О.Г. Савченко
Н.В. Валько
Л.В. Кузьмич

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

Херсонський державний аграрний університет

О.Г. Савченко
Н.В. Валько
Л.В. Кузьмич

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

Херсон 2011

УДК: 33:519.86
ББК: 65В631

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Херсонського державного аграрного університету (ХДАУ) протокол № 7 від 23 березня 2010 р.

Рецензенти:

Співаковський О.В. - доктор педагогічних наук, професор, завідуючий кафедрою інформатики, проректор з науково-педагогічної роботи, міжнародних зв'язків та інформаційних технологій Херсонського державного університету.

Плоткін С.Я. - кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та економічної кібернетики Херсонського державного аграрного університету.

Економіко-математичне моделювання: [навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни] / Савченко О.Г., Валько Н.В., Кузьмич Л.В. – Херсон, РВЦ «Колос» ХДАУ, 2011. – 179 с.

Навчально-методичний посібник відповідає обсягу знань з економіко-математичного моделювання, якими студенти мають оволодіти, щоб здобути ступінь бакалавра з економіки. Посібник містить стислий виклад текстів лекцій у вигляді теоретичних відомостей, методичні вказівки до розв’язування типових задач, навчальні завдання та завдання для перевірки знань з кожної теми. Вони охоплюють майже всі теми, що вивчаються в кожному розділі, і дають можливість студентам самостійно вивчити матеріал і перевірити як теоретичні знання, так і відповідні навички.

ЗМІСТ

Вступ

В системі економічної освіти значна роль відведена курсу економіко-математичного моделювання з циклу економіко-математичної та загальноекономічної бакалаврської підготовки фахівців за напрямами з економіки і підприємництва, обліку і аудиту, менеджменту. Багато економічних проблем, наприклад, оптимізації, внутрішнього зв’язку прогнозів, вибору найефективніших інвестиційних рішень і т.п. можна розв’язати за допомогою математичних методів.

Даний навчально-методичний посібник містить стислий опис основних понять, методичні поради щодо розв’язування типових задач, набір навчальних задач і задач для перевірки знань, наведені питання для самоперевірки знань. Окремо подаються завдання для блочно-модульного контролю у вигляді індивідуальних завдань з курсу „Економіко-математичне моделювання”.

У навчально-методичному посібнику розглядаються питання, які традиційно входять у курс „Економіко-математичне моделювання" такі, як основи теорії лінійного та цілочислового програмування, методи розв’язування спеціальних задач лінійного програмування.. Розв’язування задач практичної тематики підготує студентів до вивчення економіко-математичного моделювання виробничих систем у господарстві.

Навчально-методичний посібник розрахований для самостійної роботи студентів бакалаврського рівня підготовки економічного факультету: для самостійного вивчення студентами матеріалу курсу, перевірки як теоретичних знань, так і відповідних навичок з дисципліни „Економіко-математичне моделювання”. Посібник також має на меті закріплення теоретичних знань, отриманих з курсу лекцій, оволодіння основними практичними завданнями та контроль отриманих знань.

Розділ I

Тема 1. Побудова математичної моделі задачі лінійного програмування

Побудова математичних моделей задач лінійного програмування шляхом дослідження постановки задачі з метою виділення змінних, аналізу обмежень, яким повинні задовольняти змінні, і побудови цільової функції.

1.1. Теоретичні відомості

Розв'язування задач планування господарства, підвищення ефективності виробництва, економії ресурсів, покращення методів економічних розрахунків та їх обґрунтування дають можливість вивчати закономірності ринкової економіки, розробляти нові методи економічних розрахунків і аналізу, методів планування. Значну роль тут відіграє використання сучасних інформаційних технологій.

В основі економіко-математичних досліджень лежить ***математичне моделювання*** економічного процесу, що вивчається, тобто описання кількісних закономірностей цих процесів за допомогою математичних виразів. Математична модель є абстрактним відображенням реального процесу, що з більшою чи меншою точністю характеризує його.

В залежності від ознак математичні моделі класифікуються на:

1) лінійні і нелінійні;
2) динамічні і статичні;
3) стохастичні (імовірнісні) і детерміновані (регулярні);
4) неперервні і дискретні.

За наявністю зворотних зв'язків моделі поділяються на відкриті, закриті і комбіновані. Є й інші класифікації: в залежності від характеру властивостей, що відображаються (структурні, функціональні), від способу представлення властивостей об'єктів (аналітичні, алгоритмічні, імітаційні), від способу отримання моделі (теоретичні, емпіричні), особливостей поведінки об'єкта (імовірнісні і детерміновані) тощо.

До математичних моделей висуваються вимоги універсальності, точності, адекватності, економічності та інші.

Серед різних математичних моделей економічних процесів особливе місце займають так звані ***лінійні моделі,*** тобто моделі, в яких математичні залежності (рівняння, нерівності) лінійні відносно всіх змінних величин, які включені у модель. Основою для розробки лінійних математичних методів дослідження операцій служить математичне програмування. Після глибоких розробок, практичної реалізації і критичного аналізу результатів застосування методів лінійного програмування це привело до значних успіхів у розв'язуванні широкого кола задач, які відносяться до таких сфер, як промислове виробництво, військова справа, сільське господарство, економічні дослідження, транспорт і ін.

Процес побудови математичної моделі для поставленої задачі відбувається за наступним ***алгоритмом***:

1. Складання математичної моделі. Змінні (шукані величини) даної задачі.

2. Складання обмежень, які повинні бути накладені на змінні, щоб виконати умови, що характерні для системи, яка моделюється.

3. Встановлення мети (цілі), для досягнення якої з усіх допустимих значень змінних вибирають ті, які будуть відповідати оптимальному розв'язку задачі. Це кількісний критерій, який називають показником ефективності операції, – цільова функція, оптимальне (максимальне або мінімальне) значення якої необхідно знайти.

Сам процес математичного моделювання можна поділити на чотири основних етапи:

I етап: Формулювання законів, що пов'язують основні проекти моделі, тобто запис у вигляді математичних термінів сформульованих якісних уявлень про зв'язки між проектами моделі.

II етап: Дослідження математичних задач, до яких приводять математичні моделі.

Основне питання – розв'язування прямої задачі, тобто отримання в результаті аналізу моделі вихідних даних (теоретичних наслідків) для подальшого їх співставлення з результатами спостережень явищ, що вивчаються.

III етап: Коректування прийнятої гіпотетичної моделі згідно критерію практики, тобто вияснення питання про те, чи узгоджуються результати спостережень з теоретичними наслідками моделі в межах точності спостережень.

Якщо модель була цілком визначена - всі параметри її були дані, - то визначення відхилень теоретичних наслідків від спостережень дає розв'язок прямої задачі з наступною оцінкою відхилень.

Якщо відхилення виходять за межі точності спостережень, то модель не може бути прийнята. Часто при побудові моделі деякі її характеристики залишаються не визначеними.

Застосування критерію практики до оцінки математичної моделі дозволяє робити висновок про правильність положень, що лежать в основі (гіпотетичної) моделі, яку належить вивчити.

IV етап: Наступний аналіз моделі в зв'язку з накопиченням даних про вивчені явища і модернізація моделі.

1.2. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Задача. Фабрика виготовляє 2 види фарб: для внутрішніх (I) і зовнішніх (E) робіт. Продукція обох видів поступає в оптовий продаж. Для виробництва фарб використовуються 2 вихідних продукти - А та В. Максимально можливі добові запаси цих продуктів складають 6 і 8 тонн відповідно. Витрати А і В на 1 тонну відповідних фарб наведені в таблиці 1.1.

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу I ніколи не перевищує попиту на фарбу E більше ніж на 1 тонну. Крім того, установлено, що попит на фарбу I ніколи не перевищує 2 т на добу. Оптові ціни 1 т фарб складають:

Таблиця 1.1

Вихідний продукт	Витрати вихідних продуктів (т) на тонну фарби		Максимально можливий запас, т
	Фарба E	Фарба I	
A	1	2	6
B	2	1	8

- фарба E - 3000 одиниць,
- фарба I - 2000 одиниць.

Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб дохід (прибуток) від реалізації продукції був максимальним?

Розв’язання.

Змінні: Оскільки необхідно визначити об’єми виробництва кожного виду фарби, змінними моделі є:

x_e — добовий об’єм виробництва фарби E (т)

x_i — добовий об’єм виробництва фарби I (т).

Цільова функція: Так як вартість 1т фарби E становить 3000, то добовий дохід від її реалізації складе:

$3x_e$ одиниць на добу.

Аналогічно, дохід від реалізації X_i тонн фарби I складе:

$2x_i$ одиниць на добу.

При припущенні незалежності об’ємів збуту кожної із фарб загальний дохід складе:

$$Z = 3x_e + 2x_i \text{ одиниць на добу.}$$

Таким чином, можна дати наступне математичне формулювання цільової функції: визначити такі значення x_e і x_i, щоб отримати максимальну величину загального доходу.

Обмеження: При розв’язуванні задачі, що розглядається, повинні бути враховані обмеження на витрати вихідних продуктів і попит на фарби, що виготовляються. Обмеження на витрати вихідних продуктів можна записати наступним чином:

$$x_e + 2x_i \le 6, \qquad \text{(для А)},$$

$$2x_e + x_i \le 8 \qquad \text{(для В)}.$$

Обмеження на величину попиту на продукцію має вид:

$$x_i - x_e \le 1,$$

$$x_i \le 2.$$

Неявні (додаткові) обмеження заключаються в тому, що об'єми виробництва продукції не можуть набувати від'ємних значень:

$$x_i \ge 0, \qquad x_e \ge 0.$$

Отже, математичну модель можна записати наступним чином:
Визначити добові об'єми виробництва (x_i та x_e) фарб I та E (т), при яких досягається: мах Z= $3x_e + 2x_i$

при обмеженнях

$$x_e + 2x_i \le 6,$$
$$2x_e + x_i \le 8,$$
$$x_e + x_i \le 1,$$
$$x_i \le 2,$$
$$x_e \ge 0,$$
$$x_i \ge 0.$$

1. 3. Питання для самоперевірки

1. Що таке математична модель? Наведіть види класифікацій математичних моделей, дайте їх коротку характеристику.
2. В чому заключаються етапи побудови математичної моделі?
3. Скільки прийнято форм представлення математичної моделі задачі лінійного програмування? Чим вони відрізняються?
4. Що називається цільовою функцією і що вона виражає економічно?

1. 4. Ключові поняття

Екстремальне значення — Математична модель
Задача лінійного програмування (ЗЛП) — Оптимальний розв'язок ЗЛП
Критерій оптимальності — Цільова функція ЗЛП

1.5. Навчальні завдання

В задачах №№ 1.1 – 1.4 скласти економіко-математичні моделі.

№ 1.1. Для виробництва двох видів виробів А та В підприємство використовує три види сировини. Інші дані наведено в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Вид сировини	Витрати на 1 ц		Загальна кількість сировини, кг
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одиниці виробу, г. о.	30	410	-

Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальний при умові, що виробів В потрібно випустити не менше, ніж виробів А.

№ 1.2. Раціон для харчування тварин на фермі складається з двох видів кормів I та II. Один кілограм корму I коштує 80 грош. од. і містить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кілограм корму II коштує 10 грош. од. і містить 3 од. жирів, 1 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів. Скласти найбільш дешевий раціон харчування, що забезпечує жирів не менше 6 од., білків не менше 9 од., вуглеводів не менше 8 од., нітратів не більше 16 од.

№ 1.3. Необхідно розпиляти 20 колод довжиною по 5 м кожна на бруски 2 і 3 м; при цьому повинна отриматись рівна кількість брусків кожного розміру. Скласти такий план розпилу, при якому буде отримане максимальне число комплектів і всі колоди будуть розпиляні (в один комплект входить по одному бруску кожного розміру).

№ 1.4. На двох автоматичних лініях випускають апарати трьох типів. Інші умови задачі наведені в таблиці 1.3. Скласти такий план завантаження верстатів, щоб витрати були мінімальними, а завдання виконане не більше як за 10 діб.

Таблиця 1.3.

Тип апарату	Продуктивність праці ліній, шт. / добу		Витрати на роботу ліній, гр. од. / добу		План, шт.
	1	2	1	2	
А	4	3	400	300	50
В	6	5	100	200	40
З	8	2	300	400	50

1.5. Завдання для перевірки знань

Скласти математичну модель задачі.

№ 1.5. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виробництво одного вала робітник витрачає 3 год., однієї втулки – 2 год. Від реалізації одного вала підприємство одержує прибуток 800 тис. ум. гр. од., однієї втулки – 600 тис. ум. гр. од. Цех має випускати не менше 100 валів і 200 втулок. Скільки валів і втулок треба випустити, щоб одержати найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу цеху становить 900 людино-годин?

№ 1.6. Будівельна дільниця кар’єру має екскаватори чотирьох типів, які повинні виконувати чотири види земляних робіт. Продуктивність машин різного типу за кожним видом роботи наведено в таблиці 1.4. Розподілити екскаватори за видами робіт, забезпечивши максимальну продуктивність будівельної дільниці.

№ 1.7. Для виготовлення столів і шаф на підприємстві використовують два види деревини. Витрати сировини кожного виду (в м^3) на виготовлення кожного виду продукції та інші дані наведено в таблиці 1.5. Скільки столів і скільки шаф має виготовити підприємство щоб забезпечити найвищу рентабельність?

