УДК: 37.016.91:51

Кушнір В. А.
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

ТЕХНОЛОГІЯ КОНСТРУЮВАННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ В MAPLE-СЕРЕДОВИЩІ

DOI: 10.14308/ite000647

Досліджується проблема конструювання квадратних рівнянь і систем рівнянь з параметрами з використанням Maple-технології. На сьогодні в навчальний процес усе частіше впроваджуються «задачі зворотного мислення» (В.А.Крутенький) або просто «зворотні задачі» (П.М.Ерднієв). Задачі конструювання математичних завдань заздалегідь визначеного виду і з визначеними властивостями є зворотними завданнями, котрі розгортають ще один аспект навчальної ситуації і тим самим створюють «надлишок її бачення» (М.М.Бахтін). Розв'язування зворотних задач розвивають у студентів чи учнів мислення, уяву та інші вищі психічні функції. Однак їх упровадження в навчальний процес ще недостатнє. Однією з причин такої ситуації є недостатня кількість посібників з достатньою кількістю варіантів однотипних завдань. Особливо це стосується конструювання завдань з параметрами. Конструювання в «ручному режимі» вимагає значних часових, когнітивних, фізичних та інших затрат, несе в собі ризики технічних та обчислювальних помилок. У час інформаційного суспільства і цифрової економіки є всі можливості виконувати дії конструювання в певному ІКТ-середовищі (у нас Maple-середовище), що значною мірою розв'язує наведені проблеми конструювання, створює нове інтегративне навчально-інформаційне середовище, дозволяє в автоматичному режимі продукувати достатню кількість різних варіантів однотипних завдань.

Задачі з параметрами є одними із завдань, розв'язання котрих вимагає від суб'єктів учіння творчості, зокрема нестандартного підходу до розв'язування. Кожна задача з параметрами вимагає свого окремого способу й алгоритму розв'язування і тому вимагає продуктивного учіння, що не вписується в стандартні способи й алгоритми. Стаття присвячена розв'язуванню наведених проблем.

Ключові слова: *технологія, алгоритм, система лінійних рівнянь, математична модель.*

Актуальність проблеми. Сучасна математична освіта все більше схиляється до фундаментальності в змісті й до продуктивної діяльності учнів і студентів. Особливо це стосується ліцеїв і шкіл з поглибленим вивченням математики й інформатики, вищих педагогічних навчальних закладів. Саме оптимальне поєднання математики й можливостей сучасних інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) при її навчанні дозволяє створювати технології автоматичного конструювання достатньої кількості завдань з математики заздалегідь визначеного виду й властивостями (див. В.А.Кушнір [3]), що надає можливість здійснювати ефективне індивідуальне навчання, створювати достатню кількість варіантів тестових однотипних завдань, надавати індивідуальні завдання підвищеної складності.

До завдань підвищеної складності відносяться рівняння, нерівності та системи рівнянь з параметрами, зокрема, квадратні рівняння й нерівності та системи лінійних рівнянь з параметрами. Такі завдання вимагають знань не тільки способу й відповідного алгоритму розв'язування, а й дослідження існування та кількості розв'язків та їх відшукання залежно від значень параметрів. Тоді процес розв'язування рівнянь (систем) чи нерівностей носить пошуково-дослідницький характер, учіння формує в учня чи студента початкові дослідницькі уміння і навички, зокрема уміння і навички конструювання і виконання дослідницьких дій (В.А. Кушнір [2]).

На сьогодні ще недостатньо посібників і підручників з достатньою кількістю варіантів однотипних задач з параметрами, що значно утруднює організацію індивідуальної роботи з учнями в класах з поглибленою програмою з математики. Тому ми і намагаємося якоюсь мірою розв'язати і цю проблему.

Аналіз останніх досліджень та публікацій з проблеми дослідження.

Психологічними і методичними проблемами конструювання зворотних задач займалися В.А. Крутенький, П.М. Ерднієв. З появою нових можливостей ІКТ проблемами конструювання зворотних задач займалися представники наукових шкіл М.І. Жалдака, В.Ю. Бикова, С.О. Семерікова та іншими представниками СКА. Однак проблеми конструювання завдань з параметрами з використанням ІКТ ще мало досліджені, що й стало причиною появи цієї розвідки.

Предметом дослідження є процес конструювання квадратних рівнянь і систем лінійних рівнянь з параметрами в Maple-середовищі.

Maple-середовище вибране з огляду на те, що: 1) студенти вивчали в певному обсязі дану ІКТ; 2) у даному середовищі можливі символьні обчислення.

Мета дослідження полягає в створенні способів, алгоритмів і програм конструювання квадратних рівнянь і систем лінійних рівнянь з параметрами в Maple-середовищі.

Завдання дослідження:

1. Створення способів і відповідних алгоритмів конструювання квадратних рівнянь і систем лінійних рівнянь з параметрами в Maple-середовищі.
2. Створення програм конструювання квадратних рівнянь і систем лінійних рівнянь з параметрами в Maple-середовищі.
3. Продукування достатньої кількості варіантів однотипних завдань з параметрами.

Виклад основного матеріалу

1. Конструювання рівнянь і нерівностей

У статті пропонується конструювати квадратні рівняння з параметрами виду

$$(k1\cdot a + b1)\cdot x^2 + (k2\cdot a + b2)\cdot x + (k3\cdot a + b3) = 0 \tag{1}$$

з використанням можливостей Maple-технології. Розв'яжемо рівняння (1) в Maple-технології, одержимо

$$solve\Big(\ (k1\cdot a + b1)\cdot x^2 + (k2\cdot a + b2)\cdot x + (k3\cdot a + b3) = 0,\ \{x\}\Big); \tag{2}$$

Після перетворень дискримінант рівняння (1) набуде вигляду

$$s1 := \left(-4\,k1\,k3 + k2^2\right) a^2 + \left(-4\,b1\,k3 + 2\,b2\,k2 - 4\,b3\,k1\right) a - 4\,b1\,b3 + b2^2 \tag{3}$$

Розкриємо в дискримінанті тричлена (3) дужки і поділимо на 16

$$\mathrm{s2} := \mathrm{simplify}\Big((-4\,b1\,k3 + 2\,b2\,k2 - 4\,b3\,k1)^2 - 4\cdot\left(-4\,k1\,k3 + k2^2\right)\cdot\big(-4\,b1\,b3 + b2^2\big)\Big);$$

$$s21 := \frac{s2}{16};$$

Одержимо

$$s2 := 16\,b1^2\,k3^2 - 16\,b1\,b2\,k2\,k3 - 32\,b1\,b3\,k1\,k3 + 16\,b1\,b3\,k2^2 + 16\,b2^2\,k1\,k3 - 16\,b2\,b3\,k1\,k2 + 16\,b3^2\,k1^2$$

$$s21 := b1^2\,k3^2 - b1\,b2\,k2\,k3 - 2\,b1\,b3\,k1\,k3 + b1\,b3\,k2^2 + b2^2\,k1\,k3 - b2\,b3\,k1\,k2 + b3^2\,k1^2$$

Поставимо умову: s21>0, що означає існування двох різних коренів рівняння (3).

