СОВРЕМЕННЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

НАУКОВА ДУМКА • 1989

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
Институт математики

СОВРЕМЕННЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Сборник научных трудов

Киев Наукова думка 1989

УДК 517.9

Современный анализ и его приложения: Сб.науч.тр. / АН УССР. Ин-т математики; Редкол.: Ю.А.Митропольский (отв. ред.). - Киев: Наук. думка, 1989. - 228 с. - ISBN 5-12-001183-7.

В сборнике содержатся статьи, посвященные современным вопросам функционального анализа, теории вероятностей, теории приближения функций, дифференциальным уравнениям, алгебре и др. В частности, рассматриваются оценка роста скорости сходимости в законах больших чисел для U-статистик, некоторые интегральные преобразования с функцией Макдональда в ядре, асимптотические оценки верхней грани уклонения квазигладких функций от их бигармонического интеграла Пуассона, вопросы равносильности методов суммирования Абеля и Вороного, тауберовы теоремы с остатком для абсолютного суммирования методом Абеля, существование обобщенных решений задачи Коши для вырождающихся уравнений типа колебания пластин, краевые задачи и другие вопросы современной математики.

Для научных работников, аспирантов и преподавателей вузов.

Ответственный редактор Ю.А.Митропольский

Утверждено к печати ученым советом
Института математики АН УССР

Редакция информационной литературы

Редакторы Ж.Е.Квятковская, Т.Л.Горовая,
В.С.Якубенко, Т.В.Пономарева

С $\frac{1602010000-414}{М221(04)-89}$

ISBN 5-12-001183-7

УДК 517.98

М.Б.Беккер

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ С НАПРАВЛЯЮЩИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Метод направляющих отображений (функционалов) был развит М.Г.Крейном для случая симметрических операторов в работе [1]. В [2] Ф.С.Рофе-Бекетов обобщил, по существу, результаты М.Г.Крейна на случай дифференциальных операторов со счетным числом направляющих функционалов, а в [3] Г.Лангер доказал соответствующие утверждения для симметрических операторов, обладающих направляющим отображением со значением в произвольном гильбертовом пространстве. Позже в работе [4] Г.Лангер и Б.Тексториус обобщил метод М.Г.Крейна на случай симметрических линейных отношений.

В настоящей работе рассматриваем изометрические операторы, обладающие направляющими отображениями. Оказывается, что и в этом случае справедливы соответствующие формулы (типа равенства Парсеваля или неравенства Бесселя), причем их доказательства буквально повторяют соответствующие доказательства для случая симметрических линейных отношений (операторов). С помощью преобразования Кэли устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами обладающих направляющими отображениями изометрических операторов и симметрических линейных отношений.

В качестве приложения рассматриваемого метода доказываем теорему об интегральном представлении положительно определенных операторозначных ядер некоторой специальной структуры, в частности обобщенных теплицевских ядер. Соответствующие теоремы для обобщенных теплицевских ядер рассматривались другими методами в работах М.Котляра, Р.Ароцены и др. (см. [5-7] и указанную там библиографию).

Приведем нужные нам определения.

Пусть V - изометрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\mathcal{D}(V)$ - область определения оператора V.

Но

$$[S^+(t)]^{-1}S^-(t)=H(t)=\frac{2}{r(t)\pm r_1(t)u(t)}\begin{Vmatrix} 0 & p(t)\\ q(t) & 0\end{Vmatrix}, \quad t\in\Gamma,$$

следовательно, $\Psi(z)$ - к.м.р. задачи Римана с подстановочной матрицей

$$P(t)=\begin{cases} G(t), & t\in L\\ H(t), & t\in\Gamma\end{cases}$$

в качестве коэффициента, заданной на контуре $L+\Gamma$. Такая к.м.р. (в заданном классе) была построена в работе [5], поэтому ее можно считать известной.

Тогда матрица $X(z)$ - ф.м.р. задачи (1). Действительно по построению $X(z)$ удовлетворяет краевому условию (1) и принадлежит заданному классу. Кроме того,

$$\det X(z)=\pm r_1(z)u(z)s(z)\det\Psi(z)\neq 0 .$$

2. $p(z)q(z)\equiv 0$. Этот случай интересен тем, что соответствующая ему преобразующая матрица является однозначной в плоскости и имеет вид

$$S(z)=\begin{Vmatrix} r(z) & p(z)\\ q(z) & r(z)\end{Vmatrix} .$$

Как и в первом случае, в силу принятых предположений, $\det S(z)=r^2(z)$ не имеет нулей на L. У матрицы $S(z)$ существует обратная. При этом имеет место равенство (2), причем $G_1^{(i)}(t)$ и $G_2^{(i)}(t)$ определяются по тем же формулам, что и раньше, где надо положить $u(t)\equiv 1$, $s(t)\equiv r_1(t)\equiv r(t)$.

