УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 33, № 3

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИЕВ — 1981

$$p(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha_i = 2, \ \beta_i = 0; \\ \mu\gamma_2(\beta), \text{ если } \alpha_k = \beta_k \text{ при } k \neq i, \ k = 1, \ldots, m, \ \alpha_i = 0, \ \beta_i = 2; \\ 0 \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что стационарное распределение величины γ_1 ($\varphi_j = \mathbf{P}(\gamma_1 = j)$) удовлетворяет уравнениям $\varphi_j = \dfrac{\mu(N-(j-2))/2}{\lambda(j-1)j + \mu\dfrac{N-j}{2}}\varphi_{j-2} + \dfrac{\lambda(j+1)(j+2)}{\lambda(j-1)j + \mu\dfrac{N-j}{2}}\varphi_{j+2}$, $j = N, N-2, \ldots, \varphi_N + \varphi_{N-2} + \ldots = 1$ и $\varphi_j = 0$ при $j = N-1, N-3, \ldots$, а стационарное распределение величины γ_2 ($\mathbf{P}(\gamma_2 = k) = q_k$) находится из уравнений

$$q_j = \frac{\lambda(N-2j+1)(N-2j+2)}{\lambda(N-2j-1)(N-2j)+j\mu}q_{j-1} + \frac{\mu(j+1)}{\lambda(N-2j-1)(N-2j)+j\mu}q_{j+1},$$

$j = 0, 1, \ldots, [N/2]$, $\sum\limits_{j=0}^{[N/2]} q_j = 1$, $q_{-1} = 0$ по определению.

Замечание. Если в рассмотренных телефонных системах без очередей $N \to \infty$, $\lambda = \lambda(N) \to 0$ при $N \to \infty$ так, что $\lim\limits_{n\to\infty} N^2\lambda(N) = \Lambda < \infty$, то уравнения (8) переходят в уравнения

$$q_j = \frac{\Lambda}{\Lambda + j\mu}q_{j-1} + \frac{(j+1)\mu}{\Lambda + j\mu}q_{j+1}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1 \ (q_{-1} = 0), \ j = 0, 1, \ldots,$$

совпадающие с уравнениями Эрланга для числа ведущихся разговоров в системе обслуживания с бесконечным числом каналов и пуассоновым входным потоком интенсивности Λ, не зависящим от процесса обслуживания, описанного в условии 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях.— М.: Мир, 1966.— 00 с.
2. Сарымсаков Т. А. Основы теории процессов Маркова.— М.: Гостехиздат, 1954.— 00 с.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов.— М.: Наука, 1973. Т. 2.

Институт автоматики
и электрометрии СО АН СССР

Поступила в редакцию
9.VII 1979 г.

УДК 517.52

В. И. Кузьмич

Об абсолютном суммировании рядов методом Рогозинского-Бернштейна

1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ называется абсолютно суммируемым нижней треугольной матрицей $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в ряд (методом A), или $|A|$-суммируемым к числу U, если

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k a_{nk}\right| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k a_{nk} = U.$$

Метод Рогозинского определяется матрицей $R = (r_{nk})$, где

$$r_{00} = 1,\ r_{nk} = \cos\frac{k\pi}{2n+2} - \cos\frac{k\pi}{2n}\ (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Метод Рогозинского — Бернштейна определяется матрицей $Б = (b_{nk})$, где

$$b_{nk} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} - \cos\frac{k\pi}{2n-1}\ (0 \leqslant k < n),\ b_{nn} = \cos\frac{n\pi}{2n+1}\ (n \geqslant 0).$$

Последовательность чисел $p_n\,(n \geqslant 0)$, $p_0 \neq 0$ определяет метод Вороного — Нерлунда с матрицей $W = (w_{nk})$, где $w_{nk} = P_{n-k}/P_n - P_{n-k-1}/P_{n-1} \times \times (0 \leqslant k < n)$, $w_{nn} = P_0/P_n\,(n \geqslant 0)$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k\,(n \geqslant 0)$. В частности, при $w_{nk} = kA_{n-k}^{\alpha-1}/nA_n^{\alpha}\,(0 \leqslant k \leqslant n)$, $A_m^{\beta} = (\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+m)/m!$ это метод Чезаро порядка $\alpha > -1$. Его матрицу обозначим C_α.

