

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Херсонський державний університет  
Кафедра готельно-ресторанної справи  
Кафедра професійної освіти



**Кострицький В.Г., Саух О.М.**

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

Практикум для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавр спеціальності 015.18 Професійна освіта (технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства), 015.20 Професійна освіта (транспорт) денної та заочної форм навчання

Херсон 2017

УДК 377. 1:378.22 (076)

**Кострицький В.Г., Саух О.М.**

Опір матеріалів: Практикум для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавр спеціальності 015.18 Професійна освіта (технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства), 015.20 Професійна освіта (транспорт) денної та заочної форм навчання / В.Г.Кострицький, О.М. Саух. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2017. - 112 с.

**Укладачі:** **Кострицький Віталій Григорович** - кандидат технічних наук, доцент кафедри готельно-ресторанної справи Херсонського державного університету;

**Саух Олександр Миколайович** – старший викладач кафедри професійної освіти Херсонського державного університету.

**Рецензенти:** **Букетов А.В.** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри транспортних технологій Херсонської державної морської академії;

**Слюсаренко Н. В.** – доктор педагогічних наук, професор загально університетської кафедри педагогіки, психології та й освітнього менеджменту Херсонського державного університету.

Обговорено на засіданні кафедри готельно-ресторанної справи  
Протокол № 13 від 03.04. 2017 р.

Розглянуто на засіданні науково-методичної ради факультету технологій та сфери обслуговування  
Протокол № 7 від 18.05. 2017 р.

Схвалено науково-методичною радою ХДУ  
Протокол № 5 від 19.06. 2017 р.

Рекомендовано до друку Вченою радою ХДУ  
Протокол № 15 від 26.06. 2017 р.

ISBN 978-482-630-120-5

© Кострицький В.Г., 2017

© Саух О.М., 2017

© ХДУ, 2017

## ПЕРЕДМОВА

Опір матеріалів являється прикладною інженерною наукою, що розв'язує задачі міцності і жорсткості умовних розрахункових моделей конструктивних елементів машин і споруд за допомогою простих розрахункових формул. Ці формули отримані за допомогою спрощених гіпотез та допущень про властивості матеріалів, з яких виготовлені елементи конструкції, характер деформування елементів конструкції та з використанням експериментальних даних, що являються основним джерелом для перевірки правомірності гіпотез.

У запропонованому циклі лабораторних робіт ставиться задача продемонструвати на основі експериментів можливість застосування розрахункових формул опору матеріалів в практичних розрахунках. Для цього проводиться порівняння результатів експериментальних і теоретичних значень тих чи інших величин.

Методичні вказівки до кожної лабораторної роботи містять: мету роботи, завдання, короткі теоретичні відомості, опис лабораторної установки, методику і послідовність проведення вимірювань і їх обробки, контрольні запитання для самоперевірки, а також посилання на список рекомендованої та використаної літератури із зазначенням сторінок, на яких викладений відповідний теоретичний матеріал.

Перед кожним лабораторним заняттям студент повинен опрацювати теоретичний матеріал за конспектом лекцій, рекомендованою літературою та теоретичними положеннями, що викладені у методичних вказівках.

Умови допуску до виконання лабораторної роботи:

1. Студент повинен опрацювати методичні рекомендації до виконання роботи і записати до бланку звіту або на окремому аркуші паперу, чи в зошиті (для випадку попереднього оформлення звіту у чорновому варіанті):

- номер і назву роботи;
- мету роботи;
- накреслити таблиці для запису результатів експерименту.

2. Студент повинен вміти пояснити послідовність виконання роботи.

До виконання наступної за планом роботи допускаються тільки ті студенти, які оформили і захистили звіт з попередньої виконаної роботи.

Зміст звіту вказано у відповідному розділі вказівок до виконання лабораторної роботи.

Звіт з виконаної лабораторної роботи оформлюється на аркушах паперу формату А4 як текстовий документ у відповідності з встановленими вимогами. Допускається використання аркушів учнівського зошита в «клітинку» розміром 210x297мм або близького розміру. Усі записи виконуються чорнилом або пастою одного кольору (чорного, синього або фіолетового) на одній стороні аркуша. Текстова частина звіту може бути надрукована: міжрядковий інтервал – 1,5; усі поля – 20мм.

Розрахункові формули записуються спочатку у символічному вигляді, далі в них підставляють цифрові значення фізичних величин, а потім приводять відповіді з обов'язковим значенням розмірності.

Наприклад:  $F_x = F \cdot \sin \alpha = F \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}$ .

Обчислення виконується з точністю до трьох знаків після коми.

Необхідні графічні побудови виконуються олівцем.

Заповнені аркуші звіту брошуруються в загальній обкладинці з титульним аркушем. На титульному аркуші вказується позначення звіту згідно до вимог.

Викладач, приймаючи звіт з виконаної студентом роботи, з'ясовує розуміння суті роботи та рівень засвоєння відповідного теоретичного матеріалу і виставляє оцінку.

## ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ІЗ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

При експериментальних дослідженнях результати вимірів певних характеристик визначаються з певною похибкою. Різниця в результатах повторних вимірювань (розсіювання) являється результатом прояву ряду факторів, кожен з яких зумовлюється певними фізичними величинами, що впливають, а тому результати вимірювань є випадковою величиною з систематичними та випадковими складовими.

Джерелами похибок являються: конструктивні похибки, що виникають при проектуванні лабораторної установки; технологічні похибки, що виникають в процесі її виготовлення (відхилення розмірів і форми деталей, відхилення у відносному положенні деталей); експлуатаційні похибки, що виникають у процесі проведення лабораторної роботи. Суттєве значення також мають похибки від зміщення в зазорах рухомих елементів в напрямку руху. Відповідні похибки також вносяться як вимірювальними інструментами, так і особою, яка виконує вимірювання.

Систематичні похибки постійні за величиною та знаком або закономірно змінюються при повторних вимірюваннях однієї і тієї же фізичної величини. Систематичні похибки зумовлюються неточністю виготовлення і спрацюванням частин лабораторних установок та вимірювальних приладів, похибками настроювання вимірювальних приладів та установок тощо.

Метою виявлення систематичних похибок є їх вилучення або врахування. Під вилученням систематичних похибок розуміють зменшення їх значень до рівня окремих невеликих складових випадкової похибки. Не вилучені залишки систематичних похибок трактуються як випадкові.

Серед способів вилучення систематичних похибок найбільш поширеним є вилучення джерел похибок, переважно похибок установки.

Випадкові похибки являються непостійними за величиною та знаком. Передбачити заздалегідь їх значення і знак в кожному конкретному випадку

неможливо, так як вони не піддаються контролюванню. До цих похибок спричинюються неминучі коливання режиму вимірювання (вимірювальне зусилля, тертя в контактуючих елементах установки та вимірювальних приладів тощо), обмежена чутливість вимірювальних приладів, неточне встановлення елементів наладки установки при повторних вимірюваннях, різне оцінювання тією самою особою величин поділок шкали, непередбачені зміни властивостей засобів і умов вимірювання та властивостей органів чуття спостерігача тощо. Прояв випадкових похибок на відміну від систематичних не підкоряється закономірності, а присутність випадкових похибок (на відміну від систематичних) легко виявляється при повторних вимірюваннях фізичної величини, як деякий розкид результатів.

Вважається, що розсіяння значень випадкової величини, зміна якої залежить від великої кількості факторів, рівнозначних за впливом (коли жоден фактор не має переважного значення) підкоряється закону нормального розподілу ймовірностей (закону Гауса).

Сказане вище означає, що одного вимірювання недостатньо для оцінки фізичної величини. Для більшої впевненості в отриманому результаті необхідно виконувати багатократні вимірювання однієї і тієї ж величини.

Серед похибок розрізняють також грубі похибки та промахи. Грубою називають похибку, яка істотно перевищує сподівану для заданих умов. Грубі похибки виникають при неправильній установці вимірювального засобу відносно параметру, що вимірюється, при невірному відліку поділок по шкалах вимірювального засобу тощо.

Промахом являється результат вимірювання, отриманий внаслідок несправності засобу вимірювальної техніки, порушення правил його використання, помилкового відліку тощо.

Як грубі похибки, так і промахи вилучають з розгляду. Але якщо промахи є очевидними, то для виявлення грубих похибок використовують спеціальні статистичні критерії, тому що при обробці уже отриманих результатів

вимірювань доволіно відкидати окремі результати не можливо, так як це може привести до фіктивного підвищення точності результату вимірювань.

Так як при числі вимірювань  $n \geq 4$  ряд вимірювань може бути оброблений у відповідності з вимогами математичної статистики, то при чотирьох вимірюваннях і більше вимірювання можна вважати багатократним. За результат багатократного вимірювання звичайно приймають середнє арифметичне значення із окремих вимірювань

Середнє арифметичне є ефективною оцінкою результатів багатократних вимірювань для розподілів близьких до нормального, але чутливе до наявності грубих похибок. Цього впливу позбуваються за допомогою оброблення результатів згідно методики перевірки для випадку нормального розподілу значень вимірюваної величини, що приведена в ГОСТ 11.002-73 «Прикладная статистика. Правила оценки аномальности результатов наблюдений»

Як сумнівний результат вимірювань приймають найбільший і найменший із отриманих значень при повторних вимірюваннях того самого параметру.

**Зауваження:** Якщо значення  $x_{\min}$  або  $x_{\max}$  дуже відрізняються від інших значень результатів вимірювань – промах (через невірний відлік чи запис показів, збою показів приладу тощо), то цей результат необхідно виключити з розглянутої сукупності результатів вимірювань, не піддаючи ніяким перевіркам, в результатах спостережень їх не враховують.

Для перевірки, що результат вимірювань є грубою похибкою, а не значною випадковою, запропоновано декілька статистичних критеріїв вилучення грубих похибок (Райта, Романовського, Смирнова, Діксона, Греббса та інших).

При перевірці сумнівного (максимального чи мінімального) результату вимірювань, результати, що відповідають нерівності

$$|x_i^c - \bar{x}| \geq t_\beta \cdot S, \quad (1)$$

приймають за грубі похибки та вилучають з подальшого розгляду.

В цьому виразі

$x_i^c$  - сумнівний (максимальний  $x_{\max}^c$  або мінімальний  $x_{\min}^c$ ) результат вимірювання, що перевіряється;

$\bar{x}$  - середній результат вимірювань (середньоарифметичне значення вимірюваної величини);

$S$  - емпіричне середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань;

$t_\beta$  - критерій наявності грубої похибки, що залежить від обсягу вибірки (число результатів вимірювань) та прийнятого рівня значимості  $\alpha$ , як правило, похибка результатів вимірювань оцінюється при довірчій вірогідності  $\beta=0,95$ , тобто рівні значимості  $\alpha=0,05$ .

При виконанні запропонованих лабораторних робіт перевірка наявності грубих похибок у отриманих результатах здійснюється за допомогою критерію Смирнова (табл. 1).

Таблиця 1

**Значення критерію  $t_\beta$  в залежності від числа результатів вимірювань при рівні значимості  $\alpha=0,05$**

Число результатів вимірювань, $n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_\beta$	1,15	1,46	1,67	1,82	1,94	2,03	2,11	2,18

Середній результат вимірювань визначається за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2)$$

де  $n$  - число результатів вимірювань;

$x_i$  - результат вимірювань.

Емпіричне середнє квадратичне відхилення результатів вимірювання визначають за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (3)$$



Якщо статистична перевірка підтверджує, що результат вимірювання різко відрізняється (являється грубою похибкою), то його вилучають з подальшого розгляду.

**Зауваження:** для підвищення точності обчислень треба врахувати, що вантажі, які входять до комплекту лабораторних установок, мають номінальну вагу 1кГс; 2кГс. Це відповідно становить 9,81Н; 19,62Н. Допускається вважати, як 10Н; 20Н.

## **Лабораторна робота 1**

### **ВИЗНАЧЕННЯ ВИДІВ ДЕФОРМАЦІЙ**

#### **Мета роботи:**

- ознайомитися з основними гіпотезами науки про опір матеріалів;
- ознайомитися із застосуванням методу перерізів для визначення внутрішніх сил;
- навчитися визначати види деформації за характерними змінами форм стержня, що досліджується.

#### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для визначення видів деформації стержня – 1 шт.
2. Вимірювальні інструменти (лінійка, штангенциркуль) – 1 шт.
3. Набір вантажів – 1 комплект.

#### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Вивчити основні гіпотези науки про опір матеріалів.
2. Визначити види деформації за характерними змінами форми стержня, що досліджується, для різних схем навантаження.
3. Визначити для тих же схем навантаження види деформацій, використовуючи метод перерізів.

## Теоретичні відомості

У процесі експлуатації машин та споруд їхні елементи (тіла), які функціонально пов'язані між собою та виконують певне технічне завдання (стержні, балки тощо) так чи інакше беруть участь у роботі конструкції й зазнають дії різних сил – навантажень. Під дією зовнішніх сил всі тверді матеріальні тіла деформуються, тобто їх форма і розміри змінюються, а в деяких випадках відбувається руйнування конструкції. Величина і характер деформації значною мірою залежать від величини і характеру прикладення зовнішніх навантажень, а також від матеріалу, розмірів і форм самої конструкції та її елементів.

Деформування елементів конструкції відбувається внаслідок дії на них зовнішніх сил (навантажень) – сил взаємодії між розглядуваним елементом конструкції та пов'язаними з ним тілами.

Внаслідок навантажування виникають внутрішні сили – сили взаємодії між мислено розділеними частинами матеріального тіла або сили опору матеріалів; вони зрівноважують дію зовнішніх сил. Саме внутрішні сили і пов'язані з ними зміни розмірів та форми елементів конструкції становлять предмет вивчення в опорі матеріалів.

У багатьох елементах конструкцій довжина значно (тобто щонайменше на порядок) перевищує розміри поперечного перерізу. Спрощену геометричну модель таких тіл, їх геометричну схему називають стержнем. Стержень є об'єктом вивчення в опорі матеріалів.

Наука про опір матеріалів рекомендує загальні теоретичні основи розрахунку елементів конструкції базуючись на певних припущеннях та гіпотезах щодо властивостей матеріалів та характеру деформацій, основними з яких є:

- про суцільність матеріалу – матеріал суцільно заповнює весь об'єм тіла;
- про однорідність та ізотропність – в будь-якому об'ємі та в будь-якому напрямі властивості матеріалу вважаються однаковими;
- про ідеальну пружність матеріалу – при розвантаженні тіло повністю

відновлює початкову форму і розміри;

- про малість деформації – деформації тіла і зв'язані з ними переміщення точок елемента конструкції незначні порівняно з розмірами тіла. Це дає змогу нехтувати змінами в розташуванні зовнішніх сил відносно окремих частин тіла, що визвано деформацією;

- про лінійну деформацію тіл – приймається лінійна залежність між величинами сил та деформаціями, що викликані ними;

- до прикладання навантажень у матеріалі немає внутрішніх напружень;

- про плоскі перерізи – плоскі поперечні перерізи, що проведені в тілі до деформації, залишаються при деформації плоскими і нормальними до осі;

- принцип незалежності дії сил – результат дії кількох сил не залежить від послідовності навантаження ними даної конструкції і дорівнює сумі результатів дії кожної сили окремо.

Для знаходження внутрішніх сил в опорі матеріалів застосовується метод перерізів. Метод перерізів полягає в наступному: стержень у місці, де треба знайти внутрішні зусилля, подумки розсічемо поперечною площиною на дві частини, одна з частин відкидається. Замінюємо дію відкинutoї частини на залишену внутрішніми силами, що діють по поверхні перерізу. Залишена частина розглядається як самостійне тіло, що знаходиться у рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил.

Суть методу перерізів полягає у тому, що внутрішній силовий фактор (сила, момент) у перерізі знаходиться як алгебраїчна сума всіх сил, взятих з одного боку від цього перерізу.

Слід зазначити, що внутрішні сили, що діють по перерізу, що належить залишеній частині тіла, відповідно до третього закону Ньютона дорівнюють за модулем та протилежні за напрямом внутрішнім силам, що діють по перерізу, який належить частині тіла, що відкинута. Таким чином, розглядаючи рівновагу будь-якої із двох частин розсіченого тіла, ми отримаємо одне і те ж значення внутрішніх сил (рис. 1.1).

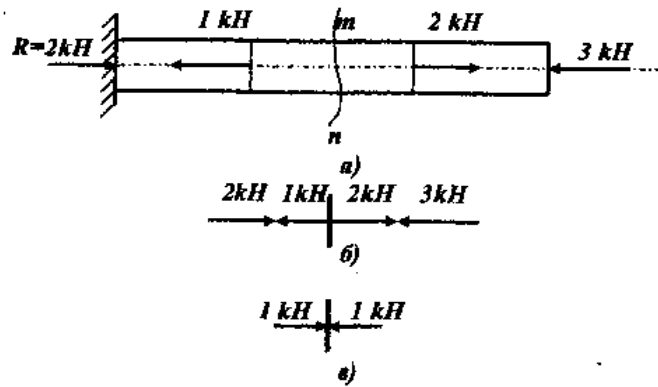


Рис. 1.1. Ілюстрація методу перерізів

При заміні дії відкинутої частини тіла на залишену внутрішніми силами треба мати на увазі, що ми не зможемо знайти закон розподілу внутрішніх сил по перерізу. Внутрішні сили діють в усіх точках перерізу, являючись розподіленим навантаженням, інтенсивність внутрішніх сил у різних точках перерізу може бути різною залежно від форми тіла і характеру зовнішніх навантажень. Але з теоретичної механіки відомо, що систему будь-яких сил, а значить і сил внутрішніх, можна звести до головного вектора  $R$ , що прикладений в центрі ваги перерізу і головного моменту  $M$ , що зрівноважують систему зовнішніх сил, які прикладені до залишеної частини стержня (рис. 1.2)

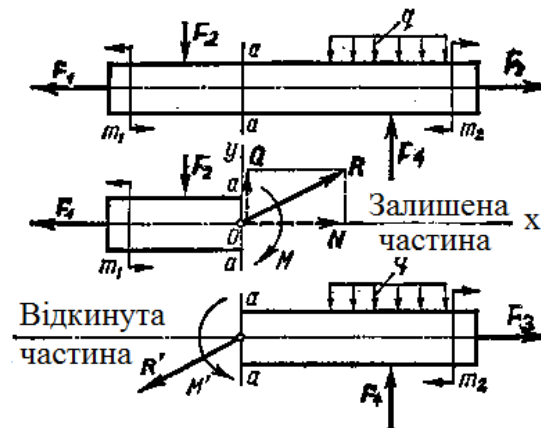


Рис. 1.2. Внутрішні силові фактори, що діють в перерізі стержня для плоскої системи зовнішніх сил

Проекції головного вектора внутрішніх сил  $R$  та головного моменту внутрішніх сил  $M$  на координатні осі (які вибираємо так, що вісь  $x$  напрямлена вздовж осі стержня, а вісь  $y$  лежить в площині поперечного перерізу, тобто

перпендикулярно до осі  $x$ ) дають наступні внутрішні силові фактори, що називаються:

$N$  – поздовжня сила;

$Q$  – поперечна сила;

$M$  – згинальний момент.

Для визначення вказаних трьох внутрішніх силових факторів статика дає три рівняння рівноваги залишеної частини стержня:

$$N + \sum F_{ix} = 0; \quad Q + \sum F_{iy} = 0; \quad M + \sum M_0(F_i) = 0 \quad (1.1)$$

де  $\sum F_{ix}$ ,  $\sum F_{iy}$  - алгебраїчні суми проекцій на осі  $x$  і  $y$  зовнішніх сил, що прикладені до частини стержня, що розглядається, а  $\sum M_0(F_i)$  - алгебраїчна сума моментів цих сил відносно центра ваги перерізу.

Якщо зовнішні сили, що діють на стержень являють собою просторову систему сил (загальний випадок), то в поперечному перерізі стержня виникають шість внутрішніх силових факторів (рис. 1.3), для визначення яких статика дає шість рівнянь рівноваги залишеної частини стержня: сума проекцій всіх зовнішніх та внутрішніх сил на кожну з трьох координатних осей повинна дорівнювати нулю, та сума моментів всіх сил навколо цих самих осей також повинна дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} N + \sum F_{ix} = 0; \quad Q_z + \sum F_{iz} = 0; \quad Q_y + \sum F_{iy} = 0; \\ M_z + \sum M_z(F_i) = 0; \quad M_y + \sum M_y(F_i) = 0; \quad M_{кр} + \sum M_x(F_i) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для зусиль і моментів, що виникають в поперечному перерізі стержня в загальному випадку, прийняті такі назви:

Поздовжня сила –  $N$  – вона чинить опір розтягу або стиску;

Поперечні сили  $Q_z$ ,  $Q_y$  – вони чинять опір перерізанню, або зсуву у напрямку осей  $z$  і  $y$  відповідно;

Крутний момент  $M_{кр}$  – він чинить опір крученню;

Згинальні моменти  $M_y$ ,  $M_z$  – вони чинять опір згину у площинах, що утворені координатними осями  $zx$  та  $yx$  – відповідно.

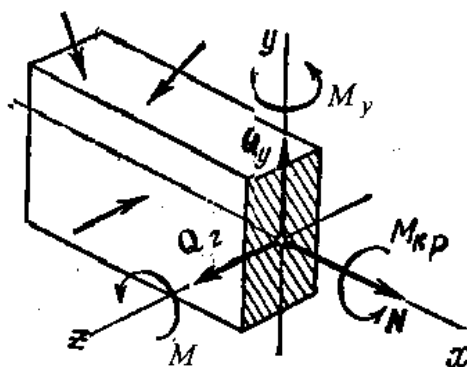


Рис. 1.3. Метод перерізів для знаходження внутрішніх силових факторів

Сукупність величин  $N$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$  прикладених до правого боку перерізу, замінює дію вилюченої лівої частини стержня на праву частину; сукупність зусиль та моментів, що прикладені до лівого боку перерізу, визначають дію правої частини стержня на ліву.

Внутрішні силові фактори в перерізі стрижня визначають характер його деформації. У випадках, коли крім якого-небудь одного силові фактори дорівнюють нулю, маємо основні види деформацій стрижня: розтягання (стискання), зсув (зріз), кручення та згинання. Коли в перерізі одночасно виникає кілька внутрішніх силових факторів (наприклад, згинальний і крутний моменти), то в цих випадках маємо складні деформації, що утворюються внаслідок сполучення кількох основних.

Характеристикою інтенсивності внутрішніх сил, що діють у перерізі являється напруження.

Напруження – це внутрішня сила, що приходиться на одиницю площі в даній точці розглядуваного перерізу (рис. 1.4):

$$\rho = \frac{dR}{dA}$$

де  $dR$  – рівнодійна внутрішніх сил в межах елементарної площадки  $dA$ .

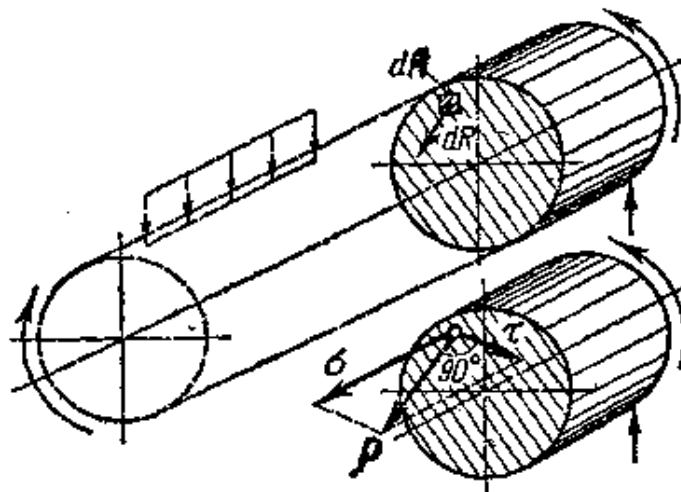


Рис. 1.4. Напруження

Вектор повного напруження  $\rho$  розкладається на два складових вектора:

- нормальне напруження  $\sigma$ , що перпендикулярне до площини перерізу;
- дотичне напруження  $\tau$ , що лежить у площині перерізу.

Залежність між напруженнями  $\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$ .

В поперечному перерізі стержня при деформаціях розтягу, стиску і чистому згині діють тільки нормальні напруження, що обумовлені виникненням в цьому перерізі нормальної сили  $N$  або згинальних моментів  $M_y$ ,  $M_z$ , а при зсуві та крученні – тільки дотичні напруження, що обумовлені виникненням в площині перерізу поперечних сил  $Q$  або крутного моменту  $M_{кр}$ .

