- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

01.09.2020	А. Цимбалюк	Анастасія Цимбалюк
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)

Додаток Б

Тематичне планування факультативного заняття

Таблиця 4.1.

Тематичний план

№	*Теми факультативу*	*Кількість годин*	*Основна мета*
1.	**Знайомство учнів з поняттям неевклідових геометрії та її видами.**	**3**	➢ познайомити учнів з історією евклідової та неевклідових геометрій; ➢ сформувати в учнів поняття абсолютної геометрії; ➢ познайомити учнів з геометрією Лобачевського та Рімана; ➢ сформувати в учнів поняття метричної геометрії.
2.	**Метрична геометрія: основні поняття та властивості.**	**5**	➢ дати систематизовані знання про метричну геометрію та метричний простір; ➢ сформувати вміння використовувати відповідні властивості та ознаки до розв’язування задач на побудову; ➢ розвивати логічне мислення та просторову уяву учнів;
3.	**Прямолінійне та плоске розміщення**	**6**	➢ дати означення прямолінійного та плоского

	точок метричного простору.		розміщення точок метричного простору; ➢ сформувати в учнів уміння будувати плоско розміщені множини точок; ➢ розвивати просторову уяву учнів;
4.	**Формування у школярів поняття відстані та прямолінійності засобами метричної геометрії.**	**6**	➢ показати, як можна застосувати засоби метричної геометрії для формування поняття відстані між двома точками та поняття прямолінійності у шкільному курсі математики; ➢ провести аналогію понять відстані та прямолінійності евклідової геометрії з метричною геометрією; ➢ надати достатню кількість прикладів для розвитку логічного мислення та просторової уяви;
5.	**Поняття кута при вивченні метричного простору.**	**5**	➢ ввести у метричному просторі поняття кута та його кутової характеристики; ➢ проаналізувати найбільш ефективні шляхи

			формування поняття «кут» у шкільному курсі математики засобами метричної геометрії; ➢ розвивати логічне мислення та просторову уяву за допомогою достатньої кількості прикладів;
6.	**Побудова прямолінійно розміщених множин.**	**5**	➢ представити учням низку задач, що полягають у побудові прямолінійно розміщених множин; ➢ сформувати вміння використовувати освоєні поняття, властивості, ознаки у процесі розв'язування задач; ➢ розвивати просторову уяву;
7.	**Узагальнення вивчення теми «Метрична геометрія»**	**4**	➢ узагальнити та систематизувати відомості про метричну геометрію та її основні поняття; ➢ завершити вивчення понять метричної геометрії.

Додаток В

Теоретична частина розробки конспекту заняття з метричної геометрії

Запишемо основні означення, що стосуються метричної геометрії.

Означення 1. Метричним простором називається сукупність непорожньої множини X елементів якої завгодно природи й однозначної дійсної невід'ємної функції $\rho(x;y)$, означеної для будь-яких елементів x і y з X і яка задовольняє такі умови:

1) $\rho(x;y) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x = y$*;*

2) $\rho(x;y) = \rho(y;x)$ *(аксіома симетрії);*

3) для будь-яких трьох елементів x, y, z *виконується нерівність* $\rho(x;y) \leq \rho(x;z) + \rho(z;y)$ *(аксіома трикутника).*

(див. [15, ст. 44])

«При цьому елементи множини X називають точками метричного простору, функцію ρ – метрикою простору X, а числове значення функції $\rho(x;y)$ – відстанню між елементами (точками) x і y. Метричний простір X з метрикою ρ позначають $(X;\ \rho)$.» [15, с.44]

Таке формулювання має означення в оригіналі, тобто воно показує як означували метричний простір науковці, які займалися дослідженням метричної геометрії. Очевидно, що для вас, школярів, таке формулювання буде не зрозумілим та навпаки ускладнить ваше бачення метричної геометрії, оскільки тут використовуються поняття функції двох змінних, а якщо точніше, то функціоналу з яким ви ще не знайомі.

Тому давайте запишемо дещо спрощене, але більш об'ємне означення метричного простору та відстані між його точками. Тут використовується поняття множини та її елементів, з яким ми познайомилися у 8 класі.

Означення 2. Непорожню множину X елементів якої завгодно природи будемо називати метричним простором, якщо кожній парі $(x;\ y)$ різних елементів цієї множини за певним правилом ρ поставлене у відповідність єдине додатне число $\rho(x;\ y)$, що називається відстанню між елементами x і y, і яке задовольняє умовам:

1) для будь-яких двох різних елементів x і y відстань між елементами x і y дорівнює відстані між елементами y і x, тобто виконується рівність $\rho(x;\ y) = \rho(y;\ x)$ (умова симетрії),

2) для будь-яких трьох різних елементів x, y, z відстань між елементами x і y не більша, ніж сума відстаней між елементами x і z та між елементами z і y, тобто виконується нерівність $\rho(x;\ y) \leq \rho(x;\ z) + \rho(z;\ y)$ (нерівність трикутника).

