МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Вивчення «Алгебри і початків аналізу» у старшій школі на профільному рівні

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: здобувачка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014.04 Середня освіта
Спеціалізації 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми
«Середня освіта (Математика)»
Соловйова Анастасія Олексіївна
Керівник: кандидат педагогічних наук,
доцент Таточенко Володимир Іванович
Рецензент: в.о. директора Херсонської
загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 46
Херсонської міської ради, вчитель вищої
категорії, вчитель-методиста
Співак Інна Наумівна

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Математичні знання сучасного випускника закладу середньої освіти повинні забезпечувати свідоме їх використання у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності. Формування таких знань проводиться через вивчення курсу «Алгебри і початків аналізу», тому тема: «Вивчення алгебри і початків аналізу у старшій школі на профільному рівні» і є актуальною.

Навчання математики у сучасній школі повинно викликати лише позитивні емоції. Вивчення курсу «Алгебри і початків аналізу» у старшій школі є складним для учнів, тим паче, якщо курс вивчається на профільному рівні. Для полегшення процесу вивчення, вчителі не перестають винаходити все нові й нові методи навчання. Пов'язуючи навчання з життям, залучення ІТ технологій та інші. Одним із методом який може допомогти зацікавити якомога більше учнів до вивчення математики є методика перевернутого навчання. У роботі розглянуто методику вивчення деяких тем курсу «Алгебри і початків аналізу» з використанням даного методу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Впродовж виконання даної роботи було проведено аналіз науково – методичної літератури з теми роботи. Проаналізовано навчальні програми для профільного рівня, та рівня стандарт. Було проведено аналіз різних підручників з алгебри для 10-11 класу, які рекомендовані Міністерством освіти і науки України. Також було проведено аналіз методичних робіт видатних українських науковців та методистів, таких як: Слєпкань З. І., Бевз Г. П., Тарасенкова Н. А., Істер О. С., та інщі.

Мета дослідження – пошук шляхів покращення рівня якості знань у учнів старшої школи профільного рівня.

Завдання дослідження:

1. Аналіз науково – методичної літератури з вивчення алгебри і початків аналізу у старшій школі на профільному рівні;
2. Продемонструвати результати дослідження (експерименту) з використанням методики перевернутого навчання під час вивчення тем з курсу «Алгебри і початків аналізу»

Об'єкт дослідження. Методика вивчення курсу «Алгебри і початків аналізу» у старшій школі на профільному рівні.

Предмет дослідження. Використання методики перевернутого навчання при вивчені тем у курсі «Алгебри і початків аналізу».

Методи дослідження, які використовуються у даному дослідженні є аналіз наукової літератури з теми дослідження, та педагогічний експеримент, для визначення ефективності запропонованої методики.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у використанні методики перевернутого навчання на уроках алгебри.

Практичне значення одержаних результатів. Навчання у сучасній школі вже давно перестало бути чимось буремним. Вчителі разом з методистами продовжують винаходити нові методики для зацікавлення учнів у процес навчання. Одним з таких є метод перевернутого навчання. При використанні цього методу під час викладання курсу «Алгебри і початків аналізу» на профільному рівні, передбачається підвищення якості знань.

Апробація результатів роботи. Методики перевернутого навчання під час вивчення курсу «Алгебри і початків аналізу» була використана у педагогічному експерименті з учнями 11 класу, для перевірки її ефективності.

Основні положення та результати кваліфікаційної роботи пройшли апробацію на науково практичних конференціях:

- Всеукраїнська науково-практична конференція «Концептуальні шляхи розвитку освіти та педагогічної науки» (2022 р);
- Магістерські студії. Альманах. Випуск 22. (2022 р).

Згідно доповідей на конференції опубліковано тези: «Використання методу перевернутого навчання під час вивчення алгебри та початків аналізу на профільному рівні» та «Розв’язування систем рівнянь у курсі алгебри і початків аналізу профільного рівня за допомогою онлайн платформи Geogebra».

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи вивчення "алгебри і початків аналізу" у старшій школі на профільному рівні

1.1 Аналіз математичної, психолого – педагогічної літератури, шкільної практики з проблеми дослідження

Основною літературою для вчителя для викладання будь-якого предмету якісно є методична література. Для збагачення вчителя новими знаннями та гарними ідеями багато вчених пропонують свої дослідження та праці. Не тільки стовпи методики навчання математики, як Бевз Г.П., Слєпкань З.І. і Моторіна В.Г.[5, 28, 38], але і молоді вчені збагачують бібліотеку методичних рекомендацій.

Завдяки Бурда М.І., Васильєва Д.В., Волошена В.В., Глобін О.І. Була створена чудова методична рекомендація «Навчання математики у старшій школі на профільному рівні» у яких висвітлено цікаві теми для вчителів математики[7]. Боровик В. Н., Вивальнюе Л. М., Муряч М. М., Соколенко О. С., Вивальнюк Л. М., Мурач М. М., Соколенко О. І. Розробили навчальні посібники для учнів які вивчають математику на профільному рівні[6, 8]. Зіненко І. М. написав роботу з теми «Особливості вивчення математики і старшій профільній школі за умови впровадження компетентнісного підходу» для полегшення роботи вчителів [11]. Кухарєв О. С. писав про ретроспективний аналіз вивчення початків аналізу в старшій школі[20]. Романенко Л., Малишев В., Липова Л., Лукашенко Т. Розгляули проблеми профільного навчання у своїй праці «Профільне навчання: теорія і практика, досвід, проблеми, перспективи»[35].

Розділ алгебри і початків аналізу, навіть на рівні стандарт, вимагає у учнів гарних математичних знань, та міцного понятійного апарату. Без бази наробленої за 9 років навчання, учням буде складно зрозуміти матеріал. Завдання вчителя допомогти учням впоратись з навантаженням, але у такий непростий час як цей багато уроків проходить у дистанційному режимі. Тому надійним обов’язки у подолані складнощів світу математики бере на себе підручник. Зазначемо, що такі видатні педагоги та науковці, як: Мерзляк А.Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С., Істер О. С., Єргіна О. В., Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. та інщі, які створили чудові підручники у яких добре систематизований матеріал, висвітлені задачі які розташовані від простих до складних, виокремлені аксіоми, теореми, та означення. Є, що не менш важливо для учнів які навчаються у профільній школі, чіткі доведення теорем з демонстративними задачами [2 - 4, 13 - 15, 17, 21 - 24, 30, 31].

У допомогу вчителеві окрім підручників стане в нагоді методичні матеріали розроблені Коношко І. І., у яких висвітлені завдання для підготовки до контрольних робіт [18].

1.2 Мета та завдання профільного навчання математики. Загальна характеристика профілів

«**Профільне навчання** – вид диференціації й індивідуалізації навчання, що дає змогу за рахунок змін у структурі, змісті й організації освітнього процесу повніше враховувати інтереси, нахили і здібності учнів, їх можливості, створювати умови для навчання старшокласників відповідно до їхніх освітніх і професійних інтересів і намірів щодо соціального і професійного самовизначення» [12].

«**Профіль навчання** – це спосіб організації диференційованого навчання, який передбачає розширене, поглиблене і професійно зорієнтоване вивчення циклу споріднених предметів» [12].

Мета навчання математики на профільному рівні: забезпечити міцні математичні знання, уміння і навички які учень буде використовувати у повсякденному житті і майбутній професії; забезпечити міцний плацдарм для вивчення інших шкільних предметів та продовження навчання у вищих навчальних закладах за спеціальністю математичного спрямування.

Досягнення мети забезпечується виконанням таких завдань:

- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи вивчення математики, її роль у пізнанні навколишнього світу, розуміння, що математичні знання є невід'ємною складовою життя людини;
- оволодіння мовою математики, системою математичних знань, навичками та уміннями, які використовуються у повсякденному житті та майбутній професії, яких буде достатньо для оволодіння знаннями з інших галузей;
- інтелектуальний розвиток особистості – розвиток логічного мислення та інтуїції учнів, пам'яті, уваги, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури;
- формування позитивних рис особистості, таких як: ініціативність, творчість, пізнавальна самостійність, потреба в самоосвіті, здатність адаптуватися до умов, що змінюються;
- формування життєвих компетентностей учня – позитивних рис характеру (наполегливості, волі, культури думки і поведінки, обґрунтованості суджень, відповідальності за доручену справу тощо);
- формування духовних цінностей особистості;
- виховання національної самосвідомості, поваги до національної культури і традицій України [29].

У профільному навчанні існують такі основні напрями профілізації:

Суспільно–гуманітарний він має такі навчальні профілі: філологічний; історико – правовий; економічний; юридичний, та інші.

Природничо–математичний вміщає у собі фізико – математичний, хіміко – біологічний, географічний, медичний, екологічний та інші профілі.

Технологічний складається з таких профілів: інформатика; виробничі технології, проектування та конструювання; менеджмент; побутове обслуговування; агро – технологічний.

Художньо–естетичний напрям складається з музичного, образотворчого, хореографічного, театрального, мистецтвознавчого, та інших профілів.

Спортивний профіль має у собі атлетику, гімнастику, плавання, спортивні ігри, туризм та інші.

1.3 Особливості побудови шкільного курсу алгебри і початків аналізу старшої школи, у класах різного профілю спрямування

Курс алгебри і початків аналізу у старшій школі вивчається на рівні стандарту для соціально-гуманітарного, художньо естетичного, технологічного, та спортивного профілів. Та на профільному рівні для природничо-математичного профілю.

Різниця вивчення математики рівня стандарту у кожному з вищезазначених профілів полягає у сфері застосуванні задач профільного спрямування.

Курс алгебри і початків аналізу для класів різних профілів на рівні стандарт.

Курс, який використовують для профілів де математика вивчається на рівні стандарт, у першу чергу має сприяти встановленню гуманітарної культури, при цьому математика виступає як форма опису навколишнього світу. Курс повинен формуватись на можливостях учнів до образного мислення.

У класах філологічного профілю вивчається інтегрований курс, у якому знижено рівень строгості обґрунтування тверджень. Велика кількість тверджень вивчається без доведення на основі прикладів та наочних ілюстрацій.

Також більшість аксіом, понять та формул вводиться на інтуїтивній основі. Більшість уваги приділяється на формування категорій та методів математики, усвідомлення яке твердження треба доводити, а яке приймається без доведення. Проте, не варто повністю відмовлятись від доведення тверджень, бо це зменшує можливості школярів до формування логічної культури.

Наведемо приклади вивчення деяких тем з курсу алгебри і початків аналізу.

Тема «Функції, їх властивості та графіки», однією з цілей вивчення даної теми є сприяння розвитку графічної культури учня. При вивченні теми необхідно сконцентрувати увагу на формуванні вмінь читати графіки, визначати відповідність графіка виду функції[36].