Метод суммирования называется абсолютно регулярным, если он каждый абсолютно сходящийся к числу U ряд абсолютно суммирует к тому же числу U. По теореме Кноппа—Лоренца [1, с. 34, 35] для абсолютной регулярности матричного метода $A = (a_{nk})$ с матрицей преобразования ряда в ряд необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nk}| = O(1), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} = 1\ (k \geqslant 0).$$

Легко проверить, что методы Рогозинского и Рогозинского — Бернштейна являются абсолютно регулярными.

Два метода называются абсолютно равносильными, если они абсолютно суммируют одни и те же ряды.

Теорема 1. *Метод Рогозинского—Бернштейна абсолютно равносилен методу Вороного—Нерлунда, определяемому последовательностью чисел* $p_n = 2\ (n > 0)$, $p_0 = 1$.

Доказательство. Матрица $W = (w_{nk})$ метода Вороного — Нерлунда имеет вид

$$w_{nk} = \frac{4k}{4n^2-1}\ (0 \leqslant k < n),\ w_{nn} = \frac{2n-1}{4n^2-1}\ (n \geqslant 0).$$

Для доказательства теоремы в силу леммы 2 работы [2] достаточно показать, что матрица $БW^{-1} = (a_{nk})$ равносильна абсолютной сходимости. Для этого найдем элементы $\bar{w}_{nk}$ матрицы W^{-1} — обратной матрице W. Имеем [1, с. 57, 103]: $\bar{w}_{nk} = (-1)^{n-k} 4k (0 \leqslant k \leqslant n-1)$, $\bar{w}_{nn} = 2n+1\ (n \geqslant 0)$. Теперь $a_{nk} = \sum_{i=k}^{n} b_{ni}\bar{w}_{ik} = (2k+1)(\cos k\alpha_n - \cos k\alpha_{n-1}) - 4k\left(\sum_{i=0}^{n-k-2} (-1)^i \cos (k+i+1)\alpha_n - \cos(k+i+1)\alpha_{n-1}\right) + (-1)^{n-k-1}\cos n\alpha_n\ (0 \leqslant k < n)$, $a_{nn} = (2n+1)\cos n\alpha_n\ (n \geqslant 0)$, где $\sum_{i=0}^{-1} c_i = 0$, $\alpha_n = \frac{\pi}{2n+1}\ (n \geqslant 0)$.

Используя результаты работы [3, с. 43, 1.341.6], после преобразований получаем:

$$a_{nk} = \cos k\alpha_n + 2k \sin k\alpha_n \operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2} - \left(\cos k\alpha_{n-1} + 2k \sin k\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)$$
$$(0 \leqslant k < n-1)$$

Положим

$$\varphi_k(x) = \cos\frac{k\pi}{2x+1} + 2k\sin\frac{k\pi}{2x+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(2x+1)}.$$

Отсюда

$$\varphi_k'(x) = \frac{2k\pi}{(2x+1)^2}\left(\left(1 - k\sec^2\frac{k\pi}{2(2x+1)}\right)\sin\frac{k\pi}{2x+1} - \right.$$

$$\left. - 2x\cos\frac{k\pi}{2x+1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(2x+1)}\leqslant 0\right.$$

при $x \geqslant k$, т. е. функция $\varphi_k(x)$ убывает в промежутке $[k, +\infty)$. Поэтому $a_{nk} \leqslant 0$ для $0 \leqslant k < n-1$.