Або $s21 = q^2$.

Розв'яжемо рівняння

$$solve\left(s21 = q^2,\ \{k1, k2, k3, b1, b2, b3\}\right); \tag{4}$$

з шістьма невідомими, де q дійсне додатне число.

Одержимо два розв'язки

$$\left\{b1 = b1,\ b2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{k1\,k3}\Big(b1\,k2\,k3 + b3\,k1\,k2 + \left(-4\,b1^2\,k1\,k3^3 + b1^2\,k2^2\,k3^2 + 8\,b1\,b3\,k1^2\,k3^2 - 2\,b1\,b3\,k1\,k2^2\,k3 - 4\,b3^2\,k1^3\,k3 + b3^2\,k1^2\,k2^2 + 4\,k1\,k3\,q^2\right)^{1/2}\Big),\ b3 = b3,\ k1 = k1,\ k2 = k2,\ k3 = k3\right\}$$

$$\left\{b1 = b1,\ b2 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{k1\,k3}\Big(-b1\,k2\,k3 - b3\,k1\,k2 + \left(-4\,b1^2\,k1\,k3^3 + b1^2\,k2^2\,k3^2 + 8\,b1\,b3\,k1^2\,k3^2 - 2\,b1\,b3\,k1\,k2^2\,k3 - 4\,b3^2\,k1^3\,k3 + b3^2\,k1^2\,k2^2 + 4\,k1\,k3\,q^2\right)^{1/2}\Big),\ b3 = b3,\ k1 = k1,\ k2 = k2,\ k3 = k3\right\} \tag{5}$$

Поставимо умову: щоб із виразу, що стоїть в розв'язках (5) під знаком квадратного кореня, корінь добувався націло, тобто виконувалася умова

$$L1 := -4\,b1^2\,k1\,k3^3 + b1^2\,k2^2\,k3^2 + 8\,b1\,b3\,k1^2\,k3^2 - 2\,b1\,b3\,k1\,k2^2\,k3 - 4\,b3^2\,k1^3\,k3 + b3^2\,k1^2\,k2^2 + 4\,k1\,k3\,q^2 = m^2; \tag{6}$$

що дозволить при дослідженні розв'язків рівняння (1) легко виконати обчислення

Розв'яжемо систему рівнянь (4) – (6). Отримаємо

$$L := solve\left(\left\{L1,\ s21 = q^2\right\},\ \{k1, k2, k3, b1, b2, b3\}\right) : \tag{7}$$

$$'L[5]' = L[5];\ 'L[6]' = L[6];\ 'L[7]' = L[7];\ 'L[8]' = L[8]; \tag{8}$$

Чотири розв'язки (8) із восьми системи (7) ми використаємо:

$$L_5 = \left\{b1 = \frac{q\,(b2\,k1\,k3 - m)}{k3\,m},\ b2 = b2,\ b3 = \frac{b2\,k3\,q}{m},\ k1 = k1,\ k2 = \frac{m}{q},\ k3 = k3\right\}$$

$$L_6 = \left\{b1 = \frac{q\,(b2\,k1\,k3 + m)}{k3\,m},\ b2 = b2,\ b3 = \frac{b2\,k3\,q}{m},\ k1 = k1,\ k2 = \frac{m}{q},\ k3 = k3\right\}$$

$$L_7 = \left\{b1 = -\frac{q\,(b2\,k1\,k3 + m)}{k3\,m},\ b2 = b2,\ b3 = -\frac{b2\,k3\,q}{m},\ k1 = k1,\ k2 = -\frac{m}{q},\ k3 = k3\right\}$$

$$L_8 = \left\{ b1 = -\frac{q\,(b2\,k1\,k3 - m)}{k3\,m},\, b2 = b2,\, b3 = -\frac{b2\,k3\,q}{m},\, k1 = k1,\, k2 = -\frac{m}{q},\, k3 = k3 \right\}$$

Останні чотири розв'язки нелінійної системи (7) ми не використовували, оскільки розв'язки системи (7) там не будуть раціональними виразами.

Складемо алгоритмічний припис конструювання рівнянь виду (1) з умовою, що при дослідженні розв'язків від параметра a відповідні квадратні рівняння (4) матимуть раціональні розв'язки.

Алгоритм. Складено відповідно розв'язку L[5] системи (7).

1. Генеруємо значення вільних змінних b1, k1, k3 з певного проміжку.
   Перевіряємо, щоб b1, k1, k3 не були рівні нулю. Або $b1 \cdot k1 \cdot k3 \neq 0$
   У супротивному знову їх генеруємо.
2. Генеруємо натуральні q і m.
3. Обчислюємо
   $$b1 := \frac{q\,(b2\,k1\,\mathrm{k3} - \mathrm{m})}{k3\,m};\, b3 := \frac{b2\,k3\,q}{m} : k2 := -\frac{m}{q} :$$
4. Перевіряємо, щоб b1 не був рівний нулю. В супротивному знову генерувати q і m і знову обчислювати b1, поки b1 рівне нулю.

5.Перевіряємо систему умов: щоб коефіцієнти квадратного рівняння (3) не були рівними нулю (їх добуток не був рівний нулю); щоб коефіцієнти при

a і a^2 не відрізнялися на сталу. У супротивному разі конструювання рівняння (1) припиняється і керування передається на кінець алгоритму.

5. Друкуємо приклад
   $$(k1 \cdot a + b1) \cdot x^2 + (k2 \cdot a + b2) \cdot x + (k3 \cdot a + b3) = 0$$
6. Якщо потрібно декілька варіантів прикладів, то йдемо на початок алгоритму.
7. Кінець роботи алгоритму.

Програма 1. (Складена на основі розв'язку L[6] системи (7)).

$k := 30 : i := 1 :$

while $i \leq 30$ **do** $y := rand(-2\,..2) : z := rand(1\,..2) :\; b2 := y(\,);\, k1 := y(\,);\, k3 := y(\,);$

while $b2 \cdot k1 \cdot k3 = 0$ **do** $b2 := y(\,);\, k1 := y(\,);\, k3 := y(\,)$ **end do**;

$q := z(\,);\, m := z(\,);$

$$b1 := \frac{q\,(b2\,k1\,k3 - m)}{k3\,m};\, b3 := \frac{b2\,k3\,q}{m} : k2 := \frac{m}{q} :$$

while $b1 = 0$ **do** $q := z(\,);\, m := z(\,);\; b1 := \frac{q\,(b2\,k1\,\mathrm{k3} - \mathrm{m})}{k3\,m}$; **end do**;

if $\left(-4\,k1\,k3 + k2^2\right)\left(-4\,b1\,k3 + 2\,b2\,k2 - 4\,b3\,k1\right) \cdot \left(-4\,b1\,b3 + b2^2\right) \neq 0$
and not$(divide(k1 \cdot a + b1, k2 \cdot a + b2))$ **then**

$print\left((k1 \cdot a + b1) \cdot x^2 + (k2 \cdot a + b2) \cdot x + k3 \cdot a + b3 = 0\right) : i := i + 1 :$

end if: **end do**:

Зробимо деякі пояснення до програми.