Таблиця 1.4

Тип екскаватора	Вид робіт			
	1	2	3	4
1	1,2	0,9	1,0	1,4
2	0,6	0,8	0,2	1,0
3	1,0	0,6	0,6	1,2
4	0,5	0,6	0,1	0,7

Таблиця 1.5

Вид сировини	Витрати на 1 виріб		Загальна кількість сировини, м^3
	стіл	шафа	
I	0,3	0,12	84
II	0,1	0,2	88
Прибуток від реалізації одиниці виробу, г. о.	12	15	-

№ 1.8. Для відгодівлі тварин на фермі щоденний раціон кожної тварини включає не менше 6 одиниць поживної речовини А, 8 одиниць поживної речовини Б і 12 одиниць поживної речовини В. Для відгодівлі можна використовувати три види кормів. Дані про вміст поживних речовин в одному кілограмі корму та вартість 1 кг корму наведені в таблиці 1.6:

Таблиця 1.6

Поживні речовини Корм	А	Б	В
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2
Вартість 1 кг корму, г. о.	2	3	2,5

Тема 2. Застосування систем рівнянь до аналізу моделі Леонтьєва „витрати - випуск”. Матрична модель міжгалузевого балансу господарства.

Застосування матричної алгебри в економічних розрахунках, ілюстрування на прикладі балансових розрахунків застосування понять лінійної алгебри.

2.1. Теоретичні відомості

Розглянемо найпростішу модель „витрати - випуск” – замкнену і статичну, тобто економічну систему, що складається з n взаємопов’язаних галузей господарства. Продукція кожної галузі частково йде на зовнішнє споживання (кінцевий продукт), а частково використовується як сировина, напівфабрикати або інших засобів виробництва в інших галузях, зокрема і в даній. Цю частину продукції називають *виробничим споживанням*. Тому кожна з розглядуваних галузей є одночасно і виробником продукції (1-й стовпчик таблиці 2.1), та її споживачем (1-й рядок таблиці 2.1).

Таблиця 2.1

№ галузей		Споживання						Всього на внутрівиробниче споживання ($\sum_i x_{ik}$)	Кінцевий продукт (y_i) (товарна продукція)	Валовий випуск (x_i)
		1	2	...	k	…	n			
Виробництво	1	x_{11}	x_{12}		x_{1k}		x_{1n}	$\sum x_{1k}$	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}		x_{2k}		x_{2n}	$\sum x_{2k}$	y_2	x_2
	...	**...**	**...**	**...**	**I** квадрант	**..**	**...**	**II** квадрант	**...**	**...**
	i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ik}		x_{in}	$\sum x_{ik}$	y_i	x_i
	...	**...**	**...**	**..**	**...**	**.**	**...**	**...**	**...**	**...**
	n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nk}		x_{nn}	$\sum x_{in}$	y_n	x_n
Дохід		Q_1	Q_2	**...**	**III** квадрант	**..**	Q_n	**IY** квадрант		
Всього виробни-чих витрат у k-ту галузь		$\sum x_{i1}$	$\sum x_{i2}$	**...**	$\sum x_{ik}$		$\sum x_{in}$			

Позначимо через x_i валовий випуск продукції *i*-ї галузі за запланований період, y_i - кінцевий продукт, що йде на зовнішнє для розглядуваної системи споживання (засоби виробництва інших економічних систем, споживання населення, створення запасів тощо). Тоді різниця $x_i - y_i$ складає частину продукції *i*-ї галузі, що призначена для внутрівиробничого споживання. Надалі будемо вважати, що баланс складається не у натуральному, а у вартісному розрізі.

За характером показників модель міжгалузевого балансу умовно можна поділити на 4 квадранти. Основним є квадрант І. В ньому містяться міжгалузеві потоки засобів виробництва. За формою це квадратна матриця порядку *n* x *n*, сума елементів якої за рядками або стовпчиками дорівнює витратам засобів виробництва у матеріальній сфері. Квадрант ІІ (товарна продукція) характеризує кінцеву продукцію, що спрямовується із сфери виробництва на кінцеве споживання і нагромадження. У розгорнутій схемі балансу вона може конкретизуватися на особисте споживання населення, суспільне (освіта, наука, комунальне господарство, медицина тощо), на інвестиції, експорт і т.п. Отже, квадрант ІІ характеризує галузеву структуру національного доходу. Квадрант ІІІ також характеризує національний дохід, але з боку його вартісного складу, який можна поділити окремо на галузі матеріального виробництва. ІY квадрант відображає кінцевий розподіл і споживання національного доходу.

Позначимо через x_{ik} частину продукції *i*-ї галузі, яка споживається *k*-

ю галуззю, для забезпечення випуску її продукції в розмірі x_k. Очевидно, що величини, які розташовані у рядках таблиці, пов'язані наступними балансовими рівностями (їх можна записати як у натуральному, так і у вартісному вигляді):

$$\begin{cases} x_1 - (x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n}) = y_1 \\ x_2 - (x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n}) = y_2 \\ .... \\ .x_n - (x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn}) = y_n \end{cases} \quad (2.1).$$

Одна із задач балансових досліджень полягає в тому, щоб на базі даних про виконання балансу за попередній період визначити вихідні дані на плановий період.

Позначимо через x_{ik}', y_i' і т.д. дані, що відносяться до попереднього періоду, а x_{ik}, y_i - аналогічні дані для планового періоду. Балансові рівності (2.1) повинні виконуватися як у пройденому, так і у плановому періоді.

Сукупність значень y_1, y_2, ..., y_n, яка характеризує випуск кінцевого продукту, назвемо *асортиментним вектором*

$$\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \quad (2.2),$$

а сукупність значень x_1, x_2, ..., x_n, які визначають валовий випуск всіх галузей, - *вектор-планом*

$$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad (2.3).$$

Залежність між векторами (2.2) і (2.3) визначається балансовими рівностями (2.1). Але вони не дають можливості визначити за даним, наприклад, вектором $\overline{Y}$ необхідний для його забезпечення вектор-план $\overline{X}$, бо, крім шуканих невідомих x_k, містять n^2 невідомих x_{ik}, які в свою чергу залежать від x_k. Тому перетворимо ці рівності.

Розрахуємо величини $a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k}$ $(i, k = 1,2,....n)$ – *коефіцієнти прямих витрат*, або *технологічні коефіцієнти,* які визначають витрати продукції *i*-ї галузі, що використовуються *k*-ю галуззю на виготовлення одиниці її продукції, і залежать головне від технології виробництва в цій *k*-й галузі. Їх можна наближено вважати сталими в деякому проміжку часу, який охоплює як попередній, так і плановий період, тобто

$$\frac{x_{ik}'}{x_k'} = \frac{x_{ik}}{x_k} = a_{ik} = const \quad (2.4).$$

Тоді маємо: $$x_{ik} = a_{ik} x_k \quad (2.5),$$

тобто витрати *i*-ї галузі в *k*-у галузь пропорційні її валовому випуску, або, інакше, залежать лінійно від валового випуску x_k. Тому рівність (2.5) називають умовою *лінійності* прямих витрат.

Матрицю коефіцієнтів прямих витрат a_{ik} ($a_{ik} \geq 0$), яка є невід'ємною ($A \geq 0$),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називають *матрицею витрат* (або *структурною*, *технологічною* матрицею).

Заданням матриці А визначаються всі внутрішні взаємозв'язки між виробництвом і споживанням, що записані у вищенаведеній таблиці. Матриця А надає також інформацію про величину зміни у рівнях валового випуску, спричинених змінами рівнів кінцевої продукції. Деякі її елементи можуть бути нулями. У деяких випадках наявність нулів у матриці А дозволяє розбити економічну систему на підгрупи галузей, в яких виробництво може здійснюватися більш або менш незалежно.

Підставляючи значення $x_{ik} = a_{ik} x_k$ (5) в усі рівняння системи (2.1), отримаємо *лінійну балансову модель*, що характеризує баланс витрат-випуску продукції відповідно до таблиці:

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_n) = y_1 \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ .x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) = y_n \end{cases} \qquad (2.6).$$

Систему (6) можна записати як матричне рівняння $E \cdot \overline{X} - A \cdot \overline{X} = \overline{Y}$, або

$$(E - A) \cdot \overline{X} = \overline{Y} \qquad (2.6'),$$

або $$\overline{X} = A\overline{X} + \overline{Y}, \qquad (2.6''),$$

де Е – одинична матриця.

Матриця А називається ***продуктивною (цілком продуктивною)***, якщо матриця $(E - A)^{-1}$ не має від'ємних елементів, де Е – одинична матриця. Для того щоб модель була продуктивна, необхідно і достатньо, щоб ***власне число*** $\lambda(A) < 1$, де λ - ***невід'ємний*** корінь характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$. На практиці використовують також просту достатню умову продуктивності моделі: $\Sigma a_{ij} < 1$ для будь-якого i, j.

Розв'язувати балансові рівняння можна і ***за допомогою обернених матриць.*** Будемо вважати, що технологічні коефіцієнти a_{ik} задано наперед. Модель (2.6) дозволяє за умов, коли задано вектор Y, визначити:

а) розміри відповідних значень вектора валового продукту X= $(E - A)^{-1}$Y= $B^{-1}Y$;

б) виробничу собівартість випуску кожного виду продукції $S_i = \frac{\sum B_{iij}}{\Delta B}$, де B_{ij} - алгебраїчні доповнення до елементів матриці $B^{-1}=(E-A)^{-1}$, $\Delta B = \det B$ - визначник (детермінант) матриці B^{-1},

в) матрицю повних (внутрівиробничих) витрат $(E-A)^{-1}$; ця матриця надає інформацію про те, яким способом вектор зовнішнього кінцевого попиту $\overline{Y}$ перераховується на вектор валового випуску $\overline{X}$;

г) виробничу програму кожного із підприємств (галузей) за умовою (2.5) $x_{ik} = a_{ik}x_k$;

д) коефіцієнти непрямих витрат як різницю (в матричній формі) $(E-A)^{-1} - A$;

е) дослідити на продуктивність матрицю А.

2.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Нехай виконання балансу за попередній період характеризується даними, що занесені в наступну таблицю 2.2. Розрахувати за даними цієї таблиці коефіцієнти прямих витрат.

Розв'язання.

Розрахуємо за даними цієї таблиці коефіцієнти прямих витрат:

Таблиця 2.2

№ галузей		Споживання 1	Споживання 2	Всього витрат	Кінцевий продукт	Валовий випуск
виробництво	1	0,2 100	0,4 160	260	240	500
	2	0,55 275	0,1 40	315	85	400
Всього витрат в *k*-у галузь		375	200	575 575		

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0{,}2;\ a_{12} = \frac{160}{400} = 0{,}4;\ a_{21} = \frac{275}{500} = 0{,}55;\ a_{22} = \frac{40}{400} = 0{,}1.$$

Ці коефіцієнти записані в правих верхніх кутах відповідних кліток. Тепер можна записати лінійну балансову модель (2.6), що відповідає таблиці-умові:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 = y_1 \\ x_2 - 0{,}55x_1 - 0{,}1x_2 = y_2 \end{cases}.$$

Ця система двох рівнянь може бути використана для знаходження x_1 та x_2 при даних значеннях y_1 та y_2, для дослідження впливу на валовий випуск будь-яких змін в асортименті кінцевого продукту і т.д.

Так, при $y_1 = 240$ та $y_2 = 85$ маємо $x_1 = 500$ та $x_2 = 400$; при $y_1 = 480$, $y_2 = 170$ отримаємо $x_1 = 1000$, $x_2 = 800$ і т.д.

Задача 2. Побудувати матричну модель тригалузевої виробничої системи, якщо задано матрицю прямих матеріальних витрат А і кінцеву продукцію Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}; \ \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Додатково припустимо, що дохід поділяється на чистий прибуток *u* і оплату праці *v* у співвідношенні 3:2.

Розв'язання. Перевіримо модель на продуктивність, оскільки вихідний матеріал береться зі звітів, є наближеним або навіть має випадковий характер. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 0.1-\lambda & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2-\lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^3 - 0.4\lambda^2 - 0.04\lambda - 0.018 = 0, \ \lambda = 0.6.$$

отже, модель є продуктивною.

Для заповнення таблиці міжгалузевого балансу послідовно виконуємо такі обчислення:

А) складемо систему рівнянь (2.6'') для визначення валових випусків x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.3x_3 + 120 = x_1, \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 180 = x_2, \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 50 = x_3. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 0.9x_1 - 0.3x_3 = 120, \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - 0.1x_3 = 180, \\ -0.2x_1 - 0.3x_2 + 0.9x_3 = 50. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь за методом Жордана – Гаусса, отримаємо: $x_1 = 200, x_2 = 300, x_3 = 200$.

Б) за формулою (2.5) $x_{ik} = a_{ik}x_k$ обчислюємо міжгалузеві потоки:

$$x_{11} = 0.1*200 = 20, \ x_{12} = 0*300 = 0, \quad x_{13} = 0.3*200 = 60,$$
$$x_{21} = 0.2*200 = 40, \ x_{22} = 0.2*300 = 60, \quad x_{23} = 0.1*200 = 20,$$
$$x_{31} = 0.2*200 = 40, \ x_{32} = 0.3*300 = 90, \quad x_{33} = 0.1*200 = 20.$$

Ці дані занесемо у квадрант І матричної моделі (таблиця 2.3).