Так как матрица $БW^{-1} = (a_{nk})$ — нормальна (т. е. $a_{nn} \neq 0$, $a_{nk} = 0\,(k > n)$), то для равносильности этой матрицы абсолютной сходимости достаточно выполнения условий [4, 5]

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{nk}| = O(1),\ \lim_{k\to\infty}\left(|a_{kk}| - \sum_{n=k+1}^{\infty}|a_{nk}|\right) > 0.$$

Имеем

$$|a_{nn}| - \sum_{i=1}^{N}|a_{n+i,n}| = (2n+1)\cos n\alpha_n - |(2n+1)(\cos n\alpha_{n+1} - \cos n\alpha_n) -$$

$$- 4n\cos(n+1)\alpha_{n+1}| + \sum_{i=2}^{N}\left(\cos n\alpha_{n+i} + 2n\sin n\alpha_{n+i}\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+i}}{2} - \right.$$

$$\left. -\left(\cos n\alpha_{n+i-1} + 2n\sin n\alpha_{n+i-1}\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+i-1}}{2}\right)\right) = (2n+1)\cos n\alpha_n -$$

$$- |(2n+1)(\cos n\alpha_{n+1} - \cos n\alpha_n) - 4n\cos(n+1)\alpha_{n+1}| + \cos n\alpha_{n+N} +$$

$$+ 2n\sin n\alpha_{n+N}\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+N}}{2} - \left(\cos n\alpha_{n+1} + 2n\sin n\alpha_{n+1}\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+1}}{2}\right) \to$$

$$\to (2n+1)\cos n\alpha_n - |(2n+1)(\cos n\alpha_{n+1} - \cos n\alpha_n) - 4n\cos(n+1)\alpha_{n+1}| -$$

$$-\left(\cos n\alpha_{n+1} + 2n\sin n\alpha_n\operatorname{tg}\frac{\alpha_{n+1}}{2}\right) + 1 \quad (N\to\infty).$$

Первое слагаемое в правой части полученного соотношения стремится к $\pi/2$, второе — к нулю, третье — к $\pi/2$ при $n\to\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(|a_{nn}| - \sum\limits_{i=n+1}^{\infty}|a_{in}|\Big) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1 > 0$. Так как $a_{nn}\to\pi/2$ при $n\to\infty$, то из полученного неравенства следует выполнение условия: $\sum\limits_{n=k}^{\infty}|a_{nk}| = O(1)$.

Теорема доказана.

Аналогично (на основании результатов работы [2]) доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Метод Рогозинского абсолютно равносилен методу средних арифметических* (методу $|C_1|$).

Для обычной суммируемости результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, содержатся соответственно в работах [6, 7, 8, с. 488].

Аналогично доказательству теоремы 1 методом обратного преобразования доказывается следующая лемма.

Л е м м а 1. *Метод Рогозинского — Бернштейна абсолютно равносилен методу* $|C_1 Z_2|$, *где* $Z_2 = (z_{nk})$ — *матрица метода Сильвермана — Сасса, элементы которой определяются следующим образом:* $z_{00} = 1$, $z_{nn} = z_{n,n-1} = 1/2$, $z_{nk} = 0$ $(0 \leqslant k < n-1,\ k > n)$.

Т е о р е м а 3. *Включения* $|C_\alpha| \subset |Б| \subset |C_\beta|$ *справедливы тогда и только тогда, когда* $-1 < \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В связи с теоремой 1 эти соотношения достаточно доказать для метода Вороного — Нерлунда, определенного последовательностью чисел $p_n = 2\,(n > 0)$, $p_0 = 1$.

а). Рассмотрим матрицу WC_α^{-1}. Ее диагональные элементы равны $A_n^\alpha \dfrac{1}{2n+1} \sim \dfrac{n^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha+1)}$ $(n \to \infty)$. Следовательно, матрица WC_α^{-1} при $\alpha > 1$ не может сохранять абсолютную сходимость ряда и поэтому [1, с. 63] $|C_\alpha| \not\subset |W|$ при $\alpha > 1$.

Так как $w_{nn} = \dfrac{1}{2n+1} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, то по следствию 2 работы [2] для включения $|C_1| \subset |W|$ достаточно доказать неравенства $\dfrac{w_{nk}}{k} \geqslant \dfrac{w_{n,k+1}}{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Но $\dfrac{w_{nk}}{k} = \dfrac{w_{n,k+1}}{k+1} = \dfrac{4}{4n^2-1}$ $(0 \leqslant k < n-1)$, $\dfrac{w_{n,n-1}}{n-1} > \dfrac{w_{nn}}{n} = \dfrac{1}{n(2n+1)}$. Теперь включение $|C_\alpha| \subset |Б|$ $(-1 < \alpha \leqslant 1)$ следует из того, что $|C_\alpha| \subset |C_\beta|$ при $-1 < \alpha < \beta$ [1, стр. 89].