Фізично внутрішні силові фактори являють собою результат дії відкинутої частини тіла на залишену частину. Тому можна розглядати частину тіла (ліву або праву) від перерізу, і, спираючись на закон рівності дії і протидії, вважати, що для правої частини силові фактори будуть мати напрямлення протилежні по відношенню до лівої.

Внутрішня поперечна сила у перерізі дорівнює (1.3) алгебраїчній сумі проекції на вертикальну вісь всіх зовнішніх сил, включаючи реакції опор, що лежать з одного боку від перерізу, що розглядається.

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} (F_i)_y \quad (1.3)$$

Внутрішній згинальний момент у перерізі дорівнює (1.4) алгебраїчній сумі згинаючих моментів від всіх зовнішніх силових факторів, включаючи реакції опор, що лежать з одного боку від перерізу, що розглядається.

$$M_z = \sum_{i=1}^{i=n} M_0(F_i) \quad (1.4)$$

Правила знаків для поперечних сил та згинальних моментів.

Домовимось про таке. Внутрішня поперечна сила, як і зовнішня вважається додатною, якщо вона повертає залишену частину стержня відносно перерізу за ходом годинникової стрілки і від'ємною у протилежному випадку (рис. 1.5).

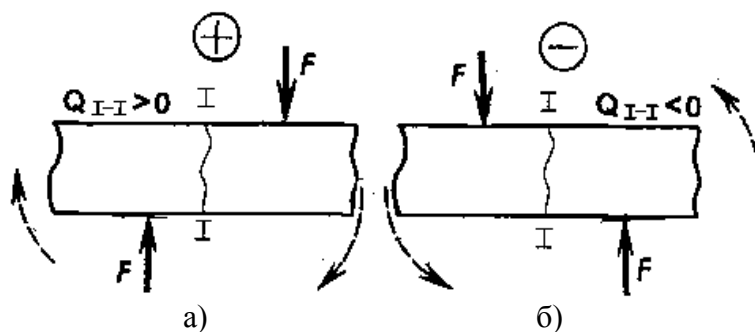


Рис. 1.5. Знаки поперечних сил: а) додатний; б) від'ємний

Зовнішній момент, що згинає балку в перерізі, що розглядається, так само і внутрішній згинальний момент у перерізі, вважається додатним, якщо балка у цьому перерізі зігнута випуклістю вниз і від'ємним, якщо випуклість направлена вверх (рис. 1.6).

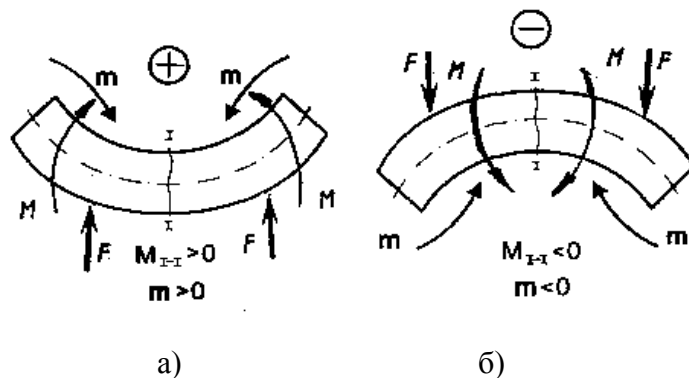


Рис. 1.6. Знаки згинальних моментів: а) додатний; б) від'ємний



Внутрішній крутний момент  $M_{кр}$  виражається через зовнішні  $M_k$ :  $M_{кр}$  у перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів  $M_k$ , розміщених по один бік від перерізу. Якщо стержень (вал) обертається рівномірно, то алгебраїчна сума всіх  $M_k$  дорівнює нулю. Тому при визначенні  $M_{кр}$  матимемо один і той самий результат незалежно від того, чи братимемо суму моментів  $M_k$ , розміщених ліворуч або праворуч від перерізу.

Крутний момент  $M_{кр}$  вважається додатним, якщо при спостереганні з торця вздовж осі розглядуваної частини він намагається обертати переріз за годинниковою стрілкою (рис. 1.7).

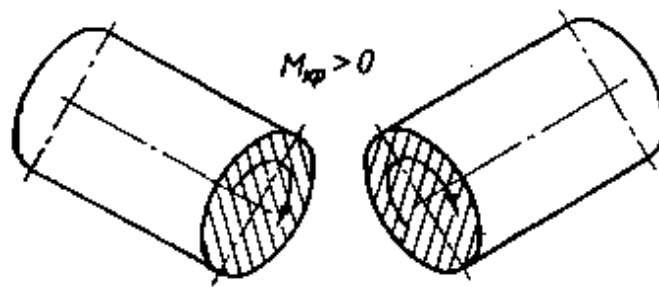


Рис. 1.7. Знаки крутних моментів

Зазначимо, що знаки  $M$  і  $Q$  фізичного смислу не мають.

Слід зауважити, що, по-перше, реакції опор – це також зовнішні сили, по-друге, якщо зображений на рисунку вектор сили направлений в один бік, а величина сили за обчисленнями дорівнює від'ємному числу, то насправді сила спрямована в іншій бік.

### Опис лабораторної установки

Лабораторна установка (рис. 1.8) дає можливість визначити вид деформації спостерігаючи характерні зміни форми стержня.

Враховуючи, що реальні деформації металевих стержнів настільки малі, що їх можна встановити лише використовуючи спеціальне оснащення, для наочного уявлення про характер деформування стержень 1 виготовлений із гуми. На поверхні стержня фарбою нанесена мережа поздовжніх і поперечних ліній.

Один кінець стержня жорстко закріплений в опорі 3 за допомогою гвинта 2.

Другий кінець стержня встановлений в підшипник, що закріплений в опорі 6. Це дає можливість стержню вільно повертатись і переміщуватись відносно своєї поздовжньої осі. На рухомому кінці стержня закріплений важіль 11. На важелі закріплено гачок 10, до якого прикріплено гнучку нитку, що перекинута через ролик 9. Другий кінець нитки прикріплено до вантажу 8. Також на важелі закріплено гачок 7, до якого прикріплено гнучку нитку, що перекинута через ролик 9. Другий кінець нитки прикріплено до вантажу 5. Також на важелі закріплено гачок 4, до якого прикріплено гнучку нитку, що перекинута через ролик 9. Другий кінець нитки прикріплено до вантажу 7. Також на важелі закріплено гачок 11, до якого прикріплено гнучку нитку, що перекинута через ролик 9. Другий кінець нитки прикріплено до вантажу 9.

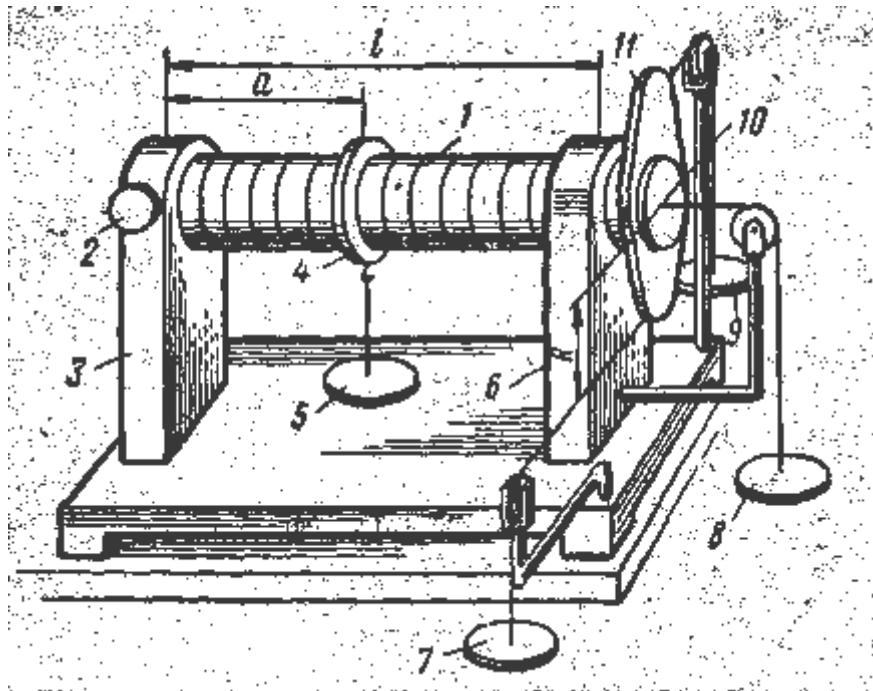


Рис. 1.8. Установка для випробування гумового стержня

Зовнішні сили можуть бути прикладені до стержня наступним чином:

- вздовж осі стержня за допомогою вантажу 8 і гнучкої нитки, що перекинута через ролик і прикріплена до торця стержня гачком 10;
- перпендикулярно до осі стержня вантажем 5, що кріпиться ниткою до кільця 4;
- парою сил, площина дії яких перпендикулярна до осі стержня. Пара сил утворюється двома рівними за вагою вантажами 9 і 7, що прикріплені гнучкими нитками до важеля 11 на однаковій відстані від осі стержня.

Зміни форми нанесеної на стержень мережі ліній визначатимуть вид деформації.

Під дією поздовжніх сил змінюється відстань між двома паралельними

лініями, виявляючи деформацію розтягання або стискання. Крутний момент викривлює прямі кути між лініями і перетворює прямокутники на паралелограми, а згинальний момент порушує паралельність поперечних ліній.

На рис. 1.9 представлено зразок деформації стержня під дією зовнішньої сили.

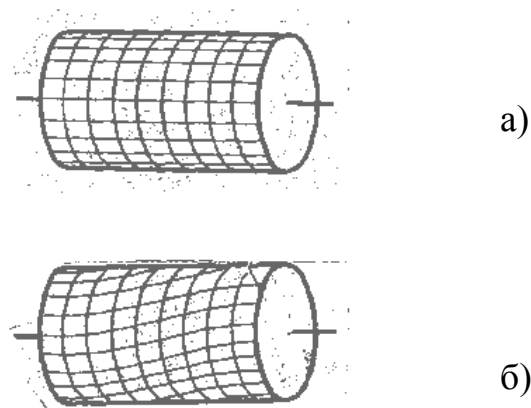


Рис. 1.9. Деформація стержня під дією зовнішньої сили: а-зразок до прикладання сили; б-зразок після прикладання зовнішньої сили

### Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитись з будовою і роботою установки для визначення видів деформації стержня.
2. Виміряти відстані:  $l$  між опорами;  $a$  між точками прикладення вантажу 5 і опорою 3;  $2R$  між крючками на важелі 11.
3. Прикласти до стержня вантаж 8 і за зміною положень ліній на його поверхні зробити висновок про вид деформації.
4. Аналогічно провести навантаження стержня зовнішньою силою перпендикулярною до його осі (вантаж 5) і парою сил, площина дії якої перпендикулярна до осі стержня (вантажі 7 і 9). Зробити висновок про вид деформації.
5. Виконати ескізи стержня з нанесеною мережею ліній до прикладання сил і після прикладення сил для кожної схеми навантаження.

6. Виконати розрахункову схему стержня і, використавши метод перерізів та склавши рівняння для сил і моментів (як зовнішніх, так і внутрішніх силових факторів), що прикладені до частини стержня, що розглядається, обчислити внутрішні силові фактори в перерізах (за рівнянням 1.2). Визначити вид деформації.

7. Порівняти види деформації, що визначені шляхом експерименту і методом перерізів. Результат занести до табл. 1.1.

Таблиця 1.1

### Розпізнавання виду деформації

За даними	Вид деформації					Декілька внутрішніх силових факторів то складна деформація
	$N$ , то при + $N$ -розтягання - $N$ -стискання	$Q$ , то зсув	$M_{кр}$ , то кручення	$M$ , то чистий згин	$M$ і $Q$ , то попереч ний згин	
Експеримент						
Метод перерізів						
Варіант навантаження стержня						

### Зміст звіту:

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Ескізи стержня для визначення видів деформацій за характерними змінами мережі ліній.
5. Розрахункова схема стержня і результати визначення внутрішніх силових факторів (за рівняннями 1.2).
6. Порівняння видів деформацій стержня, що визначені шляхом експерименту і методом перерізів (за формою табл. 1.1).
7. Висновки.

### **Контрольні запитання:**

1. Укажіть і характеризуйте види простих деформацій.
2. Що називається внутрішніми силовими факторами?
3. Вкажіть зміст припущень і гіпотез щодо властивостей матеріалів і характеру деформацій.
4. В чому заключається метод перерізів для знаходження внутрішніх силових факторів?
5. Приведіть рівняння рівноваги статки для визначення внутрішніх силових факторів.
6. Які види деформації стержня визначають внутрішні силові фактори?
7. Що характеризує напруження?
8. При яких видах деформації в поперечних перерізах стержня діють нормальні напруження і при яких дотичні?
9. Сформулюйте правило знаків для поперечних сил та згинальних моментів.

**Література:** [1], с. 6-7; 29-32; 52-53; [2], с. 5-12; [3], с. 8-17; 75-77; [4], с. 12-16; 37-40.

### **Лабораторна робота 2**

#### **ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ ПРИ ЗСУВІ ПРИ КРУЧЕННІ ВАЛУ**

##### **Мета роботи:**

- перевірка закону Гука при крученні, що встановлює залежність між деформацією (кутом закручування) і навантаженням (моментом скручування).
- експериментальне визначення величини модуля пружності при зсуві при крученні сталевому валу і порівняння з нормативним значенням.

##### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для випробування валу на кручення – 1 шт.

2. Набір вантажів – 1 комплект.
3. Вимірювальний прилад (важільно-зубчаста вимірювальна головка типу 1МИГ з ціною поділки 1мкм, або 2МИГ з ціною поділки 2мкм) – 1 шт.

### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Встановити залежність кута закручування від моменту скручування в межах пружних деформацій і побудувати діаграму кручення.
2. Визначити експериментально величину модуля пружності при зсуві при крученні сталевго валу.
3. Порівняти експериментальне значення модуля пружності із значенням, що приведено в довідниках.

### **Теоретичні відомості**

Деформація кручення спричинюється парами сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стрижня. Тому при крученні в довільному поперечному перерізі стрижня з шести можливих внутрішніх силових факторів має місце тільки один – крутний момент  $M_{кр}$  (рис. 2.1) та пов'язані з ним дотичні напруження. Як свідчать досвіди, поперечні перерізи стрижня, плоскі до деформації, при крученні повертаються один відносно одного навколо осі стрижня на деякий кут закручування, залишаючись при цьому плоскими; відстань між цими перерізами не змінюється. Стрижні, що працюють на кручення, називають валами.

Кут закручування стрижня в межах пружних деформацій зв'язаний із моментом скручування лінійною залежністю (чим більший момент скручування  $M_k$ , тим більший і кут закручування  $\varphi$ ). Залежність  $\varphi=f(M_k)$  називається діаграмами кручення. Вигляд такої діаграми для вала завдовжки  $l$ , виготовленого з пластичного матеріалу, наведено на рис. 2.2.

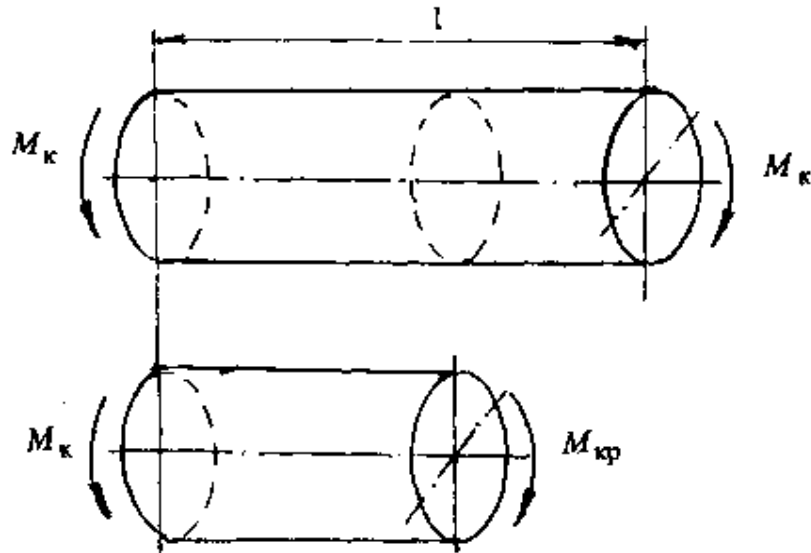


Рис. 2.1

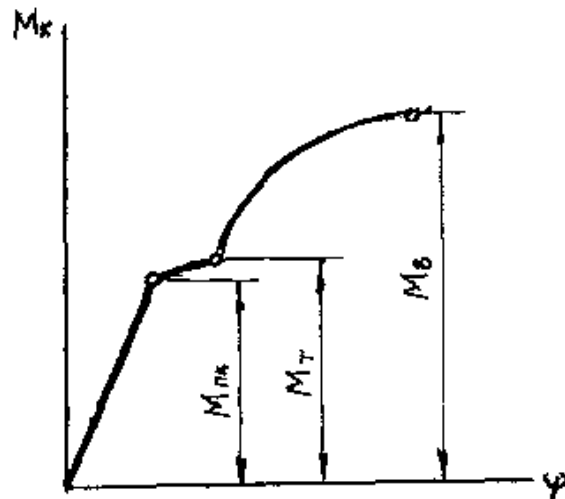


Рис. 2.2. Приклад діаграми кручення

Характерні точки діаграми:

$M_{пк}$  – границя пропорційності – момент, до якого зберігається прямо пропорційна залежність між навантаженням і деформацією;

$M_т$  – момент, що відповідає початку текучості;

$M_в$  – момент, що спричиняє руйнування валу.

Внутрішній крутний момент  $M_{кр}$  у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів скручування  $M_k$ , що лежать з одного боку від перерізу, що розглядається.

Зазначимо, що коли на стрижень діє лише один закручувальний момент, то рівний йому крутний момент має стале значення в усіх поперечних перерізах і матиме протилежний йому напрям, тобто  $\bar{M}_{кр} = -\bar{M}_{к}$ .

Кут закручування валу в межах пружних деформацій визначається за формулою:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{GJ_p}, \quad (2.1)$$

де  $M_{кр}$  – крутний момент;

$l$  – відстань між перерізами, взаємний кут закручування яких визначається;

$G \cdot J_p$  – жорсткість поперечного перерізу валу при крученні;

$G$  – модуль пружності при зсуві або модуль пружності другого роду;

$J_p$  – полярний момент інерції площі поперечного перерізу валу.

Ця формула (2.1) встановлює зв'язок при крученні між силовим фактором ( $M_{кр}$ ) та відповідною деформацією кручення (кутом закручування  $\varphi$ ) і виражає закон Гука при крученні.

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності  $G$  при зсуві та модулем пружності  $E$  при розтяганні існує наступна залежність:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \text{ де } \mu - \text{ коефіцієнт Пуассона.}$$

В табл. 2.1 наведено значення величин  $E$ ,  $G$  і  $\mu$  для деяких матеріалів.

Таблиця 2.1

### Модулі пружності і коефіцієнти Пуассона для деяких матеріалів

Матеріал	Модуль пружності, МПа (Н/мм <sup>2</sup> )		Коефіцієнт Пуассона
	$E$	$G$	
Чавун сірий	$(1,15 \dots 1,60)10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
Сталь вуглецева	$(2,0 \dots 2,1)10^5$	$(8,0 \dots 8,1) 10^4$	0,24...0,28
Сталь легована	$(2,1 \dots 2,2)10^5$	$(8,0 \dots 8,1) 10^4$	0,25...0,30
Бронза фосфориста	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32...0,35



## Опис лабораторної установки

Схема лабораторної установки для випробування валу на кручення приведена на рис. 2.3.

Робота виконується на зразку 1, що виконаний у вигляді ступінчастого валу. Так як взаємний кут закручування перерізів валу може визначатись на ділянці будь-якої довжини, то робоча ділянка 2 валу має довжину  $l=100\text{мм}$ . Вона виконана із сталі 45 і має кільцеву форму перерізу з діаметрами: зовнішній  $D=20\text{мм}$ , внутрішній  $d=16\text{мм}$ .

Конічним хвостовиком вал жорстко з'єднується з правим опорним стояком 3 за допомогою відповідного затискача на опорі, що включає затяжний болт і ексцентриковий затискач 4.

Кручення валу здійснюється вантажем 11, що встановлюється на підвіску 12 через важіль 13 довжиною  $L=450\text{мм}$ , що закріплений на квадратному хвостовику на вільному кінці вала. Щоб виключити деформацію згину при такому навантаженні, кінець валу з закріпленим важелем через шарикопідшипник 5 опирається на лівий опорний стояк 6, що обладнаний для цього висувною опорною площадкою. Опори за допомогою болтів для пазів верстатних і гайок 7 кріпляться в Т-подібному пазу силової плити 10 лабораторного стола.

Кут закручування  $\varphi$  вимірюється за допомогою індикаторного кутоміра 8. Кутомір складається з двох важелів, жорстко закріплених на відстані  $l=100\text{мм}$  на робочій ділянці валу, що встановлює відстань між перерізами, взаємний кут закручування яких визначається. На прямому важелі встановлюється вимірювальна головка 9. Вісь вимірювального стрижня головки розташована на відстані  $R=60\text{мм}$  від осі валу і опирається вимірювальним наконечником на Г-подібний (колінчастий) важіль кутоміра. Під дією моменту скручування, що прикладений до валу, колінчастий важіль повертається відносно прямого важеля на деякий кут, що приводить до переміщення вимірювального стержня головки.

Показання вимірювальної головки  $m$  визначають відносний кут закручування перерізів валу (рис 2.4):

$$\varphi = \frac{m}{R}, \text{ рад.}$$

Зазначимо, що при значеннях кутів менше  $10^\circ$  значення тангенсу кута дорівнює значенню кута у радіанах, тобто  $\varphi \approx \text{tg}\varphi$ .

**Примітка:** Найбільший момент скручування для матеріалу дослідного зразка не повинен визивати залишкових деформацій.

Визначимо  $M_{\text{к max}}$  за формулою:  $M_{\text{к max}} = \tau_{\text{мц}} \cdot w_p$ ,

де  $\tau_{\text{мц}}$  - границя пропорційності при крученні (найбільше напруження, до якого діє закон Гука);

$w_p$  – полярний момент опору.

Прийнявши для маловуглецевих сталей  $\tau_{\text{мц}} = 70 \dots 80 \text{ Н/мм}^2$  і визначивши для кільцевої форми перерізу момент опору за формулою:

$$w_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi (20)^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{16}{20} \right)^4 \right] = 926,9 \text{ мм}^3$$

де  $D=20\text{мм}$  – зовнішній діаметр,

$d=16\text{мм}$  – внутрішній діаметр перерізу валу.

Отримаємо:  $M_{\text{к max}} = 80 \cdot 926,9 = 74154,2 \text{ Н}\cdot\text{мм}$ .

При довжині важеля  $L=450\text{мм}$  відповідно отримаємо за формулою

$$F_{\text{max}} = \frac{M_{\text{к max}}}{L} = \frac{74154,2}{450} = 164,8 \text{ Н.}$$

### Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для випробування валу на кручення. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Установити шкалу вимірювальної головки індикаторного кутоміра на нульове положення, для чого попередньо переміщенням головки в тримачі

довести стрілки шкал: великої (основної шкали) і малої (лічильника обертів основної стрілки) приблизно до нульових поділок шкал. Далі, закріпивши головку затискним гвинтом в тримачі, установити шкали в нульове положення обертанням гвинта установки шкал на нульову поділку. При цьому врахувати, що відлік при вимірюванні кута закручування буде здійснюватись за шкалами, що позначені цифрами червоного кольору (у вимірювальних головок типу МИГ). Перевірити шляхом відведення два-три рази вимірювального стержня за допомогою аретира надійність установки шкали в нульове положення. Якщо стрілка основної шкали відхиляється від нульового положення (допустиме відхилення не більше 0,5 поділки), необхідно знову виконати суміщення з нею нульової поділки і знову шляхом піднімання і опускання вимірювального стержня перевірити сталість показань приладу. Зазначимо, що переміщення вимірювального стержня повинно здійснюватись плавно, безударно.

3. Виконати вимірювання кута закручування валу в залежності від величини моменту скручування. Момент скручування створювати навантажуючи на важіль відповідні вантажі. Кількість ступенів навантаження повинна бути 4-5.