(див. [15, с.45])

«При виконанні умов Означення 2 елементи множини будемо називати точками метричного простору, правило ρ – метрикою простору. Метричний простір X з метрикою ρ будемо позначати $(X,\ \rho)$.» [15, с.45]

Перейдемо до більш детального розгляду поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Слід зауважити, що це поняття є частинним випадком означення 2 за умови, що нерівність трикутника перетворюється у рівність.

Означення 3. Будемо казати, що точки x, y, z метричного простору (X, ρ) розміщені прямолінійно в цьому просторі, якщо виконується рівність

$$\rho(x; y) = \rho(x; z) + \rho(z; y). \tag{1}$$

(див. [15,с.47]).

При виконанні рівності (1) природно казати, що точка z «лежить між» точками x і y, або називати її «внутрішньою» для точок x, y, z. Одночасно про точку x (точку y) можна казати, що вона «лежить поза» точками y і z (точками x і z), або називати її «крайньою» для точок x, y, z.

Давайте звернемо увагу на те, що рівність (1) повинна виконуватись для деяких двох точок із трьох заданих (наприклад, для точок x і y). Для інших пар точок при цьому буде виконуватись рівність $\rho(x;\ z) = \rho(x;\ y) - \rho(z;\ y)$ або рівність $\rho(z;\ y) = \rho(x;\ y) - \rho(x;\ z)$, які теж можуть указувати на прямолінійне розміщення точок x, y, z.

Можна дати означення прямолінійного розміщення множини точок метричного простору. Для цього необхідно вимагати прямолінійного розміщення будь-яких трьох точок цієї множини.

Означення 4. *Будемо казати, що множина точок метричного простору прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені.* [15,с.47]

На цьому теоретичний виклад завершено, тому перейдемо до закріплення знань практичними завданнями.

Практична частина розробки конспекту заняття з метричної геометрії

Приклад 1. Найпростішим прикладом метричного простору є множина усіх точок числової осі. Такий простір називають одновимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^1. Як відомо [16] відстань між двома точками x і y числової осі знаходять як абсолютну величину (модуль) різниці відповідних чисел x і y: $\rho(x;\ y) = |x - y|$.

Виконання усіх умов Означення 2 для простору R^1 перевіряється досить просто. Їх можна перевірити за допомогою властивостей множини дійсних чисел, або на інтуїтивному рівні, використовуючи числову пряму.

Приклад 2. Візьмемо у якості відстані між точками $M_1(x_1;\ y_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2)$ координатної площини число:

$$\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}.$$

Перевірити виконання умов Означення 2 для такого простору також не складно, тому розглянутий простір є метричним, його позначають R_0^2.

Простір R_0^2 теж може бути прикладом простору, у якому відстань між точками не завжди є довжиною відрізка, що з'єднує ці точки.

Приклад 3. Розглянемо множину лінійних функцій $y = kx$, що визначенні на відрізку $x \in [0; 1]$. Графік цих лінійних функцій – прямі, що проходять через початок координат. На заданому відрізку $[0; 1]$ графіками будуть відрізки цих прямих. Учні більш ґрунтовно знайомляться з властивостями функцій у дев'ятому класі [3, с.73; 9, с.68]. Але, з окремими елементарними функціями, зокрема з лінійною, та її властивостями учні знайомляться ще у сьомому класі [4,с.141; 10,с.130]. Зауважимо, що дві функції означені на деякому проміжку, ми будемо різними, якщо хоча б в одній точці цього проміжку вони мають різні значення.

Уведемо метрику на цій множині, вибравши за відстань між двома різними її елементами $y = k_1x$ і $y = k_2x$ число: $\rho(k_1x;\ k_2x) = \max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_2x|$. Покажемо, що при такому виборі відстані між елементами множина функцій $y = kx$ є метричним простором. У подальшому для зручності будемо користуватися позначеннями: $k_ix = y_i,\ \rho\big(k_ix; k_jx\big) = \rho\big(y_i; y_j\big) = \rho_{ij}\ (i, j = 1,2,3, \dots)$.

Для двох різних функцій внаслідок означення модуля числа відстань ρ_{12} є додатною. Якщо припустити, що ця відстань дорівнює нулю, то в кожній точці відрізка $[0; 1]$ значення обох функцій повинні бути однаковими, тобто функції повинні збігатися.