Умова **if** $\left(-4\,k1\,k3 + k2^2\right)\left(-4\,b1\,k3 + 2\,b2\,k2 - 4\,b3\,k1\right) \cdot \left(-4\,b1\,b3 + b2^2\right) \neq 0$
and not$(divide(k1 \cdot a + b1, k2 \cdot a + b2))$ **then**

забезпечує те, що усі коефіцієнти рівняння (3) не дорівнюють нулю, що забезпечує дослідження дискримінанту рівняння (1) як квадратичного тричлена, корені якого будуть раціональні числа. Друга умова оператора говорить, що коефіцієнти при a і a^2 не відрізняються на сталу. Останні оператори програми повинні бути зрозумілі читачеві, вони відображають фундаментальні структури програм, наприклад, написаних на Pascal. З приводу фундаментальності знань, зокрема з інформатики див. С.А. Семиріков [6], С.У. Гончаренко [1], В.А. Кушнір [4].

Результати роботи *програми 1.*

$$\textit{варіант}$$
$$(-a-3)\,x^2+(a+2)\,x+2\,a+4=0$$
$$2\,\textit{варіант}$$
$$(2\,a-1)\,x^2+(2\,a-2)\,x-a+1=0$$
$$3\,\textit{варіант}$$
$$(a+1)\,x^2+(a+2)\,x+2\,a+4=0$$
$$4\,\textit{варіант}$$
$$(2\,a-5)\,x^2+(a-2)\,x+a-2=0$$

Наведемо приклад розв’язування рівняння виду (1).

$$(-2\,a-5)\,x^2+(a+2)\,x+2\,a+4=0 \tag{9}$$

1) $-2\cdot a-5\neq 0;\ a\neq -\frac{5}{2};$

Тоді розв’язки рівняння матимуть вигляд

$$solve\left((-2\,a-5)\,x^2+(a+2)\,x+2\,a+4=0,\ \{x\}\right);$$

$$\left\{x=\frac{1}{2}\,\frac{a+2+\sqrt{17\,a^2+76\,a+84}}{2\,a+5}\right\},\ \left\{x=-\frac{1}{2}\,\frac{-a-2+\sqrt{17\,a^2+76\,a+84}}{2\,a+5}\right\}$$

$$solve\left(17\,a^2+76\,a+84=0,\ \{a\}\right);$$

$$\{a=-2\},\ \left\{a=-\frac{42}{17}\right\}$$

зрозуміло, що при $a=-2$; x=0.

При $a=-\frac{42}{17}$ x= – 8 і розв’язок рівняння (9) буде один.

При $a<-\frac{42}{17}$ *або* $a>-2$ розв’язків буде два

$$\left\{x=\frac{1}{2}\,\frac{a+2+\sqrt{17\,a^2+76\,a+84}}{2\,a+5}\right\},\ \left\{x=-\frac{1}{2}\,\frac{-a-2+\sqrt{17\,a^2+76\,a+84}}{2\,a+5}\right\}$$

При $-\frac{42}{17}<a<-2$ дійсних коренів рівняння (9) не має.

2) $a = -\frac{5}{2}$;

x= -2.

Для реалізації варіанту розв'язку L[7] системи (7) програма має вигляд:

Програма 2.

$k := 30 : i := 1 :$

while $i \le 30$ **do** $y := rand(-2..2) : z := rand(1..2) :\ b2 := y(\,); k1 := y(\,); k3 := y(\,);$

while $b2 \cdot k1 \cdot k3 = 0$ **do** $b2 := y(\,); k1 := y(\,); k3 := y(\,)$ **end do**;

$q := z(\,); m := z(\,); b1 := \frac{q\,(b2\,k1\,k3 + m)}{k3\,m}; b3 := \frac{b2\,k3\,q}{m} : k2 := -\frac{m}{q} :$

while $b1 = 0$ **do** $q := z(\,); m := z(\,);\ b1 := \frac{q\,(b2\,k1\,k3 + m)}{k3\,m}$; **end do**;

if $(-4\,k1\,k3 + k2^2)(-4\,b1\,k3 + 2\,b2\,k2 - 4\,b3\,k1) \cdot (-4\,b1\,b3 + b2^2) \ne 0$

and not$(divide(k1 \cdot a + b1, k2 \cdot a + b2))$ **then**

$print(i\ варіант);\ print((k1 \cdot a + b1) \cdot x^2 + (k2 \cdot a + b2) \cdot x + k3 \cdot a + b3 = 0) : i := i + 1 :$

end if: **end do**:

$$варіант$$
$$(-2\,a - 2)\,x^2 + (-a + 1)\,x + a + 1 = 0$$
$$2\ варіант$$
$$(-a - 3)\,x^2 + (-a + 2)\,x - a - 2 = 0$$
$$3\ варіант$$
$$\left(2\,a + \frac{3}{2}\right)x^2 + (-2\,a + 2)\,x - 2\,a - 2 = 0$$
$$4\ варіант$$
$$(a - 3)\,x^2 + \left(-\frac{1}{2}\,a - 2\right)x + 2\,a - 8 = 0$$

Можна для самостійної індивідуальної роботи (чи тестування) пропонувати ще такі завдання на основі розв'язку L[8] системи (6).

$$варіант$$
$$\left(\frac{3}{4}\,a - 6\right)x^2 + (a + 1)\,x - a + 2 = 0$$
$$2\ варіант$$
$$\left(-\frac{3}{4}\,a - \frac{3}{2}\right)x^2 + (2\,a - 2)\,x - a + 2 = 0$$
$$3\ варіант$$
$$\left(\frac{3}{8}\,a - \frac{5}{8}\right)x^2 + (-a + 2)\,x - 2\,a + 2 = 0$$
$$4\ варіант$$
$$\left(-\frac{3}{8}\,a - \frac{3}{8}\right)x^2 + (-a - 2)\,x + 2\,a - 2 = 0$$

2. Конструювання систем лінійних рівнянь.

За основу конструювання системи лінійних рівнянь (СЛР) з двома параметрами можна взяти метод Гауса чи значення основного та допоміжних визначників системи.

Позначимо через A0, A1, A2, A3 – головний та допоміжні матриці системи трьох рівнянь з трьома невідомими x1, x2 і x3. Розширену матрицю системи, котру будемо генерувати випадковим чином, позначимо через A:

$$A := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \end{bmatrix}; \tag{10}$$

Розташуємо параметри a і в розширеній матриці (1) так, щоб головний і допоміжні визначники стосовно a і в були многочленами не вище другого порядку, що приведе до системи нелінійних рівнянь другого порядку. Опишемо процес конструювання СЛР з умовою, що вона може мати один або безліч розв'язків у вигляді алгоритму, котрий буде реалізовуватися в середовищі Maple в інтерактивному режимі.

Алгоритм_1 конструювання СЛР з двома параметрами в середовищі Maple, котра може мати єдиний розв'язок або безліч розв'язків.