Відповідні значення вантажів  $F_i$  встановлює викладач з наступного ряду значень: 10; 15; 20; 25...50Н. Для кожного ступеня навантаження визначити момент скручування за формулою:

$$M_k = F_i \cdot L, \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

Розраховані значення  $M_k$  занести до табл. 2.2. При кожному навантаженні визначити показання вимірювальної головки індикаторного кутоміра. Ці показання для послідувочої статистичної обробки результатів експерименту позначити, як  $x_i$ , тобто  $(x_1, x_2, \dots)$ . Здійснити повторні вимірювання параметру, що досліджується. Кількість повторних вимірів для кожного значення моменту скручування повинна бути не менше 6...7 (встановлюється викладачем). Отримані результати вимірювань занести до табл. 2.2.

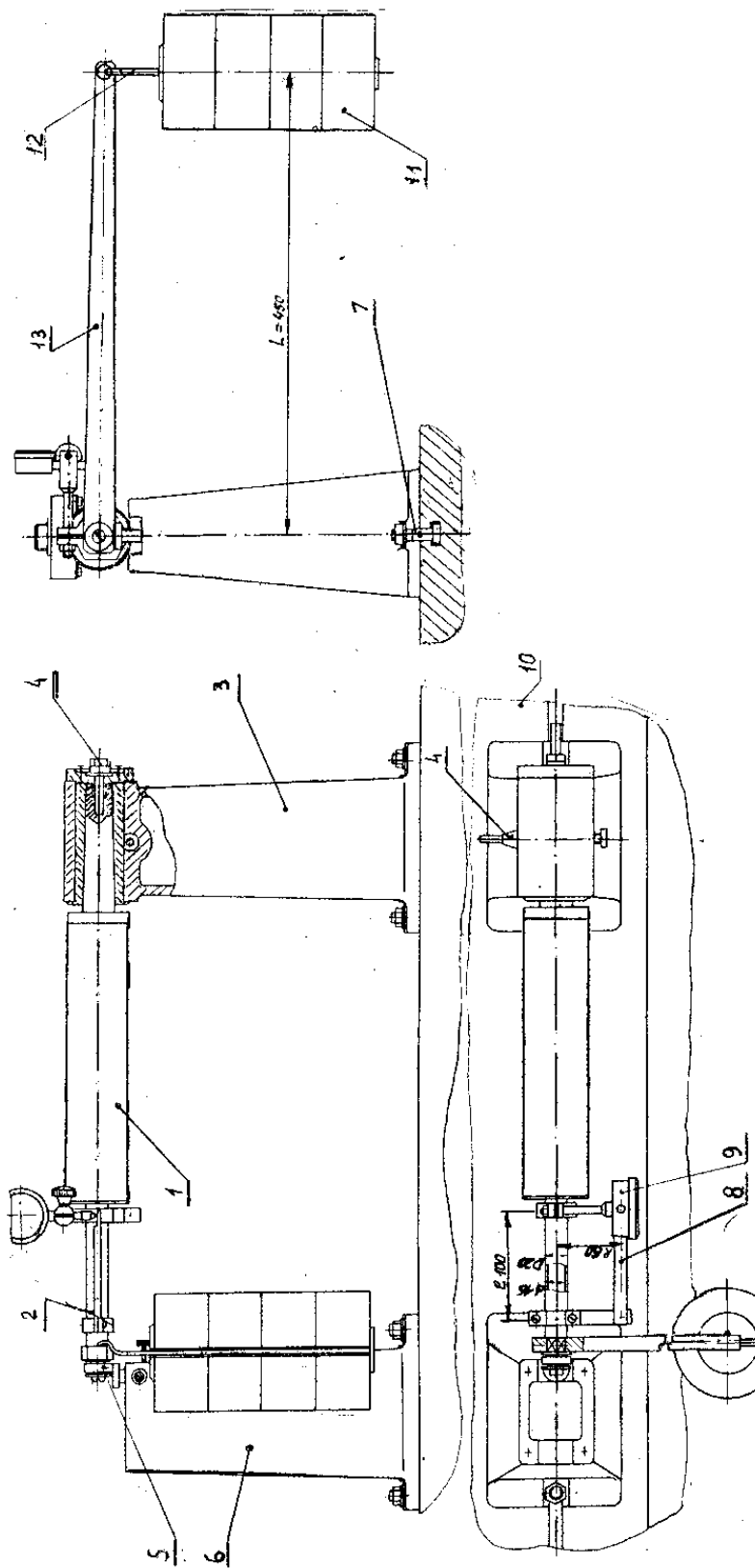


Рис. 2.3. Схема установки для випробування валу на кручення

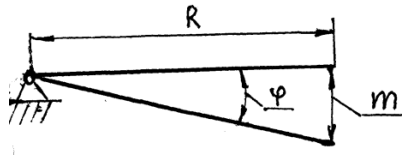


Рис. 2.4. Схема визначення кута закручування перерізів валу

**Зауваження:** послідовність повторних вимірювань кута закручування для різних значень моменту скручування є довільною.

**Вказівка:** після кожного із вимірювань експериментальна установка повинна бути розвантажена, а нульове положення вимірювальної головки індикаторного кутоміра повинно бути відкореговано.

4. За результатами вимірювань для кожного значення моменту скручування розрахувати середній результат вимірювань з виразу (2), див. «теоретичні відомості з статистичної обробки результатів вимірювань» та емпіричне середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань з виразу (3).

Значення занести до табл. 2.2.

5. Виконати статистичну обробку результатів виконаного експерименту з метою виявлення і вилучення значень, які різко відрізняються.

Для цього для кожної із вибірок величини показань приладу визначити найбільший і найменший результат вимірювань, вважаючи їх як сумнівні.

Прийняти рішення щодо сумнівних результатів, застосувавши критерій Смирнова  $t_{\beta}$  (рівень значимості прийняти  $\alpha=0,05$ ). Перевірку виконати за виразом (1).

Значення критерію  $t_{\beta}$  прийняти за табл. 1. Виявлені грубі похибки (результати вимірювань, що різко відрізняються) треба вилучити з подальшого розгляду. Результати оцінки вимірювань за критерієм грубої похибки занести до табл. 2.3.

Для сукупності значень, що залишилися, знову визначити для кожного із значень моменту скручування середнє значення показань приладу, позначивши його  $\bar{x}'$ . Визначену величину занести до табл. 2.2.

6. Обчислити значення кутів закручування для відповідних значень моменту скручування за формулою

$$\varphi_e = \frac{m}{R}, \text{ рад.}$$

де  $m = \bar{x}'$  - усереднене значення показань вимірювальної головки індикаторного кутоміра;

$R = 60\text{мм}$  – відстань між осями вимірювальної головки і валу.

Результат занести до табл. 2.2.

7. Побудувати діаграму кручення  $\varphi = f(M_k)$ .

Діаграму кручення будують за даними експерименту, відкладаючи в певному масштабі по осі ординат значення моменту скручування, а по осі абсцис – відповідні до них кути закручування.

Таблиця 2.2.

### Результати вимірювань кута закручування

№	Вихідний параметр		Показання приладу, мм						S, мм	Результат експерименту		
	F, Н	Mк, Н·мм	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	...	x <sub>n</sub>	$\bar{x}'$ , мм		m = $\bar{x}'$ , мм	$\varphi_e = \frac{m}{R}$ , рад	
1												
2												

### Результати оцінки вимірювань при рівні значимості $\alpha=0,05$

№	Вихідні дані, мм		Оцінка за критерієм грубих похибок				
	$\bar{x}$	$S$	Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм		критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	Висновок про похибки
1			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
2			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			

Таблиця 2.4.

### Порівняння результатів визначення модуля пружності при зсуві

Визначаєма величина	Теоретичне значення	Експериментальне значення	Розбіжність, %

8. Визначити модуль пружності при зсуві за отриманим експериментально найбільшим значенням кута закручування за формулою:

$$G = \frac{M_{кр} \cdot l}{\varphi \cdot J_p},$$

де  $M_{кр}$  – крутний момент, Н·мм (зазначимо, що  $M_{кр} = M_k = F \cdot l$ , крутний момент має стале значення у всіх перерізах валу і рівний моменту скручування);

$\varphi = \varphi_e$  – значення кута закручування, отримане експериментально, рад.;

$J_p$  – полярний момент інерції перерізу, мм<sup>4</sup>;

$l = 100$  мм – довжина частини валу, що скручується.

При розрахунку полярного моменту інерції для вала з кільцевою формою перерізу за формулою:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \text{ прийняти:}$$

$D=20\text{мм}$  – зовнішній діаметр перерізу валу, що досліджується;

$d=16\text{мм}$  – внутрішній діаметр.

9. Порівняти отриманий результат ( $G_e$ ) із значенням модуля пружності при зсуві, що приведено в довідниках ( $G_T$ ) і визначити відхилення результатів експерименту від розрахункового значення параметру за формулою:

$$\delta = \frac{|G_e - G_T|}{G_T} \cdot 100\%$$

Результат занести до табл. 2.4.

### Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати вимірювань кута закручування (за формою табл. 2.2) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 2.3).
5. Результат обчислення модуля пружності при зсуві на основі експериментальних даних та оцінка відхилення результатів експерименту від значення параметру із довідника (за формою табл. 2.4).
6. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
7. Діаграма кручення  $\varphi=f(M_k)$ .
8. Висновки.

#### Наведемо приклад висновків

1. Установлено, що значення модуля пружності при зсуві для сталі 45 при його експериментальному визначенні близьке до значення, що приведено в довідниках по опору матеріалів. Похибка становить  $\delta < 5\%$  (рівень значимості прийнятий  $\alpha=0,05$ ).



2. Результати експерименту підтвердили наявність прямої пропорційності між кутом закручування і моментом скручування, тобто справедливість в дослідженому діапазоні навантажень закону Гука для зсуву, так як дослідні точки розташовуються близько до прямої лінії.

### **Контрольні запитання**

1. Яке деформування стрижня називають крученням?
2. Що таке момент скручування?
3. Що таке крутний момент?
4. Які напруження виникають в поперечному перерізі валу при крученні?
5. Як визначити кут закручування?
6. Чому дорівнює полярний момент інерції круглого перерізу? кільцевого перерізу?
7. Сформулюйте закон Гука при крученні.
8. Яка залежність існує між модулями пружності першого і другого роду?
9. Яку властивість матеріалу характеризує модуль пружності при зсуві?
10. Як зміниться величина кута закручування, якщо діаметр дослідного зразка зменшити удвоє?
11. Яку залежність встановлює діаграма кручення?
12. Які переміщення мають сусідні перерізи при деформації кручення?
13. Які напруження виникають в поперечному перерізі круглого стрижня при крученні?
14. Як розподілені напруження в поперечному перерізі круглого стрижня при крученні?
15. Що таке жорсткість поперечного перерізу валу при крученні?
16. Що таке епюра крутних моментів? Як виконується її побудова?
17. З урахуванням розподілу дотичних напружень в поперечному перерізі обґрунтуйте раціональну з економічної точки зору форму перерізу валу.

**Література:** [1], с. 29-34; [2], с. 41-47; [3], с. 64-68; [4], с. 206-213.

## Лабораторна робота 3

### ВИПРОБУВАННЯ ГВИНТОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПРУЖИНИ

#### Мета роботи:

- встановлення залежності між зміненням довжини гвинтової циліндричної пружини і осьовим навантаженням.
- встановлення на основі експерименту застосовності розрахункової формули в практичних розрахунках видовження (осадки) гвинтової циліндричної пружини.

#### Матеріальне забезпечення:

1. Установка для випробування гвинтової циліндричної пружини – 1 шт.
2. Набір циліндричних гвинтових пружин – 1 комплект.
3. Набір вантажів – 1 комплект.
4. Прилад для вимірювання змінення довжини пружини – 1 шт.

#### Завдання до лабораторної роботи:

1. Експериментально встановити залежність змінення довжини циліндричної гвинтової пружини від навантаження (характеристику пружини) і побудувати характеристику пружини.
2. Експериментально продемонструвати застосовність розрахункової формули в практичних розрахунках змінення довжини гвинтової циліндричної пружини.

#### Теоретичні відомості

Гвинтові циліндричні пружини – це найпоширеніший тип пружин у техніці. Найчастіше їх виготовляють із сталевих стрижнів (дроту) круглого поперечного перерізу. В роботі вони зазнають дію сил розтягу або стиску.

Точний розрахунок на міцність гвинтових циліндричних пружин досить складний, оскільки дріт пружини може зазнавати складного навантаження –

одночасних кручення, зсуву та згинання. Однак при малих кутах нахилу витків впливом згинання можна знехтувати. Здебільшого, можна нехтувати також зсувом і, отже, з достатнім наближенням розраховувати такі пружини на міцність та деформативність, виходячи з опору їх крученню.

Розглянемо циліндричну гвинтову пружину, що зазнає розтягання центральною прикладеною силою  $F$  (рис. 3.1).

Змінення довжини циліндричної гвинтової пружини  $\lambda$  (видовження при розтягу або осадку при стиску) з круглого дроту обчислюють за формулою:

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4}, \quad (3.1)$$

де  $F$  – навантаження, що діє по осі пружини, Н;

$D$  – середній діаметр витків пружини, мм;

$n$  – число робочих витків пружини;

$G$  – модуль пружності при зсуві, МПа (Н/мм<sup>2</sup>)

$d$  – діаметр дроту, мм.

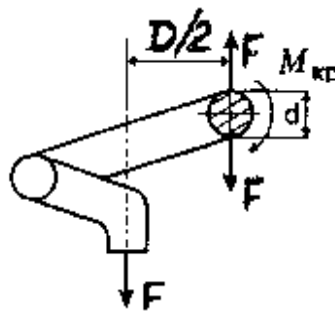


Рис. 3.1. Сили і моменти, що діють на виток пружини

У формулі (3.1) величину  $C = \frac{G \cdot d^4}{8D^3n}$  називають жорсткістю пружини, вимірюється жорсткість пружини в Н/мм.

Тоді осадка (видовження) пружини може бути обчислена за формулою:

$$\lambda = \frac{F}{c}.$$

Між зміненням довжини пружини  $\lambda$  та силою  $F$ , яка діє на неї, у межах пружності існує прямо пропорційна залежність. Вона називається характеристикою пружини.

Для створення опорних поверхонь останні витки пружини підтискують до сусідніх і зішліфовують перпендикулярно до осі по периметру  $\frac{3}{4}$  витка від кінців.

Розрахунок за формулою (3.1) досить наближений, так як при її виводі враховувалась тільки дія крутного моменту, а не враховували вплив кривини витка, дія дотичних напруг, спричинених зсувною силою, нехтували і рядом інших другорядних факторів.

Щоб впевнитись, що отримані за розрахунковою формулою результати цілком застосовні в практичних розрахунках видовження (осадки) пружини необхідно виміряти видовження (осадку) пружини при заданих навантаженнях дослідним шляхом і порівняти з величиною змінення довжини пружини, обчисленою за формулою (3.1).

### **Опис лабораторної установки**

Схема лабораторної установки, для випробування гвинтових циліндричних пружин приведена на рис. 3.2.

Пружина 6 підвішується на Г-подібний кронштейн 2, що з'єднаний з опорним стояком 3. Опора за допомогою болтів для пазів верстатних і гайок 4 закріплюється в Г-подібному пазу силової плити 1 лабораторного стола.

Навантаження пружини здійснюється вантажами 5, що встановлюють на підвіску.

Вимірювання видовження пружини  $\lambda$  здійснюється за допомогою індикаторного вимірювача. Він складається з вимірювальної головки 8 (зубчаста вимірювальна головка типу ИЧ10), що закріплена на штативі 7. Штатив за допомогою болтів і гайок кріпиться до силової плити.

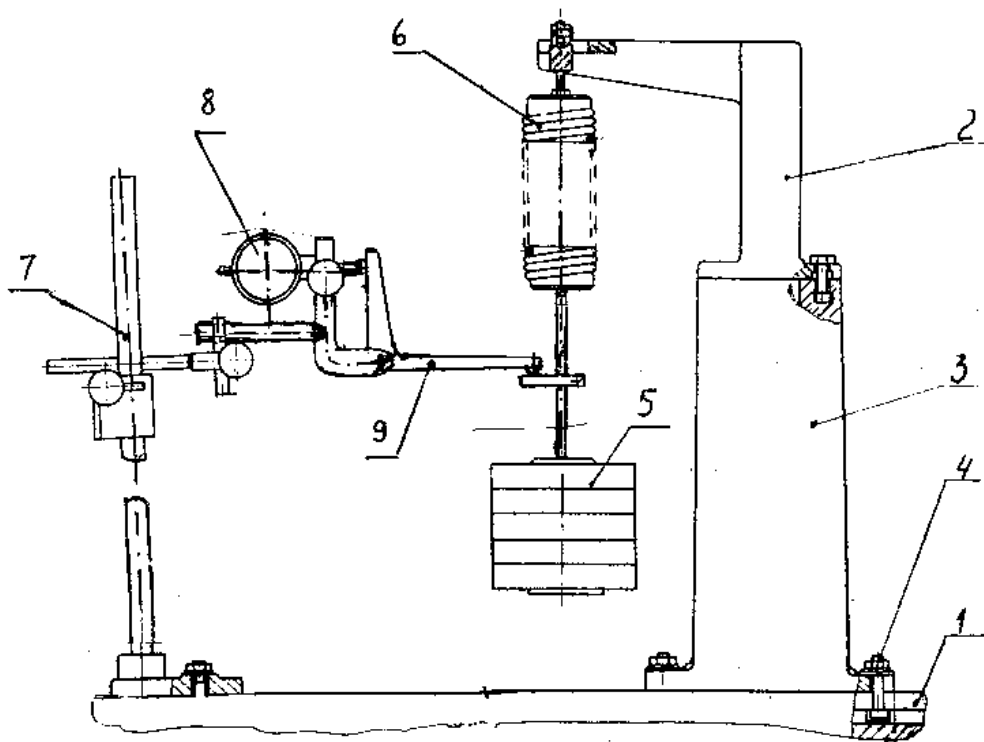


Рис. 3.2. Схема установки для випробування гвинтової циліндричної пружини

Вимірювальний стрижень вимірювальної головки за допомогою Г-подібного важеля 9 опирається об торцеву поверхню шайби, що жорстко закріплена на стрижні підвіски. За рахунок передаточного відношення важеля 2:1 при використанні вимірювальної головки типу ИЧ10 будемо мати ціну поділки 0,02мм, а межі вимірювань 0-20мм. Коли величина видовження пружини (при певних навантаженнях) перевищить діапазон вимірювань індикаторного вимірювального пристрою, що з урахуванням плеча важелів для головки типу ИЧ10 становить 0-20мм, то вимірювання здійснюється з використанням штангенрейсмаса, що має ціну поділки 0,02мм або 0,05мм.

### Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитися із будовою лабораторної установки для випробування гвинтових циліндричних пружин. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Установити пружину на кронштейні. Визначити параметри пружини (діаметр дроту  $d$ , середній діаметр пружини  $D$ , робоче число витків пружини  $n$ ). Параметри пружин наведені у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

**Параметри гвинтових циліндричних пружин**

Діаметри, мм		Робоче число витків, $n$
$d$	$D$	
4	48,5	22
5	49,5	17
6	49,5	14

3. Попередньо навантажити пружину, установивши на підвіску вантажі вагою 20-30Н і більше, щоб забезпечити зазор на просвіт між витками і тим самим усунути попередню осадку пружини, що здійснюється при її виготовленні і уникнути стикання витків.

4. Виконати вимірювання видовження пружини в залежності від навантаження .

Пружина, виготовлена з дроту діаметром  $d=4$ мм, навантаження здійснюють вагою 10-30Н, пружина, пружина, виготовлена з дроту діаметром  $d=5$ мм, навантаження здійснюють вагою 10-50Н і для пружини, виготовленої з дроту  $d=6$ мм, навантаження здійснюють вагою 10-70Н. Кількість ступенів навантаження повинна бути 4-5. Відповідні значення встановлює викладач, так як і вибір пружини, що досліджується. При кожному навантаженні визначити за показанням вимірювальної головки величину видовження пружини. Ці величини для послідууючої статистичної обробки результатів експерименту позначити як  $x_i$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Здійснити повторні вимірювання параметру, що досліджується. Кількість повторних вимірювань для кожного ступеня навантаження повинна бути не менше 6-7 (встановлюється викладачем). Отримані результати вимірювань занести до табл. 3.2.

Послідовність повторних вимірювань для різних ступенів навантаження є довільною.

**Вказівка:** після кожного із вимірювань експериментальна установка повинна бути розвантажена, а нульове показання вимірювальної головки після розкриття зазорів між витками пружини повинно бути відкореговано.

5. За результатами вимірювань для кожного ступеня навантаження розрахувати середній результат вимірювань з виразу (2), див. «Теоретичні відомості з статистичної обробки результатів вимірювань» та емпіричне середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань з виразу (3). Значення занести до табл. 3.2.

6. Виконати статистичну обробку результатів виконаного експерименту з метою виявлення і вилучення значень, що різко відрізняються.

Для цього для кожної із вибірок величини показань приладу визначити найбільший і найменший результат вимірювань, вважаючи їх як сумнівні.

Прийняти рішення щодо сумнівних результатів, застосувавши критерій Смирнова  $t_{\beta}$  (рівень значимості прийняти  $\alpha=0,05$ ). Перевірку виконати за виразом (1). Значення критерію  $t_{\beta}$  прийняти за табл. 1. Виявлені грубі похибки (результати вимірювань, що різко відрізняються) треба вилучити з подальшого розгляду. Результати оцінки вимірювань за критерієм грубої похибки занести до табл. 3.3. Для сукупності значень, що залишилися, знову визначити для кожного із ступенів навантаження середнє значення показань приладу, позначивши його  $\bar{x}'$ . Визначену величину занести до табл. 3.2.

Усереднене значення показань приладу приймається за величину видовження пружини при відповідному навантаженні:  $\lambda = \bar{x}'$ . Результат занести до табл. 3.2.

7. Побудувати характеристику пружини  $\lambda=f(F)$  – залежність змінення довжини циліндричної гвинтової пружини від навантаження. Діаграму будують за даними експерименту, відкладаючи в певному масштабі по осі ординат значення навантаження, а по осі абсцис – відповідні до них видовження пружини.

Таблиця 3.2

**Результати вимірювань видовження циліндричної гвинтової  
пружини**

№	Вихідний параметр		Показання приладу, мм						S, мм	Результат експерименту	
	d, мм	F, Н	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}'$ , мм	$\lambda$ , мм
1											
2											

Таблиця 3.3

**Результати оцінки вимірювань при рівні значимості  $\alpha=0,05$**

№	Вихідні дані, мм		Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм		Оцінка за критерієм грубих похибок		
	$\bar{x}$	S			критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	Висновок про похибки
1			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
2			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			

8. Виконати вимірювання видовження пружини, що виготовлені з дроту різного діаметру. Пружину, виготовлену з дроту діаметром  $d=4$ мм навантажити вагою 20Н, діаметром  $d=5$ мм – вагою 35Н і діаметром  $d=6$ мм – вагою 50Н. Вимірювання здійснити згідно п.п. 3 і 4. Отримані результати вимірювань занести до табл. 3.4.



Таблиця 3.4

**Результати вимірювань видовження циліндричних гвинтових пружин, виготовлених з дроту різного діаметру**

№	Вихідний параметр		Показання приладу, мм						S, мм	Результат експерименту	
	$d, \text{мм}$	$F, \text{Н}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}', \text{мм}$	$\lambda, \text{мм}$
1	4	20									
2	5	35									
3	6	50									

9. Виконати статистичну обробку результатів виконаного експерименту згідно п.п. 5 і 6. Результати обробки представити за формою табл. 3.3 та занести до табл. 3.4.

10. Порівняти отримані експериментально значення видовження пружини із обчисленими за формулою (3.1). Значення модуля пружності при зсуві прийняти  $G=(8\dots 8,1)\cdot 10^4 \text{Н/мм}^2$  (МПа). Визначити відхилення результатів експерименту від розрахункового значення видовження пружини за формулою:

$$\delta = \frac{|\lambda_e - \lambda_T|}{\lambda_T} 100\%$$

Результат занести до табл. 3.5.

Таблиця 3.5.

**Порівняння результатів визначення значення видовження пружини**

Діаметр дроту $d$ , мм		4	5	6
Навантаження $F$ , Н		20	35	50
Видовження $\lambda$ , мм	експериментальне значення			
	теоретичне значення			
Розбіжність, %				

**Зміст звіту**

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.

3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати вимірювань видовження пружини в залежності від навантаження (за формою табл. 3.2) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 3.3).
5. Характеристика пружини  $\lambda=f(F)$ .
6. Результати вимірювань видовження пружин, що виготовлені з дроту різного діаметру (за формою табл. 3.4) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 3.3).
7. Оцінка відхилення результатів експерименту від розрахункового значення видовження пружини (за формою табл. 3.5).
8. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
9. Висновки.