Таблиця 2.3

Виробничі галузі	1	2	3	Кінцева продукція	Валова продукція
1	20	0	60	120	200
2	40	60	20	180	300
3	40	90	20	50	200
Оплата праці	40	60	40	$\sum v_i = 140$	-
Чистий дохід	60	90	60	$\Sigma u_i = 210$	-
Валова	200	300	200	-	700

продукція					

В) обчислимо величини, що входять у III квадрант, для чого використаємо співвідношення між *u* та *v*. Так як $u_1 + v_1 = 200 - (20 + 40 + 40) = 100$ і $u : v = 3 : 2$,
то на одну частину доходу припадає 100 / 5 = 20 одиниць, отже,

$$u_1 = 3 * 20 = 60 \text{ од.}, \; v_1 = 2 * 20 = 40 \text{ од.}$$

Аналогічно $u_2 + v_2 = 300 - (0 + 60 + 90) = 150$,
$u_2 = 3 * 30 = 90 \text{ од.}, \; v_1 = 2 * 30 = 60 \text{ од.}$, $u_3 + v_3 = 200 - (60 + 20 + 20) = 100$,
$u_3 = 3 * 20 = 60 \text{ од.}, \; v_3 = 2 * 20 = 40 \text{ од.}$

Примітка. За допомогою моделі Леонтьєва можна розрахувати умовні ціни (вартості), які склалися в результаті міжгалузевих зв'язків. Формально система рівнянь має вигляд

$$EZ - A^* \cdot Z = W, \tag{2.6*}$$

де A^* - матриця, що транспонована до А. У розгорнутому вигляді система (2.6*) запишеться так: $z_i - \Sigma a_{ij} z_i = w_j, \; j = 1, ..., n.$ Величину $z_i - \Sigma a_{ij} z_i$ можна інтерпретувати як суму деяких витрат на одиницю продукції, а праву частину w_j - як чистий прибуток від випуску одиниці продукції j-ї галузі або добавлену вартість, що припадає на одиницю продукції j-ї галузі. Тому z_j можна інтерпретувати як ціну одиниці продукції j-ї галузі. Чистий прибуток w_j можна обчислити як результат ділення чистого прибутку галузі на її обсяг: $w_j = \dfrac{Q_j}{X_j}$.

У даній задачі $w_1 = \dfrac{40 + 60}{200} = 0.5$, $w_2 = \dfrac{60 + 90}{300} = 0.5$, $w_3 = \dfrac{40 + 60}{200} = 0.5$.

Система рівнянь для розрахунків міжгалузевих цін матиме вигляд:

$$\begin{cases} z_1 - (0.1z_1 + 0.1z_2 + 0.2z_3) = 0.5, \\ z_2 - (0.2z_1 + 0.3z_3) = 0.5, \\ z_3 - (0.3z_1 + 0.1z_2 + 0.1z_3) = 0.5, \end{cases}$$

звідки отримаємо міжгалузеві ціни: для I галузі – 0,36, для II – 0,4, для III – 0,4.

Відзначимо, що систему рівнянь можна розв'язати й за допомогою комп'ютера.

Приклад 3. Нехай матриця А має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{вектор } Y = (17;7;5;12).$$

Знайти: а) матрицю повних витрат $(E - A)^{-1}$; б) вектор валового випуску X; в) виробничу собівартість S_1, S_2 , S_3 , S_4 кожного виду продукції.

Розв'язання. **1)** Знайдемо матрицю

$$B^{-1} = (E-A)^{-1} = \frac{1}{\Delta B}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\Delta B = 1\cdot B_{11} + (-0.2)\cdot B_{12} + (-0.3)\cdot B_{13} + (-0.1)\cdot B_{14}.$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.896; \quad B_{12} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.324;$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} -0.3 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & 1 \end{vmatrix} = 0.276; \quad B_{14} = -\begin{vmatrix} -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 1 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.446;$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.304; \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.864;$$

$$B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & 1 \end{vmatrix} = 0.345; \quad B_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 1 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.277;$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ 1 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.362; \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.2 & 1 \end{vmatrix} = 0.288;$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.1 & 1 \end{vmatrix} = 0.897; \quad B_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.4 & -0.1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.353;$$

$$B_{41} = -\begin{vmatrix} -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ 1 & -0.2 & 0 \\ -0.3 & 1 & -0.21 \end{vmatrix} = 0.162; \quad B_{42} = \begin{vmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.09;$$

$$B_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.207; \quad B_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.3 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & -0.3 & 1 \end{vmatrix} = 0.819;$$

$$\Delta B = 1\cdot 0.896 - 0.2\cdot 0.324 - 0.3\cdot 0.276 - 0.1\cdot 0.446 = 0.7038;$$

$$B^{-1} = (E-A)^{-1} = \frac{1}{0.7038}\begin{pmatrix} 0.896 & 0.304 & 0.362 & 0.162 \\ 0.324 & 0.864 & 0.288 & 0.09 \\ 0.276 & 0.345 & 0.897 & 0.207 \\ 0.446 & 0.277 & 0.353 & 0.819 \end{pmatrix}.$$

2) Вектор валового випуску

$$X = (E-A)^{-1}Y = \frac{1}{0.7038}\begin{pmatrix} 0.896 & 0.304 & 0.362 & 0.162 \\ 0.324 & 0.864 & 0.288 & 0.09 \\ 0.276 & 0.345 & 0.897 & 0.207 \\ 0.446 & 0.277 & 0.353 & 0.819 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix};$$

3) Знайдемо виробничу собівартість $S_i = \frac{\sum B_{ij}}{\Delta B}$:

$$S_1 = \frac{B_{11}+B_{12}+B_{13}+B_{14}}{\Delta B} = 2.76; \qquad S_2 = \frac{B_{21}+B_{22}+B_{23}+B_{24}}{\Delta B} = 2.54;$$

$$S_3 = \frac{B_{31}+B_{32}+B_{33}+B_{34}}{\Delta B} = 2.70; \qquad S_4 = \frac{B_{41}+B_{42}+B_{43}+B_{44}}{\Delta B} = 1.82.$$

2. 3. Питання для самоперевірки

1. Поясніть схему балансу витрат-випуску продукції.
2. Що таке прямі витрати, асортиментний вектор, вектор-план?
3. Чим визначається лінійність балансової моделі?
4. Запишіть систему рівнянь, яка характеризує лінійну балансову модель. В розгорнутій формі і у вигляді матричного рівняння.
5. В чому суть коефіцієнтів прямих, повних та непрямих витрат?
6. Як визначити необхідний валовий випуск кожної галузі за даним асортиментним вектором?

2. 4. Ключові поняття

Балансова модель
Валовий випуск продукції
Вартість
Вектор асортиментний
Вектор-план
Виробнича собівартість
Витрати
Власне число
Добавлена вартість
Коефіцієнти витрат
Матриця витрат
Матриця повних витрат
Матриця продуктивна
Матриця структурна, технологічна
Міжгалузеві ціни
Модель Леонтьєва
Модель продуктивна
Непрямі витрати
Прямі витрати
Технологічні коефіцієнти
Характеристичне рівняння
Чистий прибуток

2.5. Навчальні завдання

№ 2.9.Перевірити на продуктивність модель, якщо матриці прямих витрат задаються таблицями:

а) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.05 & 0.1 & 0.005 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а), б) продуктивна; в) непродуктивна.

№ 2.10. Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких випускає один вид продукції. В таблиці 2.4 вказані витратні коефіцієнти (прямі витрати) a_{ik} одиниць продукції *i*-го цеху, що використовуються як „сировина” (проміжний продукт) для випуску продукції *k*-го цеху, кількість одиниць y_i продукції *i*-го цеху, що призначена для реалізації (кінцевий продукт).

Таблиця 2.4

цехи	Прямі витрати a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	1	2	3	
1		0,2		200
2	0,2		0,1	100
3			0,2	300

Визначити: 1) коефіцієнти повних витрат; 2) валовий випуск (план) для кожного цеху; 3) виробничу програму цехів; 4) коефіцієнти непрямих витрат.

№ 2.11. Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції, якщо

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0 & 0.1\\ 0.5 & 0.1 & 0\end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix}10\\ 8\\ 5\end{pmatrix}.$$

2.6. Завдання для перевірки знань

№ 2.12. Перевірити на продуктивність модель, якщо матриці прямих витрат задаються таблицями:

а) $\begin{pmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.2 & 0.1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}0.5 & 0.6\\ 0.1 & 0.01\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}0.7 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.1 & 0.1\\ 0.05 & 0.01 & 0.2\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) продуктивна, б), в) не продуктивна.

№ 2.13. Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції, якщо

$$A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0 & 0.2\\ 0.3 & 0.1 & 0\end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 15\end{pmatrix}.$$

Тема 3. Розв'язування систем лінійних рівнянь з кількома змінними

Розглядається теорія знаходження загального, частинного і базисного розв'язку системи лінійних рівнянь.

3.1. Теоретичні відомості

3.1.1. Сумісність системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі.

Нехай задана система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими (змінними)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1).$$

Матриця, що складається з коефіцієнтів при невідомих, називається *основною матрицею* або *матрицею системи* (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ,,, & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці А справа (або зліва) приписати стовпчик вільних членів, то отримаємо *розширену матрицю*

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ,,, & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ранг розширеної матриці В або дорівнює рангу матриці системи А, або на одиницю більший за нього (*r* або *r+1*).

При розв'язуванні системи (3.1) можливі наступні випадки:

1. система сумісна, має єдиний розв'язок,
2. система невизначена, має безліч розв'язків,
3. система несумісна, не має розв'язків.

Сумісність системи (3.1) встановлюється теоремою Кронекера – Капеллі:

Теорема Кронекера – Капеллі. Система лінійних рівнянь (3.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, тобто $r(A) = r(B)$.

Очевидно, що $r(A) \le r(B)$.

Теорема Кронекера – Капеллі тільки встановлює загальну умову сумісності системи лінійних рівнянь (3.1) і стверджує існування розв'язку, але не надає способів знаходження всіх розв'язків цієї системи у разі її сумісності.

Теорема (критерій визначеності системи). Для того щоб сумісна система (3.1) була визначеною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих (змінних), що входять у цю систему.

3.1.2. Загальний, частинний, базисний розв'язок системи лінійних рівнянь.

Нехай $r(A) = r(B) = r$. Тоді система (3.1) сумісна і містить r лінійно незалежних рівнянь. Нехай перші r рівнянь системи (3.1) є лінійно незалежними, а решта *m-r* рівнянь системи є лінійними комбінаціями перших r її рівнянь. Тоді розв'язок перших r рівнянь є і розв'язком решта *m-r* рівнянь. Тому для розв'язування системи залишають r лінійно незалежних рівнянь системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad (3.2).$$

Залишимо у лівих частинах які-небудь r невідомих (наприклад, перших r невідомих), а решта перенесемо вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2,r+1}x_{r+0} + ... + a_{2n}x_n), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - (a_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a_{rrn}x_n) \end{cases} \qquad (3.3).$$

Невідомі $x_1, x_2, ..., x_r$, що залишені зліва, називаються ***базисними*** змінними (невідомими), а перенесені вправо $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ - ***вільними***. Зазначимо, що в число базисних невідомих потрібно вводити такі невідомі, коефіцієнти при яких утворюють відмінний від нуля визначник. Розв'язавши (3.3) будь-яким способом відносно базисних змінних, отримаємо систему

$$\begin{cases} x_1 = p_1 - q_{1,r+1}x_{r+1} - ... - p_{1n}x_n \\ x_2 = p_2 - q_{2,r+1}x_{r+1} - ... - p_{2n}x_n \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ x_r = p_r - q_{rr}x_{r+1} - ... - p_{rn}x_n \end{cases} \qquad (3.4).$$

Її розв'язок називають ***загальним розв'язком***. Він виражає базисні невідомі через вільні невідомі. Надаючи вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ довільних числових значень, отримаємо відповідні числові значення для базисних невідомих системи (4). Отримані таким чином числові значення всіх невідомих називаються ***частинними розв'язками*** системи (3.4), а, отже, і системи (1). Крім того, із загального розв'язку системи лінійних рівнянь можна отримати довільний розв'язок системи фіксацією значень вільних невідомих.

Якщо вільні невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ прирівняти до нуля, то отримуємо частинний розв'язок $x_1 = p_1, x_2 = p_2, ..., x_{rr} = p_r, x_{r+1} = ... = x_n = 0$, який називається

базисним розв'язком системи (1).

Зауваження. Якщо $r = n$, тобто ранг матриці системи дорівнює кількості невідомих, то система (3.1) має єдиний розв'язок. Якщо $r < n$, тобто ранг менший кількості невідомих, то система (3.1) має безліч розв'язків.

3.1.3. Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Жордана–Гаусса.

Суть методу: послідовне виключення невідомих зводить дану систему до еквівалентної їй трикутної системи (прямий хід виключень), а з утвореної трикутної системи невідомі знаходять послідовними підстановками (обернений хід). Часто в методі Гаусса замість того, щоб виконувати елементарні перетворення над рівняннями системи, виконують ці перетворення з рядками розширеної матриці системи, яка складається з коефіцієнтів і вільних членів системи.

Метод послідовного виключення невідомих з усіх рівнянь системи, крім одного, називають методом Жордана - Гаусса. Цей метод є деякою модифікацією методу Гаусса. Тоді усі обчислення зручніше виконувати, записуючи всі системи у вигляді матриць-таблиць. У таблиці вибирають ***розв'язувальний (ключовий, напрямний)*** елемент a_{ij}, який обводять. Відповідний *i*-тий рядок та *j*-тий стовпчик називають теж розв'язувальними. Якщо в якомусь рядку або стовпці таблиці вже було взято розв'язувальний елемент, більше в цьому рядку або стовпці його брати не можна. Не можна його брати й у стовпці вільних членів b_{ij}.