б). Для доказательства включения $|W| \subset |C_2|$ покажем, что матрица $C_2 W^{-1} = (a_{nk})$ сохраняет абсолютную сходимость ряда. Имеем

$$a_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{2(k+i)(n-k-i+1)}{n(n+1)(n+2)} \bar{w}_{k+i,k} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} (k(2k+1) \times$$

$$\times (n-k+1) - 4k) \sum_{i=1}^{n-k} (-1)^{i-1} (k+i)(n-k-i+1) =$$

$$= \frac{2k^2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{(-1)^{n-k} 2k}{n(n+2)},$$

если положить $k/n = 1$ при $k = n = 0$. Отсюда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} |a_{nk}| = O(1)$ и $|W| \subset |C_2|$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, где $u_n = (-1)^{n+1}(n^{\beta-1} + (n-1)^{\beta-1})\ (n > 0)$, $u_0 = 1$, $1 < \beta < 2$. Как следует из одной из теорем Когбетлянца [9], условие $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|u_n|}{(n+1)^\beta} < \infty$ является необходимым для $|C_\beta|$-суммируемости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$. Таким образом, указанный ряд не суммируется абсолютно ни одним из методов Чезаро порядка $1 < \beta < 2$. Покажем, что этот ряд суммируем методом $|C_1 Z_2|$:

$$|t_n| = \frac{1}{2n(n+1)} \left| 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)(-1)^{k+1} (k^{\beta-1} + (k-1)^{\beta-1}) + \right.$$

$$+(-1)^{n+1}n\left(n^{\beta-1}+(n-1)^{\beta-1}\right)\Big| = \frac{1}{2n(n+1)}\Big|1+\sum_{k=1}^{n-2} 2(-1)^k k^{\beta-1} +$$

$$+(-1)^n(n-1)^{\beta}+(-1)^{n-1}n^{\beta}\Big| < \frac{1}{2n(n+1)}\left(1+2(n-2)^{\beta-2}+\right.$$

$$\left.+n^{\beta}-(n-1)^{\beta}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3-\beta}}\right).$$

Поскольку $\beta < 2$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|t_n| < \infty$, т. е. указанный выше ряд суммируется методом $|C_1Z_2|$. Теорема доказана.

Для обычной суммируемости аналогичные результаты получены в работах [7, 10, 11].

Из теоремы 3 следует, что $|C_1Z_2| \subset C_2|$. Но $|Z_2C_1| \not\subset |C_2|$, так как $|Z_2| \not\subset |C_1|$ и $|C_2| \sim |C_1C_1|$ [1, с. 111, 150]. Следовательно, в отличии от обычной суммируемости [6, 7] методы $|C_1Z_2|$ и $|Z_2C_1|$ не являются абсолютно равносильными. Используя метод обратного преобразования, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Справедливы включения*: $|C_1Z_2| \subset |Z_2C_1| \subset |C_3|$.

2. Пусть $f(x)$ — вещественная, 2π-периодическая функция, интегрируемая по Лебегу на $(-\pi, \pi)$, и

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}A_n(t), \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nt-b_n\cos nt) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}B_n(t) \tag{2}$$

ее соответственно ряд и сопряженный ряд Фурье. Если существует абсолютно непрерывная на $[-\pi, \pi]$ производная $f^{(r-1)}(t)$ $(r=1, 2, \ldots)$, то

$$f^{(r)}(t) \sim \begin{cases} (-1)^{\frac{r+1}{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r B_n(t) & (r=2m+1), \\ (-1)^{\frac{r}{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^r A_n(t) & (r=2m). \end{cases} \tag{3}$$

Известно, [12, с. 67, 94], что суммируемость ряда (1) в точке $t = x$ любым регулярным треугольным методом зависит лишь от поведения функции $f(t)$ в произвольно малой окрестности точки $t = x$. В этом случае говорят, что суммируемость ряда (1) в точке $t = x$ является локальным свойством функции $f(t)$.