1. Генеруємо розширену матрицю СЛР:

$$A := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \end{bmatrix};$$

2. Присвоюємо деяким елементам матриці A значення параметрів a і в:

$$A[1,1] := a : A[3,1] := b : A[2,3] := a : A[2,4] := a :$$

3. Отримаємо систему рівнянь з параметрами, з головною матрицею

$$A = \begin{bmatrix} a & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & a & a \\ b & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \end{bmatrix}$$

4. Виділяємо з розширеної матриці A головну матрицю A0 та допоміжні матриці A1, A2, A3 (d0, d1, d2, d3 визначники відповідних матриць):
   4.1. Виділяємо матрицю A0.
   4.2. Міняємо місцями у матриці A перший стовпчик з останнім.
   4.3. Виділяємо матрицю A1.
   4.4. Міняємо місцями у матриці A другий стовпчик з останнім.
   4.5. Виділяємо матрицю A2.
   4.6. Міняємо місцями у матриці A третій стовпчик з останнім.
   4.7. Виділяємо матрицю A3.
5. Обчислюємо визначники d0, d1, d2, d3 матриць A0, A1, A2, A3, котрі містять параметри a і в:
6. Розв'язуємо систему рівнянь відносно параметрів a і в,

$$\{d0 = 0, d1 = 0, d2 = 0, d3 = 0\} \tag{11}$$

розв'язки котрої (якщо вони існують) забезпечать існування безлічі розв'язків СЛР.

7. Вводимо вектор невідомих

$$x := Vector(3, [x1, x2, x3]) :$$

8. Записуємо систему рівнянь з двома параметрами, яка матиме за певних значень параметрів і при певних обмеженнях на коефіцієнти безліч розв'язків.

Наступна програма розв'язує СЛР з двома параметрами у загальному вигляді, що водночас є основою конструювання СЛР з двома параметрами для випадків існування безлічі розв'язків, одного розв'язку, відсутності розв'язків.

Програма_1 розв'язування СЛР у загальному вигляді за умови, щоб вона мала безліч розв'язків:

$with(LinearAlgebra) : i := 1 : unassign('a','b','c','A','P') :$

$$A := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \end{bmatrix};$$

$A[1,1] := a : A[3,1] := b : A[2,3] := a : A[2,4] := a :$
$'A' = A;$
$A0 := SubMatrix(A, [1..3], [1..3]);$
$A01 := ColumnOperation(A, [1,4]);$
$A1 := SubMatrix(A01, [1..3], [1..3]);$

$A02 := ColumnOperation(A, [2,4]);$
$A2 := SubMatrix(A02, [1..3], [1..3]);$
$A03 := ColumnOperation(A, [3,4]);$
$A3 := SubMatrix(A03, [1..3], [1..3]);$

$d0 := collect(Determinant(A0), [a, b]);$
$d1 := collect(Determinant(A1), [a, b]);$
$d2 := collect(Determinant(A2), [a, b]);$
$d3 := collect(Determinant(A3), [a, b]);$

$Q := A0.x : c := SubMatrix(A, [1..3], [4]) :$
$print(Варіант\ \ i) :$
for k **from** 1 **by** 1 **to** 3 **do** $print(Q[k] = c[k, 1])$ **end do**:

$L := solve(\{d0 = 0, d1 = 0, d2 = 0, d3 = 0\}, \{a, b\}); \mathrm{assign}(L) :$
$print('d2' = simplify(d2)); print('d3' = simplify(d3));$
$'A' = A;$
$x := Vector(3, [x1, x2, x3]) :$

$Q := A0.x : c := SubMatrix(A, [1..3], [4]) :$
$print(Варіант\ \ i) :$
for k **from** 1 **by** 1 **to** 3 **do** $print(Q[k] = c[k, 1])$ **end do**:

$print(Відповідь) :$
$\mathrm{P} := LinearSolve(SubMatrix(A, [1..3], [1..3]), SubMatrix(A, [1..3],$
$[4]));$

Результати роботи програми_1.

$$A0 := \begin{bmatrix} a & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & a \\ b & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$A01 := \begin{bmatrix} m_{1,4} & m_{1,2} & m_{1,3} & a \\ a & m_{2,2} & a & m_{2,1} \\ m_{3,4} & m_{3,2} & m_{3,3} & b \end{bmatrix}$$

$$A1 := \begin{bmatrix} m_{1,4} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ a & m_{2,2} & a \\ m_{3,4} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$A02 := \begin{bmatrix} a & m_{1,4} & m_{1,3} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & a & a & m_{2,2} \\ b & m_{3,4} & m_{3,3} & m_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} a & m_{1,4} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & a & a \\ b & m_{3,4} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$A03 := \begin{bmatrix} a & m_{1,2} & m_{1,4} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & a & a \\ b & m_{3,2} & m_{3,4} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} a & m_{1,2} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & a \\ b & m_{3,2} & m_{3,4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} d0 := -m_{3,2}a^2 + \left(b\,m_{1,2} + m_{2,2}m_{3,3}\right)a - m_{1,3}m_{2,2}b - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} + m_{1,3}m_{2,1}m_{3,2} \\ d1 := \left(-m_{1,2}m_{3,3} + m_{1,2}m_{3,4} + m_{1,3}m_{3,2} - m_{1,4}m_{3,2}\right)a - m_{1,3}m_{2,2}m_{3,4} \\ + m_{1,4}m_{2,2}m_{3,3} \\ d2 := \left(m_{3,3} - m_{3,4}\right)a^2 + \left(-m_{1,3} + m_{1,4}\right)b\,a + m_{1,3}m_{2,1}m_{3,4} - m_{1,4}m_{2,1}m_{3,3} \\ d3 := -m_{3,2}a^2 + \left(b\,m_{1,2} + m_{2,2}m_{3,4}\right)a - m_{1,4}m_{2,2}b - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,4} + m_{1,4}m_{2,1}m_{3,2} \end{gathered} \tag{12}$$

$$L := \left\{ a = -\frac{m_{2,2}\left(m_{1,3}m_{3,4} - m_{1,4}m_{3,3}\right)}{m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,4} - m_{1,3}m_{3,2} + m_{1,4}m_{3,2}}, b = -\left(m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3}^2 - 2 m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3} m_{3,4} + m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,4}^2 - 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} + 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} + 2 m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} - 2 m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} + m_{1,3}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 - 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2}^2 + m_{1,3} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4} - m_{1,3} m_{2,2}^2 m_{3,4}^2 + m_{1,4}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 - m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3}^2 + m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4}\right) \Big/ \left(\left(m_{1,2} m_{1,3} m_{3,3} - m_{1,2} m_{1,3} m_{3,4} - m_{1,2} m_{1,4} m_{3,3} + m_{1,2} m_{1,4} m_{3,4} - m_{1,3}^2 m_{3,2} + 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2} - m_{1,4}^2 m_{3,2}\right) m_{2,2}\right) \right\}$$