При вивченні теми «Тригонометричні функції» необхідно сформувати вміння: читати графіки функцій; візуально відрізняти графіки $y = \sin x$ від графіку $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ від графіку $y = \operatorname{ctg} x$; використовуючи раніше сформовані знання з теми «Геометричні перетворення графіків функцій» виконувати побудови графіків функцій виду, наприклад: $y = -\sin x$, $y = 3cosx$, $y = 2 + tgx$, $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Для різних профілів де математика вивчається на рівні стандарт доцільно використовувати різні форми практичних завдань з математики, наприклад:

- для класів суспільно – гуманітарного профілю – це написання есе, казки, віршів з заданої теми;

- для технологічного профілю – складання економічних або правових задач, складання графіків на швидкість росту рослин або на зміну ціни на прилад з покращенням обслуговуючої техніки;
- у класах художньо – естетичного профілю – складання графіків залежності ноти від частоти коливань звуку, написання театральної постановки головні герої у якій вчені – математики,або алгебраїчні формули;
- для класів спортивного профілю – складання задач на побудову графіків успішності того чи іншого спортсмена.

Додамо також, що вивчення математики у школах спортивного профілю між учнями є непопулярною. Часто у таких школах низький рівень математичних знань саме через незаінтересованість учнів у вивченні математики.

Пропонуємо використовувати різні цікаві факти із спортивного життя, щоб привабити до навчання. Наприклад, під час вивчення теми математична статистика можна проаналізувати низку видів спорту, таких як: футбол, теніс, підняття штанги, стрибки у висоту або взяти за основу програму щоденних тренувань. Розглянувши та виокремивши основні моменти, можна побачити що існує певний статистичний метод, який допомагає прогнозувати найкращі шляхи для досягнення результату.

Підсумувавши усе вищезазначене, зробимо висновок, що якщо з’єднати математику з майбутньою професією учня, та показати прямий зв’язок між ними, можна збільшити зацікавленість до предмету та навчання загалом[33].

Курс алгебри і початків аналізу для класів з профільним вивченням математики.

Основним завданням навчання мате тематики є підвищення рівня математичної культури, яка необхідна для продовження навчання у вишах и у повсякденному житті. Для виявлення та розвитку математичних цінностей, формування інтересу до математики та підготовки до навчання у виші, доповнюються основні завдання вивчення математики.

Курс алгебри і початків аналізу на профільному рівня відрізняється не тільки обсягом і переліком тем, але і реалізацією принципу моделювання професійної діяльності. Високий теоретичний рівень навчального матеріалу є ще однією відмінністю, зокрема, при вивчені усіх видів рівнянь, нерівностей та їх систем почергово виокремлюють основні поняття: корінь, розв’язок, рівносильність, наслідок, втрата або поява сторонніх коренів. Вводяться елементи теорії множин. Ці елементи використовуються для збагачення та осучаснення математичної мови учня, розвитку мислення[36].

1.4 Психологічний супровід профільного навчання

Психологічний супровід профільного навчання передбачає такі завдання:

- моніторинг та своєчасну корекцію професійно можливих нерівномірностей розвитку учнів;
- поглиблення профорієнтації учнів;
- психологічну діагностику під час добору учнів у профільні класи.

Враховуючи яким є навчальний заклад, психологічний супровід вирішує такі завдання:

- Надання допомоги старшокласникам, у яких є труднощі у навчанні, професійному самовизначенні, плануванні кар'єри, спілкуванні чи психічному стані;
- Формування у старшокласників таких навичок, як: самопізнання, самоаналіз, саморефлексія, готовність до професійної самореалізації у сучасних соціально – економічних умовах;
- Надання допомоги педагогу через форму «співпраці» у вирішенні різних шкільних проблем і професійних завдань самого педагога.

Психолого-педагогічний супровід процесів професійного самовизначення учнів обов'язково включає у себе і до профільну підготовку. З цією метою у навчальних закладах можуть передбачатися посади психологів, методистів з професійної роботи.

Існують такі форми психологічного супроводу:

1. профорієнтаційна діагностика, яка спрямована на виявлення інтересів, нахилів, здібностей та інших важливих якостей для майбутнього. Профорієнтаційна діагностичні методики допомагають оцінити рівень готовності до освітніх і професійних перспектив;
2. профконсультативна діяльність, що має три етапи:
   - підготовчий;
   - основний;
   - формулюючий;

і покладена допомогти учням на основі діагностичних даних визначитися із основними та резервним планом здобуття обраної професії, вивчити вимоги середовища яке виникає навколо професії та співвіднести їх із власними психофізіологічними показниками, скоригувати особистісні якості, уміння та прагнення, знайти альтернативні варіанти професійного вибору. Така форма передбачає корекційно-розвивальні тренінги, інформаційні бесіди, семінари, професіографічні екскурсії;

3. профінформаційна робота використовується в основному під час роботи з учнями 9-х класів загальноосвітніх навчальних закладів, і є обов'язковою перед професійним вибором. Результати діагностики, проведеної в рамках профінформаційної роботи, використовується при комплектуванні (формуванні) груп учнів для здійснення професійних проб у навчальному закладі[34].

1.5 Критерії підбору змісту матеріалу алгебри і початків аналізу для класів різної профільної спрямованості

Для підвищення якості результативності навчання як на рівні стандарту, так і на профільному рівні бажано постійно проводити диференційований підхід до підбору завдань за такими критеріями:

- науковість;
- складність проведення розрахункових операцій;
- кількісно-якісний підхід до використання попередньо вивчених тем, які використовуються для розв'язання задач;
- задачі повинні бути чітко сформульовані, та посильні для розуміння.

Задачі для **рівня стандарту** повинні не повинні містити складних формулювань. Розв'язок завдань не містить більше 5-6 дій. Рідко використовуються задачі на доведення. Значна кількість теорем вивчається без доведення,тим самим зменшуючи навантаження на учнів, але тим самим знижується рівень розвитку логічного мислення.

При вивченні окремих тем розглядаються задачі на відшліфування знань з окремих тем. Такі задачі є вузькопрофільними та подібними. Для розширення математичного апарату пропануємо використовувати задачі з більш розширеним діапазоном профілю, щоб учні бачили зв’язок між різними темами математики.

На нашу думку, доцільно буде використовувати задачі пов’язані з майбутньою професією учнів тим самим збільшивши їх зацікавленість предметом. Це може допомогти підвищити рівень знань учнів.

Для класів у яких математика вивчається на **профільному рівні**, задачі стають більш різноманітні у плані використання різного роду теорем, аксіом та означень. Теореми вивчаються обов’язково з доведенням, так учні розуміють чому виникла саме ця теорема та якими шляхами її довели, тим самим полегшуючи собі шлях у розумінні де та коли краще використати ту чи іншу теорему.

Оскільки, на профільному рівні кількість годин відведення на теми більша, отже обсяг завдань які можна розглянути теж більше. Таким чином розв’язавши велику кількість однотипних завдань виявити даний ти у більш складному завданні не викличе труднощів.

Як додаткове джерело знань доречно використовувати як для уроків у профільних класах, так і для вивчення математики на рівні стандарт задачі відомих математиків. Тим самим можна зацікавити учнів. Такими задачами можуть бути три знамениті задачі математик:

- задача на подвоєння куба;
- задача на поділ кута на три рівні сатини;
- задача про квадратуру круга[41].

1.6 Характеристика провідних змістових ліній алгебри і початків аналізу

Виділяють такі шість провідних змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу:

1. Числа та дії над ними;
2. Тотожні перетворення виразів;
3. Рівняння та нерівності;
4. Функції, їх властивості та графіки;
5. Елементи теорії множин. Комбінаторика;
6. Теорія ймовірностей та математична статистика.

Розглянемо кожну із змістових ліній окремо.

Числа та дії над ними. Число є основним поняттям у математиці, яке утворилось завдяки тривалому історичному розвитку. Виникнення і формування поняття відбувалось під час зародження і розвитку математики. Діяльність людини, та потреби математики визначили розвиток поняття числа.

Теоретичні основи поділяються на алгебраїчні та арифметичні. Розуміння цих основ необхідне учню для засвоєння теоретичного матеріалу на високому рівні, який складає змістову лінію, та методам і способам розв'язування задач і вправ з відповідних тем [39].

Шкільний курс алгебри і початків аналізу у 10-11 класі наскрізь пронизаний поняттям числа та діями над ним. Число є фундаментальним поняттям математики. Математичні дії є основними операторами проведення обчислень.

Впродовж вивчення курсу математики ми знайомимо учнів з різними видами чисел. Таким чином розпочинаємо процес формування у учнів поняття числа. Починаємо вивчення з натуральних чисел.

Вивчивши число нуль, та числа протилежні натуральним (від'ємні числа) отримуємо множину цілих чисел. Наступним кроком є введення поняття дробового числа, що розширює попередню множину і формує множину раціональних чисел. При вивчені теми « Квадратні корені» вводимо поняття ірраціонального числа, та остаточно формуємо множину дійсних чисел. У курсі алгебри і початків аналізу профільного рівня вводиться поняття комплексного числа, тим самим завершуючи формування поняття про число (Рисунок.1.1).

Рисунок 1.1

Тотожні перетворення виразів. Вивчення їх пронизує весь шкільний курс, проте основу для формування навичок виконання тотожних перетворень закладаються ще у 5-6 класах. Рівень оперативних умінь у учнів залишається такий самий, але теорія стає складнішою. Вводяться відповідні терміни: тотожно рівні вирази; тотожні перетворення виразів, тотожність.

Увагу приділяють тому факту, що основою тотожніх перетворень є властивості дій над числами, і з умовою на це розглядаються перетворення алгебраїчних виразів, які вже відомі учням (зведення подібних доданків, розкриття дужок)[40].

Рівняння та нерівності. Вивчення рівнянь та нерівностей починається ще у молодшій школі. У старшій школі розширюють класи рівнянь, нерівностей та їх систем, використовують інші методи розв’язування та шукають нові сфери застосування. Використання узагальнення понять дозволяє упорядкувати розкриття даної лінії. Загальні поняття та методи обчислень спираються на основні логічні поняття: невідоме, рівність, рівносильність, які розкриваються у лінії рівнянь та нерівностей.

Основні ступені вивчення:

- незалежне вивчення основних типів рівнянь та систем рівнянь;
- розширення класів рівнянь та систем рівнянь;
- формування прийомів, які допомагають при розв’язуванні і аналізу рівнянь та їх систем.

У змістовій лінії розглядаються питання формування понять рівняння і нерівності, методів їх розв’язування, взаємозв’язки лінії рівнянь та нерівностей з іншими змістовими лініями шкільного курсу математики.