Известно также, что абсолютная суммируемость ряда (1) абсолютно регулярным методом не всегда является локальным свойством функции $f(t)$ [13, с. 638]. Ряд математиков исследовали многие методы абсолютного суммирования на локальное свойство. Обзор результатов по этому вопросу сделан в работах [14—16]. В этих работах установлены достаточные условия того, чтобы абсолютная суммируемость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \frac{d^r}{dt^r}A_n(t) \quad (r=0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность, являлась или не являлась локальным свойством функции $f(t)$. Однако решить вопрос, является ли $|Б|$-суммируемость ряда (1) локальным свойством функции $f(t)$ с их помощью нельзя. Установим теорему позволяющую решить поставленную выше задачу.

Определение [14, 15]. *$|A|$-суммируемость ряда (4) не является локальным свойством функции $f(t)$, если найдутся промежуток $(x+\alpha, x+\beta)$, где $x < x+\alpha < x+\beta < x+2\pi$, и функция, равная нулю в $(x, x+\alpha) \cup (x+\beta, x+2\pi)$ и равная $f(t)$ в промежутке $(x+\alpha, x+\beta)$, для которой ряд (4) не является $|A|$-суммируемым в точке $t = x$.*

Лемма 2 [17, теорема 3]. *Пусть нормальный метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию: $\sum_{n=1}^{\infty} nD_n < \infty$, где $D_n = \sup_k |a_{k+n,k+n}\eta_{k+n,k}|$, $(\eta_{nk}) = (a_{nk})^{-1}$, (a_{nk}) — матрица преобразования ряда в последовательность.*

Для того чтобы из $|A|$-суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ всегда следовала сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n u_n|$, необходимо и достаточно выполнение условий $\sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n \varepsilon_n| < \infty$, $\varepsilon_n = O(a_{nn})$, где $\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}$.

Лемма 3 [18, теорема 1]. *Пусть $\{f_n(t)\}$ — последовательность измеримых функций в промежутке (α, β), $\beta - \alpha < \infty$. Для того чтобы при любой $g(t) \in L_{(\alpha,\beta)}$ функции $f_n(t)\, g(t) \in L_{(\alpha,\beta)}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f_n(t)\, g(t)\, dt \right| < \infty$, необходимо и достаточно выполнение условия: $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)| = O(1)$ почти всюду в (α, β).*

Лемма 4 [13, с. 764]. *Если $b < 2/\pi$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = +\infty$, то множество тех точек x, где*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(kx - \alpha_k)| / \sum_{k=1}^{n} \rho_k \leqslant b,$$

имеет меру нуль.

Заметим, что лемма 4 справедлива и в случае, когда вместо $\cos(kx - \alpha_k)$ рассматривать $\cos(\psi(k)\, x - \alpha_k)$, где $\psi(k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Лемма 5. *Пусть $A = (a_{nk})$ и C — нижние треугольные матрицы, а $B = (b_{nk})$ — нормальная матрица. Для того чтобы из $|A|$-суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ всегда следовала $|C|$-суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{k=0}^{n} u_k b_{nk}$, где $\{\varepsilon_n\}$ — числовая последовательность, необходимо и достаточно, чтобы из $|AB^{-1}|$-суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ всегда следовала $|C|$-суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon_n$.*

Доказательство. Поскольку матрица B нормальна, то существует обратная матрица $B^{-1} = (\bar{b}_{nk})$. Для произвольного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ справедливо тождество:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{n} a_{nj}\bar{b}_{jk}\right)\sum_{i=0}^{k} b_{ki}u_i = \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{i=k}^{n} b_{ik} \sum_{j=i}^{n} a_{nj}\bar{b}_{ji} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{i=k}^{n} a_{ni} \sum_{j=k}^{i} \bar{b}_{ij} b_{jk} = \sum_{k=0}^{n} u_k a_{nk},$$

т. е. $|A|$-суммируемость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ равносильна $|AB^{-1}|$-суммируемости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} u_i b_{ni}$. Отсюда достаточность следует немедленно. Необходимость следует из полученного тождества и из нормальности матрицы B.

