

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А. М. ГОРЬКОГО

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ
РЯДОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Сборник научных трудов

Киев КГПИ 1985

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ И
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ
Сборник научных трудов

Киев КГПИ 1985

В сборнике помещены работы, посвященные суммированию расходящихся рядов, асимптотическим методам решения дифференциальных уравнений, приближенным методам решения задач математической физики и др.

Сборник рассчитан на студентов, аспирантов и преподавателей физико-математических факультетов.

Суммирование расходящихся рядов и дифференциальные уравнения с малым параметром. Сборник научных трудов. - К.: КПИ им. А.М. Горького, 1985. - 132 с. Ц. 70 коп. 500 экз.

Редакционная коллегия: лектор физико-математических наук, профессор ЛАДЫКОВ Н.А. /ответственный редактор/; лектор физико-математических наук, чл.-корр. АН СССР, профессор ШИШЛЯ К.И., кандидат физико-математических наук, профессор ЛИЩЕНКО Н.Л., кандидат физико-математических наук, доцент МАДДАК М.И., кандидат физико-математических наук, лектор МЕЛЬНИК В.И., кандидат физико-математических наук, доцент ПИЧЕНКО Д.П., кандидат физико-математических наук, доцент КОЛЕСНИК Т.В. /ответственный секретарь/.

(c) Киевский государственный педагогический институт имени А.М. Горького, 1985 г.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЦЕЛОГО РАНГА

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A(t, \dot{x})x + B(t, \dot{x}), \quad (I)$$

о начальных условиях

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}|_{t=t_0} = \dot{x}_0, \quad (II)$$

где $x(t_0) = n$ -мерный вектор, $A(t, \dot{x})$ - квадратная матрица n -го порядка, допускаемая разложение

$$A(t, \dot{x}) = \sum_{k=0}^n A_k(t), \quad (III)$$

$\sum_{k=0}^n A_k(t) \in \mathbb{R}$ - царе, \mathbb{R} - фиксированное чило.

Известно, что структура формальных, в смысле (I) частных решений системы (I) тесно связана с поведением корней так называемого характеристического уравнения

$$A(t, \dot{x}) - \lambda E = 0, \quad (IV)$$

где E - единичная матрица.

В настоящей работе рассматривается вопрос построения решения системы (I) при наличии культивированного корня характеристического уравнения (IV), т.е. так называемый критический случай (I). Этот случай, а также случай отсутствия или корней уравнения (IV) для систем нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в литературе не рассматриваются. Поэтому несомненно представляет интерес исследование систем вида (I), к которым приходится некоторые задачи физики и техники.

Пусть $\lambda = \lambda_0$, тогда на вид решений системы (I) в случае присутствия культивированного корня уравнение (IV) указывает:

Теорема I. Пусть выполняются условия:

а) матрицы $A_i(t) (i=0, 1, \dots)$ при $t \in [t_0, t_1]$, а вектор

► 3 -

$$Z(x, \varepsilon) = h \int_{x-h}^{x+0.5h} [D^2u(s, t) - D^2u(x-0.5h, t)] ds dt, \quad (V)$$

получаем оценку

$$\|Z\|_{L_1(Q_T)} \leq Mh \|D^2u\|_{L_1(Q_T)}. \quad (VI)$$

Тогда из (VI) найдем

$$\|Z(\varepsilon)\|_* \leq Mh \|D^2u\|_{L_1(Q_T)}. \quad (VII)$$

Таким образом имеет место теорема.

Теорема I. Пусть решение $U(x, \varepsilon)$ задачи (V) принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$. Тогда точность схемы (V) характеризуется равномерной по ε оценкой (VII).

Теперь рассмотрим задачу (I). Поставим в соответствие этой задаче следующую схему метода прямых

$$L_h V = \varphi(x, \varepsilon, V) = S_f(x, \varepsilon, V) + \tilde{f}(x, \varepsilon), \quad (x, \varepsilon) \in Q_T^h,$$

$$V(0, \varepsilon) = V_0(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, T); \quad V = \bar{U}_*(x), \quad D^2V = \bar{U}_*(x), \quad x \in \omega, \quad \varepsilon = 0. \quad (VIII)$$

Для погрешности $Z = V - \bar{U}_*$ схема справедлива оценка

$$\|Z(\varepsilon)\|_* \leq M \sum_{k=0}^n \|Z\|_{L_1(Q_T^k)}, \quad (IX)$$

где Z определено в задаче (V), а $Z(x, \varepsilon) = S_f(x, \varepsilon, V) - \tilde{f}(x, \varepsilon, U)$.