У курсі алгебри і початків аналізу старшої школи перша тема у 10 класі «Функції, многочлени, рівняння і нерівності» розпочинає вивчення змістової лінії рівняння та нерівності, далі є ця лінія наскрізь пронизує курс алгебри і початків аналізу старшої школи. Розглянувши зміст навчального матеріалу виокремимо такі основні розділи: найпростіші рівняння з параметрами, нерівності, метод інтервалів. З огляду на це можна зрозуміти що учень повинен вміти після вивчення даної теми:

- виконує ділення многочленів з остачею, вміє користуватись теоремою Безу при розв'язуванні рівнянь та нерівностей;
- розв’язує найпростіші рівняння з параметрами;
- розв’язує найпростіші нерівності за допомогою методу інтервалів;
- користується методом математичної індукції для доведення тверджень[29].

У темі «Степенева функція», яка вивчається у 10 класі, учні вивчають такі розділи: ірраціональні рівняння, ірраціональні нерівності, нерівності з параметрами. Після вивчення учень повинен вміти: розв’язувати ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами; застосовувати властивості функцій до розв’язування ірраціональних рівнянь і нерівностей.

Ще однією темою є тема «Тригонометричні рівняння та нерівності». Вона вивчається після теми «Тригонометричні функції» у 10 класі. Оволодівши основними поняттями та підсиливши свій математичний апарат учня знайомлять з тригонометричними рівняннями і тригонометричними нерівностями. Розглядаючи: Обернені тригонометричні функції: означення, властивості, графіки; найпростіші тригонометричні рівняння; основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь; тригонометричні нерівності; тригонометричні рівняння і нерівності з параметрами; рівняння і нерівності, які містять обернені тригонометричні функції[29].

Враховуючи це виокремимо що учні повинні вміти і знати після вивчення теми:

- формулює означення обернених тригонометричних функцій; обґрунтовує формули коренів тригонометричних рівнянь $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a;$
- розв’язує тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами[29].

Наступною темою де безпосередньо вивчаються рівняння та нерівності є остання тема у 11 класі – «Рівняння, нерівності та їх системи». При вивчені даної теми розглядаються такі методи, як:

- методи розв’язування рівнянь з однією змінною (рівносильні перетворення, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо);
- методи розв’язування нерівностей з однією змінною (рівносильні перетворення, метод інтервалів, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо);
- системи рівнянь та методи їх розв’язування (рівносильні перетворення та використання рівнянь-наслідків, заміна змінної, застосування властивостей функцій тощо)[29].

Учень у зв’язку з завершенням навчання вже володіє знаннями у повній мірі з теми рівняння, нерівності та їх системи, а саме:

- розрізняє види рівнянь та їх систем, нерівностей та їх систем, методи розв’язування рівнянь і нерівностей та їх систем;
- обґрунтовує рівносильність виконаних перетворень;
- застосовує загальні методи та прийоми до розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем;

- розв’язує рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей з параметрами;
- за описами реальних ситуацій;
- розв’язує задачі, моделями яких є відомі рівняння або системи рівнянь[29].

Наступна змістова лінія **функції, їх властивості та графіки.** Під час вивчення тем у учнів формується система функціональних понять, уміння використовувати функції та їх графіки, для характеристики залежностей між величинами.

Як і змістова лінія рівнянь, нерівностей та їх систем, лінія функцій, їх властивостей та графіків починається вивчатись з перших уроків алгебри у 10 класі. Першою темою є «Функції, многочлени, рівняння та нерівності» де значну частину матеріалу займає змістова лінія функції.

Виокремимо такі розділи у даній темі:

- числові функції;
- способи задання функцій;
- область визначення і множина значень функції;
- графік функції;
- парність і непарність функцій, найбільше та найменше значення функції;
- властивості графіків парних і непарних функцій;
- побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій;
- оборотні функції;
- взаємно обернені функції;
- графік оберненої функції[29].

Зважаючи на те які розділи треба пройти розглянемо що має вміти учень після завершення вивчення даної теми:

- зображує на діаграмах або числовій прямій об’єднання і переріз множин та ілюструє поняття підмножини;
- формулює означення підмножини, об’єднання і перерізу множин;
- знаходить об’єднання і переріз числових множин;
- користується різними способами задання функцій;
- формулює означення числової функції, зростаючої та спадної функцій, парної та непарної функцій;
- знаходить область визначення функцій, значення функцій при заданих значеннях аргументу і значення аргументу, за яких функція набуває даного значення;
- встановлює за графіком функції її властивості;
- виконує і пояснює перетворення графіків функцій; досліджує функції і використовує одержані результати при побудові графіків функцій[29].

Наступною темою яка вивчається у 10 класі є «Степенева функція», на її вивчення відводиться тридцять годин навчального часу. Вивчаючи цю тему учні знайомляться з поняттям кореня n-го степеня, арифметичним квадратним коренем n-го степеня, властивостями арифметичного квадратного кореня, перетворення виразів з коренями n-го степеня. Після вивчення цих розділів переходять до вивчення поняття функції $y = \sqrt[n]{x}$ та її графіків. А згодом і до таких розділів: степінь з раціональним показником; його властивості; перетворення виразів, які містять степінь з раціональним показником; степенева функція, її властивості та графік.

Вивчивши цю тему учень вміє і знає, як:

- формулювати означення кореня n-го степеня, арифметичного кореня n-го степеня, степеня з раціональним показником, властивості коренів та степеня з раціональним показником;
- обчислювати, оцінювати та порівнювати значення виразів, які містять корені та степені з раціональними показниками;
- зображувати графік степеневої функції[29].

Однією із найскладніших тем курсу алгебри і початків аналізу є тема «Тригонометричні функції». У даній темі велика кількість різних розділів, які потребують уваги та міцних знань з минулих тем курсу математики. Тригонометричні функції пов’язані між собою багатьма співвідношеннями. Поділимо їх на три групи:

1. Перша група формул встановлює зв’язок між координатами точок кола.
2. Друга група у змісті має симетрію і періодичність руху точки по колу, та складається із формул зведення
3. Третя група тотожностей являє собою повороти точок навколо центра кола[10].

Виокремимо розділи, які вивчаються у даній темі:

- радіанне вимірювання кутів;
- синус, косинус, тангенс, котангенс кута;
- тригонометричні функції числового аргументу;
- періодичність функцій;
- властивості та графіки тригонометричних функцій;
- основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу;
- формули зведення;

- тригонометричні формули: формули додавання, формули подвійного аргументу, формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток, формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, формули пониження степеня, формули потрійного аргументу, формули половинного аргументу;
- вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу[29].

Як ми бачимо тема тригонометричних функцій охоплюю велику кількість теоретичного матеріалу, особливо вивчаючи цю тему на профільному рівні математичний апарат повинен бути сформований на високому рівні. Пройшовши цю тему учень:

- виконує перехід від радіанної міри кута до градусної і навпаки;
- встановлює відповідність між дійсними числами і точками на одиничному колі;
- обчислює значення тригонометричних виразів за допомогою тотожних перетворень;
- формулює означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута числового аргументу;
- властивості тригонометричних функцій; властивості періодичних функцій; будує графіки періодичних функцій;
- ілюструє властивості періодичних функцій за допомогою графіків;
- перетворює тригонометричні вирази[29].

Останньою темою є «Показникова та логарифмічна функції», яка узагальнює змістову лінію функції. Оскільки це заключна частина вивчення змістової лінії старшої школи, учень у повній мірі володіє матеріалом. Пройшовши такі розділи з теми, як степінь із дійсним показником; показникова функція; логарифми та їх властивості; логарифмічна функція; показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами; похідні показникової та логарифмічної функцій. Можемо зазначити які результати навчальної діяльності очікуються:

- формулює означення показникової і логарифмічної функцій та їх властивості;
- формулює означення логарифма та властивості логарифмів;
- будує графіки показникових і логарифмічних функцій;
- перетворює вирази, які містять логарифми;
- знаходить похідні показникових, логарифмічних, степеневих функцій і застосовує їх до дослідження цих класів функцій;
- розв’язує показникові та логарифмічні рівняння і нерівності та їх системи, зокрема з параметрами
- застосовує показникову та логарифмічну функції до розв’язування прикладних задачах[29].

І останніми змістовими лініями курсу алгебри і початків аналізу є **елементи теорії множин, комбінаторика, теорія ймовірностей та математична статистика**, які об’єднанні у одній темі «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей».

Ці лінії є актуальними, оскільки, сучасні тенденції швидко змінюють математичну освіту.

Імовірнісно-статистична лінія відіграє велику роль у мисленевому розвитку учнів. В основному формується комбінаторне та ймовірнісно-статистичне мислення, а також значною мірою розвивається нестандартне мислення у незвичайних умовах. Також, ця лінія вчить правильно групувати та використовувати інформацію. Зауважимо, що ця лінія розширює математичну мову і збагачує запас математичних моделей, завдяки яким учні описують процеси і явища.

Змістова лінія складається з таких складових:

- комбінаторика;
- теорія ймовірностей;
- математична статистика.

Ці види пов’язані і створені для навчання учнів аналізувати дані.

Під час вивчення комбінаторики вводяться нові поняття: розміщення, розміщення з повторенням, комбінації.

Зауважимо, що щоб набуті знання мали практичну спрямованість необхідно при вивченні цієї змістової лінії використовувати статичні інтерпретації понять і фактів[1].

Розглянемо тему «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей», яка вивчається у 11 класі, на неї відводиться 30 годин, і входять такі розділи: елементи комбінаторики. Перестановки, розміщення, комбінації; аксіоми теорії ймовірностей; операції над подіями; основні наслідки з аксіом теорії ймовірностей; незалежні події; умовна ймовірність; випадкова величина та її математичне сподівання (у досліді зі скінченною множиною елементарних наслідків).

Врахувавши це визначимо що повинен вміти і знати учень після вивчення даної теми:

- обчислює ймовірність події, користуючись аксіомами теорії ймовірностей, наслідками з них, операціями над подіями, поняттям умовної ймовірності, незалежних подій, комбінаторними схемами, математичне сподівання випадкової величини;

- пояснює зміст понять умовна ймовірність, незалежні події, випадкова величина;

[РОЗДІЛ 2. Методика вивчення окремих тем курсу алгебри і початків аналізу

У курсі алгебри і початків аналізу як ми зазначили раніше продовжується вивчення і розвиток основних змістових ліній. Також відбувається завершення формування аналітичного апарату, який використовується для вивчення предметів природничо-математичного циклу. Завершенням вчення про функцію у шкільному курсі виступають початки диференційованого та інтегрального числення. Поняття про ці методи дають значні можливості для використання математики в різних галузях науки, формують науковий світогляд[38].

Вивчення алгебри і початків аналізу на профільному рівні є складним для учня, оскільки, велика кількість інформації подається більш розгорнуто. За для збільшення ефективності процесу навчання ми пропонуємо використовувати метод перевернутого навчання. Сутність методу перевернутого навчання, у тому, щоб допомогти дітям краще розуміти і усвідомлювати матеріал. Він полягає у тому, що вчитель завчасно у якості домашнього завдання задає учням розібрати і вивчити той чи інший матеріал, а на уроках роз'яснює незрозумілі моменти та відпрацьовує розуміння матеріалу на прикладах та задачах.