Теорема 5. *Пусть нормальный метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условиям*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nD_n^{(p)} < \infty, \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left| a_{nn} \sum_{i=0}^{p} \eta_{n-i}\right| < \infty, \tag{6}$$

где $D_n^{(p)} = \sup_k \left| a_{k+n,k+n} \sum_{i=0}^{p} \eta_{k+n-i,k}\right|$, $(\eta_{nk}) = (a_{nk})^{-1}$, $\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}$, (a_{nk}) — *матрица преобразования ряда в последовательность, p — некоторое целое неотрицательное число. Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r |\lambda_n a_{nn}| = \infty, \tag{7}$$

$$\lambda_n \sim \lambda_{n+1}\ (n \to \infty), \tag{8}$$

то $|A|$-суммируемость ряда (4) *не является локальным свойством функции $f(t)$.*

Доказательство. Из (3) следует, что теорему достаточно доказать для рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n A_n(t), \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n(t), \tag{10}$$

так как в качестве последовательности $\{\lambda_n\}$ можно взять последовательность $\{n^r\lambda_n\}$. Докажем теорему для ряда (9).

Предположим, что $|A|$-суммируемость ряда (9) — локальное свойство функции $f(t)$. Тогда для любой функции $f(t) \in L_{(x+\alpha, x+\beta)}$ и равной нулю в $(x, x+\alpha) \cup (x+\beta, x+2\pi)$ ряд (9) является $|A|$-суммируемым в точке $t=x$. По лемме 2 из условий (5) и (6) следует, что из $|A_p|$-суммируемости ряда (9), где A_p матрица, обратная к которой имеет вид: $A_p^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{p} \eta_{n-i,k}\right) = BA^{-1}$, $B = (b_{nk})$, $b_{nk} = 1\ (n-k \leqslant p)$, $b_{nk} = 0\ (n-k > p)$, всегда следует сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nn}\lambda_n A_n(x)|$.

Так как умножение нижних треугольных матриц ассоциативно, то $A_p = AB^{-1}$. Теперь по лемме 5 из $|A|$-суммируемости ряда (9) всегда следует сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_{nn} \sum_{i=0}^{p} \lambda_{n-i} A_{n-i}(x) \right|$.

Поскольку для любой 2π-периодической функции $f(t) \in L_{(0, 2\pi)}$ имеет место равенство

$$A_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+x) \cos nt dt \quad (n > 0)$$

то, принимая во внимание конструкцию функции $f(t)$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t+x)\, a_{nn} \sum_{i=0}^{p} \lambda_{n-i} \cos(n-i)\, t dt \right| < \infty.$$

Теперь, положив $g(t) = f(x+t)$, по лемме 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nn}| \left| \sum_{i=0}^{p} \lambda_{n-i} \cos(n-i)\, t \right| = O(1) \tag{11}$$

почти везде. Далее

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_{n-1} \cos(n-i)\, t \left| \geqslant |\lambda_n| \left| \sum_{i=0}^{p} \cos(n-i)\, t \right| - \sum_{i=1}^{p} |\lambda_n - \lambda_{n-i}| |\cos(n-i) t| = \right.$$

$$= \left| \lambda_n \operatorname{cosec} \frac{t}{2} \sin(p+1) \frac{t}{2} \cos(2n-p) \frac{t}{2} \right| - \sum_{i=1}^{p} |\lambda_n - \lambda_{n-i}| |\cos(n-i)\, t|.$$

Отсюда n-я частная сумма ряда, стоящего в левой части (11) оценится следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{kk}| \left| \sum_{i=0}^{p} \lambda_{k-i} \cos(k-i)\, t \right| \geqslant \left| \operatorname{cosec} \frac{t}{2} \sin(p+1) \frac{t}{2} \right| \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k a_{kk}| \times$$

$$\times \left| \cos(2n-p) \frac{t}{2} \right| - \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{n} |a_{kk}| |\lambda_k - \lambda_{k-i}| |\cos(k-i)\, t|.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{kk}| |\lambda_k - \lambda_{-i}| |\cos(k-i)\, t| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k a_{kk}| \left| 1 - \frac{\lambda_{k-i}}{\lambda_k} \right| =$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{n} |\lambda_k a_{kk}| \right) \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Из леммы 4 и замечания к ней при $t \neq \frac{2m}{p+1} \pi$ $m = 0, \pm 1$, следует

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\left| \operatorname{cosec} \frac{t}{2} \sin(p+1) \frac{t}{2} \right|}{\sum_{k=0}^{n} |\lambda_k a_{kk}|} \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k a_{kk}| \left| \cos(2n-p) \frac{t}{2} \right| > 0$$

почти везде. Теперь из полученных оценок и условия (7) при $r=0$ следует, что условие (11) не выполняется.