### **Контрольні запитання**

1. За якою формулою визначається змінення довжини циліндричної гвинтової пружини, що зазнає осьового навантаження?
2. За якою формулою виконується розрахунок на міцність циліндричної гвинтової пружини?
3. Що називають жорсткістю пружини? Як її обчислити?
4. На яких допущеннях базується виведення формул для розрахунку циліндричних гвинтових пружин?
5. Як обчислюють напруження в перерізах витків пружини з круглого дроту?

**Література:** [1], с. 40-42; [2], с. 49-51; [3], с. 67-68; [4], с. 227-231

## Лабораторна робота 4

### ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГИНІВ РИГЕЛЯ ПРИ ЗГИНАННІ У СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНІЙ РАМІ

**Мета роботи:** експериментальне визначення прогину ригеля і порівняння отриманих величин з розрахунковими значеннями.

#### Матеріальне забезпечення:

1. Установа для випробування рами на згинання – 1 шт.
2. Набір вантажів – 1 комплект.
3. Вимірювальний прилад (зубчаста вимірювальна головка типу ИЧ) – 1 шт.
4. Штатив для установки вимірювальної головки – 1 шт.

#### Завдання до лабораторної роботи:

1. Експериментально перевірити формулу для визначення прогинів балки при її згинанні
2. Побудувати діаграму залежності прогинів ригеля при згинанні від величин навантаження.

#### Теоретичні відомості

Рама – це стрижнева просторова або плоска система, елементи якої (стояки, ригелі) жорстко з'єднанні між собою. Ригель (поперечина) – несучий елемент конструкції рами, що з'єднує вертикальні елементи – стояки.

При згинанні під дією зовнішніх навантажень повздожня вісь стрижня (ригеля, далі по тексту «балка») викривлюється, якщо згин протікає в межах пружних властивостей матеріалу, тобто в межах закону Гука, то після знімання навантажень вісь балки знову випрямляється. Тому зігнуту вісь балки називають пружною лінією. За формою, яку при навантаженні балки приймає її пружна лінія можна судити про кутові і лінійні переміщення при згинанні.

Переміщення поперечних перерізів балок при згинанні характеризуються двома величинами: вертикальним переміщенням (прогином)  $f$  і кутом повороту  $\theta$ .

Лінійні переміщення центрів ваги поперечних перерізів балки при згинанні називаються прогинами балки у відповідних точках.

Кут, на який при цьому повертається переріз відносно початкового положення, називається кутом повороту перерізу.

Прогини і кути повороту перерізів зв'язані залежністю:

$$\theta(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

Теорія розрахунку балок при згинанні основана на ряду припущень, що приводять до суттєвого спрощення розрахункових формул при збереженні достатньої точності результатів, а саме:

- лінійні переміщення точок елемента конструкції незначні порівняно з довжинами прогонів балки;
- плоскі поперечні перерізи, що проведені в балці до деформації, залишаються при деформації плоскими і нормальними до осі, тобто при повороті перерізи балки залишаються перпендикулярними до її зігнутої осі.

(Детальніше дивиться «теоретичні відомості» до роботи 1).

Існує кілька способів визначення переміщень (прогинів) та кутів повороту перерізів при згинанні (метод Мора, метод Верещагіна та інші методи). Один з них оснований на інтегруванні диференціального рівняння пружної лінії.

Результат інтегрування для балки (рис. 4.1), навантаженої різними видами навантажень, можна представити у вигляді універсального рівняння (для прогинів):

$$f = f_0 + \theta_0 x + \sum \frac{m_i (x - \alpha_m)^2}{2! EJ} + \sum \frac{F_i (x - \alpha_F)^3}{3! EJ} + \sum \frac{q_i ((x - \alpha_q^n)^4 - (x - \alpha_q^k)^4)}{4! EJ}; \quad (4.1)$$

та кутового переміщення

$$\theta = \theta_0 + \sum \frac{m_i(x - a_m)}{EJ} + \sum \frac{F_i(x - a_F)^2}{2!EJ} + \sum \frac{q_i((x - a_q^n)^3 - (x - a_q^k)^3)}{3!EJ}. \quad (4.2)$$

де  $f_0$ ,  $\Theta_0$  – початкові параметри-прогин і кут повороту в початку координат лівого торцевого перерізу балки);

$m_i$ ,  $F_i$ ,  $q_i$  – зовнішні зосереджені моменти, сили і розподілене навантаження;

$a_m$ ,  $a_F$ ,  $a_q^n$ ,  $a_q^k$  – абсциси перерізів, де прикладено моменти, сили, починається і закінчується розподілене навантаження;

$EJ$  – жорсткість перерізу балки

$E$  – модуль пружності матеріалу балки;

$J$  – момент інерції поперечного перерізу балки відносно нейтральної осі (осьовий момент інерції);

$x$  - абсциса перерізу, де визначають переміщення.

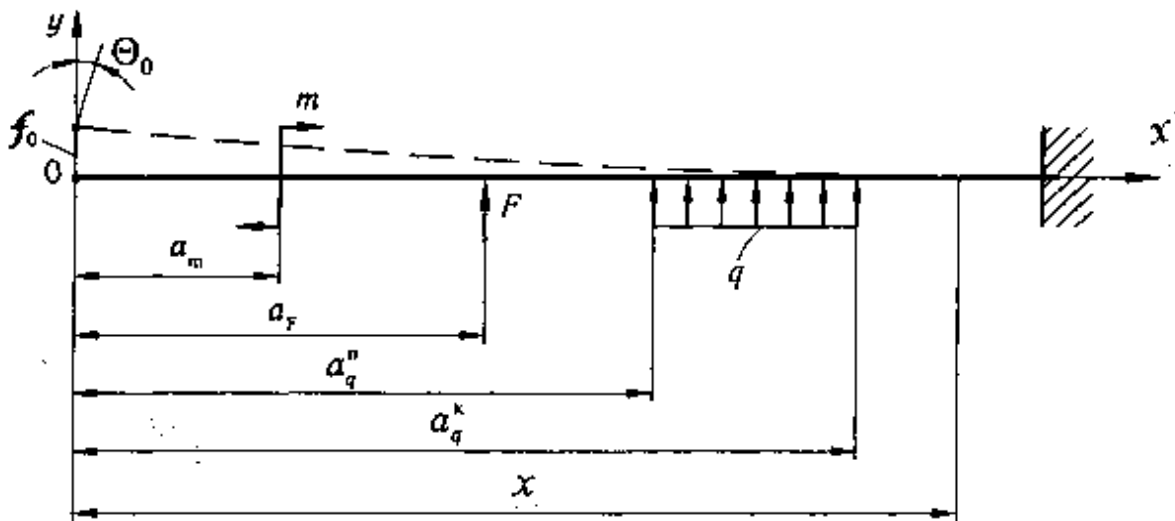


Рис. 4.1

Прогин вважається додатним, якщо переміщення збігається з напрямком осі  $y$ , що перпендикулярна до геометричної осі балки  $x$ . Максимальний прогин оцінюється за його абсолютним значенням.

Для двохопорної балки, навантаженої посередині прогону зосередженою силою  $F$  максимальний прогин визначається за формулою:

$$f_{\max} = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J}; \text{ мм.} \quad (4.3)$$

де  $L$  – відстань між опорами – прогін.

### Опис лабораторної установки

Схема лабораторної установки для вимірювання прогинів ригеля у рамі приведена на рис. 4.2. Дослідження виконується на сталевій рамі 1, що має висоту  $H=300$  мм. Переріз ригеля рами прямокутний з розмірами  $b=30$ мм,  $h=5$ мм.

Рама встановлена на силовій плиті 8 лабораторного стола двома шарнірними опорами: шарнірно-рухомою 2 і шарнірно-нерухомою 3. Опори за допомогою болтів для пазів верстатних і гайок 9 кріпляться в Т-подібному пазу силовій плити 8 лабораторного стола. Відстань між осями опор  $L=600$ мм. Ригель рами навантажується вантажем 4 через підвіску 7 посередині ригеля (прогину). Прогин вимірюється за допомогою вимірювальної головки 5, що встановлюється на штативі 6 над підвіскою.

### Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для вимірювання прогинів ригеля у рамі. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Виконати вимірювання прогинів ригеля у рамі в залежності від навантаження. Навантаження здійснюють установкою на підвіску вантажів вагою  $10-30 H$ . Кількість ступенів навантаження повинна бути 3-4. Відповідні значення встановлює викладач. При кожному навантаженні визначити за показанням вимірювальної головки величину прогину ригеля. Ці величини для послідувочої статистичної обробки результатів експерименту позначити  $x_i$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Здійснити повторні вимірювання параметру, що досліджується. Кількість повторних вимірів для кожного ступеня навантаження повинна бути не менше 6-7 (встановлюється викладачем). Отримані результати вимірювань занести до табл. 4.1.

**Вказівка:** 1. Послідовність повторних вимірювань для різних ступенів навантаження є довільною.

2. Після кожного із вимірювань експериментальна установка повинна бути розвантажена, а нульове показання вимірювальної головки повинно відкоригуватись при забезпеченні попереднього натягу в вимірювальній системі 4-5мм, що потребує установки стрілки лічильника обертів основної стрілки на відповідне показання.

3. За результатами вимірювань для кожного ступеня навантаження розрахувати середній результат вимірювань з виразу (2), див. «Теоретичні відомості з статистичної обробки результатів вимірювань» та емпіричне середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань з виразу (3). Значення занести до табл. 4.1.

Таблиця 4.1.

**Результати вимірювань прогинів ригеля у рамі**

№	Вихідний параметр F, Н	Показання приладу, мм						S, мм	Результат експерименту	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}'$ , мм	$f$ , мм
1	10									
2	15									
3	20									
4	30									

4. Виконати статистичну обробку результатів виконаного експерименту з метою виявлення і вилучення значень, які різко відрізняються. Для цього для кожної із вибірок величини показань приладу визначити найбільший і найменший результат вимірювань, вважаючи їх як сумнівні.

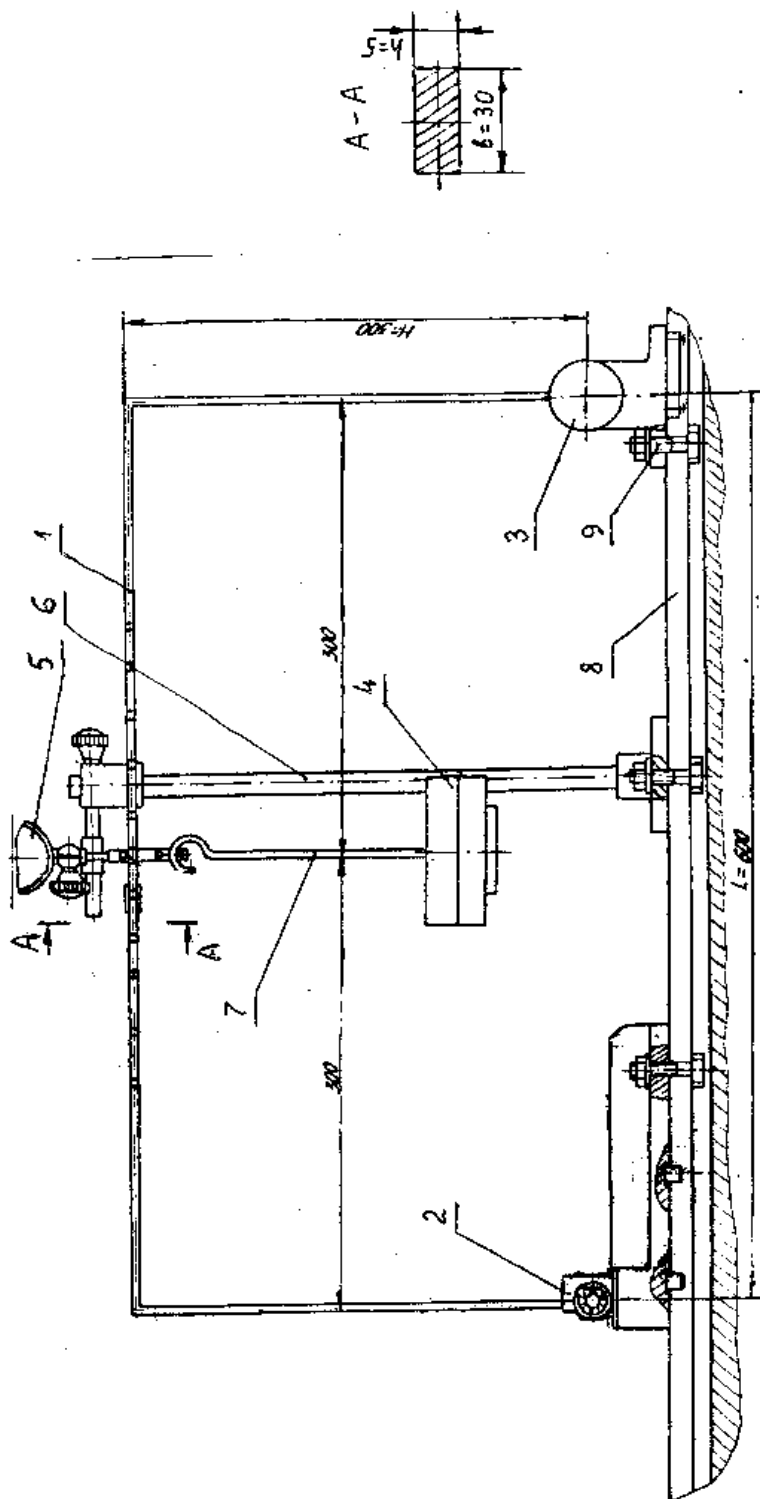


Рис. 4.2. Схема установки для вимірювання прогинів ригеля у рамі

Прийняти рішення щодо сумнівних результатів, застосувавши критерій Смирнова  $t_\beta$  (рівень значимості прийняти  $\alpha=0,05$ ). Перевірку виконати за виразом (1). Значення критерію  $t_\beta$  прийняти за табл. 1. Виявлені грубі похибки



(результати вимірювань, що різко відрізняються) треба вилучити з подальшого розгляду. Результати оцінки вимірювань за критерієм грубої похибки занести до табл. 4.2.

Таблиця 4.2.

**Результати оцінки вимірювань при рівні значимості  $\alpha=0,05$**

№	Вихідні дані, мм.		Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм		Оцінка за критерієм грубих похибок		
	$\bar{x}$	S			Критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	Висновок про похибки
1			$x_{\max}^c =$	$ x_{\max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{\min}^c =$	$ x_{\min}^c - \bar{x}  =$			
2							

Для сукупності значень, що залишилися, знову визначити для кожного із ступенів навантаження середнє значення показань приладу позначивши його  $\bar{x}'$ . Визначену величину занести до табл. 4.1.

Усереднене значення показань приладу приймається за величину прогину ригеля при відповідному навантаженні:  $f = \bar{x}'$ . Результати занести до табл. 4.1.

5. Побудувати діаграму залежності прогинів ригеля при згинанні від величини навантаження :  $f = f(F)$ .

Діаграму будують за даними експерименту, відкладаючи в певному масштабі по осі ординат значення навантаження, а по осі абсцис – відповідні до них прогини ригеля.

6. Порівняти отримані експериментально значення прогинів ригеля із обчисленими за формулою 4.3. Значення модуля пружності прийняти  $E = (2,0 - 2,1) \cdot 10^5$  МПа (Н/мм<sup>2</sup>) - сталь вуглецева.

Осьовий момент інерції прямокутного перерізу визначити за формулою:

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12}, \text{ [мм}^4\text{]}$$

де  $b$  - ширина перерізу, мм.;

$h$  - висота перерізу, мм.

Розміри перерізу ригеля  $b \times h = 30 \times 5$  мм.

Визначити відхилення результатів експерименту від розрахункового значення параметра за формулою:

$$\delta = \frac{|f_e - f_T|}{f_T} \cdot 100\%$$

Результат занести до табл. 4.3.

Таблиця 4.3.

### Порівняння результатів визначення значення прогинів ригеля у рамі

Навантаження $F$ , Н				
Прогин, $f$ , мм	експериментальне значення			
	теоретичне значення			
розбіжність, %				

### Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати вимірювань прогинів ригеля у рамі в залежності від навантаження (за формою табл. 4.1) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 4.2).
5. Діаграма залежності прогинів ригеля при згинанні від величини навантаження  $f = f(F)$ .
6. Оцінка відхилення результатів експерименту від розрахункового значення прогину ригеля (за формою табл. 4.3).

7. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
8. Висновки.

### **Контрольні запитання**

1. Дайте визначення чистого і поперечного згинів балки.
2. Як визначається внутрішній згинальний момент у перерізі балки?
3. Дайте визначення правилу знаків для поперечних сил та згинальних моментів.
4. Як визначається осьовий момент інерції для прямокутного перерізу; для порожинного перерізу; кільцевого перерізу; круглого перерізу?
5. Які форми поперечних перерізів раціональні для балок із пластичних матеріалів? Із крихких матеріалів?
6. Як записується універсальне рівняння пружної лінії балки?
7. В чому сутність розрахунку на жорсткість при згинанні?
8. Що таке балка? Які види балок розрізняють?
9. Які опорні пристрої забезпечують геометричну незмінюваність балок?
10. Наведіть приклади раціональних перерізів балки.
11. Що характеризує жорсткість перерізу при згинанні?

**Література:** [1], с. 50-72; [2], с. 61-70; 76-88; [3], с. 74-78; 105-114; [4], с. 237-243; 257-261; 265-284.

### **Лабораторна робота 5**

#### **ВИЗНАЧЕННЯ ПРОГИНІВ І КУТІВ ПОВОРОТУ ПЕРЕРІЗІВ СТАТИЧНО ВИЗНАЧЕНОЇ БАЛКИ ПРИ ЗГИНАННІ**

##### **Мета роботи:**

- експериментальне визначення прогинів і кутів повороту в окремих перерізах балки при згинанні для деяких схем навантаження балок і порівняння отриманих величин з розрахунковими значеннями.

### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для випробування балки на згинання – 1 шт.
2. Набір вантажів – 1 комплект.
3. Вимірювальний прилад (зубчаста вимірювальна головка типу ИЧ) – 4 шт.
4. Штатив для установки вимірювальної головки – 4 шт.

### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Експериментально перевірити формули для визначення прогинів і кутів повороту в окремих перерізах балки при згинанні для деяких схем навантаження балок:

Схема 1. Проста (однопрогонова) балка, навантаження силою  $F$  по середині прогону.

Схема 2. Одноконсольна однопрогонова балка, навантаження силою  $F$ , розміщеною на кінці консолі.

### **Теоретичні відомості**

Балками називаються прямолінійні стрижні, що працюють на згинання.

Плоским згинанням називається такий вид навантаження балок, при якому всі задані навантаження діють в одній площині, що називається силовою, причому ця площина збігається з однією із головних площин балки. На розрахунковій схемі балку прийнято замінити її віссю. При цьому всі навантаження зводяться до осі балки, силова площина збігається з площиною рисунка.

Опорні пристрої (опори) балок для розрахунку систематизують у вигляді трьох типів:

а) шарнірно-рухома опора, в якій може виникати тільки одна складова реакції, що напрямлена вздовж опорного стрижня;

б) шарнірно-нерухома опора, в якій можуть виникати дві складові – вертикальна реакція та горизонтальна реакція.

в) затиснення (закріплення), де можуть бути три складові – вертикальна і горизонтальна реакції й опорний момент.

Залежно від способів прикріплення до основи розрізняють кілька видів балок. Зображену на рис. 5.1.а балку з жорстко закріпленим одним кінцем і другим вільним кінцем називають консольною балкою.

Балку з шарнірно нерухоною опорою на одному кінці і шарнірно рухоною на другому (рис. 5.1.б) називають простою, або однопрогоною, або двохопною, а відстань між опорами – прогоном.

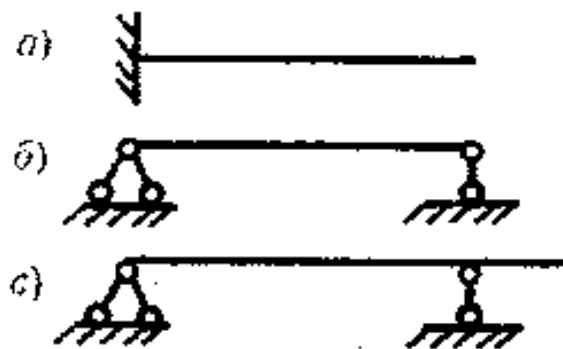


Рис. 5.1.

Шарнірно оперта балка може мати за опорою кінці, які вільно зависають. Їх називають консолями (рис. 5.1.в). Тоді залежно від числа консолей балку називають одноконсольною (рис. 5.1.в) або двоконсольною.

Найменше число правильно розташованих в'язей, за якого балка зберігає нерухомість відносно основи в одній площині (геометричну незмінюваність), дорівнює трьом. У цьому разі опорні реакції можна визначити з одних лише рівнянь статки, і таку балку називають статично визначаємою. Балки, які мають більше як три опорні закріплення, називають статично невизначуваною. За числа в'язей менше як три балка перетворюється в механізм, оскільки система стає геометрично змінюваною.

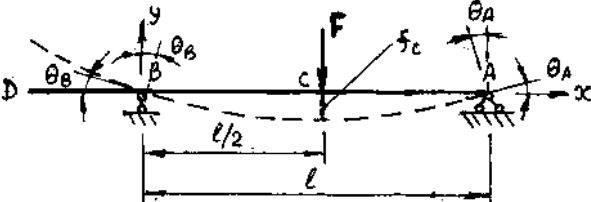
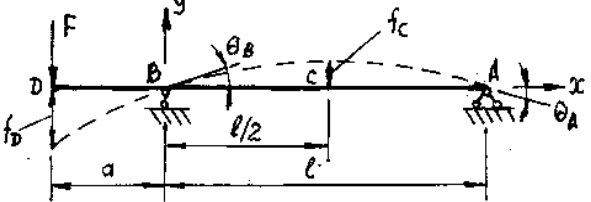
Прогини та кути повороту перерізів балки визначають інтегруванням диференційного рівняння пружної лінії балки.

У теоретичних відомостях до роботи 4 приведено універсальні рівняння для прогинів та кутового переміщення перерізів балки.

У табл. 5.1 приведені формули, що отримані інтегруванням диференційних рівнянь, для визначення величини прогину та кута повороту перерізів для балок у варіантах навантаження, що досліджуються у роботі.

Таблиця 5.1.

**Формули для визначення величини прогину та кута повороту перерізів для різних варіантів навантаження балки**

Варіант	Схема навантаження балки та її деформації	Максимальний прогин в указаному на схемі перерізі, $f$ , мм	Кут повороту указанного на схемі перерізу $\theta$ , рад.
1		$f_c = -\frac{F \cdot l^3}{48EJ}$	$\theta_A = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}$ $\theta_B = -\frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}$
2		$f_c = \frac{F \cdot a \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot J}$ $f_D = -\frac{F \cdot a^2 \cdot (l + a)}{3 \cdot E \cdot J}$	$\theta_A = -\frac{F \cdot a \cdot l}{6 \cdot E \cdot J}$ $\theta_B = \frac{F \cdot a \cdot l}{3 \cdot E \cdot J}$

- Примітка:**
1. Прогин вважається додатним, якщо переміщення збігається з напрямком осі ординат  $y$ .
  2. Додатний напрямок кутів повороту перерізів – проти ходу годинникової стрілки, якщо вісь абсцис  $x$  направлена зліва направо.
  3. Максимальні і мінімальні прогини  $f_{max}$ ,  $f_{min}$  і кута повороту  $\theta_{max}$ ,  $\theta_{min}$  оцінюють за їх абсолютним значенням.

**Опис лабораторної установки**

Схема лабораторної установки для вимірювання прогинів і кутів повороту перерізів балки приведена на рис. 5.2.

Робота виконується на зразку у вигляді сталевій балки 10 прямокутного перерізу  $b \times h = 30 \times 4$  мм. Одним кінцем балка встановлена у головку конічного хвостовика 5. Хвостовик жорстко з'єднується з правим опорним стояком 2, що має відповідний затискний пристрій 8, що включає затяжний болт і ексцентриковий затискач. Головка хвостовика має болти, що дозволяють їх

вкручуванням здійснювати жорстке або шарнірне з'єднання балки з хвостовиком. При виконанні роботи правий кінець балки повинен мати шарнірно-нерухому опору. Шарнірно-рухомою опорою 7 балка другим кінцем опирається на опорну площадку лівого опорного стояка 3.

Прогин (відстань між опорами) балки складає  $L=600\text{мм}$ .

Консоль балки складає  $a=200\text{мм}$ .