$$d2 = 0$$
$$d3 = 0$$

$$A = \left[\left[-\frac{m_{2,2}\left(m_{1,3}m_{3,4} - m_{1,4}m_{3,3}\right)}{m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,4} - m_{1,3}m_{3,2} + m_{1,4}m_{3,2}}, m_{1,2}, m_{1,3}, m_{1,4}\right], \left[m_{2,1}, m_{2,2}, -\frac{m_{2,2}\left(m_{1,3}m_{3,4} - m_{1,4}m_{3,3}\right)}{m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,4} - m_{1,3}m_{3,2} + m_{1,4}m_{3,2}}, -\frac{m_{2,2}\left(m_{1,3}m_{3,4} - m_{1,4}m_{3,3}\right)}{m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,4} - m_{1,3}m_{3,2} + m_{1,4}m_{3,2}}\right], \left[-\left(m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3}^2 - 2 m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3} m_{3,4} + m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,4}^2 - 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} + 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} + 2 m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} - 2 m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} + m_{1,3}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 - 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2}^2 + m_{1,3} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4} - m_{1,3} m_{2,2}^2 m_{3,4}^2 + m_{1,4}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 - m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3}^2 + m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4}\right) \Big/ \left(\left(m_{1,2} m_{1,3} m_{3,3} - m_{1,2} m_{1,3} m_{3,4} - m_{1,2} m_{1,4} m_{3,3} + m_{1,2} m_{1,4} m_{3,4} - m_{1,3}^2 m_{3,2} + 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2} - m_{1,4}^2 m_{3,2}\right) m_{2,2}\right), m_{3,2}, m_{3,3}, m_{3,4}\right]\right]$$

Варіант

$$-\frac{m_{2,2}\left(m_{1,3}m_{3,4} - m_{1,4}m_{3,3}\right) x1}{m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,4} - m_{1,3}m_{3,2} + m_{1,4}m_{3,2}} + m_{1,2}x2 + m_{1,3}x3 = m_{1,4}$$

$$m_{2,1}x1 + m_{2,2}x2 - \frac{m_{2,2}\left(m_{1,3}m_{3,4} - m_{1,4}m_{3,3}\right) x3}{m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,4} - m_{1,3}m_{3,2} + m_{1,4}m_{3,2}} = -\frac{m_{2,2}\left(m_{1,3}m_{3,4} - m_{1,4}m_{3,3}\right)}{m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,2}m_{3,4} - m_{1,3}m_{3,2} + m_{1,4}m_{3,2}}$$

$$-\Big(\big(m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3}^2 - 2 m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3} m_{3,4} + m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,4}^2 - 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3}$$
$$+ 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} + 2 m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} - 2 m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4}$$
$$+ m_{1,3}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 - 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2}^2 + m_{1,3} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4} - m_{1,3} m_{2,2}^2 m_{3,4}^2 +$$
$$m_{1,4}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 - m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3}^2 + m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4}\big) x1\Big) \Big/ \Big(\big(m_{1,2} m_{1,3} m_{3,3}$$
$$- m_{1,2} m_{1,3} m_{3,4} - m_{1,2} m_{1,4} m_{3,3} + m_{1,2} m_{1,4} m_{3,4} - m_{1,3}^2 m_{3,2} + 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2} -$$
$$m_{1,4}^2 m_{3,2}\big) m_{2,2}\Big) + m_{3,2} x2 + m_{3,3} x3 = m_{3,4}$$

Відповідь

$$\Big[-\big(\_t_{1,1} m_{1,2}^2 m_{1,3} m_{2,1} m_{3,3}^2 - 2\,\_t_{1,1} m_{1,2}^2 m_{1,3} m_{2,1} m_{3,3} m_{3,4} + \_t_{1,1}$$
$$m_{1,2}^2 m_{1,3} m_{2,1} m_{3,4}^2 - 2\,\_t_{1,1} m_{1,2} m_{1,3}^2 m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} + 2\,\_t_{1,1} m_{1,2} m_{1,3}^2 m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4}$$
$$+ 2\,\_t_{1,1} m_{1,2} m_{1,3} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} - 2\,\_t_{1,1} m_{1,2} m_{1,3} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} + \_t_{1,1}$$
$$m_{1,3}^3 m_{2,1} m_{3,2}^2 - 2\,\_t_{1,1} m_{1,3}^2 m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2}^2 - \_t_{1,1} m_{1,3}^2 m_{2,2}^2 m_{3,4}^2 + \_t_{1,1} m_{1,3}$$
$$m_{1,4}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 + 2\,\_t_{1,1} m_{1,3} m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4} - \_t_{1,1} m_{1,4}^2 m_{2,2}^2 m_{3,3}^2 -$$
$$m_{1,2}^2 m_{1,4} m_{2,1} m_{3,3}^2 + 2 m_{1,2}^2 m_{1,4} m_{2,1} m_{3,3} m_{3,4} - m_{1,2}^2 m_{1,4} m_{2,1} m_{3,4}^2$$
$$+ 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} - 2 m_{1,2} m_{1,3} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} - 2 m_{1,2}$$
$$m_{1,4}^2 m_{2,1} m_{3,2} m_{3,3} + 2 m_{1,2} m_{1,4}^2 m_{2,1} m_{3,2} m_{3,4} - m_{1,3}^2 m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2}^2 + m_{1,3}^2 m_{2,2}^2$$
$$m_{3,4}^2 + 2 m_{1,3} m_{1,4}^2 m_{2,1} m_{3,2}^2 - 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3} m_{3,4} - m_{1,4}^3 m_{2,1} m_{3,2}^2 + m_{1,4}^2$$
$$m_{2,2}^2 m_{3,3}^2\big) \Big/ \Big(\big(m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3} - m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,4} - m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2}$$
$$+ m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} + m_{1,3} m_{2,2}^2 m_{3,4} - m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3}\big) \big(m_{1,2} m_{3,3} - m_{1,2} m_{3,4}$$
$$- m_{1,3} m_{3,2} + m_{1,4} m_{3,2}\big)\Big)\Big],$$
$$\Big[\big[\_t_{1,1}\big]\Big]$$

При іншій конфігурації розташування параметрів a і в у матриці (10) одержимо іншу систему (12) для визначення значень параметрів a і в.

Наприклад:

$$A = \begin{bmatrix} m_{1,1} & b & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & a & a \\ b & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Тоді

$$P := \Big[\Big[\Big(\big(\_t_{1,1} m_{1,2} m_{1,3} m_{3,3} - \_t_{1,1} m_{1,2} m_{1,4} m_{3,3} - \_t_{1,1} m_{1,3}^2 m_{3,2} + \_t_{1,1} m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2}$$
$$- m_{1,2} m_{1,3} m_{3,4} + m_{1,2} m_{1,4} m_{3,4} + m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2} - m_{1,4}^2 m_{3,2}\big) m_{2,2}\Big) \Big/ \Big($$
$$m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,3} - m_{1,2}^2 m_{2,1} m_{3,4} - m_{1,2} m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} + m_{1,2} m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2} + m_{1,3}$$
$$m_{2,2}^2 m_{3,4} - m_{1,4} m_{2,2}^2 m_{3,3}\Big)\Big],$$