Алгоритм перетворень Жордана-Гаусса, тобто перехід від однієї таблиці до іншої, полягає у наступному:

1. Усі елементи розв'язувального рядка першої таблиці ділимо на розв'язувальний елемент $a_{ij} \neq 0$, і результат записуємо в *i*-тий рядок нової таблиці.
2. Усі елементи розв'язувального стовпчика, крім a_{ij}, замінюємо нулями.
3. Решту елементів обчислюємо за правилом „прямокутника": в першій матриці мислено виділяється прямокутник, одна з вершин якого збігається із замінюваним елементом (a_{ij}), на місце якого обчислюється новий, а протилежна вершина – з розв'язувальним елементом (a_{kl}); дві інші вершини містяться відповідно в розв'язувальному рядку і розв'язувальному стовпці.

$$\begin{pmatrix} L & L & L & L & L \\ L & a_{kj} & L & \boxed{a_{kl}} & L \\ L & L & L & L & L \\ L & a_{ij} & L & a_{il} & L \\ L & L & L & L & L \end{pmatrix}$$

Тоді відповідний замінюваному елемент другої матриці-таблиці знаходиться за формулою:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{il}}{\boxed{a_{kl}}}$$

або у мнемонічному вигляді:

$$'\text{відповідний елемент}' = '\text{замінюваний елемент}' - \frac{'\text{добуток елементів іншої діагоналі}'}{\boxed{'\text{напрямний елемент}'}} .$$

При цьому розрахунок проводиться за рядками.

Правильність обчислень можна (і треба) контролювати. Для цього записують контрольний стовпчик К. Елементи кожного рядка підсумовуються і знайдена сума порівнюється з елементом контрольного стовпчика. Якщо ці величини збігаються, то елементи *i*-го рядка обчислені правильно.

3.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язок):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4, \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 = . \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця системи має такий вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ -3 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & 8 & -3 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I \cdot 3 + II \\ I \cdot 1 + III \end{array} \sim$$

(домножуємо перший рядок на 3 і додаємо до другого рядка, домножуємо перший рядок на 1 і додаємо до третього рядка):

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II \cdot (-1) + III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -2 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Система зведена до трикутного вигляду. Рядок, який містить лише нулі, можна відкинути. Отримуємо систему трапецієподібного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14, \\ 11x_2 - 2x_3 = 46. \end{cases}$$

Оскільки ранги основної і розширеної матриць рівні (r=2), то система сумісна. Оскільки невідомих більше, ніж ранг основної матриці, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків. Знайдемо її загальний розв'язок. Покладемо x_2 вільною змінною, а x_1 та x_3 - залежними:

$$\begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 - x_3, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{74 - 17x_2}{2}, \\ x_3 = \dfrac{11x_2 - 46}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: загальний розв'язок системи ($\dfrac{74-17x_2}{2}$, x_2, $\dfrac{11x_2-46}{2}$), де $x_2 \in R$.

Зауваження. Якщо вільною змінною взяти x_3, то $x_1 = \dfrac{16-17x_3}{11}$, $x_2 = \dfrac{46+2x_3}{11}$, і загальний розв'язок системи буде ($\dfrac{16-17x_3}{11}$, $\dfrac{46+2x_3}{11}$, x_3), де $x_3 \in R$.

Задача 2. Знайти невід'ємний базисний розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо до базису, наприклад, x_1. Для цього перепишемо систему у вигляді системи нуль-рівнянь і знайдемо найменше відношення вільного члена до ***додатного*** коефіцієнта при x_1 у кожному рівнянні, щоб з того рівняння знайти x_1:

$$\begin{cases} 0 = 10 - (2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4), \\ 0 = 15 - (x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4), \end{cases}$$

$\min\left\{\dfrac{10}{2}; \dfrac{15}{1}\right\} = 5$, тому з першого рівняння знайдемо x_1: $x_1 = 5 - (-\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4)$ і підставимо отримане значення у друге рівняння (виключимо з другого рівняння x_1):

$$0 = 15 - (5 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2x_2 - x_3 + 4x_4), \qquad 0 = 10 - (\frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4),$$

отже, отримуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - (\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4), \\ 0 = 10 - (\dfrac{5}{2}x_2 - \dfrac{5}{2}x_3 + \dfrac{9}{2}x_4). \end{cases}$$

Введемо до базису іншу змінну, наприклад, x_2: $\min\left\{\dfrac{5}{1/2}; \dfrac{10}{5/2}\right\} = \{10;4\} = 4$, тому x_2 знайдемо з другого рівняння і підставимо знайдене значення у перше рівняння, щоб виключити з нього x_2:

$x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4)$;

$x_1 = 5 - (-\frac{1}{2}(4 + 3x_3 - \frac{9}{5}x_4) + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4)$, $x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4)$.

Отримали систему: $\begin{cases} x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4), \\ x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4). \end{cases}$

Загальний розв’язок з додатними вільними членами $\begin{cases} x_1 = 7 - (x_3 + \frac{2}{5}x_4), \\ x_2 = 4 - (-x_3 + \frac{9}{5}x_4). \end{cases}$

Невід’ємний базисний розв’язок: $x_1 = 7; x_2 = 4; x_3 = 0; x_4 = 0$, або у вигляді точки: (7; 4; 0; 0).

3.3. Питання для самоперевірки

1. Як проводиться дослідження системи за допомогою таблиць Гаусса?
2. Скільки ітерацій потрібно зробити, щоб звести систему до одиничного базису?
3. Як визначити ранг матриці?
4. Які особливості методу Жордана-Гаусса розв’язування системи лінійних рівнянь (СЛР)?
5. Що називається рангом системи? Чи існує таке поняття для несумісної системи?
6. Коли система *m* рівнянь з *n* невідомими буде визначеною? Невизначеною?
7. Що називається загальним розв’язком системи?
8. Що називається базисним розв’язком системи?
9. Скільки може бути базисних розв’язків у системи?
10. В чому суть поняття „вільні” невідомі?
11. Яке рівняння називається нуль-рівнянням?
12. Як знайти частинний розв’язок СЛР?

3. 4. Ключові поняття

Алгоритм методу Жордана-Гаусса
Базисні та вільні змінні (невідомі)
Головна матриця системи рівнянь
Ітерація
Контрольний стовпчик
Критерій визначеності системи

Правило прямокутника
Ранг матриці
Розв’язок СЛР базисний
Розв’язок СЛР загальний
Розв’язок СЛР частинний
Розв’язувальний (ключовий)

елемент

Нуль-рівняння — Розв'язувальний рядок (стовпчик)

Одиничний базис — Розширена матриця

Однорідна СЛР — Теорема Кронекера-Капеллі

3.5. Навчальні завдання

№ 3.14. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язок):

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1; \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2; \\ 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -3; \\ -2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

Відповідь: загальний розв'язок

$(4 - 13x_4 + 36x_5;\ 1 - 3x_4 + 7x_5;\ 1 - 2x_4 + 3x_5;\ x_4; x_5)$.

№ 3.15. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити розширену матрицю системи, знайти загальний, який-небудь частинний і базисний розв'язок):

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3; \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

Відповідь: загальний розв'язок

а) $(-\frac{6}{7} + \frac{8}{7}x_4;\ \frac{1}{7} - \frac{13}{7}x_4;\ \frac{15}{7} - \frac{6}{7}x_4; x_4)$.

б) $(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{16}x_4;\ -\frac{11}{8}x_4$.

№ 3.16. Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 28; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 20. \end{cases}$$

1) Знайти загальний розв'язок системи з базисними змінними x_1, $x_2; x_3$ при додатних вільних членах і відповідний невід'ємний базисний розв'язок.

2) Знайти інший невід'ємний базисний розв'язок системи, увівши попередньо в число базисних змінних x_4 .

Відповідь: (2; 6; 10; 0; 0); (5; 0; 4; 3; 0).

№3.17. Знайти два різні невід'ємні базисні розв'язки системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 = 26; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 25. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 15. \end{cases}$

Відповідь: а) (8; 9; 0; 0; 0); (17; 0; 0; 9; 0);
б) ($\frac{65}{7};\frac{20}{7};0;0$); (7; 0; 0; 4).

3.6. Завдання для перевірки знань

№ 3.18. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь (перетворити систему, знайти загальний, частинний і базисний розв'язок):

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 1x_4 = -2; \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5; \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3. \end{cases}$

Відповідь: загальні розв'язки:
а) ($x_1; x_2; 6 - 15x_1 + 10x_2;\ -7 + 18x_1 - 12x_2$),
б) $(2x_2 + x_4; x_{2;} 1; x_4)$.

№ 3.19. Перетворити розширену матрицю, знайти методом Гаусса загальний, частинний і базисний розв'язок систем рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2; \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

Відповідь: загальні розв'язки: а) ($6 - \frac{3}{2}x_3 - x_4;\ 2 - \frac{1}{2}x_3 - 2x_4$),
б) $(-16 + x_3 + x_4 + 5x_5;\ 23 - 2x_{3;} - 2x_4 - 6x_5;\ x_3; x_4; x_5)$.

№ 3.20. Дослідити на сумісність та визначеність систему лінійних рівнянь і знайти її загальний розв'язок:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

Відповідь: а) ($\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5; -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4; x_3; x_4; x_5$);

б) $(x_3 - 2x_4 + 1; 2x_3 + x_4 + 2; x_3; x_4)$.

№ 3.21. Знайти два різні невід'ємні базисні розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 18; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 + x_5 = 24; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 26. \end{cases}$$

Відповідь: (4; 6; 8; 0; 0); (0; 2; 4; 2; 0).

Тема 4. Графічне розв'язування системи лінійних нерівностей із двома змінними

Застосування геометричного способу розв'язування систем лінійних нерівностей.

4.1. Теоретичні відомості

Попередньо розглянемо деякі поняття, що важливі для геометричного способу розв'язування задач лінійного програмування.

Множина точок називається ***опуклою***, якщо вона разом з будь-якими двома точками містить відрізок, що з'єднує ці точки. Найпростішими прикладами опуклих множин можуть служити: відрізок, трикутник, квадрат, деякі геометричні тіла, наприклад, піраміда, куб і т.д. Відзначимо, що опуклий многокутник має ту властивість, що весь розташований по один бік кожної з прямих, що беруть участь у її утворенні.

Очевидно, що всяка точка опуклого многокутника, що лежить всередині нього або на одній із сторін, за виключенням вершин, може бути представлена як опукла лінійна комбінація інших точок цього многокутника. Навпаки, вершини многокутника не можна представити у вигляді опуклої комбінації двох яких-небудь інших точок. В цьому розумінні вершини многокутника називають ***екстремальними*** точками.

Опуклий многокутник можна задати аналітично, за допомогою системи лінійних нерівностей.

Лінійне рівняння з трьома змінними $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ визначає в просторі деяку площину, яка розсікає весь простір на два півпростори. Тому нерівність $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$ визначає один із півпросторів, до якого належить також і сама гранична площина. В загальному випадку, коли система нерівностей сумісна, простір розв'язків утворює деякий опуклий многогранник - многогранник розв'язків. Частинним випадком його можуть бути: окрема грань, ребро або точка. Останнє має місце, коли система нерівностей має один-єдиний розв'язок. Подальші узагальнення приводять до розгляду *m* лінійних нерівностей з *n* невідомими. Кожне рівняння $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ ...\ +a_{in}x_n=b_i$ є рівнянням деякої гіперплощини в *n*-вимірному просторі, яка якби розсікає весь простір на два півпростори.

Розглянемо детальніше системи лінійних нерівностей і покажемо, що розв'язування їх тісно пов'язане з поняттями опуклого многокутника.

4.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Розглянемо нерівність з однією змінною x_1, наприклад $x_1 \le 5$. Якщо на площині провести пряму $x_1 = 5$, то вона розділить всю площину на дві частини - півплощини: в одній із них, а саме зліва від прямої $x_1 = 5$, лежать точки, абсциси яких менше від 5, а справа від прямої - точки, абсциси яких більше від 5.

Отже, обмеження-нерівність $x_1 \le 5$ геометрично визначає півплощину (Рис.4.1), яка розташована зліва від межі - прямої $x_1 = 5$.

Задача 2. Розглянемо нерівність з двома змінними: $3x_1 + 5x_2 \le 15$. Побудуємо прямую лінію $3x_1 + 5x_2 = 15$. Нерівність $3x_1 + 5x_2 < 15$ являє собою сукупність всіх точок площини, що лежать нижче від прямої, тобто в заштрихованій частині (Рис. 4.2).

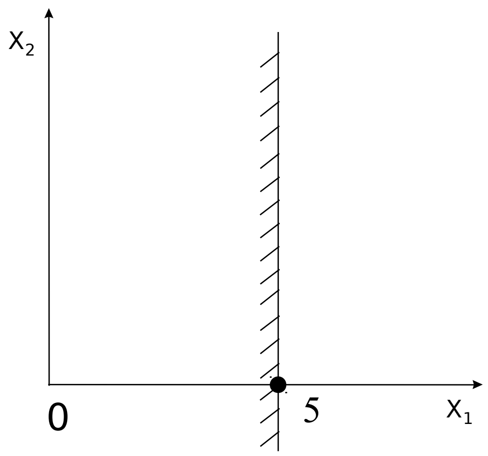


Рис. 4.1

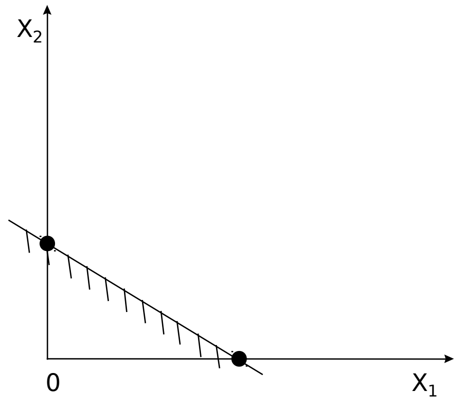


Рис. 4.2

Щоб легше було визначити, яку саме півплощину визначає нерівність, потрібно в ліву частину нерівності підставити координати довільної точки, наприклад, початку координат, тобто $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

Якщо нерівність задовольняється, то вона визначає ту півплощину, в якій лежить початок координат, в противному випадку - іншу півплощину (її позначають штрихуванням або стрілками). Користуючись геометричними міркуваннями, знайти можливі розв'язки системи нерівностей.