Опори 2 і 3 за допомогою болтів для пазів верстатних і гайок 4 кріпляться в Т-подібному пазу силової плити 1 лабораторного стола.

Балка навантажується згідно схеми навантаження вантажем 14 через підвіску 15 і сергу 16 (за схемою 1 балка навантажується зосередженою силою  $F$  посередині прогону, а за схемою 2 балка навантажується зосередженою силою  $F$  на кінці консолі). Прогин в перерізах балки вимірюється за допомогою вимірювальної головки 13, що встановлюється на штативі 12 над підвіскою.

Для вимірювання кутів повороту перерізів до балки навпроти опор жорстко закріплені важелі 6. Вісь вимірювальної головки 9 розташована на відстані  $R=100\text{мм}$  від осі балки і обпирається вимірювальним наконечником на опорну п'яту, що виконана на важелі кутоміра. Прогин балки призводить до повороту важеля, що в свою чергу призводить до відповідного переміщення вимірювального стрижня головки 9, встановленої на штативі 11.

Прогин балки визначається безпосередньо за показаннями вимірювальної головки, якщо показання вимірювальної головки (переміщення вимірювального стрижня головки) позначити  $m$ , то кут повороту перерізу визначиться за формулою (рис. 5.3):

$$\theta = \frac{m}{R}, \text{ рад.}$$

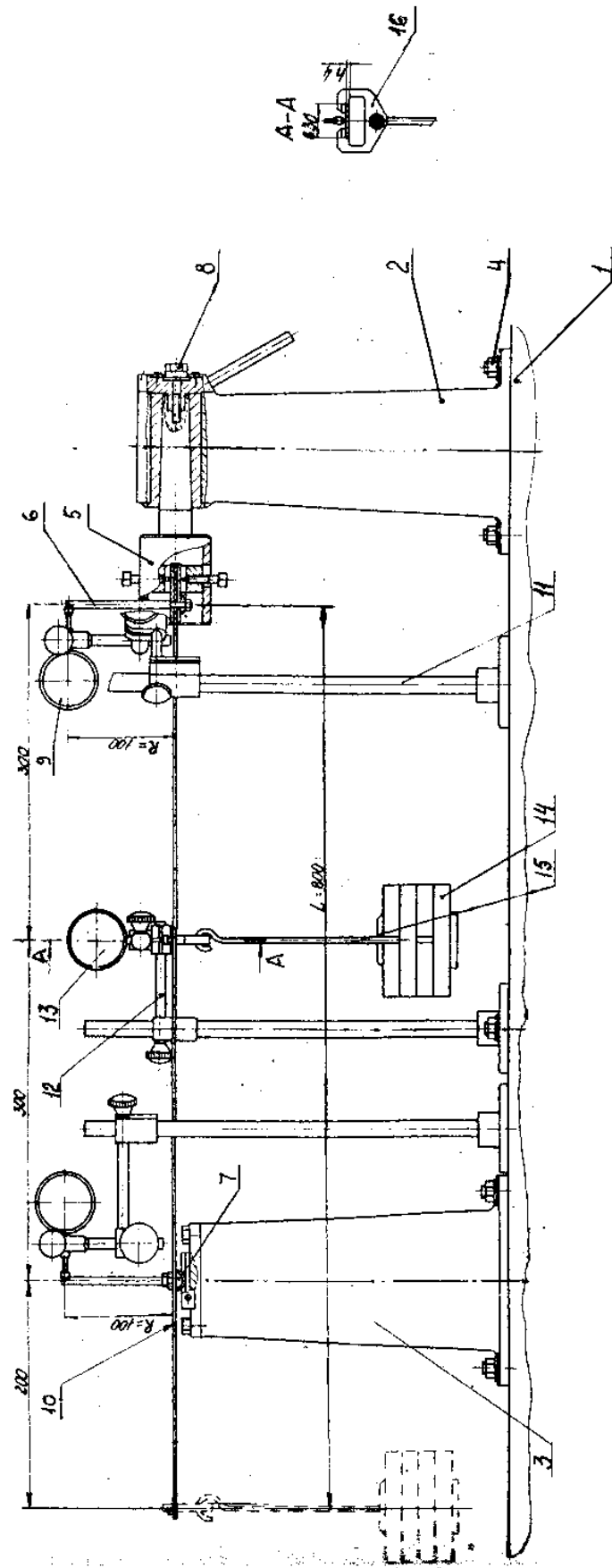


Рис. 5.2. Схема установки для вимірювання прогинів і кутів повороту перерізів балки



Оскільки кути повороту перерізів у зоні пружних деформацій дуже малі (менше 10%), то значення тангенсу кута дорівнює значенню кута у радіанах, тобто  $\theta \approx \tan \theta$ .

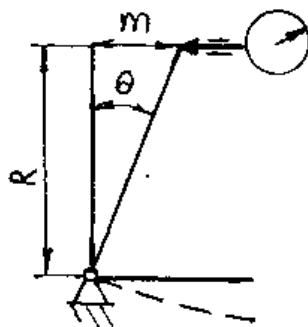


Рис. 5.3. Схема вимірювання кута повороту перерізу балки

### Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для вимірювання прогинів і кутів повороту перерізів балки. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Виконати вимірювання прогину балки посередині прогону та кути повороту балки в перерізах над опорами *A* і *B* (див. схему навантаження балки – табл. 5.1). Навантаження здійснити за схемою 1 посередині прогону зосередженою силою *F*. Значення сили *F* в межах 20÷40Н встановлює викладач.

Визначити показання вимірювальних головок для вимірювання прогинів і кутів повороту перерізів балки. Здійснити повторні вимірювання досліджуваних параметрів. Кількість повторних вимірів прогинів і кутів повороту повинна бути не менше 6-7 (встановлюється викладачем). Ці величини для послідууючої статистичної обробки результатів експерименту позначити, як  $x_i$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

Отримані результати вимірювань занести до табл. 5.2.

**Вказівка:** 1. Після кожного із вимірювань досліджуваних параметрів (зняття показань вимірювальних головок) експериментальна установка повинна

бути розвантажена, а нульове показання вимірювальних головок повинно відкоригуватись.

2. Рекомендується забезпечення попереднього натягу в вимірювальній системі близько 1мм в головках кутомірів і 6-8мм в головці для вимірювання прогину, що потребує установки стрілки лічильника обертів основної стрілки на відповідне показання.

3. За результатами вимірювань кожного із досліджуваних параметрів розрахувати середній результат вимірювань з виразу (2), див. «Теоретичні відомості з статистичної обробки результатів вимірювань» та емпіричне середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань з виразу (3). Значення занести до табл. 5.2.

4. Виконати статистичну обробку результатів виконаного експерименту з метою виявлення і вилучення значень, які різко відрізняються. Для цього для кожної із вибірок величини показань приладу визначити найбільший і найменший результат вимірювань, вважаючи їх як сумнівні.

Прийняти рішення щодо сумнівних результатів, застосувавши критерій Смирнова  $t_\beta$  (рівень значимості прийняти  $\alpha=0,05$ ). Перевірку виконати за виразом (1). Значення критерію  $t_\beta$  прийняти за табл. 1.

Виявлені грубі похибки (результати вимірювань, що різко відрізняються) треба вилучити з подальшого розгляду. Результати оцінки вимірювань за критерієм грубої похибки занести до табл. 5.3. Для сукупності значень, що залишилися, знову визначити для кожного із параметрів, що вимірюються (прогин, кути повороту) середнє значення показань приладу, позначивши його  $\bar{x}'$ . Визначену величину занести до табл. 5.2.

Величина прогину балки визначається як усереднене значення показань вимірювального приладу:  $f_c = \bar{x}'$ . Результат занести до табл. 5.2

Таблиця 5.2.

**Результати вимірювань прогину та кута повороту перерізу балки при її навантаженні за схемою 1 (зосереджена сила розміщена посередині прогону)**

Навантаження, $F, Н$	Вимірюваний параметр	Показання приладу, мм						$S, мм$	Результати експерименту			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}', мм$	$m = \bar{x}', мм$	$f, мм$	$\theta = \frac{m}{R}, рад$
	Прогин посередині прогону									—	$f_c =$	—
	Кут повороту на правій опорі										—	$\theta_A =$
	Кут повороту на лівій опорі										—	$\theta_B =$

Таблиця 5.3.

**Результати оцінки вимірювань при навантаженні балки за схемою 1 при рівні значимості  $\alpha=0,05$**

Вимірюваний параметр	Вихідні дані, мм		Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм		Оцінка за критерієм грубих похибок		
	$\bar{x}$	$S$			критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	Висновок про похибки
$f_c$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$\theta_A$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$\theta_B$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			

Кут повороту перерізу обчислити за формулою:

$$\theta = \frac{m}{R}, \text{ рад.}$$

де  $m = \bar{x}'$  - усереднене значення показань вимірювальної головки індикаторного кутоміра,  $R=100\text{мм}$  – відстань між осями вимірювальної головки і балки.

Результат занести до табл. 5.2.

5. Виконати вимірювання прогинів та кутів повороту балки, здійснивши навантаження балки за схемою 2 (див. схему навантаження балки – табл. 5.1) зосередженою силою  $F$ , розміщеною на кінці консолі. Значення сили  $F$  в межах 20÷40Н встановлює викладач.

Вимірювання прогинів і кутів повороту перерізів балки та статистичну обробку отриманих результатів виконати згідно пунктів 2-4 та представити за формою табл. 5.4 та 5.5.

Таблиця 5.4.

**Результати вимірювань прогинів та кута повороту перерізу балки при її навантаженні за схемою 2 (зосереджена сила розміщена на кінці консолі)**

Навантаження, $F, \text{Н}$	Вимірюваний параметр	Показання приладу, мм						$S, \text{мм}$	Результати експерименту			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}', \text{мм}$	$m = \bar{x}', \text{мм}$	$f, \text{мм}$	$\theta = \frac{m}{R}, \text{рад}$
	Прогин посередині прогону									—	$f_C =$	—
	Прогин на кінці консолі									—	$f_D =$	—
	Кут повороту на правій опорі										—	$\theta_A =$
	Кут повороту на лівій опорі										—	$\theta_B =$

Таблиця 5.5.

**Результати оцінки вимірювань при навантаженні балки за схемою 2  
при рівні значимості  $\alpha=0,05$**

Вимірюваний параметр	Вихідні дані, мм		Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм		Оцінка за критерієм грубих похибок		
	$\bar{x}$	$S$			критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	Висновок про похибки
$f_c$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$f_D$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$\theta_A$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$\theta_B$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			

6. Порівняти отримані експериментально значення прогинів і кутів повороту перерізів балки із обчислених за формулами, що приведені в табл. 5.1. Значення модуля пружності прийняти  $E=(2,0-2,1)10^5 \text{МПа}(\text{Н/мм}^2)$  – сталь вуглецева.

Осьовий момент інерції прямокутного перерізу визначити за формулою:

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12} [\text{мм}]^4,$$

де  $b=30\text{мм}$  – ширина перерізу;

$h=4\text{мм}$  – висота перерізу.

Визначити відхилення результатів експерименту від розрахункового значення параметру за формулою:

$$\delta_f = \frac{|f_e - f_T|}{f_T} \cdot 100\% ; \quad \delta_\theta = \frac{|\theta_e - \theta_T|}{\theta_T} \cdot 100\%$$

Результат занести до табл. 5.6.

Таблиця 5.6.

**Порівняння результатів визначення величини прогинів та кутів повороту перерізів для різних варіантів навантаження балки**

Параметри деформації балки		Величини параметрів деформації балки при її навантаженні зосередженою силою	
		Посередині прогону (схема 1)	На кінці консолі (схема 2)
Прогин, $f_c$	експериментальне значення, мм		
	теоретичне значення, мм		
	розбіжність, %		
Прогин, $f_D$	експериментальне значення, мм	—	
	теоретичне значення, мм		
	розбіжність, %		
Кути повороту опорних перерізів	$\theta_A$	експериментальне значення, рад	
		теоретичне значення, рад	
		розбіжність, %	
	$\theta_B$	експериментальне значення, рад	
		теоретичне значення, рад	
		розбіжність, %	

**Примітка:** Якщо виконати послідовне навантаження балки силами 10, 20, 30, 40Н і виміряти відповідні їм прогини та кути повороту перерізів балки на опорах, то можна побудувати графіки  $f=f(F)$ ,  $\theta_A=f(F)$ ,  $\theta_B=f(F)$  для заданого варіанта навантаження балки. Графіки повинні показати, що кутові і лінійні переміщення балки при згинанні підкоряються закону Гука.

### Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.

4. Результати вимірювань величини прогинів та кутів повороту перерізів для різних варіантів навантаження балки (за формою табл. 5.2, 5.4) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 5.3, 5.5).
5. Оцінка відхилення результатів експерименту від розрахункового значення прогину та кутів повороту перерізів балки (за формою табл. 5.6).
6. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
7. Висновки.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке балка? Які види балок розрізняють?
2. Як визначається внутрішній згинальний момент у перерізі балки?
3. Наведіть приклади раціональних перерізів балки.
4. Які опорні пристрої забезпечують геометричну незмінюваність балок?
5. Як записується універсальне рівняння пружної лінії балки?
6. Що називають пружною лінією балки?
7. Що таке жорсткість перерізу при згинанні?
8. Як визначається осьовий момент інерції для прямокутного перерізу, кільцевого перерізу, круглого перерізу?
9. Як переміщуються поперечні перерізи балок при згинанні?
10. Як зміниться прогин балки, якщо навантаження зменшиться у два рази?
11. Як зміниться максимальний прогин консольної балки, якщо довжина консолі зменшиться у два рази?
12. Яким математичним співвідношенням зв'язані між собою прогин і кут повороту в перерізі при згинанні балок?

**Література:** [1], с. 50-72; [2], с. 61-70; 76-81; [3], с.74-78; 105-114; [4], с.237-243; 257-261; 265-284.

## **ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМ ПРО ВЗАЄМНІСТЬ РОБІТ І ПЕРЕМІЩЕНЬ**

### **Мета роботи:**

експериментальна перевірка теореми про взаємність робіт і теореми про взаємність переміщень у випадку згинання ригеля рами.

### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для випробування рами на згинання – 1 шт.
2. Набір вантажів – 1 комплект.
3. Вимірювальний прилад (важільно-зубчаста вимірювальна головка типу 2МИГ з ціною поділки 2мкм.) – 2шт.
4. Штатив для установки вимірювальної головки – 2 шт.

### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Експериментально перевірити теорему про взаємність робіт та теорему про взаємність переміщень у випадку згинання ригеля рами.

### **Теоретичні відомості**

Теорема про взаємність робіт відноситься до числа загальних теорем опору матеріалів. Вона випливає із принципу незалежності дії сил і припущення про лінійну залежність між величинами сил та деформаціями, що викликані ними. Прирівнюючи роботу внутрішніх сил роботі зовнішніх сил, можна сформулювати теорему про взаємність робіт (теорему Бетті) наступним образом: робота сил першої системи на переміщеннях точок їх прикладання від дії сил другої системи дорівнює роботі сил другої системи на переміщеннях точок їх прикладання від дії першої системи сил (рис. 6.1). Ця теорема має вигляд рівняння:

$$F_1 \cdot f_{12} = F_2 \cdot f_{21},$$



де  $F_1, F_2$  – сили, що діють у перерізах 1 та 2;

$f_{12}, f_{21}$  – переміщення точок прикладання сил (перший індекс - номер перерізу, що розглядається, другий індекс – номер перерізу, де прикладена сила, що визвала переміщення)

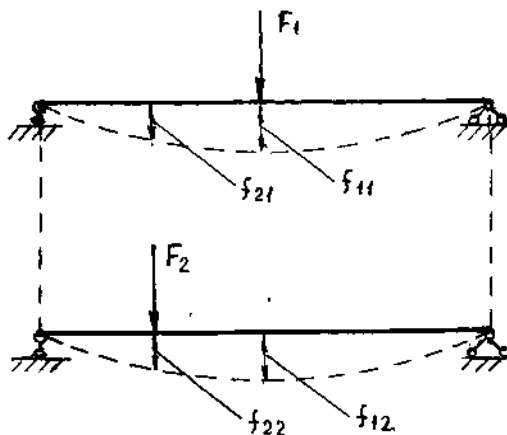


Рис. 6.1.

У тому випадку, коли  $F_1 = F_2 = 1$  або чисельно однакові, як слідство із теореми про взаємність робіт отримуємо теорему: про взаємність можливих переміщень (теорема Максвелла): переміщення  $f_{12}$  деякої точки пружного тіла від дії сили, що прикладена в точці 2, дорівнює переміщенню  $f_{21}$  точки 2 від дії сили, що прикладена в точці 1:

$$f_{12} = f_{21}$$

Треба мати на увазі, що на можливих переміщеннях будуть створювати роботу не тільки зовнішні, але й внутрішні сили.

Теореми про взаємність робіт і переміщень дозволяють у ряді випадків спростити рішення задач опору матеріалів.

### Опис лабораторної установки

Схема лабораторної установки для вимірювання прогинів ригеля у рамі приведена на рис. 6.2. Дослідження виконується на сталевій рамі 1. Рама установлена на силовій плиті 8 лабораторного стола двома шарнірними опорами: шарнірно-рухомою 2 і шарнірно-нерухомою 3. Опори за допомогою

болтів для пазів верстатних і гайок 9 кріпляться в Т-подібному пазу силової плити 8.

Навантаження ригеля рами здійснюється посередині прогону вантажем 4 через підвіску 7 і сергу 10, в чверті прогону – вантажем 14 через підвіску 13 і сергу. Прогини ригеля в середині прогону вимірюються за допомогою вимірювальної головки 5, що встановлена на штативі 6 над підвіскою, у чверті прогону – вимірювальною головкою 11, що встановлена на штативі 12.

### **Послідовність виконання роботи**

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для вимірювання прогинів ригеля у рамі. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

*Експериментальна частина роботи складається з двох частин. В першій частині виконується перевірка теореми про взаємність робіт. Експеримент проводиться в наступній послідовності*

2. Виконати вимірювання прогинів ригеля, навантажуючи його у двох варіантах.

За першим варіантом ригель рами навантажують силою  $F_1$  посередині прогону і вимірюють величину прогину  $f_{21}$  у чверті прогону.

За другим варіантом ригель навантажують силою  $F_2$  у чверті прогону і вимірюють величину прогину  $f_{12}$  посередині прогону.

Величини прогинів для послідувочої статистичної обробки результатів експерименту позначити як  $x_i$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Здійснити повторні вимірювання параметрів, що досліджуються. Кількість повторних вимірів для кожного варіанта навантаження повинна бути не менше 6-7 (встановлюється викладачем). Отримані результати вимірювань занести до табл. 6.1.

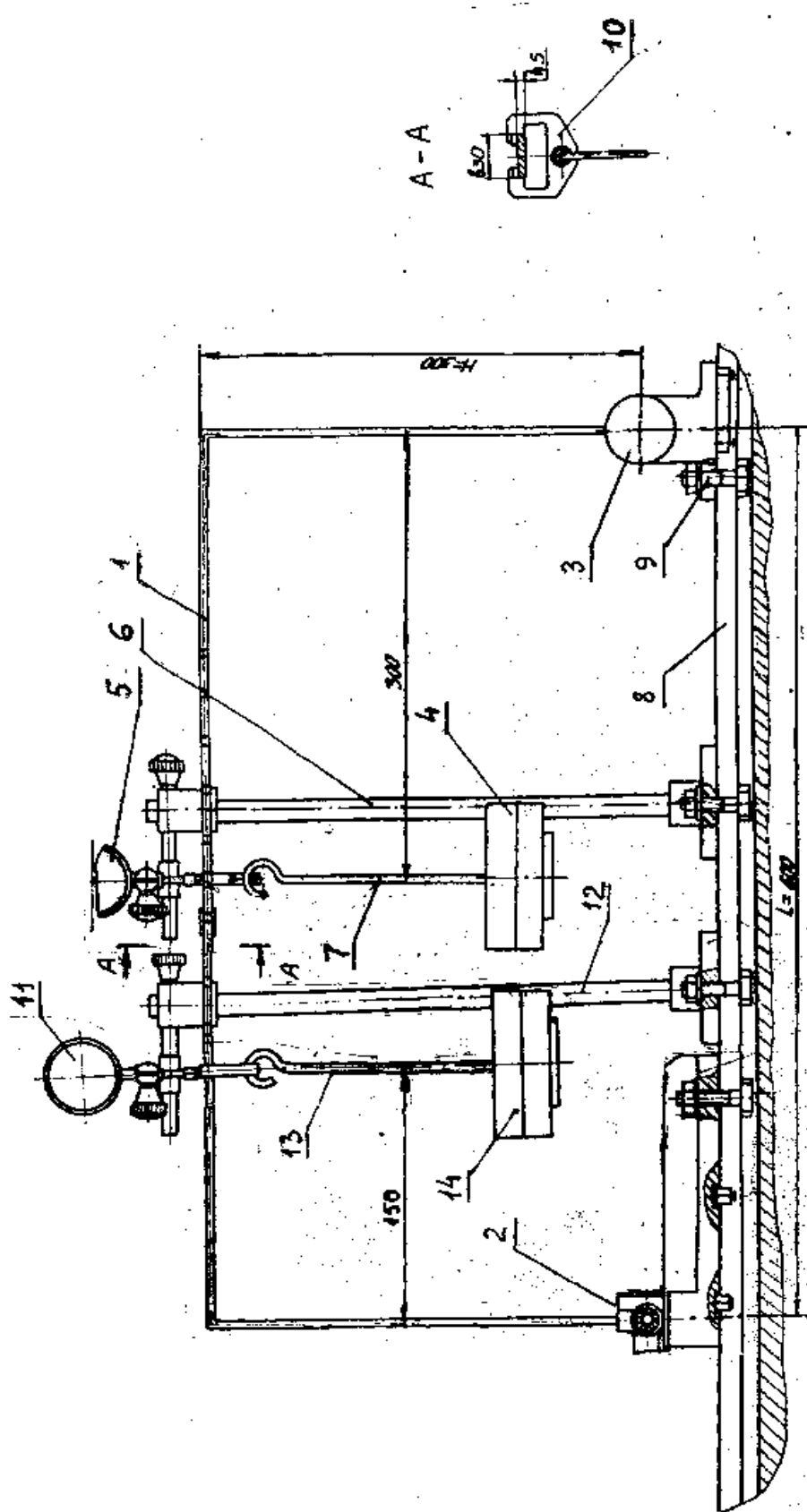


Рис. 6.2. Схема установки для вимірювання прогинів ригеля у рамі

**Вказівка:** 1. При перевірці теореми про взаємність робіт доцільно використовувати різні значення сил  $F_1$  і  $F_2$  в межах 20-40Н (визначається викладачем), наприклад:

$F_1, \text{Н}$	30	20
$F_2, \text{Н}$	40	30

2. Послідовність повторних вимірювань для різних варіантів навантаження є довільною.

3. Після кожного із вимірювань експериментальна установка повинна бути розвантажена, а нульове показання вимірювальної головки повинно відкоригуватись як по основній шкалі, так і по шкалі лічильника обертів основної стрілки при забезпеченні попереднього натягу в вимірювальній системі (відлік здійснюватиметься за шкалою, позначеною цифрами червоного кольору).

3. За результатами вимірювань для кожного із варіантів навантаження розрахувати середній результат вимірювань з виразу (2), див. «Теоретичні відомості з статистичної обробки результатів вимірювань» та емпіричне середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань з виразу (3). Значення занести до табл. 6.1.

Таблиця 6.1.

#### Перевірка теореми про взаємність робіт

№ варіанта	Навантаження $F, \text{Н}$	Показання приладу, мм						$S, \text{мм}$	Результат експерименту	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}', \text{мм}$	Прогин $f, \text{мм}$
1	$F_{1=}$									$f_{21=}$
2	$F_{2=}$									$f_{12=}$
						$F_1 \cdot f_{12=}$			Дж	
						$F_2 \cdot f_{21=}$			Дж	

4. Виконати статистичну обробку результатів виконаного експерименту з метою виявлення і вилучення значень, які різко відрізняються.

Для цього для кожної із вибірок величини показань приладу визначити найбільший і найменший результат вимірювань, вважаючи їх як сумнівні.

Прийняти рішення щодо сумнівних результатів, застосувавши критерій Смирнова  $t_\beta$  (рівень значимості прийняти  $\alpha=0,05$ ). Перевірку виконати за виразом (1). Значення критерію  $t_\beta$  прийняти за табл. 1. Виявлені грубі похибки (результати вимірювань, що різко відрізняються) треба вилучити з подальшого розгляду. Результати оцінки вимірювань за критерієм грубої похибки занести до табл. 6.2. Для сукупності значень, що залишилися, знову визначити для кожного з варіантів навантаження середнє значення показань приладу, позначивши його  $\bar{x}'$ . Визначену величину занести до табл. 6.1.