Следовательно, если искать ф.м.р. $X(z)$ в том же виде, то придем к задаче отыскания к.м.р. $\Psi(z)$ задачи Римана с матрицей $G(t)$ в качестве коэффициента. Как уже отмечалось, $\Psi(z)$ можно считать известной. Тогда $X(z)=S(z)\Psi(z)$ удовлетворяет краевому условию (1), принадлежит заданному классу и

$$\det X(z)=r^2(z)\det\Psi(z)\neq 0 .$$

Это означает, что построена ф.м.р. задачи (1) для случая, когда $p(z)q(z)\equiv 0$.

Используя известный алгоритм [4], ф.м.р. всегда можно преобразовать в нормальную матрицу решений, а затем и в к.м.р. Зная последнюю, легко выписать все решения задачи (1).

Из всего сказанного выше заключаем, что предлагаемый метод может быть применен в тех случаях, когда определитель преобразования подобия $S(z)$, матрицы-коэффициента $F(t)$ нигде на L не об-

ращается в нуль, а само преобразование подобия $S(z)$ аналитически продолжимо на L, но не является аналитическим вне его, поскольку имеет некоторые линии особенностей Γ.

1. Черский Ю.И. О методе неполной факторизации // Докл. АН СССР.- 1969. - 189, № 1. - С. 53-56.
2. Черский Ю.И. Метод неполной факторизации // Тр. семинара по краевым задачам. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970, вып. 7.- С. 293-296.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 639 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 511 с.
5. Круглов В.Е. Частные индексы и одно приложение факторизации некоторых матриц подстановочного типа не выше четвертого порядка // Сиб.мат.журн. - 1983. - 24, № 2. - С. 200-201.

Получено 23.03.87

Одес.гос.ун-т

УДК 517.52

В.И.Кузьмич

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Р.АГНЬЮ О НЕЭФФЕКТИВНОСТИ НОРМАЛЬНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ

В данной работе получены различные достаточные условия неэффективности регулярного метода суммирования последовательностей, определяющегося нижней треугольной матрицей $A=(a_{nk})$.

Если $t_n=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}s_k\to s\ (n\to\infty)$, то последовательность $\{s_n\}$ суммируется матрицей A к числу s. Если из $s_n\to s$ всегда следует $t_n\to s$, то матрицу называют регулярной. Говорят, что регулярная матрица неэффективна, если она не суммирует ни одной расходящейся последовательности. В дальнейшем будем считать матрицу A нормальной, т.е. $a_{nn}\neq 0$ для $n=0,1,2,\dots$.

Наиболее известным условием неэффективности нормальной регулярной матрицы является условие Р.Агнью [1]:

$$\inf_n\left(|a_{nn}|-\sum_{k=0}^{n-1}|a_{nk}|\right)>0 . \qquad (1)$$

Необходимо отметить, что это условие не является необходимым для неэффективности нижней треугольной матрицы [2, 3]. В работе [4] условие (1) получено с помощью разложения обратной матрицы A^{-1} в ряд. Используя этот метод, можно получить и другие условия неэффективности.

Сначала докажем одну общую теорему. Для этого через $\|A\|$ обозначим норму матрицы A, т.е.

$$\|A\| = \sup_n \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| .$$

Отметим, что для регулярной матрицы A выполняется условие $\|A\|<\infty$.

Теорема 1. Пусть заданы нормальная регулярная матрица A и нормальные матрицы X и Y, такие, что $\|X^{-1}\|<\infty$ и $\|Y^{-1}\|<\infty$.

Если

$$\| X^{-1}(A - XY) Y^{-1} \| < 1, \tag{2}$$

то матрица A неэффективна.

Доказательство. Поскольку матрицы A, X, Y нормальные, то для них существуют единственные двухсторонние обратные матрицы A^{-1}, X^{-1}, Y^{-1} [5, с.31]. При выполнении условия (2) справедливо разложение

$$A^{-1} = (XY + A - XY)^{-1} = (X(E + X^{-1}(A - XY)Y^{-1})Y)^{-1} =$$
$$= Y^{-1}(E + X^{-1}(A - XY)Y^{-1})^{-1} X^{-1} =$$
$$= Y^{-1}(E - X^{-1}(A - XY)Y^{-1} + (X^{-1}(A - XY)Y^{-1})^2 - \dots) X^{-1},$$

где E – единичная матрица [5, разд. 2, § 4]. Поскольку $\|X^{-1}\|<\infty$, $\|Y^{-1}\|<\infty$, то при условии (2) из полученного разложения следует, что $\|A^{-1}\|<\infty$, а это является необходимым и достаточным условием неэффективности нормальной регулярной матрицы A [5, с.379, теорема 2.8]. Теорема доказана.