Властивість симетрії, що випливає з властивостей модуля числа: $\rho(y_1;\ y_2) = \max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_2x| = \max_{x\in[0;1]}|k_2x - k_1x| = \rho(y_2;\ y_1)$.

Розглянемо на відрізку $[0; 1]$ три функції: $y_1 = k_1x, y_2 = k_2x, y_3 = k_3x$, де k_1, k_2, k_3 – різні числа. Нехай, наприклад, виконуються нерівності: $k_1 < k_2 < k_3$. Знайдемо відстані між функціями:

$\rho_{12} = \max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_2x| = \max_{x\in[0;1]}|k_1 - k_2||x| = k_2 - k_1,$

Аналогічно отримуємо: $\rho_{13} = k_3 - k_1, \rho_{23} = k_3 - k_2$.

Із отриманих значень слідує справедливість рівності:

$$\rho_{13} = k_3 - k_1 = (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2). \tag{2}$$

Отже, нерівність трикутника для точок y_1, y_2, y_3 виконується. Таким чином, вибрана відстань є метрикою, а множина функцій $y = kx$, що визначені на відрізку $x \in [0; 1]$ є метричним простором.

З рівності (2), випливає прямолінійне розміщення всієї множини.

Узагальнимо наш попередній приклад, розглянувши функцію $y = kx + b$.

Розглянемо множину функцій неперервних на відрізку $[a;b]$. Якщо за відстань між двома функціями $f(x)$ і $g(x)$ цієї множини взяти число, що визначається за формулою:

$$\rho(f;g) = \max_{x\in[a;b]}\left|f(x) - g(x)\right|, \tag{3}$$

то ця множина стає метричним простором, який позначають $C_{[a;b]}$ [5, с. 104].

<u>Приклад 4.</u> Розглянемо множину лінійних функцій $y = kx + b$ для довільних дійсних значень k і b. Із властивостей границі функції у точці слідує, що лінійна функція є неперервною у кожній точці числової осі (для будь-яких дійсних значень x), а отже і на будь-якому відрізку. Тому на відрізку [0;1] лінійні функції є елементами метричного простору $C_{[0;1]}$. Позначимо, для зручності, цю множину $M_{[0;1]}$.

У аксіоматиці Д. Гільберта дві точки визначають пряму. Покажемо, як, задавши дві точки у множині $M_{[0;1]}$, можна побудувати прямолінійний образ у цій множині. Зафіксуємо, наприклад, дві лінійні функції: $y_1 = 0$ і $y_2 = x$. Покажемо, що функції y_1, y_2 і y_3, де $y_3 = kx$, прямолінійно розміщені при довільному значенні k. Для цього спочатку за формулою (3) знайдемо відстані між цими точками.

Для зручності подальших записів введемо позначення: $\rho(y_i; y_j) = \rho_{ij}$. Отримаємо:

$$\rho_{12} = \max_{x\in[0;1]}|0 - x| = \max_{x\in[0;1]}|x| = \max_{x\in[0;1]} x = 1;$$

$$\rho_{13} = \max_{x\in[0;1]}|0 - kx| = \max_{x\in[0;1]}|kx| = \max_{x\in[0;1]}|k||x| = |k|;$$

$$\rho_{23} = \max_{x\in[0;1]}|x - kx| = \max_{x\in[0;1]}|(1-k)x| = \max_{x\in[0;1]}|1-k||x| = |1-k|.$$

Нехай спочатку число k задовольняє нерівність $k < 0$. Тоді отримуємо: $\rho_{13} = -k$ і $\rho_{23} = 1 - k$. І отже рівність (1.4) у цьому випадку набирає вигляду: $\rho_{23} = \rho_{12} + \rho_{13}$, тому точки y_1, y_2 і y_3 розміщені прямолінійно. Причому, точка y_1 лежить між точками y_2 і y_3.

Нехай тепер число k задовольняє нерівність $0 < k < 1$. Тоді справедливі рівності: $\rho_{13} = k$ і $\rho_{23} = 1 - k$. І отже рівність (1.4) у цьому випадку набирає вигляду: $\rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23}$. Звідси слідує, що точки y_1, y_2 і y_3 знову розміщені прямолінійно. Причому, тепер точка y_3 лежить між точками y_1 і y_2.

Розглянемо нарешті останній випадок, коли число k задовольняє нерівність $k > 1$. Тоді справедливі рівності: $\rho_{13} = k$ і $\rho_{23} = k - 1$. Тепер виконується рівність $\rho_{13} = \rho_{12} + \rho_{23}$. Тому точки y_1, y_2 і y_3 розміщені прямолінійно і точка y_2 лежить між точками y_1 і y_3.