Так как для любой 2π-периодической функции $f(t)\in L_{(0,2\pi)}$ имеет место равенство: $B_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}-nt\right)dt \ (n>0)$, то доказательство теоремы для ряда (10) проводится аналогично.

Покажем, что метод Вороного — Нерлунда, рассмотренный в теореме 1, удовлетворяет условиям теоремы 5. Легко получить, что для этого метода $\eta_{nk}=(-1)^{n-k}4(2k+1)\ (0\leqslant k<n-1)$, $\eta_{n,n-1}=-3(2n-1)$, $\eta_{nn}=2n+1\ (n\geqslant 0)$.

Отсюда $\eta_n=0\ (n>0)$, $\eta_0=1$. Теперь видно, что $D_n^{(1)}=0$ при $n\geqslant 3$. Следовательно, условия (5) и (6) теоремы 5 выполнены. Поэтому $|W|$-суммируемость, а следовательно, и $|Б|$-суммируемость ряда (4) не является локальным свойством функции $f(t)$ при выполнении условий: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r-1}|\lambda_n|=\infty$, $\lambda_n\sim\lambda_{n+1}\ (n\to\infty)$.

Положив $r=0$ и $\lambda_n=1\ (n>0)$, получим, что $|Б|$-суммируемость рядов (1) и (2) не является локальным свойством функции $f(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барон С. А. Введение в теорию суммируемости рядов.— Таллин: Валгус, 1977.— 280 с.
2. Кузьмич В. И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. Киев: Киев. пед. ин-т, 1979, с. 50—60.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.— 1100 с.
4. Fridy I. A. Mercerian-type theoremstor absolute summability.— Port. Math., 1974, 33, № 3/4, p. 141—145.
5. Нагайник А. Ф. Абсолютно консервативные матричные преобразования и теоремы типа Радо—Агнью.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. Киев: Киев. пед. ин-т, 1978, с. 95—103.
6. Karamata J. Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesaroschen Limitierungs.— verfahren.— Math. Zeit., 1949, 52, p. 305—306.
7. Agnew R. P. Rogosinski — Bernstein trigonometric summability methods and modified arithmetic means.— Ann. Math., 1952, 56, № 3, p. 537—559.
8. Харди Г. Расходящиеся ряды.— М.: Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
9. Kogbetliantz M. E. Sur les series absolument sommables par la methode des moyennes arithmetiques.— Bul. sci. math., 1925, 49, 234—256.
10. Харшиладзе Ф. И. О методе суммирования С. Н. Бернштейна.— Мат. сб., 1942, 11, № 1/2, с. 121—148.
11. Огиевецкий И. И. О методе суммирования С. Н. Бернштейна.— Докл. АН СССР, 1951, 76, с. 635—638.
12. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье.— М.: Физматгиз, 1959.— 196 с.
13. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.— М.: Физматгиз, 1961.— 936 с.
14. Барон С. О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье.— Учен. зап. Тарт. ун-та, 1965, 177, с. 106—120.
15. Барон С. О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье и сопряженных рядов.— Учен. зап. Тарт. ун-та, 1970, 253, с. 212—228.
16. Барон С. О локальном свойстве абсолютной суммируемости продифференцированных рядов Фурье.— Учен зап. Тарт. ун-та, 1971, 281, с. 157—177.
17. Кангро Г. Об обобщении одной теоремы Мура.— Докл. АН СССР, 1958, 121, с. 967—969.
18. Bosanquet L. S., Kestelman H. The absolute convergence of series of integrals.— Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1939, 45, p. 88—97.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию 23.XI 1979 г.;
после переработки — 10. X 1980 г.