УДК 511.72

Деякі властивості функції частоти цифри 1 у трійковому розкладі дійсного числа

О.В. Котова
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Нехай $0, c_1c_2 \dots c_m \dots$ - формальний (символічний) запис деякого числа $x \in [0; 1]$ в трійковій системі числення, $c_i = c_i(x) \in \{0, 1, 2\}$, тобто

$$x \equiv 0, c_1c_2 \dots c_m \dots = \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-m} c_m. \tag{1}$$

Добре відомо, що кожне ірраціональне x має єдиний розклад (1), а деякі раціональні числа мають їх два (такі називаються трійково-раціональними).

Справді $0, c_1 \dots c_{m-1}c_m 00 \dots 0 \dots = 0, c_1 \dots c_{m-1}(c_m - 1)22 \dots 2 \dots$, $c_m \neq 0$.

Нехай $N_i(x, n) = \#\{k : c_k(x) = i, k \leq n\}$ - це кількість цифр „i“ в трійковому розкладі числа x до n-го місця включно. Якщо існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{N_i(x,n)}{n}$, то її значення $\nu_i(x)$ називається *частотою цифри „i“* в трійковому зображенні числа x, $i = 0, 1, 2$. Не складно навести приклад числа з довільними початковими цифрами, у якого не існує частоти однієї (і навіть всіх цифр)[**1**]. Тому зрозуміло, що функція частоти $y = \nu_i(x)$ цифри i числа x є всюди розривною.

Нагадаємо, що цілою частиною числа x (символічно:$[x]$) називається найбільше ціле число, що не перевищує x. Згідно з цим означенням, рівність $[x] = n$ рівносильна $n \leq x < n + 1$, $n \in Z$.

Розглянемо властивості цілої частини числа, які ми будемо використовувати далі.

Теорема 1. *Якщо x задовольняє нерівностям $0 \leq x < 1$, $k \in Z$, $mx \in Z$, то виконуються наступні рівності:*

1. $[x + k] = [x] + k$;

2. $r = [(k + 1)x] - [kx] \in \{0; 1\}$;

3. $[(m - 1)x] = mx - 1$.

Доведення. 1. З означення цілої частини маємо нерівності:

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

До всіх частин нерівностей додамо ціле число k.

Отримаємо $[x] + k \leq x + k < [x] + k + 1$.

Оскільки число $[x] + k$ - ціле, то $[x + k] = [x] + k$ за означенням.

2. Нехай d - ціла частина числа kx.

Тоді $d \leq kx < d + 1$.

До всіх частин нерівностей додамо x.

Отримаємо $d + x \leq (k + 1)x < d + x + 1 < d + 2$.

Остання нерівність випливає з того, що $x < 1$. Крім того $x \geq 0$, а тому $d + x \geq d$.

Таким чином, $d \leq (k+1)\,x < d+2$.
Можливі два випадки:$(k+1)\,x < d+1$ або $(k+1)\,x \geq d+1$.
В першому випадку $d \leq (k+1)\,x < d+1$, тому $[(k+1)\,x] = d$ і

$$r = [(k+1)\,x] - [kx] = d - d = 0.$$

У другому випадку $d+1 \leq (k+1)\,x < d+2$, тому

$$r = [(k+1)\,x] - [kx] = d + 1 - d = 1.$$

Отже, $r = 0$ або $r = 1$.
3. Справді, $(m-1)\,x = mx - x < mx$, оскільки $x > 0$.
З іншого боку, оскільки $(m-1)\,x = mx - x$ і $x < 1$, то

$$mx - x > mx - 1.$$

Отже,

$$mx - 1 < (m-1)\,x < (mx-1) + 1.$$

Оскільки $(mx-1)$ - ціле число, то $[(m-1)\,x] = mx - 1$. □

Теорема 2. *Число* $x = \dfrac{\gamma_1}{3} + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{e_j}\frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}$, *де*

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\in \{0;1;2\}\,,\\
x_1 &= \frac{\gamma_1}{3},\\
\beta_{in} &= [(s_n+i)\,x_n] - [(s_n+i-1)\,x_n]\,,\\
x_n &= \frac{\gamma_1}{3} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{e_j}\frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}},\\
s_1 &= 1, s_n = 3^{s_{n-1}},\\
e_n &= s_{n+1} - s_n = 3^{s_n} - s_n,
\end{aligned}$$

є розв'язком рівняння $\nu_1(x) = x$.