Задача 3. Знайти область допустимих розв'язків (ОДР) системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Кожна з нерівностей системи визначає півплощину, відмічену на рис. 4.3 штрихами.

Отже, перший крок при використанні графічного методу для розв'язування систем нерівностей полягає в геометричному представленні допустимих розв'язків, тобто побудові області (допустимих) розв'язків (ОДР), в якій одночасно задовольняються всі обмеження моделі. Шукана область показана на рис. 4.3. Умови невід'ємності змінних $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$ обмежують область їхніх допустимих значень першим квадрантом.

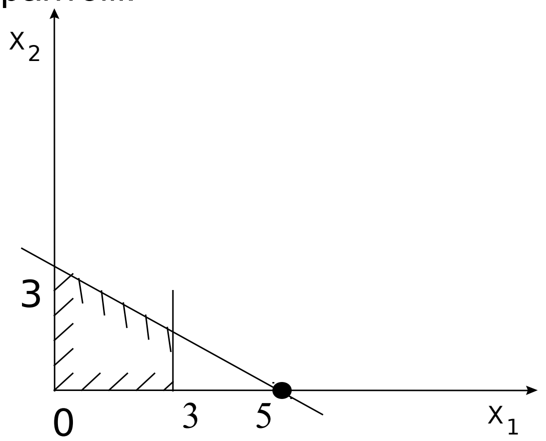


Рис. 4.3

Області, в яких виконуються відповідні обмеження у вигляді нерівностей, указуються стрілками, що направлені у бік допустимих значень змінних. Отримана множина розв'язків – многокутник - показаний на рис. 4.3. Отриманий многокутник є опуклим, бо разом з будь-якими двома точками містить весь відрізок, що з'єднує їх.

4.3. Питання для самоперевірки

1. Яка множина називається опуклою?
2. Що таке простір обмежень?
3. Що таке замкнена множина?
4. Які можуть зустрітися області розв'язків системи нерівностей? Наведіть геометричну ілюстрацію цих випадків.
5. Дайте геометричну інтерпретацію області розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей.
6. Як означити опуклий многогранник і опуклу многогранну область n-вимірного простору (гіперплощину)?
7. Суть алгоритму графічного методу розв'язування систем лінійних

нерівностей.

4. 4. Ключові поняття

Геометрична інтерпретація
Гіперплощина
Графічний метод
Екстремальні точки
Кутові точки
Многокутник розв'язків
Обмеження-нерівність
Опуклі множини
Півплощина (півпростір)
Простір *n* - вимірний
Пряма гранична

4.5. Навчальні завдання

№ 4.22. Побудувати площини, координати точок яких задовольняють нерівність:

а) $3x_1 - 2x_2 \geq 6;$ б) $x_1 + 2x_2 \geq 0;$ в) $x_2 \leq 3.$

№ 4.23 Побудувати многокутник розв'язків системи нерівностей і знайти координати однієї з вершин:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6 \geq 0; \\ 6x_1 + 5x_2 - 30 \leq 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3 \geq 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 \leq 20; \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 19; \\ x_1 - 4x_2 \geq -7 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 11 \geq 0; \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 0; \\ 6x_1 - 5x_2 + 24 \geq 0; \\ x_1 - 1 \geq 0; \\ x_1 - 6 \leq 0; \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 38 \leq 0; \\ x_1 - 2x_2 + 7 \geq 0; \\ 3x_1 + x_2 \geq 0; \\ \quad x_2 - 6 \leq 0; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$.

4.6. Завдання для перевірки знань

№ 4.24 Побудувати многокутник розв'язків системи лінійних нерівностей і знайти координати однієї з його вершин:

а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 13 \leq 0; \\ 7x_1 - x_2 - 4 \geq 0; \\ x_1 - 3x_2 + 1 \leq 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6 \geq 0; \\ 5x_1 + 7x_2 - 35 \leq 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24 \geq 0; \\ x_1 - 6 \leq 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30; \\ 2x_1 - x_2 \leq 6; \\ x_1 + 3x_2 \geq 3; \\ x_1 \leq 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 - 6 \leq 0; \\ -x_1 + 3x_2 - 10 \leq 0; \\ x_1 + 4x_2 \geq 4; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - 30 \geq 0; \\ x_1 - x_2 - 4 \geq 0; \\ -x_1 + x_2 - 3 \geq 0; \\ x_1 + x_2 - 10 \leq 0; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$

є) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ -4x_1 + x_2 \geq -8; \\ x_1 - 2x_2 \leq 0; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10; \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 + 2x_2 \geq 2; \\ x_1 + 3x_2 \leq 3. \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 \geq 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0; \\ x_1 - x_2 - 1 \leq 0; \\ -2x_1 - x_2 - 3 \leq 0. \end{cases}$

Тема 5. Графічне розв’язування задач лінійного програмування.

Застосовування геометричного способу розв’язування систем лінійних нерівностей для задач лінійного програмування.

5.1. Теоретичний відомості

Геометрична інтерпретація економічних задач дає можливість наочно представити їх структуру, виявити особливості та відкриває шляхи дослідження більш складних властивостей. ЗЛП з двома змінними завжди розв’язати графічно. Але уже в тривимірному просторі таке розв’язування ускладнюється, а в просторах, розмірність яких більша трьох, графічне розв’язування, взагалі кажучи, неможливе. Випадок двох змінних прояснює властивості ЗЛП, приводить до ідеї її розв’язання, робить геометрично наочними способи розв’язування та шляхи їх практичної реалізації.

Із геометричної інтерпретації елементів ЗЛП випливає наступний порядок ***(алгоритм)*** її **графічного розв’язання**.

1. З урахуванням системи обмежень будуємо область допустимих розв’язків (ОДР**) G.**

2. Будуємо вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ найшвидшого зростання цільової функції — вектор *градієнтного* напрямку.

3. Проводимо довільну лінію рівня $Z = 0$ цільової функції.

4. При розв’язуванні задачі на максимум переміщуємо лінію рівня $Z = 0$ у напрямку вектора $\bar{c} = (c_1, c_2)$ так, щоб вона дотикалась області допустимих розв’язків в її крайньому положенні (крайній, кутовій точці). У випадку розв’язування задачі на мінімум лінію рівня $Z = Z_0$ переміщають в антиградієнтному напрямку.

5. Визначаємо оптимальний план $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ та екстремальне значення цільової функції $Z^* = z(x^*)$.

5.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача. Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \tag{5.3}$$

Розв'язання. Кожне з обмежень (5.2), (5.3) задає на площині x_1Ox_2 деяку півплощину. Півплощина — опукла множина. Але перетин будь-якого числа опуклих множин є опуклою множиною. Тому область допустимих розв'язків задачі (5.1) — (5.3) є опукла множина.

Пряма лінія називається ***опорною***, якщо вона має з опуклим многокутником, принаймні, одну спільну точку і весь многокутник розташований по один бік від цієї прямої. Через кожну з вершин многокутника можна провести нескінчену множину опорних ліній. У тривимірному просторі, по аналогії з поняттям опорної прямої вводиться поняття опорної площини.

Опорною площиною називається всяка площина, що має з опуклим многогранником, принаймні, одну спільну точку, причому таку, що весь многогранник розташований по один бік від неї. Опорна площина може мати з опуклим многогранником спільну точку (вершину многогранника), прямую (ребро), і, нарешті, спільну грань.

Геометрична інтерпретація цільової функції. Нехай область допустимих розв'язків ЗЛП — непуста множина, наприклад многокутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис. 5.1).

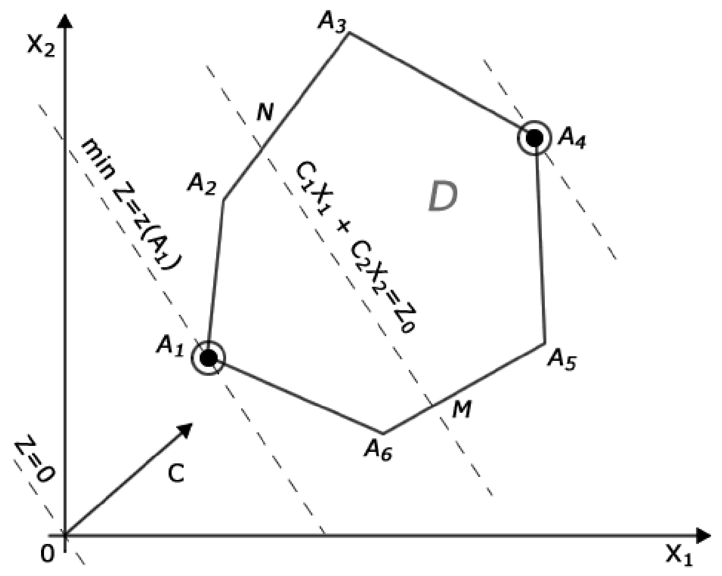


Рис. 5.1 – Область допустимих розв’язків ЗЛП

Виберемо довільне значення цільової функції $Z = Z_0$, найчастіше $Z = 0$. Отримаємо $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Це рівняння прямої лінії, яка при паралельному перенесенні в напрямку нормального вектора $\bar{c}$ стає опорною прямою. В точках прямої NM цільова функція зберігає одне і те ж стале значення Z_0. Вважаючи в рівності (5.1) Z параметром, отримаємо рівняння сімейства паралельних прямих, які називаються лініями рівня цільової функції (лініями сталого значення).

Знайдемо частинні похідні цільової функції по x_1 і x_2

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = c_1 \qquad (5.4)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = c_1 \qquad (5.5)$$

Частинні похідні (5.4) - (5.5) функції показують швидкість її зростання вздовж даної осі. Отже, c_1 та c_2 — швидкості зростання Z відповідно вздовж осей Ox_1 та Ox_2. Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ називається градієнтом функції. Він показує напрям найшвидшого зростання цільової функції:

$$\bar{c} = (\partial Z / \partial x_1, \partial Z / \partial x_2)$$

Вектор $-\bar{c}$ указує напрям найшвидшого спадання цільової функції. Його називають антиградієнтом.

Вектор $\bar{c} = (c_1, c_2)$ перпендикулярний до прямих $Z = const$ сімейства $c_1x_1 + c_2x_2 = Z$.

5.3. Питання для самоперевірки

1. Яка множина називається опуклою?
2. Що таке простір обмежень?

3. Що таке замкнена множина?
4. Що таке лінії рівня цільової функції?
5. Що таке градієнт? антиградієнт?
6. Що таке область допустимих розв'язків (ОДР)?
7. Яка пряма називається опорною (дотичною) до многокутника розв'язків?
8. Що називається допустимим і оптимальним розв'язком?
9. Які можуть зустрітися області допустимих розв'язків ЗЛП? Наведіть геометричну ілюстрацію цих випадків.
10. В яких випадках задача може не мати оптимального розв'язку? Проілюструйте ці випадки графічно.

5.4. Ключові поняття

Антиградієнт
Простір обмежень
Градієнт
Допустимий розв'язок (план)
Дотична (опорна) пряма
Замкнена множина
Лінії рівня
Множина опукла
Оптимальний розв'язок
Пряма гранична
Розв'язок опорний
Точки кутові (крайні)
Цільова функція

5.5. Навчальні завдання

Розв'язати графічно задачі лінійного програмування.

№ 5.25 Знайти найменше і найбільше значення цільової функції $Z = x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 25; \\ 3x_1 - 5x_2 \le 8; \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 26. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = 7\frac{4}{7}$ в точці $(-\frac{23}{7};\frac{99}{7})$;

$z_{\max} = 31\frac{8}{11}$ в точці $(\frac{141}{11};\frac{67}{11})$.

№ 5.26 Знайти мінімальне і максимальне значення лінійної функції $Z = x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 \ge 4; \\ -x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 \le 4. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = 2\frac{2}{3}; z_{\max} = 6$.

№ 5.27 Знайти максимальне і мінімальне значення цільової функції $Z = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 \leq 3; \\ x \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = 7\frac{1}{73}$ в точці $(\frac{2}{3}; \frac{10}{3})$; $z_{\max} = 1$ в точці $(1;O)$.

№ 5.28 У відділенні господарства необхідно організувати виробництво картоплі і ячменю. Наявність ресурсів і витрати на виробництво 1ц продукції наведені в таблиці 5.1. Скласти план виробництва продукції і вказати площі посівів кожної культури при оптимальному плані.

Таблиця 5.1

№	Виробничі ресурси	Картопля	Ячмінь	Об’єми ресурсів
1	Пашня, га	0,01	0,05	1000
2	Затрати ручної праці, люд.-дн.	0,2	0,1	8000
3	Затрати ручної праці, тр. – зм.	0,021	0,03	900
4	Ціна реалізації	60	10	-

Відповідь: $z_{\max} = 280$ млн. гр. од.; 200 га; 800 га.

№ 5.29 Скласти денний раціон мінімальної собівартості для відгодівлі тварин із двох видів кормів K_1 та K_2. Усі необхідні дані містяться в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

Харчові речовини	Кількість харчових речовин на 1 кг корму.		Мінімальна норма харчової речовини в раціоні.
	K_1	K_2	
S_1	2	1	7
S_2	1	2	8
S_3	1	3	9

Собівартість 1 кг кормів, грн.	5	6	-

Відповідь: 2 кг; 3 кг; $z_{\min} = 28$ гр. од.

5.6. Завдання для перевірки знань

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

№ 5.30.
$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

№ 5.31.
$$z = 5x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = \frac{23}{5}$ в точці $(\frac{7}{5};\frac{3}{5})$. Відповідь: $z_{\max} = \frac{235}{19}$ в точці $(\frac{20}{19};\frac{45}{19})$.