Из этой теоремы при различных способах выбора матриц X и Y можно получать различные достаточные условия неэффективности нормальной регулярной матрицы $A=(a_{nk})$. В частности, условие (1) получается из теоремы, если положить $Y=E$ и $X=D$, где $D=(d_{nk})$ – диагональная матрица, для которой $d_{nn} = a_{nn}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Если в условии теоремы положить $X=E$ и $Y=D$, то условия неэффективности примут вид

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_{nk}}{a_{kk}} \right| < 1, \quad \inf_n |a_{nn}| > 0, \tag{3}$$

поэтому справедливо

Следствие 1. Если нормальная регулярная матрица $A=(a_{nk})$ удовлетворяет условиям (3), то она неэффективна.

С помощью условий (3) можно, например, установить неэффективность нормальной регулярной матрицы $B=(b_{nk})$ с элементами

$$b_{2n,k}=0 \quad (0 \le k \le 2n-1); \quad b_{2n,2n}=1;$$
$$b_{2n+1,k}=0 \quad (0 \le k \le 2n-1); \quad b_{2n+1,2n}=b_{2n+1,2n+1}=\frac{1}{2};$$
$$b_{nk} = 0 \quad (n<k).$$

Условие (1) для этой матрицы не выполняется.

Следствие 2. Если нормальная регулярная матрица $A=(a_{nk})$ удовлетворяет двум условиям:

$$\sup_n \frac{1}{|a_{nn}|} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} \left| \frac{a_{n-j,\,n-j-1}}{a_{n-j-1,\,n-j-1}} \right| \right) = H < \infty ; \tag{4}$$

$$\sup_n \frac{1}{|a_{nn}|} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{j,j-1}}{a_{j-1,j-1}} \right| \sum_{k=0}^{i-2} |a_{ik}| + \sum_{k=0}^{n-2} |a_{nk}| \right) < 1, \tag{5}$$

то она неэффективна.

Доказательство. В условии теоремы 1 положим $Y=E$, $X=(x_{nk})$, где $x_{nn} = a_{nn}$; $x_{n+1,n} = a_{n+1,n}$; $x_{n+1,k} = 0$ при $k \ne n, n+1$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Тогда элементы обратной матрицы $X^{-1}=(\bar{x}_{nk})$ будут иметь вид

$$\bar{x}_{nk} = \frac{(-1)^{n-k}}{a_{nn}} \prod_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j,j-1}}{a_{j-1,j-1}} \quad (0 \le k \le n-1); \quad \bar{x}_{nn} = \frac{1}{a_{nn}} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Действительно, пусть $X^{-1}X=(b_{nk})$, тогда

$$b_{nk} = \sum_{i=k}^{n} \bar{x}_{ni} x_{ik} = \bar{x}_{nk} x_{kk} + \bar{x}_{n,k+1} x_{k+1,k} =$$
$$= (-1)^{n-k} \frac{a_{kk}}{a_{nn}} \prod_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j,j-1}}{a_{j-1,j-1}} + (-1)^{n-k-1} \frac{a_{k+1,k}}{a_{nn}} \prod_{j=k+2}^{n} \frac{a_{j,j-1}}{a_{j-1,j-1}} =$$
$$= (-1)^{n-k} \left(\prod_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j,j-1}}{a_{jj}} - \prod_{j=k+1}^{n} \frac{a_{j,j-1}}{a_{jj}} \right) = 0 \quad (0 \le k \le n-2);$$
$$b_{n,n-1} = - \frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1} a_{nn}} a_{n-1,n-1} + \frac{1}{a_{nn}} a_{n,n-1} = 0;$$
$$b_{nn} = \frac{1}{a_{nn}} a_{nn} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Следовательно, $X^{-1}X=E$ и матрица X^{-1} – обратная матрице X, а условие (4) обеспечивает выполнение условия $\|X^{-1}\|<\infty$. Обозначим $X^{-1}(A - X) = (c_{nk})$, тогда получим

$$c_{nk} = \sum_{i=k+2}^{n} \bar{x}_{ni} a_{ik} = \sum_{i=k+2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-i} a_{ik}}{a_{nn}} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{a_{j,j-1}}{a_{j-1,j-1}} + \frac{a_{nk}}{a_{kk}} \quad (0 \le k \le n-3);$$

$$c_{nn} = \frac{a_{n,n-2}}{a_{nn}}; \quad c_{nk} = 0 \quad (n<k+2).$$

Далее будем иметь

$$\| X^{-1}(A-X) \| = \sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |c_{nk}| =$$

$$= \sup_n \left(\sum_{k=0}^{n-3} \left(\sum_{i=k+2}^{n-1} \left| \frac{a_{ik}}{a_{nn}} \right| \prod_{j=j+1}^{n} \left| \frac{a_{j,j-1}}{a_{j-1,j-1}} \right| + \left| \frac{a_{nk}}{a_{nn}} \right| \right) + \left| \frac{a_{n,n-2}}{a_{nn}} \right| \right) =$$
$$= \sup_n \frac{1}{|a_{nn}|} \left(\sum_{i=2}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{j,j-1}}{a_{j-1,j-1}} \right| \sum_{k=0}^{i-2} |a_{ik}| + \sum_{k=0}^{n-2} |a_{nk}| \right),$$

и, следовательно, условие (5) обеспечивает выполнение условия (2) теоремы 1, поэтому матрица A неэффективна. Следствие 2 доказано.