Доведення. 1. *Виразимо відношення* $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}}$.
Розглянемо число $x_1 = \dfrac{\gamma_1}{3} \equiv 0, \gamma_1$, де $\gamma_1 \in \{0;1;2\}$.
Позначимо через s_1 кількість цифр у трійковому розкладі числа x_1, тобто $s_1 = 1$.
Побудуємо число $x_2 = 0, \gamma_1\beta_{11}\beta_{21}\ldots\beta_{e_1 1}$, де

$$s_2 = s_1 + e_1 = 3^{s_1} = 3, e_1 = 3 - 1 = 2,$$

поклавши:

$$\beta_{11} = [(s_1+1)\,x_1] - [s_1x_1] = [2x_1] - [x_1]\,;$$
$$\beta_{21} = [(s_1+2)\,x_1] - [(s_1+1)\,x_1] = [3x_1] - [2x_1]\,.$$

Тоді

$$\beta_{11} + \beta_{21} = [3x_1] - [x_1] = 3x_1 - [x_1]\,.$$

Нехай $N_1(x)$ - кількість одиниць в трійковому розкладі числа x.

Кількість одиниць в трійковому розкладі числа x_2 дорівнює

$$N_1(x_2) = N_1(x_1) + \sum_{j=1}^{e_1} \beta_{j1};$$
$$N_1(x_2) = N_1(x_1) + 3x_1 - [x_1].$$

Тоді відносна частота одиниць в трійковому розкладі числа x_2 дорівнює

$$\frac{N_1(x_2)}{s_2} = \frac{N_1(x_1) + 3x_1 - [x_1]}{3} = x_1 + \frac{N_1(x_1)}{3} - \frac{[x_1]}{3}.$$

Аналогічно за числом x_2 будується число x_3, за числом x_3 - число x_4, і т.д.

Нехай вже побудоване число $x_k = 0, \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{s_k}$.

Побудуємо число $x_{k+1} = 0, \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_{s_k}\beta_{1k}\beta_{2k} \ldots \beta_{e_k k}$, де

$$s_{k+1} = s_k + e_k = 3^{s_k}, e_k = 3^{s_k} - s_k,$$

поклавши:

$$\beta_{1k} = [(s_k + 1)x_k] - [s_k x_k];$$
$$\beta_{2k} = [(s_k + 2)x_k] - [(s_k + 1)x_k];$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_{jk} = [(s_k + j)x_k] - [(s_k + j - 1)x_k];$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_{e_k k} = [(s_k + e_k)x_k] - [(s_k + e_k - 1)x_k] = [3^{s_k}x_k] - [(3^{s_k} - 1)x_k] =$$
$$= [3^{s_k}x_k] - [3^{s_k}x_k - x_k] = 3^{s_k}x_k - (3^{s_k}x_k - 1) = 1.$$

Кількість одиниць в трійковому розкладі числа x_{k+1} дорівнює

$$N_1(x_{k+1}) = N_1(x_k) + \sum_{j=1}^{e_k} \beta_{jk}.$$

Оскільки $\beta_{1k} + \beta_{2k} + \ldots + \beta_{e_k k} = 3^{s_k}x_k - [s_k x_k]$, то

$$N_1(x_{k+1}) = N_1(x_k) + 3^{s_k}x_k - [s_k x_k].$$

Тоді відносна частота одиниць в трійковому розкладі числа x_{k+1} дорівнює

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = \frac{N_1(x_k) + 3^{s_k}x_k - [s_k x_k]}{3^{s_k}} = x_k + \frac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{3^{s_k}}.$$

І т.д.

Тоді $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ і $\alpha_n(x) = \alpha_n(x_k)$ при $n = \overline{1, s_k}$ для всіх k.