система (12) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
d0 &:= \left(b^2 - m_{1,1} m_{3,2}\right) a + \left(-m_{1,3} m_{2,2} - m_{2,1} m_{3,3}\right) b + m_{1,1} m_{2,2} m_{3,3} + m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} \\
d1 &:= \left(\left(-m_{3,3} + m_{3,4}\right) b + m_{1,3} m_{3,2} - m_{1,4} m_{3,2}\right) a - m_{1,3} m_{2,2} m_{3,4} + m_{1,4} m_{2,2} m_{3,3} \\
d2 &:= \left(\left(-m_{1,3} + m_{1,4}\right) b + m_{1,1} m_{3,3} - m_{1,1} m_{3,4}\right) a + m_{1,3} m_{2,1} m_{3,4} - m_{1,4} m_{2,1} m_{3,3} \\
d3 &:= \left(b^2 - m_{1,1} m_{3,2}\right) a + \left(-m_{1,4} m_{2,2} - m_{2,1} m_{3,4}\right) b + m_{1,1} m_{2,2} m_{3,4} + m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2}
\end{aligned} \tag{14}$$

Розв’язок системи (14) з матрицею (13) буде таким

$$\begin{aligned}
L := \Big\{ a = -\big(& m_{1,3}^2 m_{2,2} m_{3,4} - m_{1,3} m_{1,4} m_{2,2} m_{3,3} - m_{1,3} m_{1,4} m_{2,2} m_{3,4} \\
&+ m_{1,3} m_{2,1} m_{3,3} m_{3,4} - m_{1,3} m_{2,1} m_{3,4}^2 + m_{1,4}^2 m_{2,2} m_{3,3} - m_{1,4} m_{2,1} m_{3,3}^2 \\
&+ m_{1,4} m_{2,1} m_{3,3} m_{3,4}\big) \Big/ \big(m_{1,1} m_{3,3}^2 - 2 m_{1,1} m_{3,3} m_{3,4} + m_{1,1} m_{3,4}^2 - m_{1,3}^2 m_{3,2} \\
&+ 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2} - m_{1,4}^2 m_{3,2}\big), b \\
&= \frac{m_{1,1} m_{2,2} m_{3,3} - m_{1,1} m_{2,2} m_{3,4} + m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} - m_{1,4} m_{2,1} m_{3,2}}{m_{1,3} m_{2,2} - m_{1,4} m_{2,2} + m_{2,1} m_{3,3} - m_{2,1} m_{3,4}} \Big\}
\end{aligned}$$

Як видно, системи (12) і (14) нелінійні, розв’язки яких можуть бути раціональними, ірраціональними, комплексними і взагалі розв’язків може не бути. У випадку (12) і (14) системи мають раціональні розв’язки. Вибір конфігурації розташування коефіцієнтів а і в у матриці (10) довільний, вибір раціональних розв’язків відбувається експертним шляхом (комп’ютерний експеримент з програмою_1) з урахуванням того, що у кожному доданку визначника матриці елементи матриці беруться тільки з одного рядка і з одного стовпця. Системи (12) і (14) матимуть єдиний розв’язок, якщо знаменники виразів, котрі визначають а і в, не будуть рівні нулю, що доцільно і достатньо для розв’язування задачі конструювання СЛР з двома параметрами. Тобто повинні виконуватися умови:

$$\begin{aligned}
& m_{1,2} m_{3,3} - m_{1,2} m_{3,4} - m_{1,3} m_{3,2} + m_{1,4} m_{3,2} \neq 0 \\
& \big(m_{1,2} m_{1,3} m_{3,3} - m_{1,2} m_{1,3} m_{3,4} - m_{1,2} m_{1,4} m_{3,3} + m_{1,2} m_{1,4} m_{3,4} - \\
& \quad m_{1,3}^2 m_{3,2} + 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2} - m_{1,4}^2 m_{3,2}\big) m_{2,2} \neq 0
\end{aligned} \tag{15}$$

для системи (12) і умови

$$\begin{aligned}
& m_{1,1} m_{3,3}^2 - 2 m_{1,1} m_{3,3} m_{3,4} + m_{1,1} m_{3,4}^2 - m_{1,3}^2 m_{3,2} + 2 m_{1,3} m_{1,4} m_{3,2} - \\
& \quad m_{1,4}^2 m_{3,2} \neq 0 \\
& m_{1,3} m_{2,2} - m_{1,4} m_{2,2} + m_{2,1} m_{3,3} - m_{2,1} m_{3,4} \neq 0
\end{aligned}$$

для системи (14).

Існування єдиного розв’язку для СЛР з розширеною матрицею (10) буде забезпечуватися умовою: не рівність нулю головного визначника системи

$$\begin{aligned}
d0 := b\left(a m_{1,2} - m_{1,3} m_{2,2}\right) - a^2 m_{3,2} + a m_{2,2} m_{3,3} - m_{1,2} m_{2,1} m_{3,3} \\
+ m_{1,3} m_{2,1} m_{3,2} \neq 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Рівняння (16) є рівнянням другого порядку відносно параметрів а і в. Геометрично – це еліпс (коло), гіпербола, парабола, пара паралельних прямих, пара прямих, що перетинаються, пара уявних прямих. Отже, усі точки (а, в) площини, що не належать лінії (16) і відповідні значення параметрів а і в будуть задовольняти умову: при цих значеннях параметрів СЛР з головною матрицею (10) матиме єдиний розв'язок.

Умовою того, що СЛР не матиме розв'язку є рівність нулю головного визначника системи і нерівність нулю хоча б одного з допоміжних визначників, що в термінах математичної логіки можна записати так:

$$d0 = 0 \wedge (d1 \neq 0 \vee d2 \neq 0 \vee d3 \neq 0) \tag{17}$$

На основі алгоритму_1 і програми _1 створимо *програму_2 конструювання достатньої кількості варіантів СЛР з двома параметрами*.

Програма_2.

```
with(LinearAlgebra) : with(plots) : i := 1 :
while i ≤ 20 do unassign('a','b','c','A') : A := RandomMatrix(3, 4, generator = -3 ..3);
A[1, 1] := a : A[3, 1] := b : A[2, 3] := a : A[2, 4] := a :
 A0 := SubMatrix(A, [1 ..3], [1 ..3]);
 A01 := ColumnOperation(A, [1, 4]);

 A3 := SubMatrix(A03, [1 ..3], [1 ..3]);
 d0 := Determinant(A0); d1 := Determinant(A1);
d2 := Determinant(A2); d3 := Determinant(A3);
 ca := coeff(d1, a) :

if ca ≠ 0 then L1 := solve(d1 = 0, {a}); assign(L1) : end if:  cb := simplify(coeff(d0, b)) :
if cb ≠ 0 then L0 := solve(d0 = 0, {b}) : assign(L0) : end if:
x := Vector(3, [x1, x2, x3]) : Q := A0x : c := SubMatrix(A, [1 ..3], [4]) : s := 1 :
for m from 1 by 1 to 3 do      for n from 1 by 1 to 4 do      s := s·A[m, n] : end do:  end do:
 if s·ca·cb ≠ 0 and frac(a) = 0 and frac(b) = 0 then
print(Варіант i) :
 unassign('a','b','x') : x := Vector(3, [x1, x2, x3]) :

 A[1, 1] := a : A[3, 1] := b : A[2, 3] := a : A[2, 4] := a :
 Q1 := SubMatrix(A, [1 ..3], [1 ..3]) :
 Q12 := Q1x :
 c1 := SubMatrix(A, [1 ..3], [4]) :

for k from 1 by 1 to 3 do  print(Q12[k] = c1[k, 1])  end do:
 P1 := LinearSolve(SubMatrix(A, [1 ..3], [1 ..3]), SubMatrix(A, [1 ..3], [4])) :
  print(Відповідь) :
  print(P1) : z := Determinant(Q1) :
 i := i + 1 :
   end if: end do:
```