№ 5.32.
$$z = x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \le 5. \end{cases}$$

№ 5.33
$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min(\max),$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 3, \\ x_{1-2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\max} = 44$ в точці $(12;8)$. Відповідь: $z_{\min} = 2$ в точці $(\frac{8}{7};\frac{4}{7})$;

$z_{\max} = 11$ в точці $(1;3)$.

№ 5.34. Для виготовлення столів і шаф в меблевому цеху використовуються два види деревини. Витрати деревини кожного виду (в кв. м) на кожний виріб, прибуток цеху від виробництва кожного виду меблів (в гр.. од.), запаси деревини кожного виду (в кв. м) задані таблицею 5.3:

Таблиця 5.3

Вироби	Сировина		Прибуток від виробництва одного виробу
	S_1	S_2	
Стіл	0,3	1	12
Шафа	0,12	2	15

Запаси деревини	84	88	-

Скільки столів і шаф має виготовити меблевий цех, щоб його рентабельність була найвищою? Скласти математичну модель задачі та розв'язати її графічно.

Відповідь: 6335 гр. од., 130 столів, 375 шаф.

Розділ II

Тема 6. Розв'язування задач симплексним методом

Застосовування аналітичного способу розв'язування систем лінійних рівнянь для знаходження базисних розв'язків. Вивчення симплексного методу розв'язування ЗЛП.

6.1. Теоретичний матеріал

6.1.1. Теоретичні основи симплексного методу розв'язування ЗЛП

Симплексний метод або метод послідовного покращення плану є одним з основних методів розв'язування задач ЛП. Назву симплексний метод бере від слова «симплекс», яким автор методу Р. Данциг позначив накладені на змінні $x_1, x_2 \ldots x_n$ обмеження $x_1+x_2+ \ldots +x_n=1$. В математиці ***симплексом*** в k-вимірному просторі називається сукупність $k+1$ вершин. Так для площини при $k=2$ симплексом буде трикутник; в просторі при $k=3$ симплексом буде тетраедр, який має 4 вершини.

Враховуючи це поняття, аналітичний метод розв'язування ЗЛП називають симплекс-методом. Він заснований на алгоритмі цілеспрямованого перебору вершин. Цей алгоритм забезпечує перехід від однієї вершини до іншої в такому напрямку, при якому значення цільової функції від вершини до вершини покращується.

Знаходження значення цільової функції та змінних в одній вершині називається ***ітерацією***. Число ітерацій в реальних задачах може вимірюватися сотнями. Вручну, за допомогою симплекс-метода, можуть бути розв'язані задачі, що містять не більше 10 ітерацій. Тому в реальних задачах застосовують ЕОМ (ПК) та пакети прикладних програм (ППП).

Нехай задано канонічну форму задачі лінійного програмування, для якої відомий будь-який опорний план. Знайти максимум функції $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$, якщо

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = \overline{1,n}).$$

6.1.2. Можливі випадки при розв'язуванні ЗЛП симплексним методом

1) Якщо в індексному (m+1)-у рядку останньої симплексної таблиці серед *Δj* є більше, ніж m нульових (тобто оцінка *Δj*=0 відповідає вільній, небазисній змінній), то це означає, що знайдений оптимальний план не єдиний, тобто існує альтернативний оптимальний план. Знайти його можна, якщо вибрати ключовий елемент у зазначеному стовпчику симплекс-таблиці та здійснити один крок симплекс-методу.

2) Якщо в індексному рядку є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок Δj, то до базису вводять той вектор, якому відповідає $\max_j c_j$. Точнішим є таке правило: якщо не всі Δj ≥0, j ∈{1, …, n}, то до базису вводять той вектор, якому відповідає $\min \Delta_j$ (беруть ті j, для яких Δj <0); якщо ж мінімальних оцінок декілька, то до базису вводять вектор, якому відповідає $\max_j c_j$.

3) При розв'язуванні задач на мінімум цільової функції рекомендується замість f_{min} знаходити $(-f)_{max}$.

4) У випадку, коли $f \rightarrow \min$, умовою оптимальності плану є Δj ≤0, j∈{1, …, n}. Якщо вона не виконується, то до базису вводять вектор, якому відповідає найбільше Δj. Якщо таких значень є декілька, то включають той вектор, якому відповідає $\min_j c_j$.

5) При побудові симплекс-методу передбачалося, що всі опорні плани ЗЛП невироджені, що забезпечувало досягнення оптимального плану за скінчену кількість кроків. Якщо опорний план вироджений, тобто серед його компонентів a_{ij} одна або декілька базисних змінних дорівнюють нулю, то $\frac{b_j}{a_{ij}} = 0$, і значення лінійної функції при переході до нового опорного плану не зміниться, тобто характер збіжності її такий, що буде кілька ділянок сталості. Тоді може не змінюватися й значення плану

деяких базисних змінних. Але й тоді можна підібрати такий ключовий елемент, що через деякий час значення лінійної форми знову почне зростати. У разі виродженого опорного плану обчислення проводять аналогічно, як і у випадку невиродженого плану.

6) Виродження базису практично не впливає на кількість ітерацій *k*, що потрібні для визначення оптимального плану. Як правило, їх є в межах $1{,}5m \le k \le 3m$, де *m* – число обмежень задачі.

7) Якщо в опорному плані нульових компонент більше однієї, то лінійна функція може зберігати своє значення протягом декількох наступних ітерацій і можливе повернення до старого базису, що приведе до так званого зациклювання. Щоб уникнути зациклювання, треба вибрати інший опорний план на деякій ітерації. На практиці зациклювання зустрічається надзвичайно рідко (в літературі описано тільки два випадки таких задач).

7) Якщо на якому-небудь етапі виникає невизначеність у виборі ключового рядка (кілька однакових відношень), то необхідно вибрати ключовим той рядок, для якого відношення елементів наступного стовпчика, що не входить до базису, до ключового стовпчика є мінімальним, і т.д. доти, доки ключовий рядок не визначиться однозначно.

8) Якщо у симплекс-методі при переході від одного плану до іншого в ключовому стовпчику немає додатних елементів a_{ij}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція ЗЛП є необмеженою, отже, оптимальних планів не існує.

6.1.3. Алгоритм симплекс-методу

1. Переглядаємо знаки всіх коефіцієнтів Δ_j m+1-го рядка. Якщо всі $\Delta_j \ge 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то задача розв’язана: допустимий план є оптимальним, max $f = f_0$. Якщо ж не всі $\Delta_j \ge 0$, то переходимо до наступного кроку.

2. Серед значень $\Delta_j < 0$ знаходимо найбільше за абсолютною величиною, і відповідний йому стовпчик виберемо за провідний (ключовий, розв’язувальний, напрямний). Нехай це буде стовпчик з номером *s*. Якщо у цьому стовпчику всі елементи $a_{is} \le 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то це означає, що цільова функція *f* необмежена, тобто max $f = \infty$. Розв´язування закінчено. Якщо ж не всі $a_{is} \le 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то переходимо до кроку 3.

3. Для кожного елемента $a_{is} > 0$ провідного стовпчика знаходимо відношення $\frac{b_i}{a_{is}}$, вибираємо найменше $\Theta_{Os} = \min\limits_i \frac{b_i}{a_{is}}$, і беремо рядок, де цей мінімум досягається, за провідний. Нехай це буде рядок з номером *r*. Елемент a_{rs}, який стоїть на перетині провідного рядка і провідного стовпчика, є провідним (ключовим, розв’язувальним, напрямним).

4. Виконуємо жорданове перетворення (див. тему 3) симплексної таблиці з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 1.

Послідовність операцій 1-4 називається **ітерацією** симплексного методу.

6.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Метод розв'язування ЗЛП за допомогою симплексних таблиць розглянемо на конкретному прикладі.

Задача 1. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \le 56, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \end{cases} \quad (6.1)$$

якщо цільова функція (лінійна форма) $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max$.

Розв'язання. Спочатку перейдемо від системи нерівностей (6.1) до системи рівнянь, додавши до лівих частин нерівностей невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5 (*зведемо до канонічного виду задачу ЛП*). Ми отримаємо:

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + x_3 = 56, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 37, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 2. \end{cases} \quad (6.2)$$

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max \quad (6.3)$$

Перепишемо тепер систему (6.2) у вигляді системи нуль - рівнянь (0-рівнянь):

$$\begin{cases} 0 = 56 - (4x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5), \\ 0 = 37 - (5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5), \\ 0 = 2 - (-x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5). \end{cases} \quad (6.4)$$

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max \quad (6.5)$$

Введемо в базис x_3, x_4, x_5. Це означає, що, присвоївши $x_1 = 0, x_2 = 0,$ отримуємо з (6.2) перший базисний розв'язок: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 56, x_4 = 37, x_5 = 2$.

При цьому значення цільової функції f=0. На основі (6.4) будуємо першу симплексну таблицю (таблиця 6.1).

<u>Алгоритм побудови симплексної таблиці:</u>

В першому рядку пишемо послідовно вільний член та змінні b, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Зліва добавляємо колонку „Базисні змінні", поряд з нею колонку „C_j", в якій поставлені коефіцієнти при базисних змінних в цільовій функції, в даному випадку величини C_3, C_4, C_5.
В результаті маємо таблицю 6.1:

В останньому рядку, який називається *індексним*, і позначається через $\Delta_j = f_j - C_j$, проставляються числа, що рівні протилежному значенню лінійної функції, у відповідності до рівняння *(j=1, 2, 3, 4, 5)*. Взагалі, індекси розраховуються за формулою (6.6):

Таблиця 6.1

C_i	C_j Базисні змінні Б 1	0	3	4	0	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	56	4	9	1	0	0
0	X_4	37	5	3	0	1	0
0	X_6	2	-1	**2**	0	0	1
Індексний рядок $\Delta_j = f_j - C_j$		0	-3	-4	0	0	0

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij} \right) - c_j . \qquad (6.6)$$

Індекс базисної змінної дорівнює нулю:

$$\Delta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot q_{ij} \right) - c_j = c_1 \cdot q_{1j} + c_2 \cdot q_{2j} + \ldots + c_j \cdot q_{jj} + \ldots c_n \cdot q_{nj} - c_j = c_j - c_j = 0 .$$

Це перша симплексна таблиця, що відповідає першому базисному розв'язку: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 56, x_4 = 37, x_5 = 2$.

Значення лінійної функції, яке дорівнює нулю, записуємо в першій клітці індексного рядка.

Оскільки ми розв'язуємо задачу на максимум, то з виразу цільової функції (лінійної форми) видно, що потрібно збільшити x_1 або x_2. Дійсно, коефіцієнти при цих змінних в дужках від'ємні (а насправді додатні), і якщо ми покладемо $x_1 \geq 0$ або $x_2 \geq 0$, то значення f збільшиться. Але ці ж коефіцієнти з їхніми знаками стоять в індексному рядку.

Отже, ми приходимо до наступного висновку: наявність в індексному рядку від'ємних чисел при розв'язуванні задачі на максимум свідчить про те, що оптимальний розв'язок не отримано (**критерій оптимальності опорного плану**), і тому від першої таблиці потрібно перейти до наступної.

Отже, **критерій оптимальності ЗЛП**:

1) якщо індекси всіх вільних змінних невід'ємні: $\Delta_j \geq 0$, то отриманий опорний план є оптимальним;
2) якщо серед індексів є від'ємні, то план не оптимальний, і його можна покращити увівши до базису змінну з найменшим від'ємним індексом.

Перехід до нової таблиці, тобто до нової кращої програми здійснюється наступним способом: в індексному рядку знаходимо *найбільше за модулем від'ємне* (а в задачі на мінімум - найбільше додатне) число. В даному прикладі таким числом буде - 4. Знайдене число визначає провідний (або ключовий або розв'язувальний) стовпчик, який позначають стрілкою ↑. Далі будемо діяти за таким алгоритмом:

1) Ділимо вільні члени на *додатні* елементи провідного стовпчика і вибираємо з отриманих відношень *найменше*. Найменше відношення визначає *провідний рядок* (позначають стрілкою ←). У даному випадку маємо (ці числа можна внести в останній стовпчик таблиці):

$$\min\left\{\frac{56}{9};\frac{37}{3};\frac{2}{2}\right\}=\frac{2}{2}=1.$$

Таким чином, провідним рядком буде рядок x_5. На перетині провідного стовпчика і провідного рядка стоїть *розв'язувальний (ключовий, провідний, напрямний) елемент* (його обводять рамкою, кружечком, або виділяють жирним шрифтом тощо). Тут - це число 2 (клітинка з адресою (x_5; x_2) виділена).

Тепер приступаємо до складання другої таблиці або другого опорного плану. Замість одиничного вектора x_5 ми в базис вводимо вектор x_2. Перехід до нового базису еквівалентний до елементарного перетворення матриці, елементами якої є числа таблиці 6.1. А саме:

2) В новій таблиці елементи рядка, які відповідають елементам провідного рядка попередньої таблиці, діляться на провідний елемент.

3) Щоб отримати будь-який інший елемент нової симплексної таблиці, потрібно від відповідного елемента попередньої таблиці відняти добуток елемента провідного рядка на елемент провідного стовпчика, що поділений на провідний елемент. Наприклад, елементу 4 (таблиця 6.1, клітинка з адресою (x_3;x_2)) буде відповідати елемент таблиці 6.2:

$$4-\frac{(-1)\cdot 9}{2}=\frac{17}{2}.$$

Відповідний замінюваному елемент другої таблиці можна знаходити також за формулою (правило „прямокутника”):

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{kj}\cdot a_{il}}{\boxed{a_{kl}}}$$

або у мнемонічному вигляді:

$$\text{'відповідний елемент'}=\text{'замінюваний елемент'}-\frac{\text{'добуток елементів іншої діагоналі'}}{\boxed{\text{'напрямний елемент'}}}.$$

При цьому розрахунок проводиться за рядками. За цим же правилом можна розраховувати індекси (крім початкового плану).