Ми розглянули усі можливі випадки (значення $k = 0$ і $k = 1$ ми не беремо до уваги, оскільки у цих випадках не матимемо трьох різних функцій).

Остаточно маємо, що множина функцій $\{0; x; kx\}$, при $k \neq 0$ і $k \neq 1$, є прямолінійним образом у множині $M_{[0;1]}$.

За результатами прикладу 4 може скластись враження, що певна монотонність розміщення лінійних функцій множини $M_{[0;1]}$ забезпечує їх прямолінійне розміщення. Однак наступний приклад вказує на те, що це не завжди так.

Приклад 5. Розглянемо наступні три точки множини $M_{[0;1]}$: $y_1 = 0$, $y_2 = x$ і $y_3 = b$. Функція y_3 є частинним випадком лінійної функції $y = kx + b$ при значенні $k = 0$. Знайдемо відстані: $\rho_{12} = 1$;

$$\rho_{13} = \max_{x\in[0;1]}|0-b| = \max_{x\in[0;1]}|b| = |b| = \begin{cases} b, \text{ якщо } (b \geq 0); \\ -b, \text{ якщо } (b < 0). \end{cases};$$

$$\rho_{23} = \max_{x\in[0;1]}|x-b| = \max\{|b|, |1-b|\}.$$

В останній рівності використана властивість монотонності лінійної функції на відрізку – найбільшого значення вона досягає в одній із крайніх точок відрізка. Цю рівність можна уточнити. Для цього розглянемо значення чисел $|b|$ і $|1-b|$ на трьох проміжках.

Нехай, спочатку, число b належить проміжку $(-\infty;0)$. Для цих значень буде виконуватись рівність $\max\{|b|, |1-b|\} = \max\{-b, 1-b\} = 1-b$.

Для значень числа b з проміжку $[0;1)$ справедливою буде рівність

$$\max\{|b|, |1-b|\} = \max\{b, 1-b\} = \begin{cases} 1-b, \text{ якщо } 0 \leq b \leq 0{,}5; \\ b, \text{ якщо } 0{,}5 \leq b < \infty. \end{cases}$$

Якщо число b належить проміжку $[1;+\infty)$ то буде справедлива рівність $\max\{|b|, |1-b|\} = \max\{b, b-1\} = b$.

Остаточно матимемо:

$$\rho_{23} = \max\{|b|, |1-b|\} = \begin{cases} 1-b, \text{ якщо } -\infty \leq b \leq 0{,}5; \\ b, \text{ якщо } 0{,}5 \leq b < \infty. \end{cases}$$

Тепер розглянемо значення відстаней ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23} на вказаних вище трьох проміжках значень числа b.

Нехай спочатку це число задовольняє нерівність: $b \geq 0{,}5$. Тоді точки y_1, y_2 і y_3 будуть розміщені прямолінійно лише при значенні $b = 0{,}5$, оскільки при цьому значенні матимемо: $\rho_{13} = 0{,}5$ і $\rho_{23} = 0{,}5$, і отже, буде виконуватись рівність

$$\rho_{12} = \rho_{13} + \rho_{23}. \quad (4)$$

Причому, у цьому випадку точка y_3 лежить між точками y_1 і y_2. При інших значеннях числа b з цього проміжку ні одне з трьох чисел: 1; b; b не може дорівнювати сумі двох інших.

Нехай тепер число b задовольняє нерівність $0 \le b < 0{,}5$. У цьому випадку теж буде виконуватися рівність (4). Дійсно, матимемо: $\rho_{13} + \rho_{23} = b + (1 - b) = 1 = \rho_{12}$.

Нарешті розглянемо останній проміжок значень числа b. Нехай тепер виконується нерівність $b < 0$. У цьому випадку справедлива рівність $\rho_{12} + \rho_{13} = 1 + (-b) = 1 - b = \rho_{23}$. Тому точки y_1, y_2 і y_3 розміщені прямолінійно, причому точка y_1 лежить між точками y_2 і y_3.

Остаточно маємо, що множина функцій $\{0; x; b\}$ при будь-яких значеннях числа b, що задовольняє нерівність $b \le 0{,}5$, є прямолінійним образом у множині $M_{[0;1]}$. При інших значеннях числа b $(b > 0{,}5)$ ці функції не будуть прямолінійно розміщені.