Варіант

$$a\,x1 + 2\,x2 + x3 = 3$$
$$a\,x3 + 3\,x1 - 3\,x2 = a$$
$$b\,x1 - 2\,x2 - 2\,x3 = -2$$

2 *Варіант*

$$a\,x1 - 3\,x2 + 3\,x3 = -3$$
$$a\,x3 + 3\,x1 + 3\,x2 = a$$
$$b\,x1 + x2 + x3 = 2$$

3 Варіант

$$a\,x1 - x2 - x3 = -3$$
$$a\,x3 - 3\,x1 + x2 = a$$
$$b\,x1 - 3\,x2 + 3\,x3 = 3$$

4 Варіант

$$a\,x1 + x2 + x3 = 2$$
$$a\,x3 - 3\,x1 + 3\,x2 = a$$
$$b\,x1 - 3\,x2 - x3 = 2$$

Розглянемо приклад.

Розв'язати СЛР

$$\begin{gathered} a\,x1 - x2 - x3 = 3 \\ a\,x3 - 3\,x1 - 3\,x2 = a \\ b\,x1 - x2 + 3\,x3 = 1 \end{gathered} \qquad (18)$$

з розширеною матрицею

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & a & a \\ b & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

У загальному випадку розв'язок буде таким:

Відповідь

$$\begin{bmatrix} \dfrac{6\,(a-5)}{a^2 - a\,b - 9\,a - 3\,b - 12} \\ \dfrac{2\,(a^2 + 2\,a\,b + 15)}{a^2 - a\,b - 9\,a - 3\,b - 12} \\ \dfrac{a^2 - a\,b - 3\,a + 9\,b + 6}{a^2 - a\,b - 9\,a - 3\,b - 12} \end{bmatrix}$$

Умовою того, що розв'язків системи (18) буде безліч, є

$$d0 = 0,\ d1 = 0,\ d2 = 0,\ d3 = 0 \qquad (19)$$

де

$$d0 = a^2 - a\,b - 9\,a - 3\,b - 12$$
$$d1 = 6\,a - 30,\ d2 = 2\,a^2 + 4\,a\,b + 30,\ d3 = a^2 - a\,b - 3\,a + 9\,b + 6$$

звідки

$$a = 5,\ b = -4$$

Отримаємо систему

$$5\,x1 - x2 - x3 = 3$$
$$-3\,x1 - 3\,x2 + 5\,x3 = 5$$
$$-4\,x1 - x2 + 3\,x3 = 1$$

Відповідь

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\,\_t910_{1,\,1} \\ -\frac{17}{9} + \frac{11}{9}\,\_t910_{1,\,1} \\ \_t910_{1,\,1} \end{bmatrix}$$

Геометрично це означає, що всі лінії (19) повинні мати єдину спільну точку, що й зображено на малюнку 1.

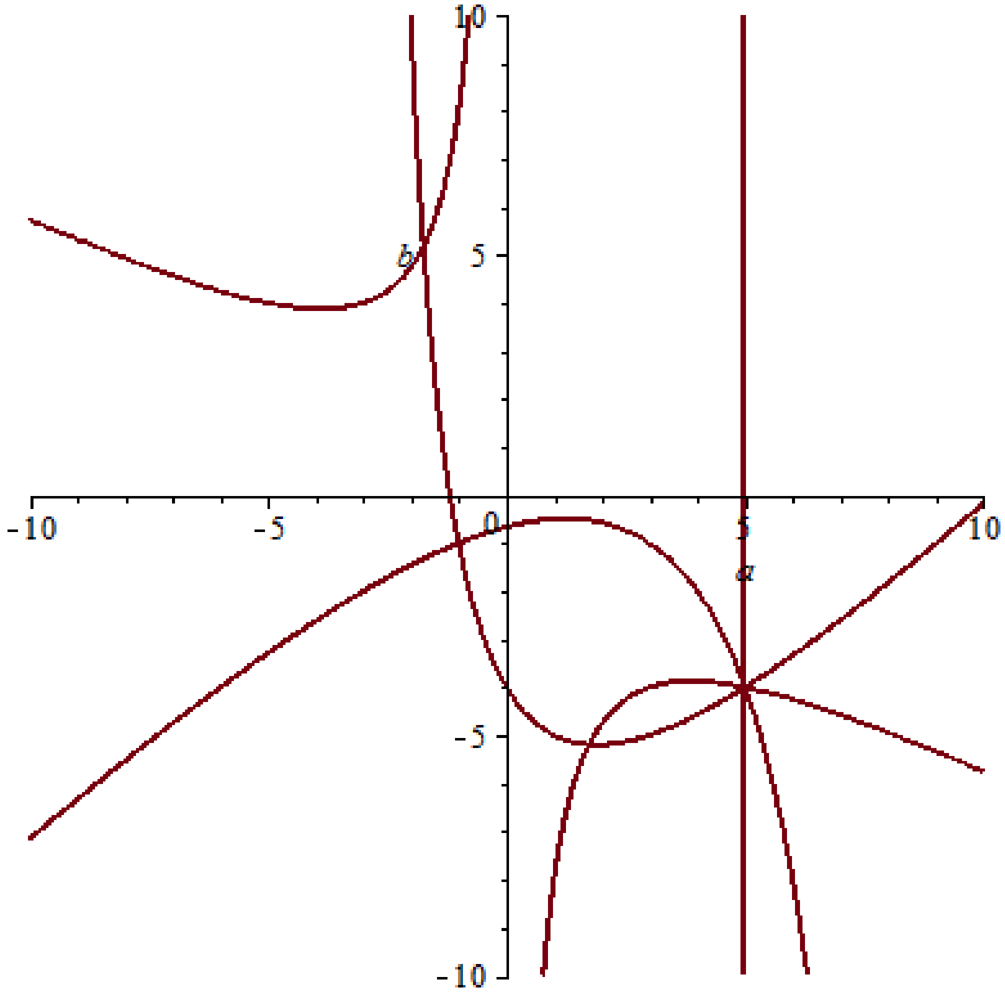

Рис.1. Геометрична ілюстрація розвязку системи (19)

Для того, щоб *система мала єдиний розв'язок, потрібно щоб* $d0 \neq 0$.