Таким чином, ми переходимо до другої таблиці (таблиця 6.2). Указані вище перетворення відносяться до стовпчиків b, x_1, x_2, x_3, x_4 , x_5 (стовпчики базисних змінних можна заповнити як одиничні вектори).

Таблиця 6.2

	C_j	0	3	4	0	0	0
C_i	Б 2	***b***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	47	17/2	0	1	0	-9/2
0	X_4	34	**13/2**	0	0	1	-3/2
4	X_2	1	-1/2	1	0	0	1/2
$\Delta_j = f\,j\text{-}C_j$		4	-5	0	0	0	2

З таблиці 6.2 видно, що значення лінійної функції збільшилось і тепер дорівнює 4. Але наявність в індексному рядку від'ємних чисел свідчить про те, що це значення ще можна збільшити. Переходимо до наступної симплексної таблиці, використовуючи пункти 1) – 3) алгоритму. Число-індекс -5 визначає провідний стовпчик (x_1). Знаходимо провідний рядок. Для цього визначимо:

$$\min\left\{\frac{47}{17/2};\frac{34}{13/2};-\right\}=\frac{34\cdot 2}{13}=\frac{68}{13}.$$

Отже, провідним елементом буде 13/2. Змінну x_4 виводимо з базису і уводимо замість нього змінну x_1. Перерахунок коефіцієнтів проводиться за указаним вище правилом, тоді маємо таблицю 6.3.

Таблиця 6.3.

	C_j	0	3	4	0	0	0
C_i	**Б 3**	***b***	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	X_3	33/13	0	0	1	-7/13	-3/13
3	X_1	68/13	1	0	0	2/13	-3/13
4	X_2	47/13	0	1	0	1/13	5/13
$\Delta_j = f\,j\text{-}C_j$		392/13	0	0	0	10/13	11/13

В індексному рядку нема від'ємних елементів. Отже, ми отримали оптимальну програму (оптимальний план). Оптимальний розв'язок: (68/13; 47/13; 33/13; 0; 0), лінійна (цільова) функція набуває максимального значення
f = 392/13.

6.3. Питання для самоперевірки

1. Як звести загальну форму ЗЛП до канонічного виду?
2. Яка змінна називається додатковою змінною? Який її економічний зміст?

3. Наведіть умову оптимальності опорного плану при відшуканні мінімуму цільової (лінійної) функції; максимуму цільової (лінійної) функції.

4. Опишіть алгоритм симплексного методу для ЗЛП.

5. Яка змінна виводиться з базису?

6. Яка змінна уводиться до нового базису?

7. Який рядок (стовпчик, елемент) симплексної таблиці називається ключовим рядком (стовпчиком, елементом)?

8. Сформулюйте правило, за яким будується друга симплексна таблиця за елементами першої симплексної таблиці.

9. Яким чином обмеження-рівності перетворюються до обмежень - нерівностей і навпаки?

10. Як переходити від задачі на відшукання мінімуму цільової функції до задачі на відшукання максимуму і навпаки?

11. Охарактеризуйте сутність проблеми виродження (поняття виродженого розв'язку, геометрична інтерпретація, явище зациклення і додаткове правило для його усунення).

12. Вкажіть особливі випадки симплексного методу (неєдиність оптимального розв'язку (альтернативний оптимум)о, відсутність скінченого оптимуму).

6.4. Ключові поняття

Альтернативний оптимум	Обмеження-рівність
Допустимий план	Оптимальний план
Екстремальне значення	Особливі випадки
Індекси	Розв'язувальний (ключовий) елемент
Ітерації	Симплексний метод
Канонічна форма	Симплексна таблиця
Критерій оптимальності	Скінчений оптимум
Зациклювання	Умови оптимальності плану
бмеження нерівність	Функція цільова

6.5. Навчальні завдання

№ 6.35. Знайти максимум лінійної функції $Z = -x_4 + x_5$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 2; \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7; \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2; \\ x_j \geq 0, \end{cases} \text{ де } x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3,4,5).$$

Відповідь: 2.

№ 6.36. Максимізувати лінійну функцію $Z = 8x_1 + 5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 + x_2 \le 12; \\ 4x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \end{cases}$$ де $x_j \ge 0 \ \left(j = 1,2\right)$.

Відповідь: 22,4.

№ 6.37. Знайти мінімум цільової функції $Z = x_1 - 3x_2 + x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_2 \le 7; \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12; \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, \end{cases}$$ де $x_j \ge 0 \ \left(j = 1,2,3\right)$.

Відповідь: -11.

№ 6.38. Знайти максимум цільової функції $Z = 2x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ x_2 \le 5; \\ 3x_1 \le 21, \end{cases}$$ де $x_j \ge 0 \ \left(j = 1,2\right)$.

Відповідь: 24.

6.6. Завдання для перевірки знань

№ 6.39. Знайти максимум цільової функції $Z = 6x_1 + 5x_2$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10; \\ 2x_1 + x_2 \le 18, \end{cases}$$ де $x_j \ge 0 \ \left(j = 1,2\right)$

Відповідь: 23,2.

№ 6.40. Розв’язати задачу ЛП симплексним методом:
$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

при обмеженнях: $$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 - 2x_2 \le 0; \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: 2,75.

№ 6.41. Максимізувати лінійну функцію $Z = x_1 + 3x_2 + x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_2 \le 5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10; \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2; \\ x_{1-3} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: 36,5.

№ 6.42. Розв’язати задачу ЛП симплексним методом і, якщо можливо, дати геометричну інтерпретацію процесу розв’язання:

а) $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \le 1; \\ x_1 - x_2 \ge -1; \\ 2x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: (0,6; 1,6); $Z_{\max} = 3{,}8$.

б) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + x_5 = 2 \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 0; 2; 0; 0); $Z_{\max} = 8$.

Тема 7. Розв’язування симплексним методом задач практичного змісту.

Дослідження залежності між величинами, які фігурують у прикладних галузевих задачах, за допомогою методів лінійного програмування.

7.1. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Задача. Максимальна площа, яку господарство може використати під посадку плодових дерев, складає 1000 га. На цій площі планується посадити три види дерев P_1, P_2, P_3. Господарство має три типи обмежених ресурсів: S_1 – орна земля; S_2 – трудові ресурси; S_3 – гроші та матеріали. Запаси ресурсів, витрати їх на 1 га посадок та ціна продукції з одного гектара відповідної культури задані таблицею 7.1:

Таблиця 7.1

Типи ресурсів	Види дерев			Запаси ресурсів
	P_1	P_2	P_3	
S_1 S_2 S_3	1 100 400	1 60 200	1 200 800	1 тис. га 200 тис. люд.-днів 600 тис. грн..
Ціна продукції з 1 га (тис. грн.)	3	2	5	

Треба знайти такі площі посадок дерев кожного виду, які б забезпечували максимальний прибуток від реалізації одержаної продукції.

Розв'язання. 1. ***Побудова математичної моделі***. Позначимо через x_1, x_2 і x_3 площі посадок дерев відповідно видів P_1, P_2, P_3. Оскільки загальна площа посадок не може перевищувати 1 тис. га, то

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1 .$$

Обмеженість ресурсів дає такі нерівності:

$$100x_1 + 60x_2 + 200x_3 \le 200,$$
$$400x_1 + 200x_2 + 800x_3 \le 600.$$

Сумарна вартість виробленої продукції $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$.

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

2. Розв'яжемо ЗЛП симплексним методом. Спочатку запишемо задачу в канонічній формі, увівши додаткові невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_6 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, ..., 6\}.$$

Складемо симплексні таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

C_i	**Б**	C_j	$\frac{0}{b}$	$\frac{3}{X_1}$	$\frac{2}{X_2}$	$\frac{5}{X_3}$	$\frac{0}{X_4}$	$\frac{0}{X_5}$	$\frac{0}{X_6}$	$\frac{bj}{q_{ij}}$
1	X_4	0	1	1	1	1	1	0	0	1
2	X_5	0	10	5	3	10	0	1	0	1
3	X_6	0	3	2	1	**4**	0	0	1	3/4
m+1 (Δ_j)			0	-3	-2	-5	0	0	0	
1	X_4	0	1/4	1/2	**3/4**	0	1	0	-1/4	1/3
2	X_5	0	5/2	0	1/2	0	0	1	-5/2	5
3	X_3	5	3/4	1/2	1/4	1	0	0	1/4	3
m+1 (Δ_j)			15/4	-1/2	-3/4	0	0	0	5/4	
1	X_2	2	1/3	2/3	1	0	4/3	0	-1/3	
2	X_5	0	7/3	-1/3	0	0	-2/3	1	-7/3	
3	X_3	5	2/3	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	
m+1 (Δ_j)			4	0	0	0	1	0	1	

Оскільки у першій симплексній таблиці серед Δ_j є від'ємні, то початковий опорний план не є оптимальним. Максимальне за абсолютною величиною $\Delta_3 = -5$ (найменший від'ємний індекс), а тому треба ввести до базису вектор X_3. Вивести з базису треба вектор X_6, бо min $\frac{bj}{q_{ij}}$ = min (1/1, 10/10, 3/4)=3/4, i=3. Ці дані можна записати в останній стовпчик таблиці 7.2. Далі робимо перерахунок за правилом „прямокутника", взявши за провідний елемент (x_6;x_3)=4.

У другій симплексній таблиці найбільшим за абсолютною величиною серед від'ємних Δ_j є $\Delta_3 = -\frac{3}{4}$. Це означає, що провідним є другий стовпчик, а провідним рядком є перший, бо min $\frac{bj}{q_{ij}}$ = min (1/3, 5, 3) = 1/3, i=1. Отже, до базису треба включити вектор X_2, а вивести X_4. Переходимо до нової таблиці, зробивши перерахунок за правилом „прямокутника", взявши за провідний елемент (x_4;x_2)=3/4.

У третій симплексній таблиці всі Δ_j>0, а це означає, що план оптимальний.

Таким чином, оптимальний план X*=(0, 1/3, 2/3), а f_{max}=4. Звідси випливає, що для одержання максимального прибутку від реалізації продукції, одержаної від багаторічних насаджень, треба під дерева виду

P_2 відвести 1/3 тис. га, під дерева виду P_3 – 2/3 тис. га. Тоді сумарна вартість одержаної продукції досягне максимального значення f_{max}=4 тис. грн.

7.2. Навчальні завдання

7.43. Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на електроплити. Конструкторам запропоновано до випуску три моделі плит А, Б, В за ціною відповідно 100, 60 і 50 ум. гр. од. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей, запас сировини на фірмі наведено в таблиці 7.3:

Таблиця 7.3

Сировина	Витрати сировини на одиницю виробу			Запас сировини
	А	Б	В	
I	10	4	5	700
II	3	2	1	400

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей за критерієм максимуму прибутку фірми. Записати економіко-математичну модель задачі та розв’язати її.

Відповідь: (0; 175; 0); 10500 гр. од.

№ 7.44. Знайти оптимальне поєднання посівів пшениці і картоплі, що максимізують дохід, на площі 8000 га, якщо економічні показники їх виробництва задано в таблиці 7.4:

Таблиця 7.4.

Види ресурсів	Затрати на 1 га посівів		Об’єм ресурсів
	пшениці	картоплі	
Механізована праця, тр.-зм.	0,6	4,6	1000
Конно-ручна праця, люд,-дн.	2	22	50000
Урожайність, ц/га	20	100	-
Прибуток, тис. гр.од./ц	0,3	0,1	-

Відповідь: 6696,65 га, 1303,348 га, 53213.39 гр. од.

7.3. Завдання для перевірки знань

№ 7.45. Знайти оптимальне поєднання посівів кукурудзи і гороху з максимальною вартістю валової продукції, якщо економічні показники їхнього виробництва наведені в таблиці 7.5.

Таблиця 7.5

Виробничі ресурси	Витрати на 1 ц		Об'єм ресурсів
	кукурудзи	гороху	
Пашня, га.	0,025	0,05	1200
Ручна праця, люд./дн., тр./зм.	0,16	0,074	6000
Механізована праця, тр./зм.	0,064	0,037	2500
Ціна реалізації 1ц, тис. гр. од.	5,5	10	-

Відповідь: 34341,463 ц, 6829.27 ц, 257170,73 тис. гр. од.

№ 7.46. Для виготовлення чотирьох видів продукції (А, Б, В, Г) використовується три види сировини (I, II, III). Інші умови задачі задано в таблиці 7.6:

Таблиця 7.6

Ресурси	Запас ресурсів, од.	Норми витрат сировини на одиницю продукції, од.			
		А	Б	В	Г
I	3400	2	1	0,5	4
II	1200	1	5	3	0
III	3000	1	0	6	1
Прибуток від реалізації продукції, гр.. од.		7,5	3	6	12

Визначити план випуску продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальною.

Тема 8. Розв'язування задач симплексним методом за допомогою штучного базису (М-метод)

Розв'язування розширених задачі ЛП за допомогою штучного базису (М-методу).

8.1. Теоретичні відомості

Якщо система обмежень ЗЛП не містить одиничної матриці, з якої був би складений початковий базис (а таких задач більшість), то варто застосувати інші методи розв'язування ЗЛП. Один із них є так званий

метод штучного базису або М-метод.

При розв'язуванні ЗЛП методом штучного базису в ті рівняння-обмеження, які не містять базисних змінних („природних" чи додаткових), вводять по одній ***штучній*** (невід'ємній) змінній $x_{n+i} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$. Для того, щоб виключити штучні змінні з базису, їх вводять у цільову функцію з достатньо великими від'ємними коефіцієнтами (–М) (при розв'язуванні задач на максимум). Тому ЗЛП зі штучними базисними змінними називають М-задачею.