Цю тему також вивчали такі вчені, як Корнієнко Т. Л., Фіготіна В. І. створили працю яка допоможе вчителям у розробці уроків у курсі «алгебри і початків аналізу [19]. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. у своїй праці «Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу» [25]. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. розглянули різні методи розв'язування алгебраїчних задач[9].

2.1 Функція

2.1.1 Розширення відомостей про функції і множини

На початку вивчення теми доречно пригадати поняття «множини», з яким учні знайомились як у курсі геометрії, так і при вивченні інших дисциплін. Слід наголосити на тому, що множина є первісним загально математичним, неозначувальним поняттям. Вона використовується при вивчені таких тем, як функція, рівняння, нерівності та їх системи. Окреслити як позначаються: множини, елементи множини. Зазначити, що для порожньої множини є окремий символ $\emptyset$. Також нагадати учням як виглядають позначки належності елементів до множини, та не належності.

Надалі вчитель задає на самостійне вивчення додому поняття підмножини його означення, та позначення; поняття операцій над множинами; означити та ввести відповідну символіку для операцій.

Переходячи безпосередньо до вивчення теми слід пригадати визначення з яким учні знайомились ще у 8 класі, це загальне означення поняття функції – залежність однієї змінної від іншої, у якій кожному значення незалежної змінної відповідає одне і тільки одне значення залежної змінної. Обов’язково треба згадати що таке область значень та область визначення функції, які є способи задання функції.

На цьому етапі вводиться означення числової функції – числовою функцією з областю визначення X називають залежність, за якої кожному значенню числа x з множини X відповідає єдине число y.

На уроці вчителю необхідно спеціально зосередьте увагу на функціях $y = [x]$, $y = \{x\}$ та їх графіки. Завдяки їм буде зручно показати приклади розривних і періодичних $(y = \{x\})$ функцій, які визначені на множині дійсних чисел. Наступним кроком пригадайте означення зростаючої і спадної функції. Учні наводять приклади таких функцій, і на закріплення доречно розв'язати завдання на доведення властивостей спадання і зростання функцій[38].

Наступним що вчитель пропонує самостійно вивчити буде означення найбільшого і найменшого значення функції, означаються позначки. На уроці ж вчитель розглядає це поняття на таких функціях: $f(x) = \sqrt{x}$ на множині $M = [0; 4]$, та $y(x) = |x|$ на множині $M = [0; 4]$. На графіках добре видно найбільше і найменше значення функцій на цих проміжках[22].

У тому ж самостійному вивчені учні знайомляться з поняттям парної та непарної функції. Просить учнів скласти правила орієнтири які потім перевіряє і доповнює на кроці. На уроці обов'язково вчитель повинен зазначити, що таку властивість мають лише ті функції область визначення яких є множина чисел, яка симетрична відносно початку координат (для будь-якого х з області визначення, число х також належить області визначення).

Зазначимо умови, які виконуються для парних і непарних функцій:

Для парних: $f(-x) = f(x)$;

Для непарних: $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого х з області визначення.

Учні самостійно формулюють алгоритм дослідження функції на парність та непарність, а вчитель на уроці перевіряє правильність та корегує:

1. Перевірте чи є область визначення функції множиною, симетричною відносно початку координат;

2. Перевірте чи виконується рівність $f(-x) = f(x)(f(-x) = -f(x))$.

Якщо виконується перша властивість, отже функція парна, бо парні функції симетричні відносно осі у. Якщо виконується друга – функція не парна, непарна функція симетрична відносно початку координат. Якщо не виконується жодна з властивостей, отже функція є ні парною ні непарною. У курсі алгебри і початків аналізу доречно буде показати доведення чому саме ці твердження відповідають парності і непарності функції. Учні чудово наводять приклади парних ($y = x^2, y = = x^4$) і непарних ($y = x, y = x^3$)функкій.

На уроці вчитель показує і довеодить парність і непарність вже відомих учням функцій $y = ax + b, y = \frac{k}{x}, y = x^2$, та інших. Також розглянути біль складні функції, у цьому випадку вчитель наполягає на перевірці виконання обох вимог алгоритму[38].

Показує учням приклади дослідження функцій на парність і непарність, відпрацьовує навички.

Вчитель звертає увагу учнів на те, що усі функції виду $y = (|x|)$ є парними.

Розширюючи відомості про функцію доречним буде запровадження поняття періодичної функції щоб пізніше звертатись до неї під час вивчення тригонометричних функцій. До поняття періодичної функції приводять періодичні процеси, у яких стан змінних повторюється з деякою частотою. Це може бути обертальні рухи, амплітуда коливань маятника, електромагнітні коливання, і інше.

Вчитель пропонує учням вдома самостійно ввести поняття такої функції за допомогою вже згадувану раніше функцію $y = \{x\}$.

Розглянувши графік функції (рис. 2.1.1.1) учні можуть визначити, що якщо додати до будь-якого значення аргументу х числа Т=1, то значення функції не зміниться. Навіть якщо додати число nТ, де n – ціле число. Тоді кажуть, що функція $y = \{x\}$ періодична, і її найменший додатній період Т=1(Рисунок 2.1)[38].

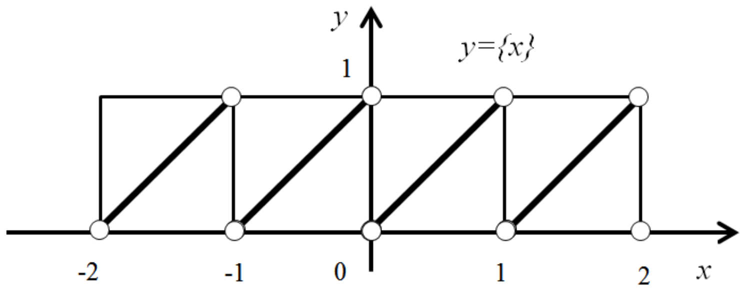

Рисунок 2.1

Наступним кроком можна задати самостійно дати означення області визначення функції. Функцією $y = f(x)$ з областю визначення D називають періодичною з періодом $T > 0$, якщо для $\forall x$ з області визначення $f x + T \; i \; x - T$також належать областы визначення і виконується рівність $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, тобто значення функції не змінюється [38].

Далі йде розширення знань про побудову графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

Доречним є запропонувати спробувати побудувати графік функції $y = \; f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$. Якщо $k > 0$, то точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ належить графіку функції $y = f(x)$ Бачимо, що при $x = \frac{x_0}{k}$ виконується: $f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0$.

Тож, можемо зробити висновок, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$графіка функції $y =$

$f(kx)$. Так само і кожна точка $(x_1; y_1)$ що належить функції $y = f(kx)$ відповідає єдиній точці $(kx_1; y_1)$ функції $y = f(x)$.

Отже, графік функції $y = f(kx)$ де $k > 0$, можна отримати замінивши кожну точку графіку функції $y = f(x)$ на точку з тою самою ординатою та абсцисою, поділеною на k.

Обов'язково треба зазначити, що графік функції $y = f(kx)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті:

- стискання в k разів, до осі ординат, якщо $k > 0$;
- розтягнення в $\frac{1}{k}$ раз від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.

Також покажемо як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $f(x)$.

Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$, належить графіку функції $y = f(-x)$. І справді, $f\big(-(-x_0)\big) = f(x_0) = y_0$.

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $(-x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(-x)$. За тим самим принципом, кожна точка$(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(-x)$ буде відповідна єдиній точці $(-x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$.

Розповівши це підіб'ємо підсумки, графік функції $y = f(-x)$ можна отримати відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат. Таке перетворення графіка функції називають симетрією відносно осі ординат.

Таким чином учням стає зрозуміло, що правило побудови графіка функції $y = f(xk)$, для $k < 0$, є таким самим, як і для $k > 0$.(мерзляк 10 кл)

2.1.2 Степенева функція

Відповідно до програми тема «степенева функція» вивчається у десятому класі. На дану тему у профільній школі відводиться тридцять годин[29].

Запропонуйте учням спочатку розглядається яку функцію називають степеневою з натуральним показником – функція виду $y = x^n$, де $n \epsilon \mathbb{N}$ називають функцією з натуральним показником. Далі пояснюємо, що оскільки вираз $x^n, n \epsilon \mathbb{N}$ має зміст при будь-якому значенні x, то областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел. Зрозуміло, що нуль функції буде єдине число, і воно дорівнює нулю.

На уроці ж доповніть знання розповівши властивості функції $y = x^n, n \epsilon \mathbb{N}$ слід окремо розглянути для парного і непарного n.

1. Якщо $= 2k, k \epsilon \mathbb{N}$. При значені $k = 1$ отримуємо квадратичну функцію, її властивості та графік учням знайомі з восьмого класу.

Оскільки для будь-якого x вираз x^{2k} набуває тільки додатних значень, то область значень буде містити тільки невід’ємні числа.

Зауважимо, що для $\forall\, a \geq 0\ \exists$ таке значення x, що $x^{2k} =$ a. Це означає, що областю значень функції $y = x^n$, де n – парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$;

Якщо x $\neq 0$, то $x^{2k} > 0$

Проміжки $(-\infty; 0) i\ (0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції, $y = x^n, n$ – парне натуральне число. Функція $y = x^n$, де n – парне натуральне число, є парною.

Функція $y = x^n$, де n- парене натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$;.

Отримані властивості допоможуть схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n – парне натуральне число (Рисунок 2.2)

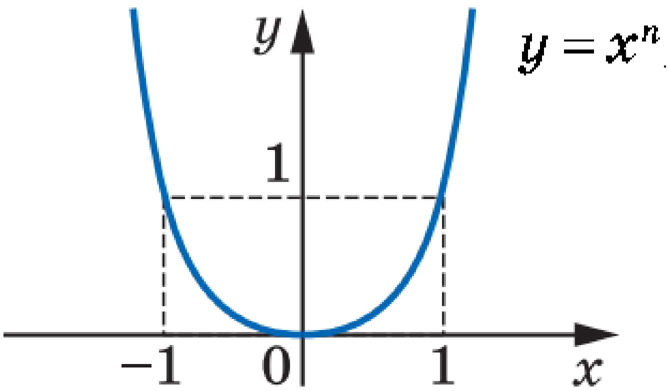

Рисунок 2.2

2. Якщо $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, або k=0 . При значені $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, її властивості та графік вивчались у сьомому класі.

Якщо ж $n = 2k + 1, k\in\mathbb{N}$, то можна показати, що для будь-якого a таке значення x, що $x^{2k+1} = a$. Це означає, що областю значень функції $y = x^n$, де $n -$ непарне натуральне число, є множина дійсних чисел.