Используя условие Липшица для функции $f(x, \varepsilon, U)$ из (V), получим

$$\|Z\|_{L_1(Q_T^k)} \leq M (\|Z\|_{L_1(Q_T^k)} + h \|D^2u\|_{L_1(Q_T^k)}). \quad (X)$$

Далее, подставляя оценки (VII), (X) в соотношение (IX), а затем применяя лемму Гронwallа [7], будем иметь

$$\|Z(\varepsilon)\|_* \leq Mh (\|D^2u\|_{L_1(Q_T)} + \|D^2u\|_{L_1(Q_T)}). \quad (XI)$$

► 32 -

Таким образом, доказана

Теорема 2. Если решение $U = U(x, \varepsilon)$ задачи (I) принадлежит классу $W_2^2(Q_T)$ и выполнены предположения леммы, то решение V схемы метода прямых (VIII) сходится равномерно по ε со скоростью $O(h)$ к U и имеет место оценка (VII).

Литература

1. Лыков А.В. Термомеханика: справочник. М.: Энергия, 1978.
2. Подотригач Я.С., Колюко Ю.М. Обобщенная термомеханика. К.: Наукова думка, 1976.
3. Хонкин А.Д. О парадоксе бесконечной скорости распространения возмущений в гидродинамике вязкой теплопроводной среды и уравнениях гидродинамики быстрых процессов. - В кн.: Аэромеханика, М.: Наука, 1976.
4. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
5. Ладижинская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
7. Лилюк Е.Л., Маджанео З. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Н. Й. Мир, 1971.

О НЕСРАВНИМОСТИ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Два метода суммирования, определяемые матрицами A и B , будем называть несравнимыми, если существует одна последовательность, суммируемая методом матрицей A и не суммируемая методом матрицей B , и наоборот, существует по крайней мере одна последовательность, суммируемая методом B и не суммируемая методом A . В частности, если метод A суммирует хотя бы одну расщепляющую последовательность, но суммируемый методом A , то этот метод будем называть несравнимым со сходимостью.

Матрицу $A = (a_{nk})$ называют нормальной, если $a_{nk} = 0$ ($0 \leq n < k$) и $a_{nn} = 0$ ($n \geq 0$).

В настоящей работе будут установлены различные условия несравненности двух методов, определяемых нижними треугольными матрицами.

Лемма 1. Пусть A — нижняя треугольная, а B — нормальная матрица преобразования последовательности в последовательность.

Для того, чтобы матрицы A и B были несравненными, необходимо и достаточно, чтобы матрица AB^{-1} была несравненной со сходимостью матрицы преобразования последовательности в последовательность.

Доказательство. Будем обозначать через (c_n) матрицу (C_{nk}) , где $C_{nk} = 0$ ($k > n, n > 0$), $c_{nn} = c_n$ ($n > 0$) (C_n) — членов последовательности.

Пусть матрицы A и B несравнены. Тогда существует последовательность $\{S_n\}$ суммируемая методом A и не суммируемая методом B . А также существует последовательность $\{T_n\}$ суммируемая методом B и не суммируемая методом A . Это можно записать с помощью матричных равенств:

$$(L_n) - A(S_n), (P_n) = B(S_n), (D_n) = A(T_n), (G_n) = B(T_n),$$

где последовательности $\{L_n\}, \{G_n\}$ — сходящиеся, а последовательности $\{P_n\}$ и $\{D_n\}$ — расходящиеся.

Поскольку матрица B нормальная, то существует единственная обратная матрица B^{-1} , являющаяся нормальной [1, стр. 31].

Пользуясь ассоциативностью умножения нижних треугольных матриц [1, стр. 20], запишем матричное равенство:

$$L_n = A(S_n) = AB^{-1}B(S_n) = AB^{-1}(P_n)$$

из которого следует, что матрица AB^{-1} суммирует расходящуюся последовательность $\{P_n\}$.

Аналогично, из равенства

$$(D_n) = A(T_n) = AB^{-1}B(T_n) = AB^{-1}(G_n)$$

получим, что матрица AB^{-1} не суммирует сходящуюся последовательность $\{G_n\}$. Следовательно, матрица AB^{-1} несравнена со сходимостью.

Теперь предположим, что матрица AB^{-1} несравнена со сходимостью. Это значит, что существует расходящаяся последовательность $\{P_n\}$ суммируемая матрицей AB^{-1} и существует сходящаяся по-

- 34 -

следовательность $\{L_n\}$ не суммируемая этой матрицей. Запишем это с помощью матричных равенств

$$(L_n) = AB^{-1}(P_n), (D_n) = AB^{-1}(G_n),$$

где последовательность $\{L_n\}$ скончата, а последовательность $\{D_n\}$ расходится.

Введем обозначения: $(S_n) = B^{-1}(P_n)$, $(T_n) = B^{-1}(G_n)$.