Додаток Г

Сертифікат учасника Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених «Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО: історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти»

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНІЙ УНІВЕРСИТЕТ (ХАДІ)

СЕРТИФІКАТ

Цимбалюк Анастасія Олександрівна

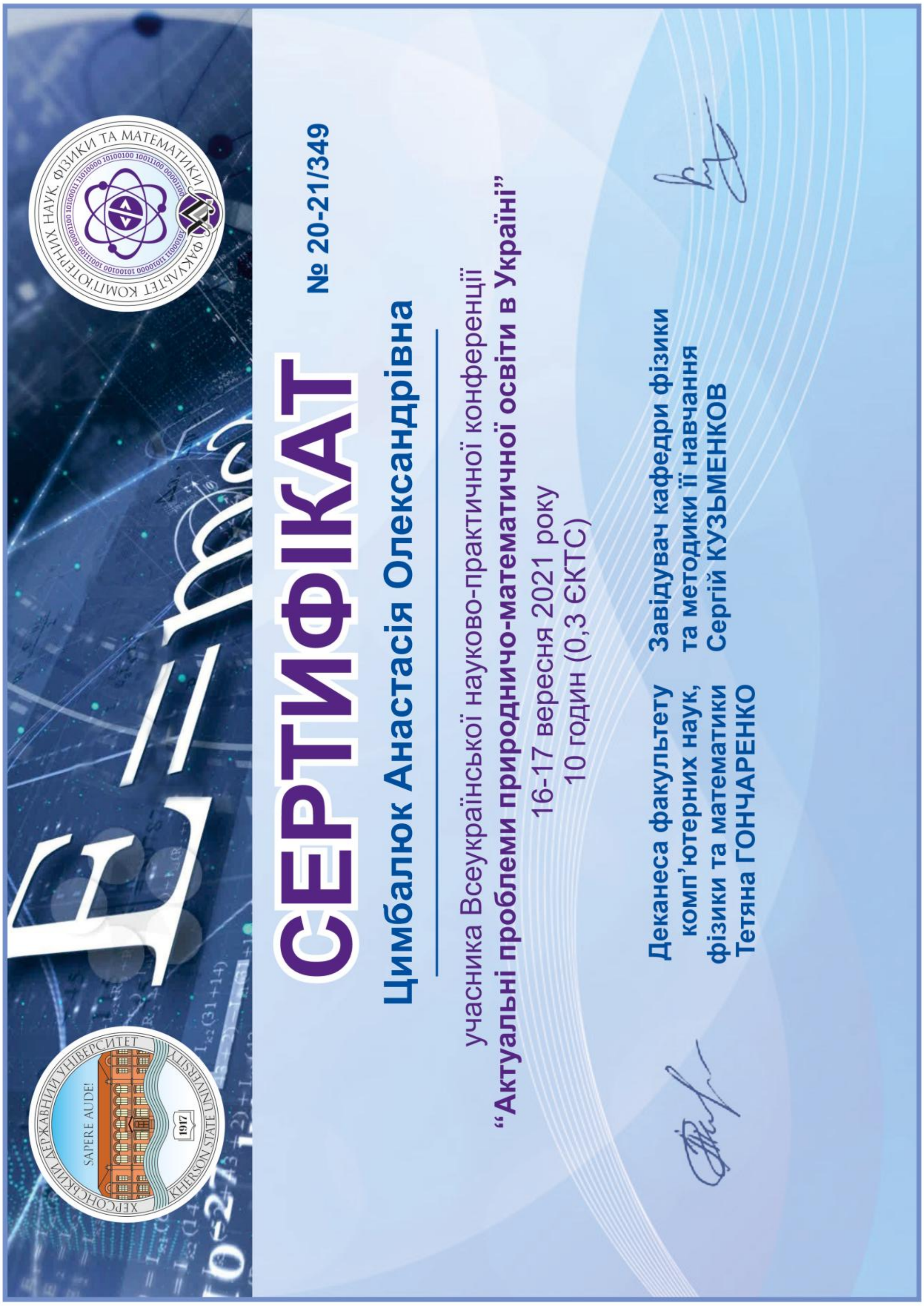
учасник Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених

«Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО : історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти»

08-09 квітня 2021 р.

Від оргкомітету конференції
декан факультету транспортних технологій
професор **Ю.О.Бекетов**

Сертифікат учасника Всеукраїнської науково-практичної конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні»


№ 20-21/349

СЕРТИФІКАТ

Цимбалюк Анастасія Олександрівна

учасника Всеукраїнської науково-практичної конференції
"Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні"
16-17 вересня 2021 року
10 годин (0,3 ЄКТС)

Деканеса факультету комп'ютерних наук, фізики та математики
Тетяна ГОНЧАРЕНКО

Завідувач кафедри фізики та методики її навчання
Сергій КУЗЬМЕНКОВ