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$ і якщо $x > 0$, то$x^{2k+1} > 0$, то проміжки $(-\infty; 0)$ $і$ $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції.

Функція $y = x^n$, де n – непарне натуральне число, є непарною. Бачимо, якщо для будь-якого значення x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Використавши довільні числа x_1 $і$ x_2, де $x_1 < x_2$. використавши властивість числових нерівностей отримуємо ${x_1}^{2k+1} < {x_2}^{2k+1}$.

Отже, функція $y = x^n$, де n – непарне натуральне число є зростаючою.

Схематично зобразити функцію $y = x^n$ з n – не парним натуральним числом, $n > 1$ можна так рисунок 2.3 [22].

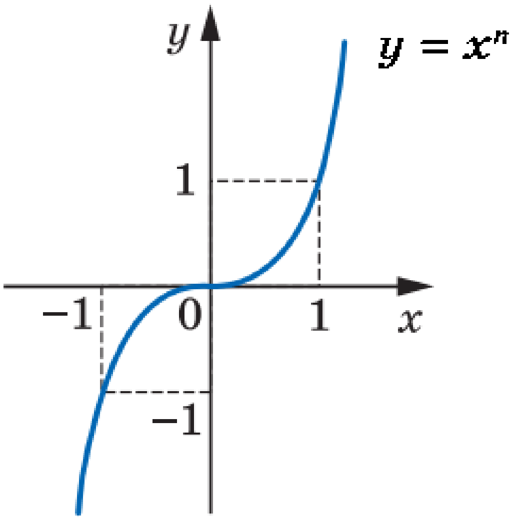

Рисунок 2.3

Запропонуйте учням самостійно скласти таблицю властивостей функції $y = x^n$, при парному і непарному n у вигляді таблиці. Таким чином усі отримані знання з даної теми будуть систематизовані. (Таблиця 2.1)

Властивість	n – парне натуральне число	n – не парне натуральне число
Область визначення функції	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$

Нуль функції	x=0	x=0
Проміжки знакосталості	y>0 на кожному з проміжків $(-\infty; 0)\ i\ (0:\ +\infty)$	y<0 на проміжку $(-\infty; 0)$, y>0 на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання/ спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ зростає на проміжку $[0; +\infty]$	Зростаюча

Таблиця 2.1

2.1.3 Показникова та логарифмічна функціїї

Курс алгебри і початків аналізу націлений навчити учнів розв’язувати трансцендентні рівняння й нерівності та ірраціональні рівняння й нерівності. Чудовим способом допомогти учням є систематизувати рівняння і способи їх розв’язування.

Учні 11 класу більш самостійні і націлені на продуктивне навчання за для складання іспитів, тому, метод перевернутого навчання буде більш ефективний.

На першому уроці вчитель означає учням поняття степеня з дійсним показником та його властивості. Вчитель пояснює учням на прикладі числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π подають у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу 3,1415…

Розглянувши послідовність раціональних чисел 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; … . Зрозуміло, що дання послідовність збігається до числа π. Відповідно до цієї послідовності побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками: $2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}, 2^{3,1415}, \dots$.

Необхідно зауважити, що послідовність степенів зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це саме число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^{π}.

Зауважити, що степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником. Та виписати їх для $x > 0, y > 0$ та для ∀ дійсних $\alpha\ i\ \beta$ [23].

1) $x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$;
2) $x^{\alpha} : x^{\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$;
4) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha}$;
5) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{y^{\beta}}$.

Після запропонуйте розв’язати такі вирази:

Приклад. Знайдіть значення виразу[23]:

а) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}} = 5^{(\sqrt{3}-1)^2} : (5^{-1})^{2\sqrt{3}} = 5^{(\sqrt{3}-1)^2} : (5)^{-2\sqrt{3}} =$

$= 5^{(\sqrt{3}-1)^2-(-2\sqrt{3})} = 5^{(\sqrt{3}-1)^2+2\sqrt{3}} = 5^{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}} = 5^{3+1} = 5^4 =$

$= 625;$

б) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}^{\,2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{6} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8.$

Для самостійного вивчення доречно буде задати дітям яку функцію називають показниковою. А також, вивчити лему яка каже, що якщо $a > 1$ $і$ $x > 0$, то $a^x > 1$; якщо $0 < a < 1$ $і$ $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.

Чудовим способом допомогти учням є систематизувати рівняння і способи їх розв’язування. Попросити визначити при яких значеннях показникові функція буде зростаючою, а при яких спадною. Чи має функція точки екстремуму. Для допомоги запропонуйте учням зобразити на уроці графіки функції для випадків при $a > 1$ (Рисунок 2.4) і $0 < a < 1$(Рисунок 2.5).

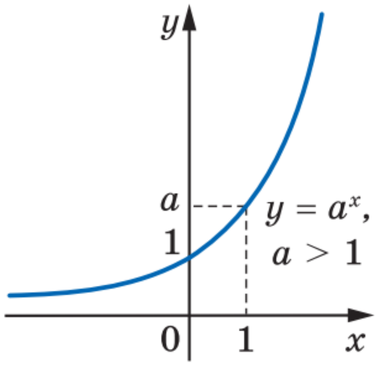

Рисунок 2.4

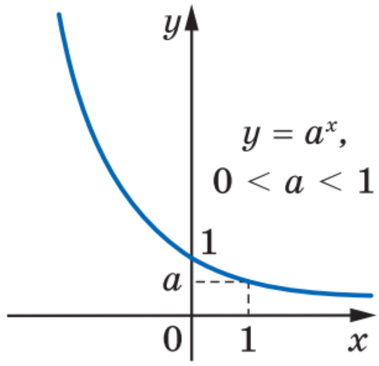

Рисунок 2.5

На уроці для закріплення вивченого матеріалу пропонуємо учням разом зобразити таблицю властивостей функції $y = a^x$, де $a > 0, a \neq 1$. (Таблиця 2.2)

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нуль функції	–
Проміжки	$y > 0$ на $\mathbb{R}$

знакосталості	
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; Якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервнаа
Диференційованість	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \longrightarrow -\infty$; Якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \longrightarrow +\infty$;

Таблиця 2.2

Після цього відпрацюйте приклади на обчислення значення виразу, спрощення виразу, знайти область значень функції, знайти найбільше значення на проміжку, побудувати графік функції, установити графічно кількість коренів рівняння, порівняти значення, розв’яжіть рівняння, дослідити на парність функції, знайти область значень функції. Деякі приклади розглянемо[23].

Спростіть вираз[23].

$$\frac{\left(a^{2\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}=$$

$$=\frac{\left(\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{2}-1^{2}\right)a^{\sqrt{6}}\left(1+a^{\sqrt{6}}+\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{2}\right)}{a^{\sqrt{6}}\left(\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{3}-1\right)}=$$

$$=\frac{\left(\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{2}-1^{2}\right)\left(1+a^{\sqrt{6}}+\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{2}\right)}{\left(\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{3}-1\right)}=$$

$$= \frac{\left(a^{\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+1\right)\left(1+a^{\sqrt{6}}+\left(a^{\sqrt{6}}\right)^2\right)}{\left(a^{\sqrt{6}}-1\right)\left(1+a^{\sqrt{6}}+\left(a^{\sqrt{6}}\right)^2\right)} = a^{\sqrt{6}}+1.$$

Для вивчення теми логарифма та його властивостей необхідно задати учням додому вивчити означенням логарифмом додатного числа b з основою a. Самостійно у якості приклада записати $\log_3 9$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_{25} 5$ у вигляді степеня.

З означення логарифма при $a > 0, a \neq 1\ i\ b > 0$ виписати основну логарифмічну тотожність. Записати чому дорівнює $\log_a 1$ і $\log_a a$, та що означає про логарифмувати число bза основою a.

Зауважте на тому, щоб учні обов’язково записали десятковий логарифм.

На уроці розв’яжіть приклади такого змісту: знайдіть логарифм числа з деякою основою, знайдіть десятковий логарифм числа, розв’яжіть рівняння, обчисліть значення виразу, подайте число у вигляді степеня з основою.

Оскільки учні вивчають математику на профільному рівні приклади наведені нижче розв’язуються усно.

Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

а) 3; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 81; д) $\frac{1}{9}$; е) $\frac{1}{243}$.

Знайдіть десятковий логарифм числа:

а) 1; б)10; в) 1; г) 1000; д) 0,1; е) 0,01.

Обчисліть значення виразу:

а) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; б) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; г) $10^{2+\lg 8}$;

Подайте:

а) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;

б) число -1 у вигляді логарифма з основою 0,4;

в) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

Обчисліть значення виразу:

а) $8^{1-\log_2 3} = 8^{\log_2 2-\log_2 3} = 8^{\log_2 \frac{2}{3}} = 2^{3\log_2 \frac{2}{3}} = 2^{\log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$
$= \frac{8}{27}$;

б) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4} = 7^{\log_7 3^2+\frac{1}{2}\log_7 4} = 7^{\log_7 9+\log_7 \sqrt{4}} = 7^{\log_7 9+\log_7 2} =$

$= 7^{\log_7 18} = 18$;

в) $\lg\left(25^{\log_5 0,8} + 9^{\log_3 0,6}\right) = \lg\left(5^{2\log_5 0,8} + 3^{2\log_3 0,6}\right) =$

$= \lg\left(5^{\log_5 0,8^2} + 3^{\log_3 0,6^2}\right) = \lg\left(5^{\log_5 0,64\cdot 0,36}\right) = \lg(0,64 \cdot 0,36) = \lg\ 1 = 0;$

г) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}} = 3^{3\log_3 5} + 5^{2\log_5 2} + 6^{2\log_6 9} =$

$= 3^{\log_3 5^3} + 5^{\log_5 2^2} + 6^{\log_6 9^2} = 125 + 4 - 81 = 48.$

Обчисліть значення виразу:

а)$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5} = \log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3;$

б)$\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343 = \log_{\frac{2}{3}} \log_{7^2} 7^3 = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\log_7 7\right) =$

$= \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{3}{2} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = -1;$

в)$\log_2 \sin 135^{\circ} = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \log_2 2^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} =$

$= -\frac{1}{2}$;

г)$\log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

У якості домашнього завдання учні повинні визначити формулу логарифма добутку, логарифма частки, логарифма степеня та теорему переходи від однієї основи логарифма до іншого і наслідки з неї.

На самому ж уроці у якості перевірки запропонуйте учням виконати такі завдання самостійно:

Усно. Знайдіть значення виразу:

а) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$;

б) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$;

г) $2 \lg 5 + \frac{1}{2} \lg 16$.

Письмово. Знайдіть х, якщо:

а) $\log_7 x = 2 \log_7 8 - 4 \log_7 2$;

$\log_7 x = 2 \log_7 \dfrac{8}{2}$;

$\log_7 x = 2 \log_7 4$;

$\log_7 x = \log_7 16$;

$x = 16$.