Система сконструйована так, що вона при певних значеннях параметрів може мати безліч розв'язків або єдиний розв'язок. Стосовно того, щоб система не мала розв'язків, то потрібна дещо інша математична модель на основі логічного виразу (17). Тоді система (19) не повинна мати жодного розв'язку і визначник основної матриці системи повинен бути рівним нулю, а один з допоміжних визначників не був рівним нулю.

Подальші дослідження в напрямку розвитку наведеної проблематики можуть стосуватися проблем конструювання рівнянь і систем інших видів з параметрами.

Висновки. Конструювання математичних завдань певного виду з заздалегідь заданими властивостями в певному ІКТ-середовищі приводить до формування знань і умінь з математичного моделювання, теорії алгоритмів, програмування, що сприяє формуванню інтегративних знань і умінь в учнів чи студентів. Окрім того, технологія такого конструювання дозволяє створити достатню кількість варіантів однотипних задач, зокрема задач з параметрами, котрі все більше входять до завдань ЗНО. Наведена технологія конструювання математичних завдань упроваджена в курси «Вибрані задачі математики» (4-й курс) і «Елементарна математика» (3-й курс) ЦУДПУ ім. В.Винниченка Рекомендуємо джерела [1-7].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гончаренко С.У. (2008). Фундаментальність освіти як дидактичний принцип. *Шлях освіти*, 1 (47), 2 – 6.
2. Кушнір В.А. Дослідницька діяльність у фундаментальній професійній підготовці майбутніх учителів. Наукові записки, Педагогічні науки, Кіровоградський РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 150, 23-28.
3. Кушнір В.А. (2014). Конструювання навчальних завдань з математики: математичні моделі, алгоритми, програми. Інноваційні технології в освіті, 18, 030-041.
4. Кушнір В.А. (2014). Проблеми поєднання фундаментального і інноваційного при вивченні математики у вищих навчальних закладах. Витоки педагогічної майстерності: Зб. наук. праць, Полт. педаг. універ. ім.В.Г.Короленка, 20, 161 – 172.
5. Кушнір В.А. (2015). Тенденції та чинники розвитку математичної освіти та їх відображення в змісті підручників. Проблеми сучасного підручника, зб. наук. праць. К.: Педагогічна думка, 15, 317 – 327.
6. Семеріков С.О. (2009). Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі: Монографія. Кривий Ріг: Мінерал, К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 284–339.
7. Bernardin L., Chin P., DeMarco P., Geddes R., Hare D., Heal K, ... Workortter S.M. (2011). Maple Programming Guide. Canada, Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Honcharenko S.U. (2008). Fundamentality of Education as Didactic Principle. *Shlyax osvity*, 1 (47), 2-6.
2. Kushnir V.A. (2016). Research activity in the fundamental professional training of future teachers. *Naukovi zapysky. Seriya: Pedagogichni nauky*, 150, 23-28.
3. Kushnir V.A. (2014). Designing of educational tasks in mathematics: mathematical models, algorithms, programs. *Innovatsiyni tekhnolohiyi v osviti*, 18, 30-41.
4. Kushnir V.A. (2015). Problems of the combination of fundamental and innovative aspects in the study of mathematics in higher educational institutions. *Vytoky pedahohichnoyi maysternosti: Zb. nauk. prats'*, 20,161-172.
5. Kushnir V.A. (2015). Trends and factors in the development of mathematical education and their reflection in the content of textbooks. *Problemy suchasnoho pidruchnyka: zb. nauk. prats'*, 15, 317-327.
6. Semerikov S.O. (2009). Fundamentalization of teaching of computer science disciplines in high school: Monograph. Krivoy Rog, Mineral.

7. Bernardin L., Chin P., DeMarco P., Geddes R., Hare D., Heal K, ... Workortter S.M. (2011). Maple Programming Guide. Canada, Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc.

Стаття надійшла до редакції 11.11.2017.
The article was received 11 November 2017.

Vasyl Kushnir
Central Ukrainian State Pedagogical University named after Volodymyr Vynnychenko, Kropivnitsky, Ukraine

TECHNOLOGY OF CONSTRUCTING OF GUADRATIC EQUATIONS AND SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH PARAMETERS IN A MAPLE-MEDIUM

The problem of constructing quadratic equations and systems of equations with parameters using Maple-technology is studied. Today, the "learning tasks of reverse thinking" (V.A. Krutetsky) or simply "inverse problems" (P.M.Erdniev) are increasingly being introduced into the educational process. The tasks of constructing mathematical tasks in advance of a certain type and certain properties are inverse problems that unfold another aspect of the learning situation and thereby create a "surplus of its vision" (M.M. Bakhtin). The solution of inverse problems develops students' thinking, imagination and other higher mental functions. However, their introduction into the educational process is still insufficient. One of the reasons for this situation is the insufficient number of benefits with a sufficient number of variants of the same type of tasks. Especially it concerns the construction of problems with parameters. Designing in "manual mode" requires significant temporary cognitive, physical and other efforts, carries the risks of allowing technical and computational errors. In the days of the information society and the digital economy, there are all the possibilities to perform the chain of design actions in a certain ICT environment (we have a Maple-environment). It solves the resulted difficulties of construction, creates a new educational and information environment, allows to produce automatically a sufficient number of different versions of the same type of tasks.

Tasks with parameters require creativity from the students, non-standard approaches to the solution. Each task with parameters requires the creation of its own method and algorithm for solving and productive learning. The article is devoted to solving of the above problems.

Key words: technology, algorithm, system of linear equations, mathematical modulation.

Кушнир В. А.
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина

ТЕХНОЛОГИЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ В MAPLE-СРЕДЕ

Исследуются проблема конструирования квадратных уравнений и систем уравнений с параметрами с использованием Maple-технологии. Сегодня в учебный процесс все чаще внедряются «задачи обратного мышления» (В.А.Крутецкий) или просто «обратные задачи» (П.М.Эрдниев). Задачи конструирования математических заданий наперед определенного вида и определенными свойствами являются обратными задачами, которые разворачивают еще один аспект учебной ситуации и тем самым создают «излишек ее видения» (М.М.Бахтин). Решение обратных задач развивают в студентов или учеников мышление, воображение и другие высшие психические функции. Однако их внедрение в учебный процесс еще недостаточное. Одной из причин такой ситуации является недостаточное количество пособий с достаточным количеством вариантов однотипных заданий. Особенно это касается конструирования задач с параметрами. Конструирование в «ручном режиме» требует значительных временных когнитивных, физических и других затрат, несет в себе риски допущения технических и вычислительных ошибок. Во времена информационного общества и цифровой экономики имеются все возможности выполнять цепочки действий конструирования в определенной ИКТ-среде (у нас Meple-среда). Это в значительной степени решает приведенные трудности конструирования, создают новую учебно-информационную среду, позволяют в автоматическом режиме продуцировать достаточное количество различных вариантов однотипных заданий.

Задачи с параметрами требуют от субъектов учения творчества, нестандартных подходов к решению. Каждая задача с параметрами требует создание своего способа и алгоритма решения и продуктивного учения. Статья посвящена решению приведенных выше проблем.

Ключевые слова: технологии, алгоритм, система линейных уравнений, математическая модель.