Тогда будем иметь $(P_n) = B(S_n)$ и $(G_n) = B(T_n)$. Поэтому матрица B не суммирует последовательность $\{T_n\}$ и суммирует последовательность $\{S_n\}$.

Из матричных равенств

$$(L_n) = AB^{-1}(P_n) = A(S_n), (D_n) = AB^{-1}(G_n) = A(T_n)$$

получим, что матрица A суммирует последовательность $\{S_n\}$ и не суммирует последовательность $\{T_n\}$. Следовательно, матрицы A и B несравнены.

Для применения леммы I необходимо найти условия, достаточные для того, чтобы матрица была несравненной со сходимостью. Следующая лемма, доказанная Р. Альбе [1, стр. 234], дает условия, достаточные для того, чтобы матрица суммировалась по крайней мере одни расходящуюся последовательности.

Лемма 2. Если матрица A такова, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty \quad (n > 0),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq n} |a_{nk}| = 0,$$

то существует по крайней мере одна расходящаяся последовательность из O и I , суммируемая при помощи этой матрицы.

Заметим, что условие /1/ выполнено для любой нижней треугольной матрицы.

Известно [2, стр. 62-63], что условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = O(1)$$

является необходимым для того, чтобы матрица (a_{nk}) суммировалась какую скользящуюся последовательность. Поэтому, если условие /2/ не выполнено, то существует по крайней мере одна сходящаяся последовательность.

- 35 -

тельность, не суммируемая этой матрицей.

Суммируя все сказанное, получим следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть A — нижняя треугольная, а B — нормальная матрица преобразования последовательности в последовательность.

Если матрица $AB^{-1} = (d_{nk})$ удовлетворяет двум условиям:

$$\sum_{k=0}^n |d_{nk}| \neq O(1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq n} |d_{nk}| = 0,$$

то матрицы A и B несравнены.

Метод взвешенных арифметических средних (R, p_n) в виде преобразования последовательности в последовательность определяется матрицей $R = (r_{nk})$, где

$$r_{nk} = p_n P_n^{-1} \quad (0 \leq k \leq n), \quad r_{nn} = 0 \quad (0 \leq n < k),$$

$P_n = \sum_{k=0}^n p_k$, $\{P_n\}$ — некоторая числовая последовательность.

Обратная матрица $R^{-1} = (\bar{r}_{nk})$ этого метода имеет элементы:

$$\bar{r}_{nk} = 0 \quad (0 \leq k < n-1, 0 \leq n < k), \quad \bar{r}_{n,n-1} = -p_n^{-1}, \quad \bar{r}_{nn} = 1,$$

$$\bar{r}_{nn} = p_n^{-1} P_n \quad (n \geq 0).$$

Следовательно, произведение произвольной нижней треугольной матрицы $A = (a_{nk})$ на матрицу R^{-1} будет являться нижней треугольной матрицей $AR^{-1} = (d_{nk})$, где

$$d_{nk} = \left(\frac{a_{nk}}{p_k} - \frac{a_{n,k+1}}{p_{k+1}} \right) P_k \quad (0 \leq k \leq n),$$

$$d_{nn} = 0 \quad (0 \leq n < k).$$

Поэтому из теоремы I следует справедливость утверждения.

Следствие 1. Если нижняя треугольная матрица $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию:

$$\sum_{k=0}^n P_k \left| \frac{a_{nk}}{p_k} - \frac{a_{n,k+1}}{p_{k+1}} \right| \neq O(1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq n} P_k \left| \frac{a_{nk}}{p_k} - \frac{a_{n,k+1}}{p_{k+1}} \right| = 0,$$

- 36 -

где $P_n = \sum_{k=0}^n p_k$, $p_n > 0$ ($n \geq 0$),

то метод, определяемый матрицей A , несравнен с методом (R, p_n).

Частными случаями этого следствия являются некоторые известные факты, касающиеся несравненности методов суммирования. Например, помохов

$$A = C_{\alpha} \quad (\alpha > 1) \quad \text{и} \quad p_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (n \geq 0)$$

можно показать, что дискретный логарифмический метод несравнен с методами Чезаро C_{α} при $\alpha > 1$.

Кроме того, если в условиях следствия I положить $p_n = 1$ ($n \geq 0$), то получим следующее утверждение.

Следствие 2. Если нижняя треугольная матрица (a_{nk}) преобразована последовательности в последовательность удовлетворяет условию:

$$\sum_{k=0}^{(n-1)} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \neq O(1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq n} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0,$$

то она несравнена с матрицей средних арифметических.

Литература

1. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: Физматиз, 1960. — 471 с.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: Изд-во иностран. лит., 1951. — 504 с.

УДК 517.919

В.А. Кушнер

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В литературе достаточно полно освещен вопрос о существовании и построении асимптотических решений систем линейных дифференциаль-

- 37 -