б) $\lg x = \frac{2}{3}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 128 + 1;$

$\lg x = \lg 32^{\frac{2}{3}} - \lg 128^{\frac{1}{3}} + \lg 10\,;$

$\lg x = \lg \frac{32^{\frac{2}{3}}}{128^{\frac{1}{3}}} \cdot 10;$

$\lg x = \lg \frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{7}{3}}} \cdot 10;$

$\lg x = \lg 2^{-1} \cdot 10;$

$\lg x = \lg 5;$

$x = 5.$

в)$\log_2 x = 3\log_2 5 - 2\log_2 25 - 1;$

$\log_2 x = \log_2 5^3 - \log_2 5^4 - 1;$

$\log_2 x = \log_2 \frac{5^3}{5^4} - 1;$

$\log_2 x = \log_2 5^{-1} - \log_2 2\,;$

$\log_2 x = \log_2 \frac{5^{-1}}{2};$

$x = \frac{1}{10};$

$x = 0{,}1.$

Обчисліть значення виразу:

$$\frac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2} = \frac{\log_7 27 - \log_7 9}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2} = \frac{\log_7 \frac{27}{9}}{\log_7 45 \cdot 0{,}2} = \frac{\log_7 3}{\log_7 9} = \frac{\log_7 3}{\log_7 3^2} =$$

$$= \frac{\log_7 3}{2\log_7 3} = \frac{1}{2}\frac{\log_7 3}{\log_7 3} = \frac{1}{2}.$$

Далі ж ускладнюйте завдання і розв'язуйте колективно.

Спростіть вираз $\frac{1-\log^3{}_a b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \frac{a}{b}}$.

$$\frac{1-\log^3{}_a b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \frac{a}{b}} = \frac{(1-\log_a b)\left(1+\log_a b+\log^2{}_a b\right)}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{(1-\log_a b)\left(1+\log_a b+\log^2{}_a b\right)\log_a b}{\left(\log^2{}_a b+1+\log_a b\right)\log_a \frac{a}{b}} = \frac{(1-\log_a b)\log_a b}{\log_a \frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{(1-\log_a b)\log_a b}{\log_a a-\log_a b} = \frac{(1-\log_a b)\log_a b}{1-\log_a b} = \log_a b.$$

Обчисліть значення виразу:

$$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}+\frac{1}{2}\log_5 4} + 36\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = 5^{\frac{4}{\log_{3^{\frac{1}{2}}} 5}+\log_5 \sqrt{4}} + 36\log_2 \sqrt[4]{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= 5^{\frac{4}{2\log_3 5}+\log_5 2} + 36\log_2 \sqrt[4]{2^{\frac{4}{3}}} = 5^{2\log_5 3+\log_5 2} + 36\log_2 2^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 5^{\log_5 9+\log_5 2} + 36\cdot\frac{1}{3} = 5^{\log_5 18} + 12 = 18 + 12 = 30.$$

Тепер безпосередньо переходимо до теми логарифмічна функція та її властивості. Для самостійного опрацювання запропонуйте учням записати означення логарифмічної функції. На уроці ж можна продемонструвати, що функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$. Визначити область визначення і область значень функції. Оскільки графіки взаємно обернених функцій семетричні відносно прямої $y = x$, запропонуйте учням за допомогою функції $y = a^x$ побудувати графік функції $y = \log_a x$.

Також, як і для показникової функції запропонуйте учням визначити область визначення, область значень, нулі функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання і складання, визначити парна чи непарна функція, чи дидиференційована, також визначити асимптоти. На уроці ж запропонуйте учням об'єднати усе вищезазначене у таблицю де будуть наведені властивості функції $y = \log_a x$ (Таблиця 2.3).

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нуль функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на, $(0; 1)$ $y > 0$ на $(1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на, $(1; +\infty)$ $y > 0$ на $(0; 1)$;
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; Якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервнаа
Диференційованість	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ – вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

Таблиця 2.3

Після складання таблиці, доцільно, закріпити вивчений матеріал розв'язуванням прикладів.

2.2 Рівняння, нерівності та їх системи

Курс алгебри і початків аналізу націлений навчити учнів розв'язувати трансцендентні рівняння й нерівності та ірраціональні рівняння й нерівності.

З даної теми розроблені різні методики вивчення рівнянь, нерівностей та їх систем[26, 27], наприклад: Перехейда О. М., Ушаков Р. П. у своїй роботі розглядають способи розв'язування нерівностей[32]. Та Сільвестрова І. А., Фурман М. С. розглянули особливості розв'язання рівнянь і нерівностей [37]. Клочко Т. у своїй праці розглянула рівняння, як змістову лінію шкільного курсу математики основної школи [16].

2.2.1 Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності

Показникові рівняння. Очевидно, що перед вивченням теми використовуючи метод перевернутого навчання треба надати учням інформацію про теорему яка є основною для розуміння як розв'язувати показникові рівняння. У якості домашнього завдання запропонуйте учням порівняти такі вирази a^x і x^a, де a- числовий вираз, а x- змінна. Виписати що є спільним і що відмінним.

Наступним кроком є означення теореми яка відповідає за розв'язування, вона звучить так: при $a > 0\ і\ a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$ [23]. Далі ж учні можуть самостійно вивести наслідок з цієї теореми.

Під час уроку для закріплення та налагодження математичного апарату запропонуйте учням усно виконати такі вправи:

Розв'яжіть рівняння:

а) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;

б) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;

в) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;

г) $3^{x+2} + 3^x = 30$;

д) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$.

Надалі розв’язуємо приклади письмово, поступово підвищуючи рівень складності. Відпрацьовуємо навички розв’язування показникових рівнянь.

Розв’яжіть рівняння:

а) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$

$2^{x-2}(2^2 + 2 + 1) = 56$

$2^{x-2} \cdot 7 = 56$

$2^{x-2} = \frac{56}{7}$

$2^{x-2} = 8$

$2^{x-2} = 2^3$

$x - 2 = 3$

$x = 5.$

Відповідь: $x = 5$.

б) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\frac{1}{16}\right)^{1-0{,}5x} = 47$

$2^{2x+1} + 2^{2x} - (2^{-4})^{1-0{,}5x} = 47$

$2^{2x+1} + 2^{2x} - 2^{-4=2x} = 47$

$2^{-4+2x}(2^5+2^4-1)=47$

$2^{-4+2x}\cdot 47=47$

$2^{-4+2x}=1$

$2^{-4+2x}=2^0$

$-4+2x=0$

$2x=4$

$x=2;$

Відповідь: $x=2;$

в) $3^{x^2+2}-5^{x^2-1}=\ 5^{x^2+1}+3^{x^2-1}$

$3^{x^2+2}-3^{x^2-1}=\ 5^{x^2+1}-5^{x^2-1}$

$3^{x^2-1}(3^3-1)=5^{x^2-1}(\ 5^2+1)$

$3^{x^2-1}\cdot 26=5^{x^2-1}\cdot 26\,|:26$

$3^{x^2-1}=5^{x^2-1}$

$3^{x^2-1}=5^{x^2-1}|:5^{x^2-1}$

$\frac{3^{x^2-1}}{5^{x^2-1}}=1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^0$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1\,.$

Відповідь: $x = \pm 1$ ..

г) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$

$$2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot \frac{2^2}{2^{\sqrt{x+1}}} + 1$$

$$2^{\sqrt{x+1}} - 3 \cdot \frac{4}{2^{\sqrt{x+1}}} - 1 = 0$$

$$\frac{\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^2 - 12 - 2^{\sqrt{x+1}}}{2^{\sqrt{x+1}}} = 0$$

ОДЗ: $\mathrm{x} + 1 \geq 0$

$$\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^2 - 12 - 2^{\sqrt{x+1}} = 0$$

$\mathrm{x} \geq -1,\ \ \mathrm{x} \in [-1;\ +\infty)$

Нехай $2^{\sqrt{x+1}} = t$, тоді

$$t^2 - 12 - t = 0$$

$$t^2 - t - 12 = 0$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = -3$$

Повернемось до заміни

Якщо $t_1 = 4$, то

$$2^{\sqrt{x+1}} = 4$$

$$2^{\sqrt{x+1}} = 2^2$$

$$\sqrt{x+1} = 2$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 2^2$$

$$x + 1 = 4$$

$x = 3$

Якщо $t_2 = -3$, то

$x \in \emptyset$.

Відповідь:$x = 3$.

д) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1$ маємо:

$$5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{1-\cos^2 x} = 3$$

$$5 \cdot 2^{\cos^2 x} - \frac{2}{2^{\cos^2 x}} = 3$$

Нехай $2^{\cos^2 x} = t$, тоді

$$5 \cdot t - \frac{2}{t} - 3 = 0$$

$\frac{5t^2-2-3t}{t} = 0$ ОДЗ: $t \neq 0$

$$5t^2 - 2 - 3t = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 5(-2) = 49$$

$$t_1 = \frac{3+7}{10} = 1;$$

$$t_2 = \frac{3-7}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Повернемось до заміни

Якщо $t_1 = 1$, то

$$2^{\cos^2 x} = 1$$

$\cos^2 x = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Якщо $t_1 = 1$, то

$2^{\cos^2 x} = -\frac{2}{5}$

$x \in \emptyset$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Показникові нерівності. Як і у випадку з показниковими рівняннями пропонуємо учням самостійно ознайомитись з теоремою (аналогічна до теореми для розв’язування показникових рівнянь) та наслідками з неї.

Розпочинаємо розв’язування прикладів на уроці з усних вправ і далі, як завжди, відпрацьовуємо навички за допомогою більш складних виразів.

Логарифмічні рівняння. Домашнім завданням перед вивченням цієї теми буде ознайомитись з визначенням найпростішого логарифмічного рівняння, та скільки коренів має найпростіше логарифмічне рівняння. Зауважте, що для знаходження кореня необхідно звернутись до властивості логарифму. Учні повинні ознайомитись з теоремою яка допоможе у розв’язанні логарифмічних рівнянь та з її наслідком.

На уроці, знов ж таки, розпочинаємо з усних вправ.

Розв’яжіть рівняння:

а) $\log_2(x-1)=1$;

б) $\lg(3-2x)=2$;

в) $\log_{\frac{1}{6}}(4x-8)=-2$;

г) $\log_7(x^2-2x-8)=1$.

Далі збільшуємо складність прикладів.