2. *Оцінимо різницю* $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k$.

Виразимо функцію $\dfrac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k$ і оцінимо її:

$$\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k = \frac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{3^{s_k}}.$$

Оскільки $N_1(x_k) \le s_k$, то $\frac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{3^{s_k}} \le \frac{s_k}{3^{s_k}}$.

Оскільки $x_k < 1$, то $s_k x_k < s_k$ і $[s_k x_k] \le s_k x_k < s_k$.

$$-\frac{s_k}{3^{s_k}} < \frac{N_1(x_k)}{3^{s_k}} - \frac{[s_k x_k]}{3^{s_k}} \le \frac{s_k}{3^{s_k}}.$$

Таким чином

$$\left|\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} - x_k\right| \le \frac{s_k}{3^{s_k}}.$$

Якщо $k \to \infty$, $\frac{s_k}{3^{s_k}} \to 0$. Якщо $x_k \to x$, то $\frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} \to \nu_1(x)$.

3. *Доведемо, що* $\nu_1(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_1(x_{k+1})}{s_{k+1}} = x$.

Якщо трійковим розкладом числа x є $0,\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots$, то через u_n позначимо число, трійковим розкладом якого є $0,\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$.

Тоді $x_1 = u_{s_1}, x_2 = u_{s_2}, \ldots, x_k = u_{s_k}$, де $s_1 = 1, s_2 = 3^{s_1} = 3, \ldots, s_k = 3^{s_{k-1}}$.

Потрібно довести, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_1(u_n)}{n}$.

Тоді для довільного n існує таке k, що $x_{k+1} < u_n \le x_{k+2}, (s_{k+1} < n \le s_{k+2})$.

Звідси $u_n > x_{k+1}, n = s_{k+1} + j$, де j - деяке натуральне число, $1 \le j \le 3^{s_{k+1}} - s_{k+1}$.

За означенням числа u_n маємо:

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1} + j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}x_{k+1}] + N_1(x_{k+1}).$$

Представимо $N_1(x_{k+1})$ у вигляді:$N_1(x_{k+1}) = s_{k+1}x_k - [s_k x_k] + N_1(x_k)$.

Тоді

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1} + j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}x_{k+1}] + s_{k+1}x_k - [s_k x_k] + N_1(x_k).$$

Представимо $[s_{k+1}x_{k+1}]$ у вигляді: $[s_{k+1}x_{k+1}] = s_{k+1}x_k + [s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)]$.

Тоді

$$N_1(u_n) = [(s_{k+1} + j)\,x_{k+1}] - s_{k+1}x_k - [s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)] + s_{k+1}x_k - [s_k x_k] + N_1(x_k) =$$
$$= [(s_{k+1} + j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)] - [s_k x_k] + \ + N_1(x_k).$$

Тоді відносна частота одиниць в трійковому розкладі числа u_n дорівнює

$$\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} = \frac{[(s_{k+1} + j)\,x_{k+1}] - [s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)] - [s_k x_k] + N_1(x_k)}{s_{k+1} + j}.$$

$$\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x_{k+1} = \frac{[(s_{k+1} + j)\,x_{k+1}] - (s_{k+1} + j)\,x_{k+1}}{s_{k+1} + j} - \frac{[s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)]}{s_{k+1} + j} -$$
$$-\frac{[s_k x_k]}{s_{k+1} + j} + \frac{N_1(x_k)}{s_{k+1} + j}.$$

Тоді

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1} + j} - x_{k+1}\right| \le \left|\frac{[(s_{k+1} + j)\,x_{k+1}] - (s_{k+1} + j)\,x_{k+1}}{s_{k+1} + j}\right| + \left|\frac{[s_{k+1}(x_{k+1} - x_k)]}{s_{k+1} + j}\right| +$$

$$+\left|\frac{[s_k x_k]}{s_{k+1}+j}\right|+\left|\frac{N_1(x_k)}{s_{k+1}+j}\right|\leq\frac{1}{s_{k+1}}+(x_{k+1}-x_k)+\frac{s_k}{s_{k+1}}+\frac{s_k}{s_{k+1}}=$$
$$=(x_{k+1}-x_k)+\frac{2s_k+1}{s_{k+1}}<(x_{k+1}-x_k)+\frac{3s_k}{s_{k+1}}.$$

Нехай ϵ - довільне додатне число. Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$, то існує таке натуральне число N_1, що при $n > N_1$ виконується нерівність: $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{10}$.