Усереднене значення показань приладу приймається за величину прогину ригеля у відповідному перерізі при відповідному навантаженні:

$$f = \bar{x}'.$$

Результат занести до табл. 6.1.

Таблиця 6.2.

### Результати оцінки вимірювань при рівні значимості $\alpha=0,05$

№ варіанта	Вихідні дані, мм		Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм		Оцінка за критерієм грубих похибок		
	$\bar{x}$	S			критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	висновок про похибку
1			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
2			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			

В другій частині експерименту виконується перевірка теореми про взаємність переміщень. Експеримент проводиться в наступній послідовності.

3. Виконати вимірювання прогинів ригеля повторивши попередній дослід при обов'язковому дотриманні умови  $F_1 = F_2$  (значення сил визначається викладачем в межах 20-40Н). Вимірювання прогинів та статистичну обробку

отриманих результатів виконати згідно пунктів 2-4 та представити за формою табл. 6.3 та 6.2.

Таблиця 6.3.

### Перевірка теореми про взаємність переміщень

№ варіанта	Навантаження $F$ , Н	Показання приладу, мм						$S$ , мм	Результат експерименту	
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}'$ , мм	Прогин $f$ , мм
1	$F_1$									$f_{21} =$
2	$F_2$									$f_{12} =$

4. Виконати обробку результатів експерименту. Для перевірки теореми про взаємність робіт використаємо результати експерименту, що приведені в табл. 6.1. Обчислюємо величини:

$$F_1 \cdot f_{12} \text{ і } F_2 \cdot f_{21}$$

Оцінка похибки експерименту може бути обчислена за формулою:

$$\delta = \frac{|F_1 \cdot f_{12} - F_2 \cdot f_{21}|}{F_1 \cdot f_{12}} \cdot 100\%$$

Для перевірки теореми про взаємність переміщень використаємо результати експерименту, що приведені в табл. 6.3, порівнюючи середні значення переміщень  $f_{21}$  і  $f_{12}$ .

Оцінка похибки експерименту може бути обчислена за формулою:

$$\delta = \frac{|f_{12} - f_{21}|}{f_{12}} \cdot 100\%$$

Величини переміщень і похибки експерименту занести до табл. 6.4.

Таблиця 6.4.

### Оцінка похибки експериментальних результатів

Теорема про взаємність робіт			Теорема про взаємність переміщень		
$F_1 \cdot f_{12}$ , Дж	$F_2 \cdot f_{21}$ , Дж	похибка, %	$f_{12}$ , мм	$f_{21}$ , мм	похибка, %

## Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати перевірки теореми про взаємність робіт (за формою табл. 6.1) та теореми про взаємність переміщень (за формою табл. 6.3) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 6.2).
5. Оцінка похибки експериментальних результатів (за формою табл. 6.4).
6. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
7. Висновки.

## Контрольні питання

1. Чому при експериментальному визначенні проводиться кілька вимірювань?
2. Чим можна пояснити розбіжність між теоретичним і експериментальним значенням прогину балки?
3. Запишіть умову, при якій будуть рівними переміщення  $f_{12}=f_{21}$ .
4. Як формулюється теорема про взаємність робіт?
5. Як формулюється теорема про взаємність переміщень?
6. Яке практичне застосування має теорема про взаємність переміщень?

**Література:** [3], с. 103-104; [4], с.354-366.

## Лабораторна робота 7

### ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМ ПРО ВЗАЄМНІСТЬ РОБІТ І ПЕРЕМІЩЕНЬ

#### Мета роботи:

- експериментальна перевірка теорем про взаємність робіт і переміщень у випадку згинання одноконсольної однопрогонової балки

### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для випробування балки на згинання – 1 шт.
2. Набір вантажів – 1 комплект.
3. Вимірювальний прилад (важільно-зубчаста вимірювальна головка типу 2МИГ з ціною поділки 2 мкм, або зубчаста вимірювальна головка типу ИЧ з ціною поділки 0,01мм) – 2шт.
4. Штатив для установки вимірювальної головки – 2 шт.

### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Експериментально перевірити теорему про взаємність робіт та теорему про взаємність переміщень у випадку згинання одноконсольної однопрогонової балки.

### **Теоретичні відомості**

Відомості про теореми про взаємність робіт і переміщень приведено у теоретичних відомостях роботи 6.

### **Опис лабораторної установки**

Дослідження проводиться на лабораторній установці, що використовується для визначення прогинів і кутів повороту перерізів балки при згинанні (робота 5). Для дослідної перевірки теореми про взаємність робіт і переміщень балка навантажується посередині прогону вантажем 2 через підвіску 3 і сергу 4 (рис. 7.1). На кінці консолі вимірюється прогин балки за допомогою вимірювальної головки 5, що встановлена на штативі 6.

У другому стані балка навантажується на кінці консолі вантажем 7 через підвіску 8 і сергу. Прогин балки вимірюється посередині прогону вимірювальною головкою 9, що встановлена на штативі 10.



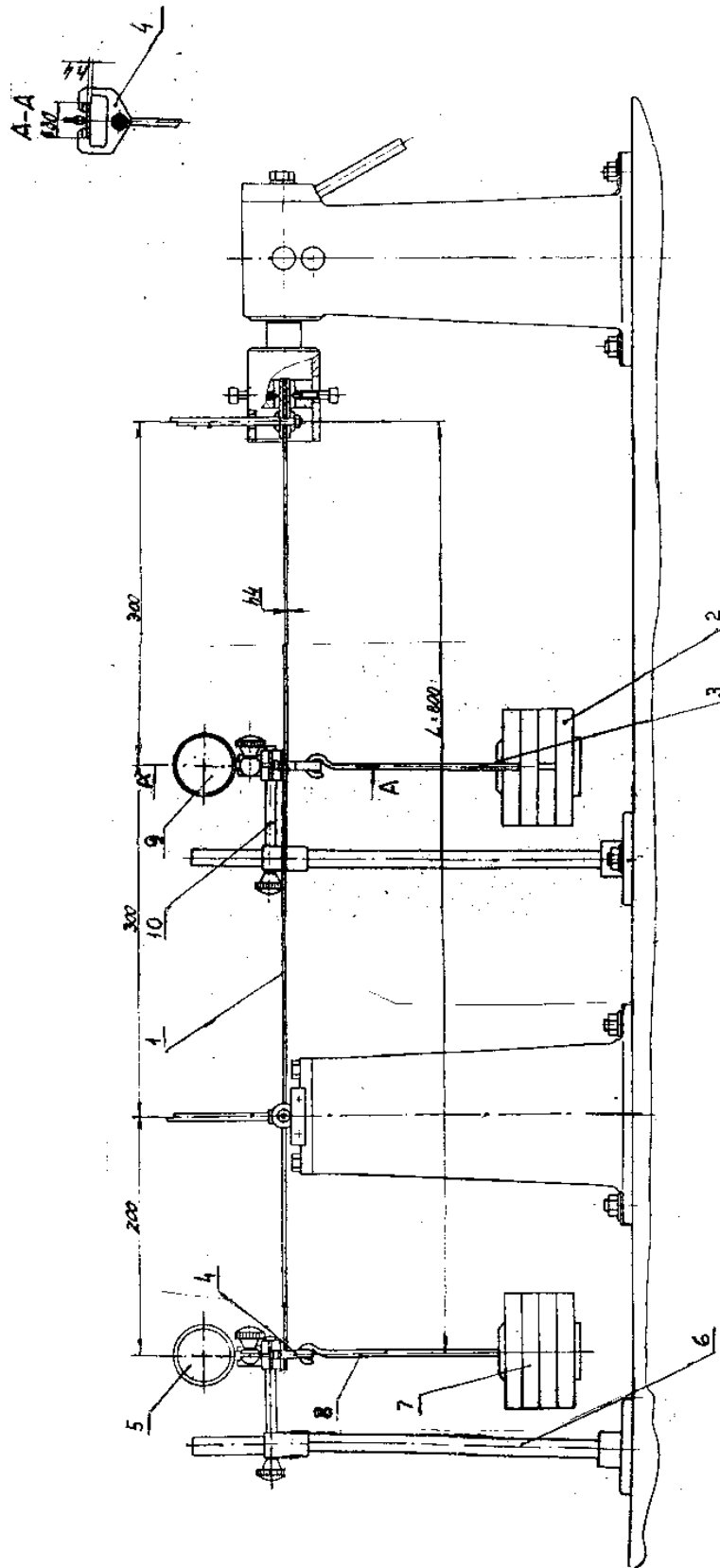


Рис. 7.1. Схема установки для вимірювання прогинів перерізів балки

## Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для вимірювання прогинів при згинанні одноконсольної однопрогонової балки. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Виконати дослідну перевірку теорем про взаємність робіт і переміщень. Вимірювання прогинів балки та статистичну обробку отриманих результатів виконати так як в лабораторній роботі 6 згідно пунктів 2-6 та представити за формою табл. 6.1-6.3. Оцінку похибки експериментальних результатів представити за формою табл. 6.4.

- Вказівка:**
1. Навантаження балки силою  $F_1$  здійснювати посередині прогону, а силою  $F_2$  - на кінці консолі.
  2. Значення прогинів оцінювати за їх абсолютним значенням.

## Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати перевірки теореми про взаємність робіт (за формою табл. 6.1) та теореми про взаємність переміщень (за формою табл. 6.3) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 6.2).
5. Оцінка похибки експериментальних результатів (за формою табл. 6.4).
6. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
7. Висновки.

## Контрольні запитання

1. Як формулюється теорема про взаємність робіт?
2. Як формулюється теорема про взаємність переміщень?
3. Яке практичне застосування має теорема про взаємність переміщень?

4. Чому при експериментальному визначенні необхідно проводити повторні вимірювання параметру, що досліджується?
5. Як виконується статистична обробка результатів виконаного експерименту?

**Література:** [3], с. 103-104; [4], с. 354-366

## **Лабораторна робота 8**

### **ПОБУДОВА ПРУЖНОЇ ЛІНІЇ БАЛКИ**

#### **Мета роботи:**

- експериментальне визначення ординат пружної лінії балки і порівняння з результатом розрахунку

#### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для випробування балки на згинання – 1 шт.
2. Набір вантажів – 1 комплект.
3. Вимірювальний прилад (зубчаста вимірювальна головка типу ИЧ з ціною поділки 0,01мм) – 1шт.
4. Штатив для установки вимірювальної головки – 1 шт.

#### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Побудувати пружну лінію одноконсольної однопрогонової балки від дії сили, прикладеної в заданому перерізі методом початкових параметрів (аналітично) і на основі експериментальних даних.
2. Оцінити розбіжність між теоретичними і експериментальними значеннями ординат пружної лінії з висновком про точність розрахунку.

#### **Теоретичні відомості**

При згинанні під дією зовнішніх навантажень поздовжня вісь балки викривляється. Якщо згин проходить в межах пружних властивостей матеріалу, то після усунення навантажень вісь балки знову випрямляється. Тому зігнуту

вісь балки називають пружною лінією. За формою, яку при навантаженні балки приймає її пружна лінія можна робити висновок про кутові і лінійні переміщення при згинанні.

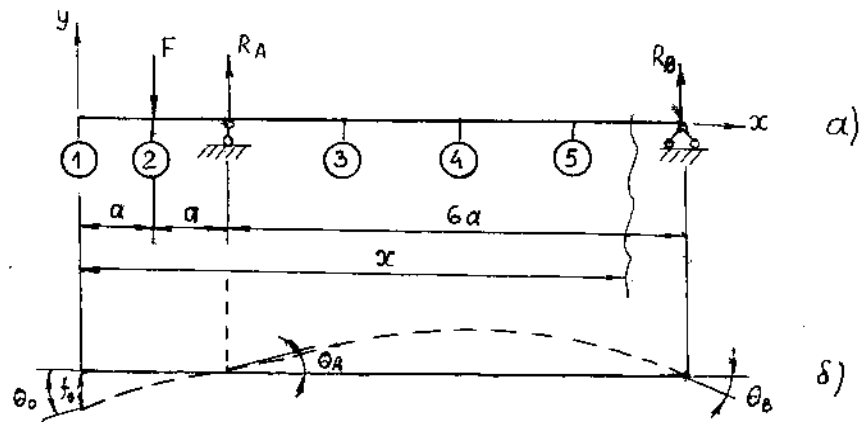


Рис. 8.1. Схема вимірювання пружної лінії балки

Для аналітичної побудови пружної лінії балки скористаємось методом початкових параметрів. Тоді для схеми, що приведена на рис. 8.1 рівняння для визначення ординат (лінійних переміщень - прогинів) пружної лінії запишемо в наступному вигляді (універсальне рівняння зігнутої осі балки для визначення прогинів приведено в теоретичних відомостях до роботи 4):

$$E \cdot J \cdot f_x = E \cdot J \cdot f_0 + E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot x - \frac{F(x-a)^3}{6} + \frac{R_A(x-2a)^3}{6}, \quad (8.1)$$

де  $f_0$ ,  $\theta_0$  – початкові параметри (прогин і кут повороту перерізу балки, розміщеного на початку координат – лівого торцевого перерізу балки);

$F$  – зовнішня зосереджена сила;

$R_A$  – реакція опори;

$E \cdot J$  - жорсткість перерізу балки;

$E$  – модуль пружності матеріалу балки (вуглецева сталь);

$J$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі  $x$ ;

$x$  – абсциса перерізу, де визначають переміщення (прогин).

**Примітка:** 1. При обчисленні переміщень конкретного перерізу враховують тільки ті навантаження, що діють зліва від

перерізу, якщо початок координат вибраний у лівому кінці осі балки.

2. Для визначення знаків згинальних моментів користуються правилами знаків опору матеріалів, для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статки.

Для обчислення переміщень за формулою (8.1) необхідно попередньо визначити початкові параметри  $f_0$  і  $\theta_0$ .

Початкові параметри визначаємо із граничних умов. Для однопрогонної шарнірно обіпертої балки: при  $x=2a$ ,  $f_A=0$ ; при  $x=8a$ ,  $f_B=0$ .

Визначаємо реакції опор з умов рівноваги:

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A \cdot 6a + F \cdot 7a = 0; \quad R_A = \frac{7}{6} F;$$

$$\sum M_A = 0: \quad R_B \cdot 6a + F \cdot a = 0; \quad R_B = -\frac{1}{6} F.$$

$$\text{Перевірка: } \sum Y = -F + R_A + R_B = -F + \frac{7}{6} F - \frac{1}{6} F = 0.$$

Реакції знайдені вірно.

Значення  $\theta$  знаходять з універсального рівняння (8.1) використовуючи умову рівності нулю прогинів на обох опорах:

При  $x=2a$  (ліва опора)  $f_A=f_{2a}=0$ , при  $x=8a$  (права опора)  $f_B=f_{8a}=0$

За умовами закріплення балки на опорі А ( $x=2a$ ):

$$E \cdot J \cdot f_{2a} = E \cdot J \cdot f_0 + E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot 2a - \frac{F(2a-a)^3}{6} = 0;$$

на опорі В ( $x=8a$ ):

$$E \cdot J \cdot f_{8a} = E \cdot J \cdot f_0 + E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot 8a - \frac{F(8a-a)^3}{6} + \frac{7F(8a-2a)^3}{6 \cdot 6} = 0$$

Отримавши систему з двох рівнянь, розв'язуємо її відносно  $\theta_0$  і  $f_0$ .

Після перетворень:

$$\left. \begin{aligned} E \cdot J \cdot f_0 + 2E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot a - \frac{Fa^3}{6} &= 0 \\ E \cdot J \cdot f_0 + 8E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot a - \frac{F(7a)^3}{6} + \frac{7F(6a)^3}{36} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Звідки

$$6E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot a - 15F \cdot a^3 = 0$$

Тоді

$$\theta_0 = \frac{15Fa^3}{6EJa} = \frac{15}{6} \cdot \frac{Fa^2}{6EJ}, \text{ рад.}$$

Після підстановки значення  $\theta_0$  до виразу

$$E \cdot J \cdot f_0 + 2E \cdot J \cdot \theta_0 \cdot a - \frac{Fa^3}{6} = 0 \quad \text{отримаємо:}$$

$$E \cdot J \cdot f_0 + \frac{30}{6} Fa^3 - \frac{1}{6} Fa^3 = 0,$$

$$\text{звідки } f_0 = -\frac{29}{6} \cdot \frac{Fa^3}{EJ}, \text{ мм}$$

Рівняння, що визначає прогин  $f_x$  в довільному перерізі балки набуває виду:

$$EJf_x = -\frac{29}{6} Fa^3 + \frac{15}{6} Fa^2 x - \frac{1}{6} F(x-a)^3 + \frac{7}{36} F(x-2a)^3, \quad (8.2)$$

Результати обчислення ординат пружної лінії (прогинів):

прогин на кінці консолі (переріз 1), де  $x=0$ :

$$EJf_0 = -\frac{29}{6} Fa^3 + 0 + \frac{1}{6} Fa^3 - \frac{7 \cdot 2}{36} Fa^3 = -\frac{182}{36} Fa^3,$$

$$\text{звідки } f_0 = -\frac{182}{36} \cdot \frac{Fa^3}{EJ}, \quad (8.3)$$

прогин балки під зосередженою силою  $F$  (переріз 2), де  $x=a$ :

$$EJf_a = -\frac{29}{6} Fa^3 + \frac{15}{6} Fa^3 - 0 + \frac{7}{36} F(-a)^3 = -\frac{91}{36} Fa^3$$

звідки

$$f_a = -\frac{91}{36} \frac{Fa^3}{EJ}, \quad (8.4)$$

прогин балки у перерізі 3, де  $x=3,5a$

$$EJf_{3,5a} = -\frac{29}{6} Fa^3 + \frac{15}{6} Fa^2 3,5a - \frac{1}{6} F(3,5a - a)^3 + \frac{7}{36} F(3,5a - 2a)^3 = \frac{70,875}{36} Fa^3$$

звідки

$$f_{3,5a} = \frac{70,875}{36} \frac{Fa^3}{EJ}, \quad (8.5)$$

прогин посередині прогону балки (переріз 4), де  $x=5a$

$$EJf_{5a} = -\frac{29}{6} Fa^3 + \frac{15}{6} Fa^2 5a - \frac{1}{6} F(5a - a)^3 + \frac{7}{36} F(5a - 2a)^3 = \frac{81}{36} Fa^3,$$

звідки

$$f_{5a} = \frac{81}{36} \frac{Fa^3}{EJ}, \quad (8.6)$$

прогин балки у перерізі 5, де  $x=6,5a$

$$EJf_{6,5a} = -\frac{29}{6} Fa^3 + \frac{15}{6} Fa^2 6,5a - \frac{1}{6} F(6,5a - a)^3 + \frac{7}{36} F(6,5a - 2a)^3 = \frac{50,625}{36} Fa^3,$$

звідки

$$f_{6,5a} = \frac{50,625}{36} \frac{Fa^3}{EJ}, \quad (8.7)$$

На рис. 8.1,б показано приблизний вид пружної лінії балки (штрихова лінія), прогини та кути повороту перерізів.

### Опис експериментальної установки

Дослідження проводиться на лабораторній установці, що використовується для визначення прогинів і кутів повороту перерізів балки при згинанні (робота 5) та перевірки теорем про взаємність робіт і переміщень (робота 7). Навантаження балки здійснюється вантажем через підвіску і сергу. Прогин балки вимірюється за допомогою вимірювальної головки, що встановлена на штативі. Вимірювання прогинів для побудови пружної лінії балки виконується згідно схеми навантаження, що приведена на рис. 8.1, а. Навантаження балки здійснюється в перерізі 2. Прогини балки вимірюються в

п'яти різних перерізах. Виконати це можна за допомогою п'яти вимірювальних головок, встановлених на штативах у відповідних місцях.

Можна обійтись лише однією вимірювальною головкою, яку послідовно встановлювати в п'яти різних перерізах. Обидва прийоми вимірювань зв'язані з великими незручностями і значними похибками вимірювань.

Указані незручності можуть бути усунені наступним способом. Вимірювальна головка встановлюється в перерізі 2, а сила  $F$  послідовно прикладається в перерізах 1-5. Прогини, що виміряні в перерізі 2 при послідовному прикладанні сили в перерізах 1-5 будуть дорівнювати за величиною і знаком, згідно теореми про взаємність переміщень, прогинам в перерізах 1-5 від зовнішнього навантаження, що прикладено в перерізі 2.

### Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для вимірювання прогинів при згинанні одноконсольної однопрогонової балки. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Встановити вимірювальну головку в перерізі 2. Навантажити балку силою  $F$  в перерізі 1. Відповідне значення прогину балки  $f_1$  занести до табл. 8.1.

**Вказівка:** значення сили  $F$  в межах 20-40Н визначається викладачем.

3. Процедура вимірювань повторяємо, прикладаючи силу в перерізах 1-5 і визначаючи по показанням вимірювальної головки відповідні прогини  $f_i$ . Індекс  $i$  означає номер перерізу, в якому прикладено навантаження. Результати вимірювань занести до табл. 8.1. Дослід необхідно повторити три рази. Послідовність повторних вимірювань прогинів для різних перерізів балки є довільною.

**Вказівка:** після кожного із вимірювань експериментальна установка повинна бути розвантажена, а нульове показання вимірювальної головки повинно відкоригуватись як по основній шкалі, так і по шкалі лічильника обертів



основної стрілки, при забезпеченні попереднього натягу в вимірювальній системі.

4. Визначити середнє значення прогинів балки у відповідних перерізах. Результат занести до табл. 8.1.

Таблиця 8.1.

**Ординати пружної лінії балки (прогини)**

№ дослідів	Навантаження $F$ , Н	Показання вимірювальної головки, встановленої в перерізі 2 від сили, що прикладена в перерізах 1-5, мм				
1						
2						
3						
Номер перерізу		1	2	3	4	5
Середнє із дослідів						

Обчислити ординати пружної лінії балки за формулами (8.3) – (8.7) для значення сили  $F$ , за якої визначались експериментальні значення прогинів.

При  $E=(2,0-2,1)10^5$ МПа (Н/мм<sup>2</sup>) – балка із вуглецевої сталі;  $\alpha=100$ мм; розміри перерізу балки:  $b=30$ мм,  $h=4$ мм; момент інерції поперечного перерізу визначити за формулою

$$J = \frac{bh^3}{12}, \text{ мм}^4.$$

Результати обчислень ординат пружної лінії балки занести до табл. 8.2.

5. Побудувати експериментальну пружну лінію балки від навантаження  $F$ , прикладеною в перерізі 2 (епюру прогинів), використавши результати, які розміщені в останній строчці табл. 8.1 і суміщену з нею теоретичну пружну лінію балки.

Для її побудови відкласти від базисної лінії у відповідному масштабі експериментальні і розрахункові значення прогинів у різних перерізах. Сполучивши кінцеві точки відкладених відрізків, дістанемо епюру прогинів. Ця епюра у вибраному масштабі відобразить пружну лінію розглядуваної балки.

6. Виконати порівняння величин ординат пружної лінії балки, визначених експериментально і розрахунком. Результати занести до табл. 8.2.

Оцінку похибки експерименту обчислити за формулою:

$$\delta = \frac{|f_i^e - f_i^T|}{f_i^T} \cdot 100\% ,$$

де  $i$  – номер перерізу

Таблиця 8.2.

### Оцінка похибки експериментальних результатів

	Прогини балки від сили $F$ , прикладеної в перерізах				
	1	2	3	4	5
Експериментальні значення					
Теоретичні значення					
Похибка, %					

### Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати вимірювань ординат пружної лінії балки (за формою табл. 8.1).
5. Оцінка похибки експериментальних результатів (за формою табл. 8.2).
6. Графічне зображення пружної лінії балки на основі експериментальних даних і розрахунків (епюра прогинів)
7. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
8. Висновки.

### Контрольні запитання

1. Із яких умов визначаються початкові параметри в універсальному рівнянні пружної лінії балки?
2. Чи існують обмеження на використання теорем про взаємність робіт і взаємність переміщень?
3. Чи можливо за допомогою вимірюваної головки, що установлена в одному із перерізів балки, виміряти прогин в іншому перерізі?

4. Як формулюється теорема про взаємність переміщень?
5. Яке практичне застосування має теорема про взаємність переміщень?