Розв'яжіть рівняння:

а) $\log_7 \log_4(x-2)=0$

$$7^0=\log_4(x-2)$$

$$1=\log_4(x-2)$$

$$1-\log_4(x-2)=0$$

$$\log_4 4-\log_4(x-2)=0$$

$$\log_4\frac{4}{x-2}=0$$

$$4^0=\frac{4}{x-2}$$

$$1=\frac{4}{x-2}$$

$$1-\frac{4}{x-2}=0$$

$$\frac{x-2-4}{x-2}=0$$

$$\frac{x-6}{x-2}=0$$

$$\begin{cases}x-6=0\\x-2\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Відповідь: $x = 6$;

б) $\log_6(6^{-x} - 5) = x + 1$

$\log_6(6^{-x} - 5) = x\log_6 6 + \log_6 6$

$\log_6(6^{-x} - 5) = \log_6 6^x + \log_6 6$

$\log_6(6^{-x} - 5) = \log_6 6^x \cdot 6$

$$\frac{1}{6^x} - 5 = 6^x \cdot 6$$

Нехай $6^x = t$, тоді

$$\frac{1}{t} - 5 = t6$$

$$\frac{1}{t} - 5 - 6t = 0$$

$$\frac{1 - 6t^2 - 5t}{t} = 0$$ ОДЗ: $t \neq 0$

$1 - 6t^2 - 5t = 0| \cdot (-1)$

$6t^2 + 5t - 1 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25 + 24 = 49$

$$t_1 = \frac{1}{6}$$

$t_2 = -1$

Виконуємо зворотню заміну

Якщо $t_1 = \frac{1}{6}$,то

$6^x = \frac{1}{6}$

$6^x = 6^{-1}$

$x = -1$

Якщо $t_2 = -1$, то

$6^x = -1$

$x \in \emptyset$.

Відповідь: $x = -1$;

в) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2\text{x} + 12)$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 2x > 0; \\ 2x + 12 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-2) > 0; \\ 2x > -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0; \\ x > 2; \\ x > -6. \end{cases}$

$x \in (-6; 0) \cup (2; +\infty)$ Рисунок 2.6

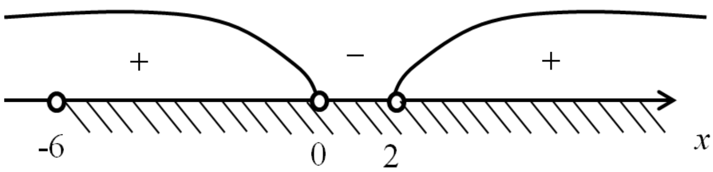

Рисунок 2.6

$x^2 - 2x = 2\text{x} + 12$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x_1 = 6$

$x_2 = -2$ (Рисунок 2.7)

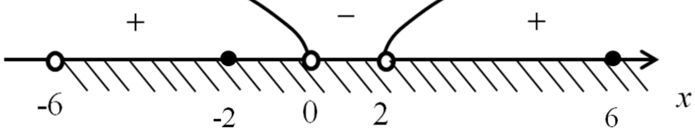

Рисунок 2.7

Відповідь: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$.

г) $\lg\sqrt{5x-4} + \lg\sqrt{x+1} = 2 + \lg 0{,}18$

$\lg\sqrt{5x-4}\cdot\sqrt{x+1} = 2\lg 10 + \lg 0{,}18$

$\lg\sqrt{(5x-4)(x+1)} = \lg(10^2 \cdot 0{,}18)$

$\sqrt{(5x-4)(x+1)} = 18$

$\left(\sqrt{(5x-4)(x+1)}\right)^2 = 18^2$

$(5x-4)(x+1) = 324$

$5x^2 + 9x - 4 = 324$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-4>0; \\ x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x>4; \\ x>-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{4}{5}; \\ x>-1; \end{cases}$

$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{4}{5}; +\infty\right)$ Рисунок2.8

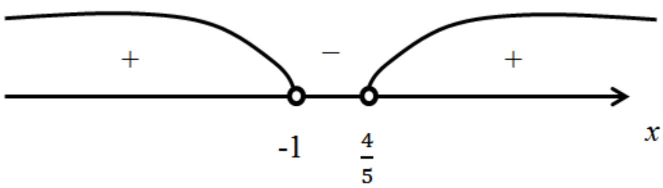

Рисунок 2.8

$5x^2 + 9x - 328 = 0$

$D = 1 + 6560 = 6561$

$x_1 = \dfrac{4}{5}$

$x_2 = -1$

Відповідь: $x_1 \in \emptyset$

д) $\log_2(2x-1) - \log_2(x+2) = 2 - \log_2(x+1)$

$$\log_2\frac{2x-1}{x+2} = 2\log_2 2 - \log_2(x+1)$$

$$\log_2\frac{2x-1}{x+2} = \log_2\frac{4}{x+1}$$

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{4}{x+1}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-1>0; \\ x+2>0; \\ x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{1}{2}; \\ x>-2; \\ x>-1. \end{cases}$ $x \in \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ Рисунок 2.9.

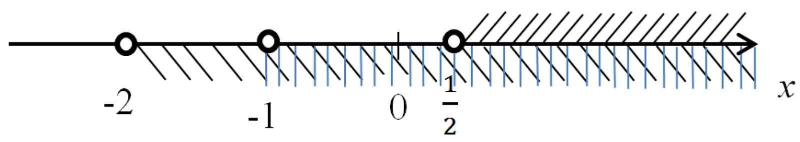

Рисунок 2.9

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{4}{x+1}$$

$(2x-1)\cdot(x+1) = 4(x+2)$

$2x^2 + x - 1 - 4x - 8 = 0$

$2x^2 - 3x - 9 = 0$

$D = 81$

$x_1 = 3$

$x_2 = -1{,}5$- не входить до ОДЗ

Відповідь: $x_1 = 3$.

е) $\frac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)} = 0$

$$\frac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)} = 0$$

$$\frac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)} = 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} \log_4(x-1) \neq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1 \neq 1 \\ x > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases}$ $x \in (1:2) \cup (2;+\infty)$.

$\log_4(x^2+x-2) - 1 = 0$

$\log_4(x^2+x-2) = 1$

$4^1 = x^2 + x - 2$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

Відповідь : $x \in \emptyset$.

є) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$ $x \in (2;3) \cup (3;+\infty)$

$(x-2)^2 = 2x^2 - 11x + 16$

$x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + 11x - 16 = 0$

$-x^2 + 7x - 12 = 0| \cdot (-1)$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$

$(x^2 - 3x) + (-4x + 12) = 0$

$x(x - 3) - 4(x - 3) = 0$

$(x - 4)(x - 3) = 0$

$x - 4 = 0 \quad\quad x - 3 = 0$

$x = 4 \quad\quad x = 3$

Відповідь: $x = 4$.

ж) $\log^2{}_3 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0$

$(3\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 5 = 0$

Нехай $\log_3 x = t,$ тоді

$9t^2 + 4t - 5 = 0$

$D = 196$

$t_1 = \frac{5}{9}$

$t_2 = -1$

Повертаємось до зворотної заміни

Якщо $t_1 = \frac{5}{9}$, то

$\log_3 x = \frac{5}{9}$

$x = 3^{\frac{5}{9}}$

Якщо $t_1 = -1$, то

$\log_3 x = -1$

$x = \frac{1}{3}$

Відповідь: $x = 3^{\frac{5}{9}}$,$x = \frac{1}{3}$.

з) $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$

$3\log_x 2^4 - 4\log_{2^4} x = 2\log_2 x$

$12\log_x 2 - \log_2 x = 2\log_2 x$

$$\frac{12}{\log_x 2} - \log_2 x - 2\log_2 x = 0$$

$$\frac{12}{\log_x 2} - 3\log_2 x = 0$$

Нехай $\log_2 x = t,$ тоді

$$\frac{12}{t} - 3t = 0$$

$$\frac{12 - 3t^2}{t} = 0$$

$$\begin{cases} 12 - 3t^2 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 = 4 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -2 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

Повертаємось до зворотної заміни

Якщо $t_1 = 2$ то

$\log_2 x = 2$

$2^2 = x$

$4 = x$

Якщо $t_2 = -2$ то

$\log_2 x = -2$

$2^{-2} = x$

$\frac{1}{4} = x$

Відповідь: $x = 4$,$x = \frac{1}{4}$.

Логарифмічні нерівності. За тією ж схемою як і для показникових нерівностей. Записуємо теорему та наслідок з неї та опрацьовуємо її самостійно. І потім на уроці нарощуємо темпи розв’язування нерівностей починаючи від найпростіших закінчуючи нерівностями

РОЗДІЛ 3. Експериментальне дослідження

Сутність експериментального дослідження полягає у вивчені курсу «Алгебри і початків аналізу» у старшій школі з використанням методу перевернутого навчання. Експеримент проходив на базі Херсонської загальноосвітньої школи І-ІІІ ст. №44 Херсонської міської ради. Експеримент тривав з 1 вересня 2022 року по 1 листопада 2022 року. Було залучено два 11 класи зазначеного навчального закладу. Дана методика запропонована для класів які вивчають математику на профільному рівні.

Етапи експерименту:

1. Було проаналізовано методичну літературу з теми дослідження. Розглянуто різні форми проведення перевернутого навчання. Ознайомлено з підручниками алгебри для 11 класу.
2. Проаналізовано успішність учнів за ІІ семестр 2021-2022 н. р. з алгебри.
3. Розробка методики вивчення теми «Показникова та логарифмічна функція», яка вивчалась впродовж проведення експерименту з урахуванням методу перевернутого навчання.
4. Проведення уроків онлайн з теми використовуючи метод перевернутого навчання.
5. Проведення контрольного зрізу знань учасників експерименту з теми «Показникова та логарифмічна функція» використовуючи зазначену методику.
6. Порівняння результатів контрольного зрізу з результатами успішності учнів з алгебри за ІІ семестр 2021-2022 н.р.
7. Аналіз та статистична обробка результатів.

8. Підведення підсумків що до доцільності використання методу перевернутого навчання під час вивчення курсу алгебри і початків аналізу.

У експерименті приймали участь учні 11-А і 11-Б класів Херсонської загальноосвітньої школи І-ІІІ ст. №44 Херсонської міської ради. Учні мають майже однаковий рівень успішності з алгебри за ІІ семестр 2021-2022 н.р., що і показано в таблицях 3.1 та 3.2.

Клас	Всього учнів	Високий рівень	%	Достатній рівень	%	Середній рівень	%	Початковий рівень	%
11-А	28	8	28	17	61	3	11	-	0
11-Б	29	9	31	15	52	5	17	-	0

Таблиця 3.1

Клас	Успішність %	Якість знань %	Середній бал
11-А	100	89	9,5
11-Б	100	83	9,6

Таблиця 3.2

Учні 11-А класу вивчали теми з алгебри використовуючи методику перевернутого навчання. Учні ж з 11-Б класу навчались без використання даної методики. Після двох місяців навчання було проведено контрольний зріз знань для перевірки ефективності використання методу.