Тоді, якщо $n > N_1$ і $r > N_1$, то

$$|x_n - x_r| = |x_n - x + x - x_r| \leq |x_n - x| + |x - x_r| < \frac{\epsilon}{10}+\frac{\epsilon}{10}=\frac{\epsilon}{5};$$
$$|x_n - x_r| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Оскільки $s_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує таке натуральне число N_2,

що при $n > N_2$, $\frac{s_n}{s_{n+1}} < \frac{\epsilon}{5}$.

Візьмемо $N = max\{N_1, N_2\}$.

Припустимо, що n -конкретне натуральне число, яке задовольняє умові $n > s_{N+2}$.

Тоді для такого натурального числа існує число k таке, що $s_{k+1} < n \leq s_{k+2}$.

Доведемо, що $k > N$.

Припустимо, що $k \leq N$, тоді $k + 2 \leq N + 2$.

Тому $n < s_{N+2}$, а це суперечить умові $n > s_{N+2}$.

Тоді

$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}-x_{k+1}\right|<(x_{k+1}-x_k)+\frac{3s_k}{s_{k+1}}<\frac{\epsilon}{5}+\frac{3\epsilon}{5}=\frac{4\epsilon}{5}.$$
$$\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}-x\right|=\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}-x_{k+1}+x_{k+1}-x\right|\leq$$
$$\leq\left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}-x_{k+1}\right|+|x_{k+1}-x|<\frac{4\epsilon}{5}+\frac{\epsilon}{10}<\epsilon.$$

Отже, $\forall\epsilon > 0\ \exists n \in N\ (n > s_{N+2})\ \left|\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}-x\right| < \epsilon$, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_1(u_n)}{s_{k+1}+j}$ і дорівнює x. □

Легко бачити, що існування і значення функції $\nu_i(x)$ не залежить від довільної скінченної кількості перших трійкових цифр числа x.

Наслідок 1. *Число* $x=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{3^i}+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{e_j}\frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}$, *де*

$$
\begin{aligned}
\gamma_i &\in \{0;1;2\}, \\
x_1 &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{3^i}, \\
\beta_{in} &= [(s_n+i)\,x_n]-[(s_n+i-1)\,x_n], \\
x_n &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{3^i}+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{e_j}\frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}, \\
s_1 &= k, s_n=3^{s_{n-1}}, \\
e_n &= s_{n+1}-s_n=3^{s_n}-s_n,
\end{aligned}
$$

є розв'язком рівняння $\nu_1(x)=x$.

Наслідок 2. *Число* $x=1-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{3^i}-\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{e_j}\frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}$, *де*

$$
\begin{aligned}
\gamma_i &\in \{0;1;2\}, \\
x_1 &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{3^i}, \\
\beta_{in} &= [(s_n+i)\,x_n]-[(s_n+i-1)\,x_n], \\
x_n &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\gamma_i}{3^i}+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{e_j}\frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}}, \\
s_1 &= k, s_n=3^{s_{n-1}}, \\
e_n &= s_{n+1}-s_n=3^{s_n}-s_n,
\end{aligned}
$$

є розв'язком рівняння $\nu_1(x)=1-x$.

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. - Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. - 296 с.

[2] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. - Киев: Наукова думка, 1992. - 208 с.

[3] *Постников А.Г.* Арифметическое моделирование случайних процессов // Тр. Мат. ин-та В.А Стеклова АН СССР. - 1960. - Т.57. - 83 с.

[4] *Торбін Г.М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системх числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. - Київ: ІМ НАН України - НПУ ім. М.П.Драгоманова. - 1998, №1. - С.53-55.