**Література:** [1], с. 68-72; [2], с. 76-78; [3], с. 103-104; [4], с. 265-284

## **Лабораторна робота 9**

### **ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ КОСОМУ ЗГІНІ БАЛКИ**

#### **Мета роботи:**

- експериментальне визначення переміщень (прогинів) вільного кінця консольної балки при косому згині і порівняння теоретичних і експериментальних результатів

#### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для випробування балки на косий згин – 1 шт.
2. Набір вантажів – 1 комплект.
3. Вимірювальний прилад (зубчаста вимірювальна головка типу ИЧ 10 з ціною поділки 0,01мм) – 2шт.
4. Штатив для установки вимірювальних головок – 1 шт.

#### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Експериментально перевірити формулу для визначення прогину вільного кінця консольної балки при косому згині

#### **Теоретичні відомості**

Косим згином називають згин, при якому всі навантаження, які спричинюють згинання діють в одній площині, що не збігається ні з однією з головних площин поперечних перерізів балки. Головними площинами називаються площини, що проходять через поздовжню вісь стрижня і

однойменні головні центральні осі інерції поперечних перерізів. Тобто при косому згині силова лінія не збігається ні з однією із головних центральних осей поперечного перерізу.

Загальний підхід до розв'язання таких задач полягає у застосуванні принципу незалежності дії сил. Цей принцип дозволяє отримати остаточний результат при спільній дії різних силових факторів шляхом підсумовування результатів, що спричинені кожним зовнішнім силовим фактором окремо.. Косий згин це складний вид деформації: в поперечних перерізах балки виникають два згинальні моменти відносно головних осей інерції поперечного перерізу. Косий згин представляють як сукупність двох прямих згинів в головних площинах. Переміщення точок осі стрижня знаходять шляхом геометричного складання складових переміщень по головним осям перерізу (рис. 9.1).

Величину переміщення (прогину) вільного кінця консольної балки можна визначити через складові прогини як геометричну суму переміщень уздовж головних осей інерції, тобто через проекції переміщень на вісь  $x$  і вісь  $y$ .

Розкладемо силу  $F$  на дві складові  $F_x$  і  $F_y$  напрямлені по головним осям перерізу:  $F_x = F \cdot \sin \varphi$ ;  $F_y = F \cdot \cos \varphi$ ,

де  $\varphi$  – кут між силовою лінією і вертикальною віссю поперечного перерізу – віссю  $y$ .

Переміщення (прогини) вільного кінця балки в горизонтальному напрямку

$$f_x = \frac{F_x l^3}{3EJ_y} = \frac{F \sin \varphi \cdot l^3}{3EJ_y}, \quad (9.1)$$

і в вертикальному

$$f_y = \frac{F_y l^3}{3EJ_x} = \frac{F \cos \varphi \cdot l^3}{3EJ_x} \quad (9.2)$$

де  $F$  – навантаження, прикладене до вільного кінця консольної балки, Н;

$l$  – довжина балки, мм;

$E$  – модуль пружності матеріалу балки, мПа (Н/мм<sup>2</sup>);

$J_x, J_y$  – осьові моменти інерції відносно головних центральних осей поперечного перерізу, мм<sup>4</sup>.

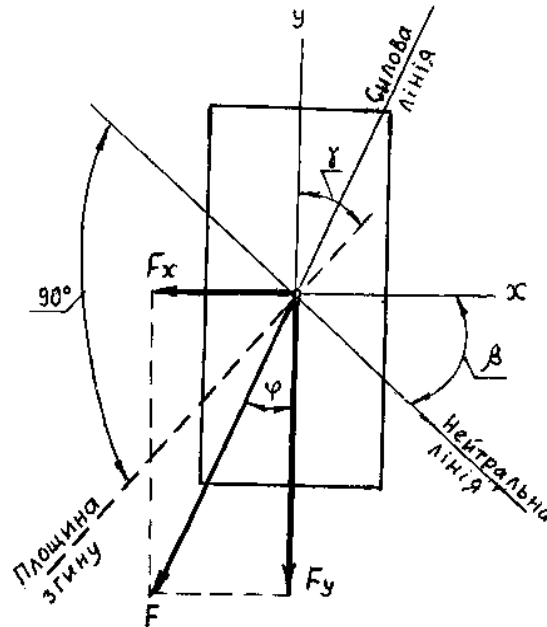


Рис. 9.1. Поперечний переріз балки при косому згині

Тоді величина повного прогину перерізу балки може бути визначена як геометрична сума прогинів  $f_x$  і  $f_y$  за формулою:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (9.3)$$

**Примітка:** прогини за приведеними формулами оцінюють за їх абсолютним значенням.

Положення нейтральної лінії, на якій напруження дорівнюють нулю ( $\sigma=0$ ) визначають за формулою:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \varphi, \quad (9.4)$$

де  $\beta$  – кут між нейтральною лінією і віссю  $x$ .

У загальному випадку  $\beta \neq \varphi$ . Це значить, що нейтральна лінія не перпендикулярна до лінії дії сили  $F$ . Зазначимо, що положення нейтральної

лінії не залежить від значення сили  $F$ , а лише від кута нахилу площини дії сили  $F$  (силової лінії) і від форми перерізу.

Напрямок прогину перпендикулярний до нейтральної лінії перерізу.

Необхідно відмітити, що при  $\varphi=0^\circ$ , силова лінія збігається з вертикальною віссю  $y$  і при повороті балки навколо поздовжньої осі силова лінія повертається в протилежний бік, тобто при повороті балки проти ходу годинникової стрілки, силова лінія повертається за годинниковою стрілкою.

Позначивши  $\gamma$  кут нахилу площини згину до осі  $y$  отримаємо формулу для визначення напрямку повного прогину

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{f_x}{f_y} = \frac{F_x}{F_y} \cdot \frac{J_x}{J_y} = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg}\varphi, \quad (9.5)$$

### Опис лабораторної установки

Схема експериментальної установки приведена на рис. 9.2

В лабораторній роботі досліджується балка 7, яка виготовлена з вуглецевої сталі довжиною  $l=710\text{мм}$  прямокутного перерізу  $b \times h=12 \times 24\text{мм}$ , закріплена консольно в опорному стояку 2. Конічний хвостовик балки жорстко з'єднується з опорним стояком відповідним затискним пристроєм 8, що включає затяжний болт і ексцентриковий затискач. Кріплення дозволяє здійснювати поворот балки навколо її поздовжньої осі на кут в межах  $\pm 90^\circ$  і тим самим змінювати кут між силовою лінією і головною центральною віссю  $y$  перерізу балки. Відлік кута повороту здійснюється по лімба.

Навантаження балки здійснюється на вільному кінці зосередженою силою  $F$  за допомогою вантажу 3 через підвіску 5 і сергу 10, що закріплена на підшипнику.

Визначення величини переміщень (прогинів) здійснюється за допомогою двох вимірювальних головок 6, закріплених у дуговому тримачі 11 на штативі 9, що дозволяє визначати вертикальні і горизонтальні переміщення вільного кінця балки.

Опорний стаяк і штатив за допомогою болтів і гайок 4 кріпляться в Т-подібному пазу силової плити 1 лабораторного стола.

### Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для випробування балки на косий згин. Розібратися з призначенням її окремих елементів. Ознайомитись із способом вимірювання переміщень (прогинів) балки і розрахунковими залежностями для їх обчислення.

2. Установити задане положення силової площини по відношенню до вертикальної осі (кут  $\varphi$ ) шляхом повороту балки навколо осі в опорному стаяку і закріпити її в такому положенні затискачем.

Значення кута  $\varphi$  в межах  $10 \div 60^\circ$  установлює викладач.

3. Установити на штативі в дуговому тримачі дві вимірювальні головки.

4. Навантажити балку зосередженою силою  $F$  на вільному кінці. Значення сили  $F$  в межах  $20 \div 40\text{Н}$  встановлює викладач. При навантаженні необхідно слідкувати, щоб гирі установлювались без ударів і не визивали перекосів штанги підвіски.

Визначити за показаннями вимірювальних головок вертикальне і горизонтальне переміщення (прогини) вільного кінця балки.

Здійснити повторні вимірювання параметрів, що досліджуються. Кількість повторних вимірів прогинів повинна бути не менше 6-7 (встановлюється викладачем). Ці величини для послідууючої статистичної обробки результатів експерименту позначити  $x_i$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

Отримані результати вимірювань занести до табл. 9.1.

**Вказівка:** 1. Після кожного із вимірювань параметрів, що досліджуються, експериментальна установка повинна бути розвантажена, а нульове показання вимірювальних головок повинно бути відкореговано.

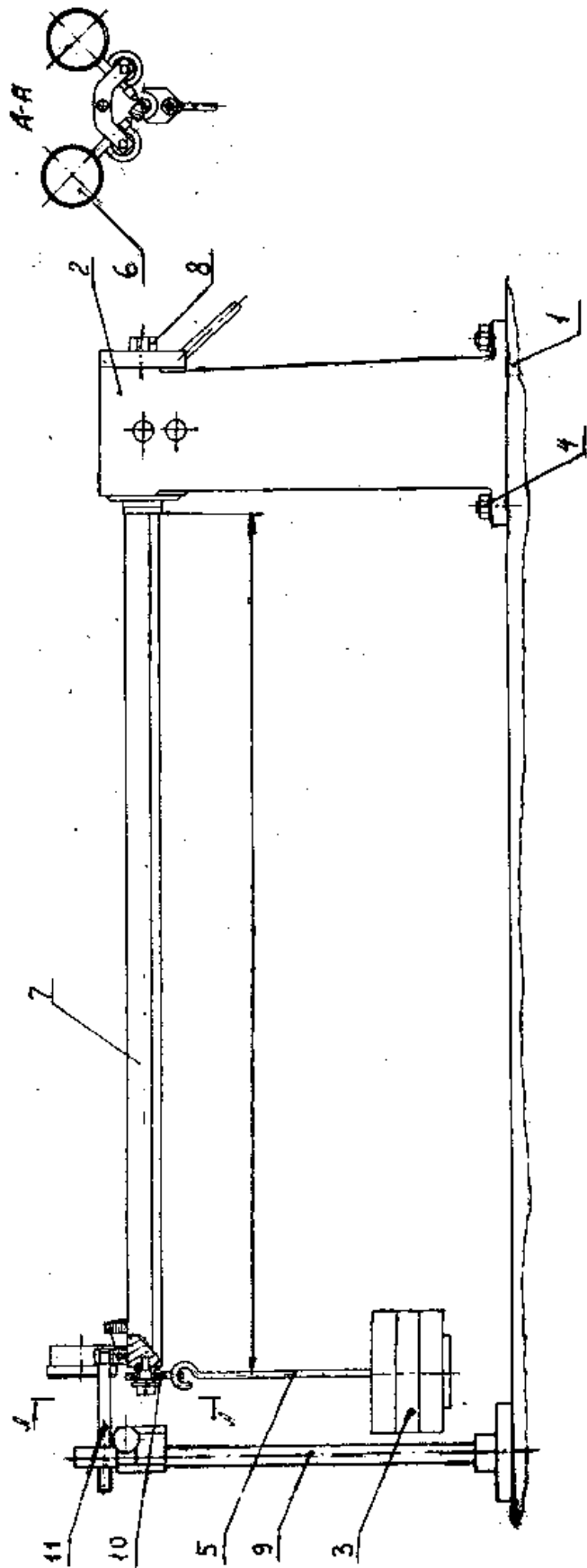


Рис. 9.2 Схема лабораторної установки для випробування балки на косий згин



2. Рекомендується забезпечення попереднього натягу в вимірювальній системі головок близько 6-8мм, що потребує установки стрілки лічильника обертів основної стрілки на відвідне показання.

5. Виконати статистичну обробку результатів вимірювань вертикального і горизонтального прогинів вільного кінця балки так, як в лабораторній роботі 5 згідно пунктів 3-4 та представити за формою табл. 9.2.

Таблиця 9.1

**Результати вимірювань прогинів балки при косому згині**

Навантаження $F, Н$	Вимірювані складові прогину в напрямку	Показання приладу, мм						$S, мм$	Результат експерименту		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}', мм$	$f = \bar{x}', мм$	Прогини $f, мм$
	горизонтальному										$f_x =$
	вертикальному										$f_y =$

Таблиця 9.2

**Результати оцінки вимірювань при рівні значимості  $\alpha=0,05$**

Вимірювані параметри	Вихідні дані, мм		Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм		Оцінка за критерієм грубих похибок		
	$\bar{x}$	$S$			критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	висновок про похибку
$f_x$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$f_y$			$x_{max}^c =$	$ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$	$ x_{min}^c - \bar{x}  =$			

6. Визначити експериментальні значення горизонтального  $f_x$  і вертикального  $f_y$  прогинів вільного кінця консольної балки. Величина прогину

балки визначається як усереднене значення показань вимірювального приладу:

$f = \bar{x}'$ . Результат занести до табл. 9.1.

7. Визначити експериментальне значення повного переміщення (прогину) кінця балки за формулою (9.3). Результат занести до табл. 9.3.

8. Визначити теоретичне значення горизонтального і вертикального складових прогину за формулами (9.1-9.2) та повний прогин за формулою (9.3).

Значення модуля пружності матеріалу балки, що досліджується (вуглецева сталь)

$$E = (2,0 - 2,1)10^5 \text{ МПа (Н/мм}^2\text{)}.$$

Осьовий момент інерції прямокутного перерізу визначити за формулами:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}, [\text{мм}^4], J_y = \frac{hb^3}{12}, [\text{мм}^4]$$

де  $b=12\text{мм}$  – ширина перерізу,

$h=24\text{мм}$  – висота перерізу.

Результат занести до табл. 9.3.

9. Визначити відхилення результатів експерименту від розрахункового значення параметру за формулою:

$$\delta = \frac{|f_e - f_T|}{f_T} 100\%$$

Результат занести до табл. 9.3.

Таблиця 9.3

**Порівняння розрахункових і експериментальних результатів визначення прогину балки при косому згині**

Значення прогину, мм		Розбіжність, %
експериментальне значення	теоретичне значення	

10. Визначити експериментальне значення напряму повного прогину балки по отриманим експериментально значенням складових прогинів  $f_x$  і  $f_y$ .

11. За формулою  $tg\gamma = \frac{f_x}{f_y}$ , звідки  $\gamma = arc\,tg\left(\frac{f_x}{f_y}\right)$  і порівняти його з теоретичним значенням, розрахованим за формулою  $tg\gamma = \frac{J_x}{J_y}tg\varphi$ , звідки теоретичне значення кута  $\gamma$  визначається за формулою:

$$\gamma = arc\,tg\left(\frac{J_x}{J_y}tg\varphi\right)$$

Відхилення результатів експерименту від розрахункового значення параметру визначити за формулою :

$$\delta = \frac{|\gamma_e - \gamma_T|}{\gamma_T} \cdot 100\%$$

Результати занести до табл. 9.4

Таблиця 9.4

**Порівняння розрахункових і експериментальних результатів визначення напрямку повного прогину балки**

Значення кута $\gamma$ , град.		Розбіжність, %
експериментальне значення	теоретичне значення	

**Примітка:** допускається замість визначення кута  $\gamma$  визначення кутового коефіцієнту  $tg\gamma$ .

**Зміст звіту**

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати вимірювань величини прогинів балки при косому згині (за формою табл. 9.1) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 9.2).
5. Оцінка відхилення результатів експерименту від розрахункового значення прогину балки (за формою табл. 9.3) та визначення напрямку повного прогину балки (за формою табл. 9.4).

6. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
7. Висновки.

### **Контрольні запитання**

1. Який вид деформації називається косим згином?
2. Як визначається положення нульової лінії при косому згині і на які зони вона ділить поперечний переріз?
3. Як нейтральна лінія розташована по відношенню до площини згинального моменту?
4. В якій точці поперечного перерізу напруження набувають максимального значення при косому згині?
5. Чи можливий косий згин у балки круглого поперечного перерізу?
6. Який переріз балки буде найбільш ефективним при дії косоного згину?
7. Як залежить прогин балки від модуля пружності матеріалу та від форми перерізу?

**Література:** [1], с. 74-77; [2], с. 82-84; [3], с. 87-90; [4], с. 325-331

### **Лабораторна робота 10**

#### **ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРА ЗГИНУ ШВЕЛЕРНОЇ БАЛКИ**

##### **Мета роботи:**

- експериментальне визначення положення центра згину при згинанні з крученням тонкостінного стержня швелерного профілю і порівняння з результатом розрахунку

##### **Матеріальне забезпечення:**

1. Установка для визначення положення центра згину – 1 шт.
2. Набір вантажів – 1 комплект.

3. Вимірювальний прилад (зубчаста вимірювальна головка типу ИЧ 10 з ціною поділки 0,01мм) – 2шт.
4. Штатив для установки вимірювальної головки – 2 шт.

### **Завдання до лабораторної роботи:**

1. Експериментально перевірити формулу для визначення положення центра згину при згинанні з крученням тонкостінного стержня швелерного профілю.
2. Експериментально визначити положення центра кручення та його збіжність із центром згину.

### **Теоретичні відомості**

Швелер при навантаженні силою  $F$ , що розташована у площині стінки, перебуває у складному напруженому стані. Він зазнає сумісну дію згинального і моментів скручування.

Центром згину балки (стержня) в даному перерізі називається точка в площині перерізу, через яку повинна проходити поперечна сила (незалежно від напрямку згину), щоб переміщення перерізу в своїй площині було поступальним. При будь-якому іншому положенні поперечної сили переріз повертається в своїй площині, тобто відбувається закручування стержня. Поперечна сила в перерізі балки (стержня) реалізується як система дотичних зусиль. Тому центр згину може визначатися як точка в площині перерізу, через яку проходить рівнодійна зовнішніх сил, не викликаючи скручування стержня.

Для швелерної балки абсциса центра згину (рис 10.1) знаходиться по формулі:

$$c = \frac{b^2 h^2 t}{4J_x} = \frac{3b^2}{6b + h}, \quad (10.1)$$

де  $b$  – ширина полиці,

$h$  - висота швелера

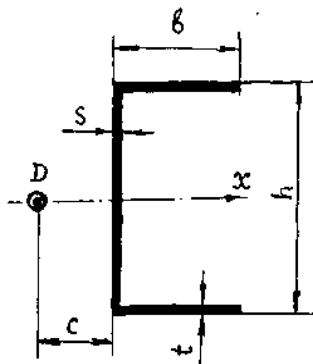


Рис. 10.1. Положення центра згину – точка D:

$h$  - висота швелера;  $b$  – ширина полиці;  $S$  – товщина стінки;  $t$  – товщина полиці

При навантаженні балки, що має відкритий профіль, вона крім деформації згину зазнає ще деформацію кручення. Кут закручування балки являється пропорційним прикладеному моменту скручування. При цьому поворот балки відбувається навколо деякої постійної точки. Центр повороту, що називається центром кручення збігається з центром згину.

### Опис лабораторної установки

Схема експериментальної установки приведена на рис. 10.2.

Тонкостінний стержень 8, що досліджується, являє собою сталевий гнучий швелер, закріплений консольно в опорному стояку 2. Переріз швелера має товщину стінки  $S=1,5$ мм, товщину полиць  $t=1,5$ мм, ширину полиці  $b=21$ мм та висоту швелера  $h=32$ мм.

Конічний хвостовик стрижня жорстко з'єднується з опорним стояком відповідним затискним пристроєм 9, що включає затяжний болт і ексцентриковий затискач.

На вільному кінці стрижня (балки) закріплена навантажувальна рамка 6. По навантажувальній рамці за допомогою гвинтової передачі 7 може переміщуватись вантажна підвіска 10.

Навантаження балки здійснюється зосередженою силою  $F$  вантажем 3 через підвіску 5.

Відповідні переміщення навантажувальної рамки, що характеризують переміщення кінцевого перерізу балки, визначаються за допомогою двох вимірювальних головок 13, закріплених на штативах 11 і 12. На кінцях навантажувальної рамки прикріплені площадки, на які обпираються вимірювальні наконечники головок. Координата точки прикладання сили  $F$  визначається по шкалі 14 за допомогою покажчика, з'єднаного з вантажною підвіскою.

Нульова поділка шкали співпадає з зовнішнім краєм стінки швелера.

Опорний стояк і штативи за допомогою болтів і гайок 4 кріпляться в  $T$ -подібному пазу силової плити 1 лабораторного стола.

### **Послідовність виконання роботи**

1. Ознайомитись з будовою лабораторної установки для визначення положення центра згину швелерної балки. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Установити і закріпити балку, що досліджується, в опорному стояку. При цьому розташування стінки швелера повинно бути строго вертикальним. Установити над навантажувальною рамкою вимірювальні головки.

Для ненавантаженої балки відповідною установкою вимірювальних головок забезпечити, щоб відлік показань обох головок був однаковим, наприклад по 5,00мм.

### **Частина 1**

3. Навантажити балку силою  $F$ . Значення сили  $F$  в межах 20÷40Н встановлює викладач.

Зазначимо, що положення центра згину балки не залежить від величини навантаження. Переміщуючи вантажну підвіску з вантажем за допомогою гвинтової передачі відносно навантажувальної рамки добитись, щоб показання вимірювальних головок стало однаковим. Знайдене положення відповідає відсутності закручування балки. Координату точки прикладання сили, що відповідає положенню центра згину, визначити по шкалі. Дослід необхідно повторити три рази. Результати вимірювань занести до табл. 10.1

**Вказівка:** після кожного із вимірювань координати центра згину експериментальна установка повинна бути розвантажена, вантажна підвіска переустановлена, а показання вимірювальних головок при відсутності навантаження повинні бути однаковими, що досягається їх відповідною установкою.

Таблиця 10.1.

**Результати визначення координати центра згину**

№ досліджу	Навантаження, $F$ , Н	Координата точки прикладання сили, мм (центр згину)
1		
2		
3		
середнє із дослідів		

4. Визначити середнє значення координати центра згину. Результат занести до табл. 10.1 та 10.2.

5. Обчислити теоретичне значення координати центра згину за формулою (10.1) Результат занести до табл. 10.2.

6. Виконати порівняння значень координати центра згину, визначеної експериментально і розрахунком. Результат занести до табл. 10.2.

Оцінку похибки експерименту обчислити за формулою:

$$\delta = \frac{|c^e - c^T|}{c^T} 100\%$$



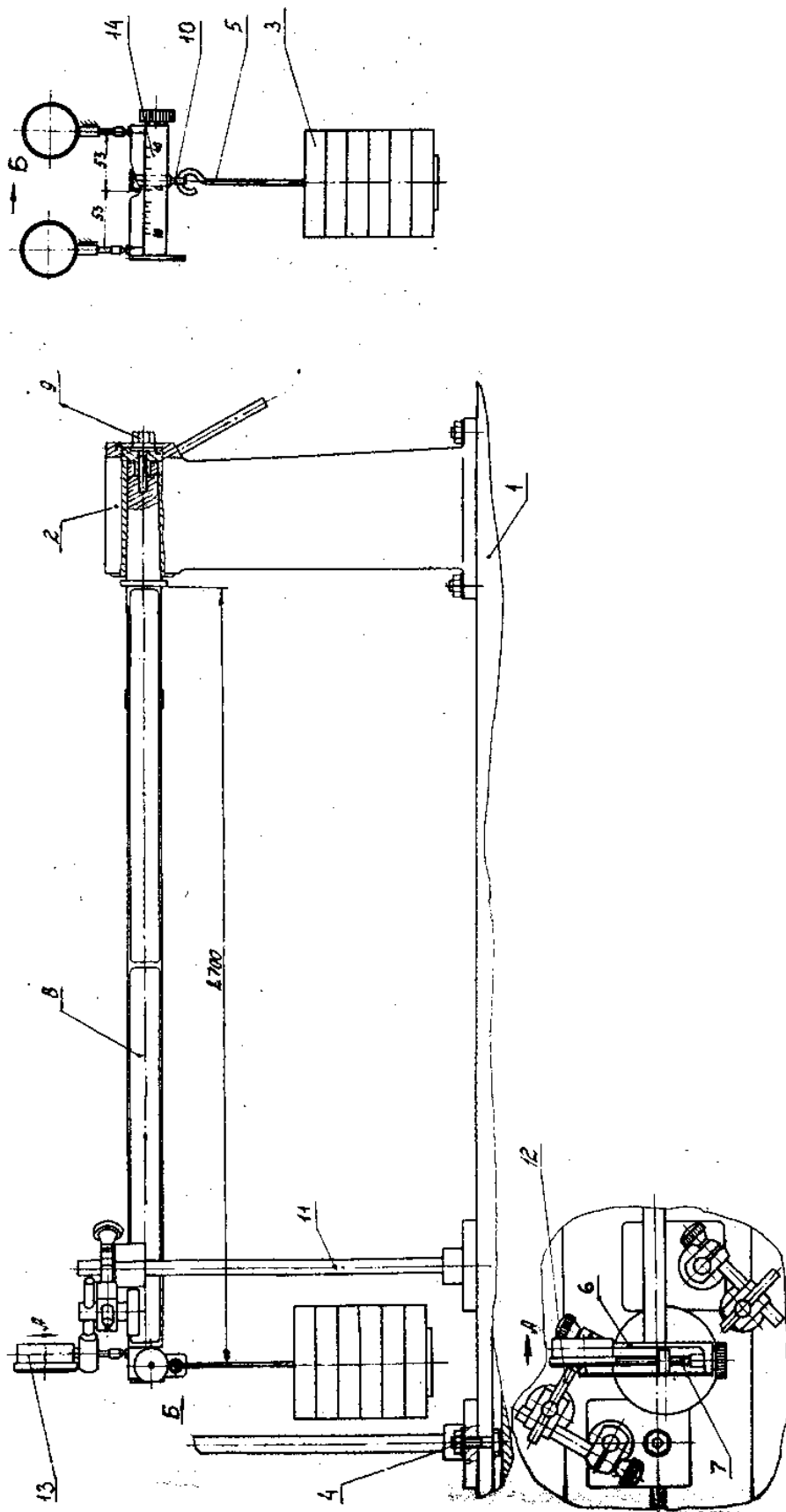


Рис. 10.2. Схема експериментальної установки

### Порівняння значень координати центра згину

Теоретичне значення координати центра згину, мм	Експериментальне значення координати центра згину, мм	Похибка, %

### Частина 2

Установити вантажну підвіску (без вантажу) в деяку точку, що не збігається з центром згину. Для ненавантаженої балки відповідною установкою вимірювальних головок забезпечити, щоб відлік показань обох головок був однаковим, наприклад по 5,00мм.