Если в условии теоремы 1 положить $X=E$, $Y=(y_{nk})$, где $y_{nn} = a_{nn}$; $y_{n+1,n} = a_{n+1,n}$; $y_{n+1,k} = 0$ при $k \ne n$, $n+1$ $(n=0,1,2,\dots)$, то аналогично следствию 2 получим

Следствие 3. Если нормальная регулярная матрица $A=(a_{nk})$ удовлетворяет условию (4) и условию

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n-2} \left| \frac{a_{nk}}{a_{nn}} \right| \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{a_{k-j,\,k-j-1}}{a_{k-j-1,\,k-j-1}} \right| \right) < 1,$$

то она неэффективна.

Используя очевидные неравенства

$$\|X^{-1}(A-X)\| \le \|X^{-1}\| \cdot \|A - X\| \quad \text{и} \quad \|(A-Y)Y^{-1}\| \le \|A-Y\| \cdot \|Y^{-1}\|,$$

из следствия 2 и следствия 3 соответственно получаем

Следствие 4. Если нормальная регулярная матрица $A=(a_{nk})$ удовлетворяет условию (4) и условию

$$H \sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |a_{nk}| < 1, \tag{6}$$

то она неэффективна.

Условия следствий 2–4 являются более общими, чем условие (1). Действительно, если нормальная регулярная матрица $A=(a_{nk})$ удовлетворяет условию (1), то, приняв во внимание что $\|A\|<\infty$, получим:

$$\frac{\sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |a_{nk}|}{\inf_n (|a_{nn}| - |a_{n,n-1}|)} < 1 \quad \text{и} \quad \sup_n \left| \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} \right| < 1.$$

Далее, используя второе неравенство, имеем

$$H = \sup_n \frac{1}{|a_{nn}|} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} \left| \frac{a_{n-j,\,n-j-1}}{a_{n-j,\,n-j}} \right| \right) =$$
$$= \sup_n \left(\frac{1}{|a_{nn}|} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|a_{n-i,\,n-i}|} \prod_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_{n-j,\,n-j-1}}{a_{n-j,\,n-j}} \right| \right) \le$$
$$\le \frac{1}{\inf_n |a_{nn}| \inf_n \left(1 - \left| \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} \right| \right)} = \frac{1}{\inf_n (|a_{nn}| - |a_{n,n-1}|)} < \infty.$$

Следовательно, выполняется условие (4). Теперь из полученных неравенств следует

$$H \sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |a_{nk}| \le \frac{\sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |a_{nk}|}{\inf_n (|a_{nn}| - |a_{n,n-1}|)} < 1,$$

значит выполнено и условие (6) следствия 4. При этом легко убедиться, что нормальная регулярная матрица B, рассмотренная выше, удовлетворяет условиям следствия 4.

1. Agnew R. Equivalence of methods for evaluation of sequences // Proc. Amer. Math. Soc. - 1952. - N 3. - C. 550-557.
2. Давыдов Н.А. Обобщение теоремы Мерсера // Успехи мат. наук. - 1965. - 20, вып. 6(126). - С. 72-77.
3. Давыдов Н.А. О неэффективности регулярных матриц // Там же. - С. 78-80.
4. Мельник В.И. Обращение бесконечных матриц и неэффективность матричных методов суммирования // Укр.мат.журн. - 1976. - 28, № 1. - С. 36-42.
5. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.- М. : Физматгиз, 1960. - 471 с.

Херсон. пед.ин-т Получено 10.04.87

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ

Задача Коши для эволюционных уравнений, вырождающихся на плоскости задания начальных данных рассматривалась многими авторами. Укажем лишь некоторые работы [1]-[8], посвященные изучению задачи Коши для вырождающихся линейных гиперболических уравнений второго порядка, имеющих наиболее близкое отношение к задаче, предложенной в данной статье.

Рассмотрим задачу

$$(\rho(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x,t) D_x^\beta u) +$$
$$+ \sum_{|\alpha| \le 2} b_\alpha(x,t) D_x^\alpha u + \sum_{|\alpha| \le 1} (c_\alpha(x,t) D_x^\alpha u)_t = f(x,t); \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

в области $Q_T = \{ x \in \mathbb{R}^n, 0<t<T \}$. Здесь

$$D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n .$$