У учнів 11-А класу, які навчались з використанням методики перевернутого навчання, після двох місяців використання методики підвищився рівень якості знань,що можна побачити на таблиці 3.3, 3.4 та схемі 3.1.

Клас	Всього учнів	Високий рівень	%	Достатній рівень	%	Середній рівень	%	Початковий рівень	%
11-А	28	10	36	17	61	1	3	-	0
11-Б	29	8	28	15	52	6	20	-	0

Таблиця 3.3

Клас	Успішність %	Якість знань %	Середній бал
11-А	100	97	9,9
11-Б	100	80	9,5

Таблиця 3.4

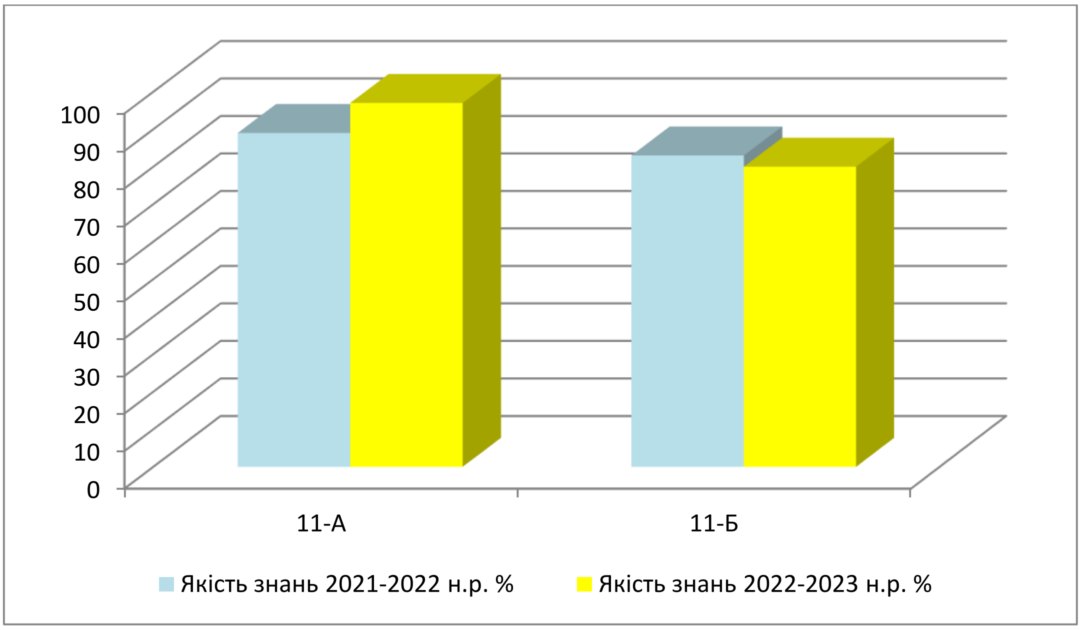

Схема 3.1

Отже, отримані результати дослідження показують, що використання методики перевернутого навчання для вивчення курсу «Алгебри і початків аналізу» є ефективним, і позитивно вплинуло на якість знань учнів.

На основі проведеного експерименту встановлено, що учні стали прискіпливіше готуватись до уроків, та підвищилась активність учнів під час онлайн уроків.

ВИСНОВКИ

Під час виконання кваліфікаційної роботи (проекту) з теми «Вивчення алгебри і початків аналізу у старшій школі на профільному рівні» було проаналізовано науково-методичну літературу з теми проекту.

За для підвищення ефективності процесу навчання учнів 10-11 класів, було розроблено методику вивчення окремих тем курсу «Алгебри і початків аналізу» з використанням методу перевернутого навчання.

Методика пройшла апробацію під час педагогічного експерименту. Порівнюючи результати двох 11 класів (до експерименту мали майже однаковий рівень якості знань з алгебри) один з яких продовжував вивчення курсу «Алгебри і початків аналізу» без використання методики, а інший – за методикою перевернутого навчання.

За результатами експерименту, зрозуміло, що методика є ефективною і підвищує рівень якості знань учнів. Це було підтверджено контрольним зрізом знань, з яким учні класу у якому використовувалась запропонована методика впорались краще.

Проаналізувавши висновки, можемо сказати, що запропонована методика працює, і має переваги перед традиційним методом викладання алгебри. Вона сприяє підвищенню рівня зацікавленості предметом у учнів. Учні більш наполегливо та старанно готуються до уроку. Відсоток дітей не підготовлених до уроку став значно менший. Здобувачі освіти стають самостійнішими та відповідальньнішими, оскільки тільки від них залежить чи зрозуміють вони тему чи ні.

Отже, глибокий аналіз науково-методичної літератури з теми дослідження було проведено, що дало змогу якісно виконати кваліфікаційну роботу; основна мета розробки методики перевернутого навчання для вивчення курсу «Алгебри і початків аналізу» була досягнута; практично застосована методика під час педагогічного експерименту підтвердило актуальність теми дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барсукова К. С. Ймовірнісно – статистична змістова лінія шкільного курсу математики (профільна школа). Наукові та методичні засади математичної освіти. 2014. №1(6) С. 6-11.

2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти). К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.

3. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.

4. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 288 с.

5. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. К.: Вища школа, 1989. – 367 с.

6. Боровик В. Н., Вивальнюе Л. М., Муряч М. М., Соколенко О. С. Курс математики: навч. посібник. К.: Вища школа, 1995. – 392 с.

7. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Глобін О. І. Навчання математики в сташій школі на профільному рівні (методичні рекомендації) URL:https://lib.iitta.gov.ua/712224/1/Metod%20recomend.pdf

8. Вивальнюк Л. М., Мурач М. М., Соколенко О. І. та ін. Математика : Посібник для шкіл та кл. з поглибл. вивч. мат.-ки. К.: Освіта, 1998. 301 с.

9. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. Розв'язування алгебраїчних задач : Посібн. для вчителя. К.: Радянська школа., 1991. 221 с.

10. Експрес – бюлетень фахової інформації для вчителів математики URL: https://mmk.edu.vn.ua/uploads/images/articles/matem/2018-2019/Serpen%20MO%202019/%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BF%D1

%80%D0%B5%D1%81%20-%20%D0%B1%D1%8E%D0%BB%D0%B5%D1%82%D0%B5%D0%BD%D1%8C%20%D1%81%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%B5%D0%BD%D1%8C%202019%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0.pdf

11. Зіненко І. М. Особливості вивчення математики і старшій профільній школі за умови впровадження компетентнісного підходу. URL: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/pspo_2013_40(1)__25.pdf

12. Зміст, основна мета й структура профільного навчання URL:https://schoolsnt.wordpress.com/%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%84%D1%96%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B5-%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F/

13. Істер О. С., Єргіна О. В. Аглебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза, 2018 – 448 с.

14. Істер О. С., Єргіна О. В. Аглебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза, 2019 – 416 с.

15. Істер О. С., Єргіна О. В. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза, 2018 – 384 с.

16. Клочко Т. Рівняння, як змістова лінія шкільного курсу математики основної школи. URL:http://www.rusnauka.com/15_DNI_2008/Pedagogica/32699.doc.htm

17. Ковтнюк М. М., Ясинський В. А,. Ковтнюк Г. М. Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Х.: Видавнича група «Основа», 2005. 224 с.

18. Коношко І. І. Методичні рекомендації з алгебри для учнів 11 класу (профільний рівень) URL:https://naurok.com.ua/metodichni-rekomendaci-dlya-uchniv-11-klasu-profilniy-riven-z-algebri-54684.html

19. Корнієнко Т. Л., Фіготіна В. І. Алгебра. 10-11 класи. Методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем : Розробки занять. Х.: Видавництво «Ранок», 2009. 272 с. 24.

20. Кухарєв О. С. Ретроспективний аналіз вивчення початків аналізу в старшій школі. URL: http://repository.sspu.sumy.ua/bitstream/123456789/3594/1/Kukharieva__Retrospektyvnyi%20analiz%20vyvchennia%20pochatkiv%20analizu.pdf

21. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2019. 208 с

22. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.

23. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В.Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: проф. рівен.: підруч. для 11 кл. загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2019. – 352 с.

24. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В.Б., Якір М. С. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2018. – 256 с.

25. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу. Т.: «Підручники і посібники», 2001. 304 с.

26. Методика вивчення показникових рівнянь. URL: https://knigi.studio/prepodavaniya-matematiki-metodika/metodika-vivchennya-pokaznikovih-125252.html

27. Методика вивчення рівнянь і нерівностей у курсі алгебри і математичного аналізу. URL: https://knigi.studio/prepodavaniya-matematiki-metodika/metodika-vivchennya-rivnyan-nerivnostey-kursi-125254.html

28. Моторіна В. Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: навч. посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. Х.: Видавець Іваненко І. С., 2012. – 318 с.

29. Навчальна програма з математики для 10-11 класів. Профільний рівень URL https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx

30. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початків аналізу(профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. Загал. Серед. Освіти. Х. : Видавництво «Ранок», 2019. – 240 с.

31. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти). Х.: Видавництво «Ранок», 2019. 304 с.

32. Перехейда О. М., Ушаков Р. П. Розв'язування нерівностей. Х.: Видавнича група «Основа», 2005. 112 с.

33. Пременение математики в различных видах спорта URL:https://vuzlit.com/367155/primenenie_matematiki_razlichnyh_vidah_sporta

34. Про затвердження Концепцію профільного навчання у старшій школі: Наказ Міністерства Освіти і науки України від 12. 10.2013 р. №1456

35. Романенко Л., Малишев В., Липова Л., Лукашенко Т. Профільне навчання: теорія і практика, досвід, проблеми, перспективи URL: https://inlnk.ru/em605K

36. Саєнко Л. М. Особливості навчання математики у класах математичного та філологічного профілю старшої школи. URL:https://naurok.com.ua/osoblivosti-navchannya-matematiki-u-klasah-matematichnogo-ta-filologichnogo-profilyu-starsho-shkoli-219296.html

37. Сільвестрова І. А., Фурман М. С. Навчаємось розв'язувати рівняння і нерівності. Х.: Видавнича група «Основа», 2004. 272 с.

38. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. К. : Вища школа, 2006. – 582 с.

39. Соколенко Л. О. Роль теоретичних основ змістової лінії «Числа» у професійній підготовці вчителя математик. URL:http://erpub.chnpu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/123456789/237/1/Sokolenko_%D0%A0%D0%BE%D0%BB%D1%8C%20%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D1%85%20%D0%BE%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B2%20%D0%B7%D0%BC%D1%96%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%97%20%D0%BB%D1%96%D0%BD%D1%96%D1%97.pdf

40. Теоретико-методичні основи різних методичних підходів до формування поняття натурального числа і нуля. URL:https://studfile.net/preview/4364457/

41. Три знамениті задачі Стародавнього світу URL:https://sites.google.com/site/matemnavknas/starodavni-zadaci