Розглядати в подальшому це положення як початкове – «умовний нуль».

Навантажити балку силою  $F$ . Значення сили  $F$  в межах 20÷40Н встановлює викладач.

Зробити відлік відповідних показань вимірювальних головок, які позначимо I і II. Кожний відлік виконувати від «умовного нуля», враховуючи його знак. Цей кожний відлік відмітимо на шкалах I і II (точки  $a$  і  $b$  на рис. 10.3). Відстань між шкалами в масштабі зображує відстань між осями вимірювальних стрижнів головок, що складає 106мм.

З'єднавши точки  $a$  і  $b$  прямою, отримаємо зображення повороту осі симетрії профілю при даному навантаженні моментом скручування.

Виконати декілька перестановок вантажу (не менше 4-5), визначити відповідні показання вимірювальних головок, занести їх до табл. 10.3 і нанести відповідні точки на шкалах I і II. З'єднати ці точки прямими, як показано на рис. 10.3. Впевнитися в тому, що всі прямі перетинаються в точці  $D'$ . Це означає, що торцевий переріз балки при зміні моменту скручування повертається навколо точки  $D'$  - центра кручення.

Виміряти відстань  $c'$  з точки  $D'$  від нанесеного на рис. 10.3 положення зовнішнього краю стінки швелера – нульової поділки шкали 14 (див. рис. 10.2). Порівняти відстань  $c'$  з теоретичним та експериментальним значенням

координати с центру згину. Установити збіжність положення визначеного центру кручення з визначеним теоретично та експериментально центром згину.

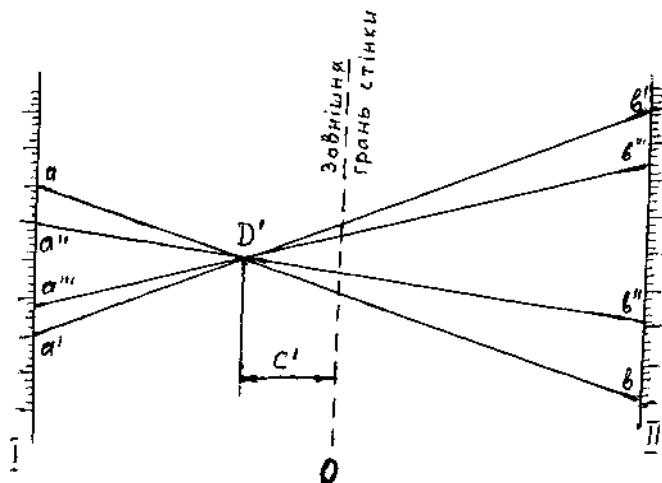


Рис. 10.3. Графічне визначення центра кручення

Оцінку похибки обчислити за формулою:

$$\delta = \frac{|c' - c^e|}{c^e} 100\% \text{ та } \delta = \frac{|c' - c^T|}{c^T} 100\%$$

Результат занести до табл. 10.4.

Таблиця 10.3

### Визначення положення навантажувальної рамки

Відліки	Положення вантажу, мм (відлік по шкалі навантажувальної рамки)					
вимірювальна головка I						
вимірювальна головка II						

Таблиця 10.4

### Порівняння значень координати центра кручення і координати центра згину

Координата центра кручення, мм	Теоретичне значення координати центра згину, мм	Похибка, %	Експериментальне значення координати центра згину, мм	Похибка, %

## Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати вимірювань координати центра згину (за формою табл. 10.1) та оцінки відхилення результатів експерименту від розрахункового значення координати центра згину (за формою табл. 10.2).
5. Результати вимірювань положення навантажувальної рамки (за формою табл. 10.3).
6. Порівняння значень координати центра кручення і координати центра згину (за формою табл. 10.4).
7. Графічне визначення центра кручення (діаграма поворотів перерізу балки).
8. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
9. Висновки.

## Контрольні запитання

1. Яка точка поперечного перерізу балки називається центром згину?
2. Як зміняться деформації стрижня при переносі сили із центра згину в центр ваги перерізу?
3. Із який умови визначається положення центра згину?
4. Чим відрізняється поведінка під навантаженням тонкостінних стрижнів відкритого і замкнутого профілів?
5. Яка точка поперечного перерізу балки називається центром кручення?

**Література:** [2], с. 90-92; [3], с. 96-100; [4], с.338-341.

## Лабораторна робота 11

### ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОЇ СИЛИ СТИСНУТОГО СТЕРЖНЯ

#### Мета роботи:

- дослідити явище втрати стійкості прямолінійної форми рівноваги при осьовому стисненні гнучких стержнів;
- порівняти значення критичних сил, визначених по розрахунковій формулі і експериментально.

#### Матеріальне забезпечення:

1. Установка для дослідження гнучкого стрижня на поздовжній згин – 1 шт.
2. Вимірювальний прилад (важільно-зубчаста вимірювальна головка типу 1МИГ з ціною поділки 1 мкм) – 1 шт.

#### Завдання до лабораторної роботи:

1. Дослідити деякі випадки втрати стійкості прямолінійної форми рівноваги при осьовому стисненні гнучких стержнів; експериментально перевірити формулу для визначення критичної сили.

#### Теоретичні відомості

При розрахунках на міцність і жорсткість припускається, що при деформації конструкції між зовнішніми навантаженнями і внутрішніми силами пружності має місце стійка форма рівноваги. При стисненні стержнів вздовж поздовжньої осі ця рівновага залишається стійкою до певного значення зовнішніх сил, що дорівнюють критичним.

Напруження, при якому стиснутий у центрі прямолінійний стержень втрачає стійкість, може бути значно меншим границі міцності матеріалу, з якого він виготовлений. При втраті прямолінійної форми в перерізах стержня виникають додаткові напруження згину.

Незначне перевищення зовнішньої сили понад критичне призводить до недопустимого зростання деформації елемента конструкції і в наслідку руйнування.

Згин, зв'язаний з втратою стійкості стержнем прямолінійної форми рівноваги при певній величині осової стискуючої сили називають поздовжнім згином. Зазначимо, що ніяких сил, що діяли перпендикулярно до поздовжньої осі, при цьому не має.

Критичною силою називається найбільше значення осової стискуючої сили, до якої прямолінійна форма рівноваги стержня являється стійкою. Критичну силу можна визначити за формулою Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (11.1)$$

де  $E$  - модуль пружності для матеріалу стержня;

$J_{\min}$  - мінімальний осовий момент інерції поперечного перерізу стержня;

$\mu$  - коефіцієнт приведення довжини, що залежить від способу кріплення кінців стержня;

$l$  - довжини стержня.

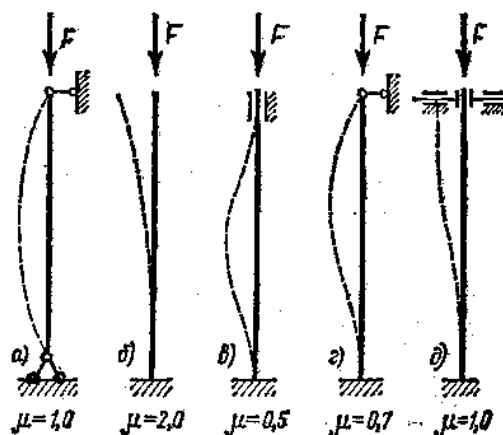


Рис. 11.1. Значення коефіцієнта  $\mu$  приведення довжини в деяких випадках закріплення кінців стержня

Поняття приведеної довжини  $\mu l$  вперше введено професором Ф.С. Ясинським. Являє собою коефіцієнт приведення довжини, число, яке показує в

скільки разів необхідно збільшити довжину шарнірно закріпленого з обох кінців стержня, щоб критична сила для нього була рівною критичній силі стержня в даних умовах закріплення.

На рис. 11.1 показані деякі випадки закріплення кінців стержня і приведені значення коефіцієнта  $\mu$ :

а – обидва кінці стержня закріплені шарнірно і можуть зближатися;

б – нижній кінець жорстко закріплений (защемлений), верхній вільний;

в – обидва кінці жорстко закріплені (защемлені), верхній кінець поміщено в нерухому втулку, внаслідок чого він може лише зміщуватись в поздовжньому напрямі;

г – нижній кінець жорстко закріплений, верхній закріплений шарнірно, кінці можуть зближатися;

д – нижній кінець жорстко закріплений, верхній кінець поміщено в рухому втулку і може вільно переміщуватися в напрямі, перпендикулярному до осі стержня, але обертання не може бути.

Зазначимо, що на практиці майже ніколи не трапляються в чистому вигляді приведені закріплення стержня.

З формули Ейлера (11.1) видно, що значення критичної сили не залежить від характеристик міцності матеріалу, а залежить від модуля пружності.

Оскільки модулі пружності різних марок сталей мало відмінні, то критичні сили для стержнів з високоякісних легованих сталей і з звичайних вуглецевих сталей приблизно однакові. Тому застосування дорогих легованих сталей з високим значенням  $\sigma_T$  і  $\sigma_B$  для стержнів, які працюють лише на поздовжнє гнуття, в більшості випадків не виправдане. В цьому полягає різниця між роботою стержня на розтяг і на стиск.

Формулу Ейлера можна застосовувати, коли гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$$

де  $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$  - мінімальний радіус інерції поперечного перерізу стержня не

менше граничного її значення  $\lambda_{ep} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$ , що відповідає границі пропорційності матеріалу, тобто коли  $\lambda \geq \lambda_{гр}$ .

Гнучкість стержня це безрозмірна величина, що характеризує вплив розмірів стержня і способів закріплення його кінців. Тоді як гранична гнучкість залежить від фізико механічних властивостей матеріалу ( $E$  і  $\sigma_{пц}$ ) і є сталою величиною для даного матеріалу. Для стержнів із маловуглецевої сталі формула Ейлера застосовується, якщо їх гнучкість  $\lambda \geq 100$ . При менших значеннях гнучкості формула (11.1) неприйнятна, так як втрата стійкості відбувається при напруженнях, що перевищують границю пропорційності.

Можна стверджувати, що досягнення навантаженням критичного значення рівнозначне руйнуванню конструкції, оскільки нестійка форма рівноваги, коли  $F > F_{кр}$  неминуче буде втрачена, що пов'язане з практично необмеженим зростанням деформації та напружень. Особлива небезпека руйнування внаслідок втрати стійкості полягає в тому, що, як правило, воно відбувається раптово й при низьких значеннях напружень, коли міцність елемента ще не вичерпана.

### Опис лабораторної установки

Схема експериментальної установки приведена на рис. 11.2.

Робота виконується на зразку у вигляді сталевого стержня 1 довжиною  $l=500$ мм прямокутного перерізу з розмірами  $b=2,0$ мм,  $h=35$ мм. Кінці стержня установлені в спеціальних затискних головках 2 і 3 для закріплення його кінців.

Використовуючи затискні гвинти 4 можна жорстко закріпити один кінець стержня при шарнірному кріпленні другою, що відповідає  $\mu=0,7$ , або жорстко закріпити обидва кінці стержня, що відповідає  $\mu=0,5$  або здійснити шарнірне кріплення ( $\mu=1$ ). Головка 3 входить у втулку з динамометром 5, що дає



можливість вимірювати силу стиснення стержня за допомогою вимірювальної головки 6 з ціною поділки  $i=0,001\text{мм}$ . Конічним гвинтом втулка жорстко з'єднується з правим опорним стояком 7, що має відповідний затискний пристрій 8, що включає затяжний болт і ексцентрикний затискач.

Навантаження здійснюють гвинтовим домкратом 9, що установлений на лівому опорному стояку 10.

Опори 7 і 10 за допомогою болтів і гайок 11 кріпляться в Т-подібному пазу силової плити 12 лабораторного стола.

### **Послідовність виконання роботи**

1. Ознайомитись із будовою лабораторної установки для визначення критичної сили стиснутого стержня. Розібратися з призначенням її окремих елементів.

2. Встановити стержень у затискних головках і закріпити відповідно до варіанту, що досліджується, кріплення кінців стержня ( $\mu=1$ ;  $\mu=0,7$ ;  $\mu=0,5$ )

3. Навантажити для кожного із варіантів кріплення зразок, що досліджується, обертанням маховика домкрата. Навантаження необхідно здійснювати повільно і плавно (безперервно), спостерігаючи за збільшенням показань вимірювального приладу і поведінкою зразка. Критичною силою вважають те значення сили стискання, при якому починається вигин стержня видимий візуально при стеженні за процесом навантаження зразка. Показання вимірювальної головки домкрата для послідуєчої статистичної обробки результатів експерименту позначити, як  $x_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Здійснити повторні вимірювання критичної сили стиснення для кожного із варіантів кріплення кінців стержнів. Кількість повторних вимірів повинна бути не менше 6-7 (встановлюється викладачем).

Отримані результати вимірювань занести до табл. 11.1

**Вказівка:** після кожного із вимірювань досліджуємого параметру експериментальна установка повинна бути розвантажена, а нульове показання вимірювальної головки повинно бути відкореговано.

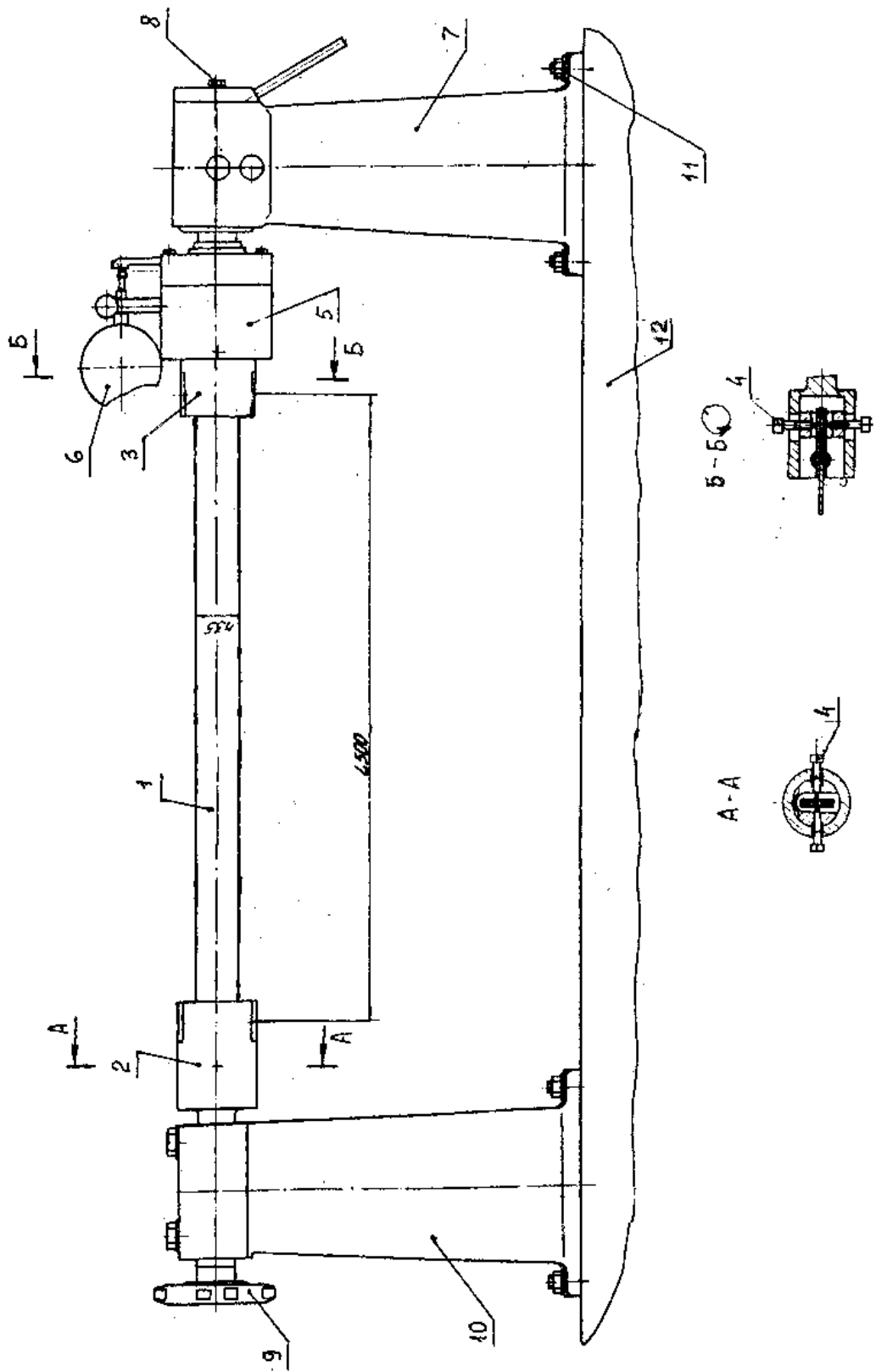


Рис. 11.2. Схема експериментальної установки для визначення критичної сили стиснутого стержня

4. Виконати статистичну обробку результатів вимірювань критичної сили стиснутого стержня так, як в лабораторній роботі 5 згідно пунктів 3-4 та представити за формою табл. 11.2.

Таблиця 11.1

**Результати вимірювань критичної сили стиснутого стержня**

Закріплення кінців стержня	Показання приладу, мм						S, мм	Результат експерименту		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$	$\bar{x}$		$\bar{x}'$ , мм	$m = \bar{x}'$ , мм	Прогини $F_{кр}^e = m \cdot k$ , Н
$\mu=1$										
$\mu=0,7$										
$\mu=0,5$										

Таблиця 11.2

**Результати оцінки вимірювань при рівні значимості  $\alpha=0,05$**

Закріплення кінців стержня	Відповідні дані, мм		Сумнівні результати вимірювань та відхилення, мм	Оцінка за критерієм грубих похибок		
	$\bar{x}$	S		критерій $t_\beta$	$t_\beta \cdot S$	висновок про похибку
$\mu=1$			$x_{max}^c =$ $ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$ $ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$\mu=0,7$			$x_{max}^c =$ $ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$ $ x_{min}^c - \bar{x}  =$			
$\mu=0,5$			$x_{max}^c =$ $ x_{max}^c - \bar{x}  =$			
			$x_{min}^c =$ $ x_{min}^c - \bar{x}  =$			

5. Визначити експериментальне значення критичної сили стиснутого стержня за формулою:

$$F_{кр}^e = m \cdot k, \text{ Н}$$

де  $m$  – усереднене значення показань вимірювального приладу:

$$m = \bar{x}', \text{ мм}$$

$k$  – ціна поділки приладу при вимірюванні зусилля. Для даної наладки при використанні вимірювального приладу з ціною поділки  $i=0,001\text{мм}=1\text{мкм}$  ціна однієї поділки  $k=1,176\text{Н/мкм}$ .

Результат занести до табл. 11.1 та 11.3.

6. Визначити теоретичне значення критичної сили стиснутого стержня за формулою (11.1)

Значення модуля пружності матеріалу стержня, що досліджується, прийняти  $E=(2,0-2,1)105\text{МПа}$  (Н/мм<sup>2</sup>).

Осьовий момент інерції поперечного перерізу стержня визначити за формулою:

$$J_{\min} = \frac{h \cdot b^3}{12} \text{ [мм}^4\text{]}$$

де  $b=2,0\text{мм}$

$h=35\text{мм}$

Результати занести до табл. 11.3.

7. Визначити відхилення результатів експерименту від розрахункового значення критичної сили стиснутого стержня за формулою:

$$\delta = \frac{|F_{кр}^e - F_{кр}^T|}{F_{кр}^T} \cdot 100\%$$

Результат занести до табл. 11.3.

Таблиця 11.3

**Порівняння розрахункових і експериментальних результатів визначення критичної сили стиснутого стержня**

Закріплення кінців стержня	Критична сила, $F_{кр}$ , Н		Розбіжність, %
	експериментальне значення	теоретичне значення	
$\mu=1$			
$\mu=0,7$			
$\mu=0,5$			

## Зміст звіту

1. Назва роботи.
2. Мета роботи.
3. Завдання до лабораторної роботи.
4. Результати вимірювань критичної сили стиснутого стержня (за формою табл. 11.1) та їх оцінки за критерієм грубих похибок (за формою табл. 11.2).
5. Оцінка відхилення результатів експерименту від розрахункового значення критичної сили стиснутого стержня (за формою табл. 11.3).
6. Формули, що були використані при виконанні розрахунків з підстановкою цифрових значень фізичних величин.
7. Висновок.

## Контрольні запитання

1. Яка форма перерізу стиснутого стержня являється раціональною?
2. У чому полягає явище втрати стійкості стиснутого стержня?
3. Чим небезпечна втрата стійкості конструкції?
4. Яку силу для стиснутого стержня називають критичною?
5. За якою формулою визначають критичну силу?
6. Що таке гнучкість стержня? Як вона визначається?
7. Як визначається гранична гнучкість і для чого служить ця величина?
8. В яких межах застосовується формула Ейлера?
9. Чому у формулі Ейлера записується  $J_{\min}$ , а не  $J_{\max}$ ?
10. Як впливає спосіб закріплення кінців стержня на значення критичної сили?
11. Що таке поздовжній згин?
12. Яке практичне застосування має визначення критичної сили стиснутих стержнів?

**Література:** [1], с. 132-138; [2], с. 92-99; [3], с. 114-129; [4], с. 492-499

### Список рекомендованої та використаної літератури

1. Корнілов О.А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник. / О.А. Корнілов. – Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.
2. Ройзман В.П. Прикладна механіка. Опір матеріалів: Навчальний посібник. / В.П. Ройзман. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 124 с.
3. Мильников О.В. Основні питання опору матеріалів. Конспект лекцій та практичних занять для студентів заочної форми навчання. / О.В. Мильников, М.І. Підгурський. – Тернопіль: Видавництво ТНТУ, 2012. – 180 с.
4. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред.. Г.С. Писаренко. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2004. - 655 с.

## ЗМІСТ

Передмова.....	3
Теоретичні відомості з статистичної обробки результатів вимірювань	5
Лабораторна робота 1. Визначення видів деформацій.....	9
Лабораторна робота 2. Визначення модуля пружності при зсуві при крученні валу.....	21
Лабораторна робота 3. Випробування гвинтової циліндричної пружини.....	34
Лабораторна робота 4. Визначення прогинів ригеля при згинанні у статично визначеній рамі.....	43
Лабораторна робота 5. Визначення прогинів і кутів повороту перерізів статично визначеної балки при згинанні.....	52
Лабораторна робота 6. Експериментальна перевірка теорем про взаємність робіт і переміщень.....	64
Лабораторна робота 7. Перевірка теорем про взаємність робіт і переміщень.....	71
Лабораторна робота 8. Побудова пружної лінії балки.....	75
Лабораторна робота 9. Експериментальне визначення переміщень при косому згині балки.....	83
Лабораторна робота 10. Визначення положення центра згину швелерної балки.....	92
Лабораторна робота 11. Визначення критичної сили стиснутого стрижня.....	101
Список рекомендованої та використаної літератури.....	110