Після виключення штучних змінних з базису при застосуванні симплекс-методу, у наступних таблицях відповідні стовпці також виключають. Штучні змінні назад у базис не вводяться. На відміну від додаткових змінних, штучні змінні потрібні тільки для створення початкового базису і не мають практичного економічного змісту. Якщо ж у оптимальному плані М-задачі залишиться штучна змінна, то відповідна вихідна задача не має розв'язку.

У таблицях замість одного оцінкового (індексного) рядка можна вводити два: *m+1* - ший - для цільової функції *f*, *m+2* – гий – для $M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$, і оцінка оптимальності перевіряється за двома рядками. Якщо штучні змінні з базису вже виведені, то відшукання оптимального плану продовжується з використанням лише першого рядка.

У випадку задачі на мінімізацію в цільової функції штучні змінні мають коефіцієнти (+М).

8.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача. Знайти мінімум цільової функції $Z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 \geq 3, \quad \text{де} \quad x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3). \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо задачу до канонічного виду:

$$f = -Z = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

В базис можна ввести змінну x_4, тому що коефіцієнти при цій змінній утворюють одиничний вектор. Введемо штучні змінні x_6, x_7 в систему та цільову функцію:

$$f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 3, \\ x_j \geq 0 \ \left(j = 1,2,3,4,5,6,7 \right) \end{cases}$$

Отже, отримали М-задачу. Перша ітерація записана в таблиці 8.1.

В цій таблиці для визначення ключового рядка знаходимо найменше відношення вільних членів до відповідних елементів ключового рядка: $\min\left\{\frac{5}{2}; \frac{2}{1}; \frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5}$. Це число відповідає третьому рядку.

Штучна змінна $\boldsymbol{x_7}$ виводиться з базису і з таблиці (таблиця 8.2).

Таблиця 8.1

Б1	***C_i***	0	-5	-2	3	0	0	-M	-M
	C_i	***b***	***x₁***	***x₂***	***x₃***	***x₄***	***x₅***	***x₆***	***x₇***
x₆	-M	5	2	-1	1	0	0	1	0
x₄	0	2	1	1	-1	1	0	0	0
x₇	-M	3	**5**	-8	2	0	-1	0	1
m+1			5	2	-3	0		0	0
m+2		-8M	-7M	+9M	-3M		M		

Таблиця 8.2

Б2	***C_i***	0	-5	-2	3	0	0	-M
	C_i	***b***	***x₁***	***x₂***	***x₃***	***x₄***	***x₅***	***x₆***
x₆	-M	3,8	0	2,2	0,2	0	0,4	1
x₄	0	1,4	0	**2,6**	-1,4	1	0,2	0
X₁	-5	0,6	1	-1,6	0,4	0	-0,2	0
m+1		-3	0	10	-5	0	1	0
m+2		-3,8M		2,2M	-0,2M		-0,4M	

Таблиця 8.3

Б3	C_i / C_i	0	-5	-2	3	0	0	-M
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	-M	2,62	0	0	**1,38**	-0,85	0,23	1
X_2	-2	0,54	0	1	-0,54	0,38	0,08	0
X_1	-5	1,46	1	0	-0,46	0,62	-0,08	0
m+1 *m+2*		-8,38 -2,62M	0	0	0,38 -1,38M	-3,86 0,85M	0,24 -0,29M	0

Штучна змінна x_6 виводиться з базису і з таблиці. Отримуємо таблицю 8.4.

Таблиця 8.4

Б4	C_i / C_i	0	-5	-2	3	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_3	3	1,90	0	0	1	-0,62	0,17
X_2	-2	1,57	0	1	0	0,05	0,17
X_1	-5	2,33	1	0	0	**0,34**	0
m+1		-9,09	0	0	0	-3,66	0,17

Таблиця 8.5

Б	C_i / C_i	0	-5	-2	3	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_3	3	6,15	1,52	0	1	0	0,17
X_2	-2	1,23	-0,15	1	0	0	0,17
X_4	0	6,85	2,94	0	0	1	0
m+1		15,99	10,76	0	0	0	0,17

Отриманий план (0; 1,23; 6,15; 6,85; 0) є оптимальним, причому $f_{\max} \approx 16$ або $Z_{\min} \approx -16$.

8.3. Питання для самоперевірки

1) Методика зведення загальної ЗЛП до канонічної форми.
2) Яка задача ЛП називається розширеною задачею? Поняття М-задачі.
3) Які змінні називаються штучними змінними? Який їхній економічний зміст?
4) Який базис називають штучним базисом?
5) Як побудувати першу симплексну таблицю для М-задачі?
6) Алгоритм розв’язування ЗЛП методом штучного базису.
7) Якими мають бути штучні невідомі в оптимальному плані М-задачі, щоб відповідний йому план вихідної задачі був оптимальним?
8) Необхідна умова оптимальності опорного плану при розв’язуванні М-задачі.

8.4. Ключові поняття

Базис штучний	Метод штучного базису
Базисні змінні	План вихідний
Змінні допоміжні	План опорний
Змінні штучні	План припустимий
М-метод	Функція цільова

8.5. Навчальні завдання

№ 8.47. Знайти мінімум цільової функції $Z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 \ge 3, \end{cases} \quad \text{де } x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2,3).$$

Відповідь: -16,1(6)≈-16.

№ 8.48. Розв’язати ЗЛП симплексним методом за допомогою штучного базису: а) $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$ б) $Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 1, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_i \ge 0, \ \ i = 1,2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2,3) \end{cases}$$

в) $Z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ г) $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6; \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15; \\ x_2 \le 2{,}5; \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \\ 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_i \ge 0, \ i = 1{,}2. \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 \quad + x_5 = 2; \\ x_i \ge 0, \ i = 1{,}2. \end{cases}$$

Відповідь: а) (0,6; 1,6); $z_{\max} = 3{,}8$;

в) (1,5; 2,5), $z_{\max} = 13{,}5$; г) (1; 0; 2; 0; 0); $z_{\max} = 8$.

№ 8.49. Фірма, що спеціалізується на виробництві електроприладів, отримала замовлення на 100 електроплит. Конструкторам запропоновано до випуску три моделі плит А, Б, В за ціною відповідно 100, 60 і 50 ум. гр. од. Норми витрат сировини для виготовлення однієї електроплити різних моделей, запас сировини на фірмі наведено в таблиці 8.6:

Таблиця 8.6

Сировина	Витрати сировини на одиницю виробу			Запас сировини
	А	Б	В	
I	10	4	5	700
II	3	2	1	400

Визначити оптимальні обсяги виробництва електроплит різних моделей за критерієм максимуму прибутку фірми. Записати економіко-математичну модель задачі та розв’язати її.

Відповідь: 10000 гр. од.

№ 7.50. Їдальня готує дієтичний салат, використовуючи для цього варений буряк, моркву і квашену капусту. Салат повинен містити не менш 710 одиниць речовини А, не менш 73 одиниці речовини В, не менш 3550 одиниць речовини С. Дані про вміст цих речовин в продуктах наведені в таблиці 8.7. Визначити складові частини салату при загальній мінімальній вартості.

Таблиця 8.7

Харчові речовини	Вміст речовин (г) у 1 кг овочів			Норми споживання речовин (кг)
	буряк	морква	капуста	
А	3	2	4	710
В	0,3	0,4	0,2	73

С	20	15	10	3550
Вартість овочів (грн)	0,4	0,5	0,4	

Відповідь:1 кілограм салату коштує 97 гривень. Щоб вартість салату була мінімальною його склад має бути таким: буряк - 230 грам, морква - 10 грам, використовувати капусту для приготування салату не рекомендується.

8.6. Завдання для перевірки знань

№ 8.51. а) Знайти максимум цільової функції $Z = 3x_1 - x_2 + x_3$ при

обмеженнях: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 18, \end{cases}$ де $x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,3)$.

Відповідь: 7,2.

б) Мінімізувати лінійну функцію $Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_6 = 15; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 510, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = -15$ в точці ($\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0$).

№ 8.52. Знайти мінімальне значення лінійної функції $Z = 2x_1 - 3x_2 + \frac{5}{2}x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_4 + 3x_6 \geq 6; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3). \end{cases}$$

Відповідь: $z_{\min} = \frac{110}{9}$ в точці ($0; -\frac{10}{3}; -\frac{8}{9}$).

№ 8.53. Розв'язати з допомогою штучного базису ЗЛП:

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ \quad x_1 + 2x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Відповідь: X*=(0; 4/3; 0; 2); $f_{\max} = \frac{14}{3}$.

№ 8.54. Скласти добовий раціон мінімальної собівартості для корови масою 550 кг, добовим надоєм 15 літрів. Маса раціону не повинна перевищувати 70 кг. Набір кормів, їхня поживність, мінімальна норма поживних речовин у раціоні і собівартість кормів дано в таблиці 8.7.

Таблиця 8.7

Харчові речовини	Кількість поживних речовин на 1 кг			Мінімальна норма харчових речовин в раціоні
	Озимого ячменю	Зеленого корму озимої пшениці	Люцерни	
Кормові одиниці, кг.	1,2	0,2	0,2	14,2

Перетравний протеїн, г.	80	18	35	1650
Собівартість 1 кг корму, грн.	10	1	1,05	-

Відповідь: $x_1 = 0{,}202;\ x_2 = 47{,}595;\ x_3 = 22.203;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0$;

$Z_{\min} = 72{,}95$ грн.

№ 8.55. Для дійної корови скласти добовий раціон мінімальної собівартості. Всі необхідні показники дано в таблиці 8.8.

Таблиця 8.8

Харчові речовини	Кількість поживних речовин на 1 кг		Мінімальна норма харчових речовин у раціоні
	Дерть кукурудзи	Сіно люцерни	
Кормові одиниці, кг	1,2	0,5	10
Перетравний протеїн, г	78	40	1020
Каротин, мг	4	50	400
Собівартість 1 кг корма, гр.	3,1	1,5	-

Відповідь: $x_1 = 9.35;\ \ x_2 = 7.26;\ \ x_3 = 4.86\ \ \ x_5 = 0;\ \ x_6 = 0$ і $Z_{\min} = 39.88$ грн.

Тема 9. Двоїсті задачі ЛП та їх властивості

Формулювання двоїстих задач ЛП з умов вихідної задачі, яка представлена в канонічній формі, й отримання оптимального розв'язку двоїстої пари задач за допомогою симплекс – методу.

9.1. Теоретичні відомості

9.1.1. Математичні моделі двоїстих задач

Поняття двоїстості є виключно важливим не лише в теоретичному відношенні, але являє також великий практичний інтерес, тому що використовується при розробці ефективних методів аналізу на чутливість. Двоїста задача - це допоміжна задача лінійного програмування, яка формулюється за допомогою певних правил безпосередньо з умов вихідної (або прямої) задачі.

Нехай пряма задача задана в канонічній формі:

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} X_i = B_j, \quad X_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}$$

Умови двоїстої задачі формуються відповідно до таблиці 9.1:

Таблиця 9.1

Пряма задача в канонічній формі	Двоїста задача		
	Цільова функція	Обмеження	Змінні
Максимізація Мінімізація	Мінімізація Максимізація	$\geq$ $\leq$	не обмежені в знакові не обмежені в знакові

Узагальнюючи, запишемо математичні моделі всіх двоїстих задач.

Вихідна задача **Двоїста задача**

Несиметричні задачі

1. $$f_{\min} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j = b_j, \quad x_j \geq 0.$$ $$z_{\max} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \leq c_i.$$

2. $$f_{\max} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j = b_j, \quad x_j \geq 0.$$ $$z_{\min} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \geq c_i.$$

Симетричні задачі

3. $$f_{\min} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j \geq b_j, \quad x_j \geq 0.$$ $$z_{\max} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \leq c_i, \quad y_j \geq 0.$$

4. $$f_{\max} = \Sigma c_{ji} x_j, \quad \Sigma a_{ij} x_j \leq b_j, \quad x_j \geq 0.$$ $$z_{\min} = \Sigma b_{ji} y_j, \quad \Sigma a_{ij} y_j \geq c_i, \quad y_j \geq 0.$$

Пару двоїстих задач називають ***симетричною*,** якщо усі обмеження в них є нерівностями, а усі змінні невід'ємні Симетричні двоїсті задачі мають такі властивості:

1. В одній задачі відшукують максимум цільової функції, в іншій – мінімуму.

2. Коефіцієнти при змінних в цільовій функції однієї задачі є вільними членами системи обмежень в іншій.

3. Кожна із задач задана у стандартній формі, а саме: в задачах на максимум всі нерівності виду „≤”, а в задачі на мінімум – всі нерівності виду „≥”.

4. Матриці коефіцієнтів при змінних в системах обмежень є транспонованими одна до одної.

5. Число нерівностей у системі обмежень однієї задачі дорівнює числу змінних у іншій задачі.

6. Умова невід’ємності змінних є в обох задачах.

7. Якщо на *j*-ту змінну прямої задачі накладена умова невід’ємності, то *j*-те обмеження двоїстої задачі буде нерівністю; якщо *j*-та змінна прямої задачі не обмежена умовою невід’ємності, то *j*-те обмеження двоїстої задачі буде рівнянням.

9.1.2. Зв’язок між оптимальними розв’язками двоїстих задач. Теореми двоїстості

1. Якщо одна із двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то його має й інша задача. Оптимальні значення їхніх цільових функцій рівні: $\max Z = \min F$ і навпаки (***перша*** (основна) ***теорема двоїстості***).

Якщо цільова функція однієї із задач не обмежена, то умови іншої задачі суперечливі (друга задача не має розв’язків).

2. Відповідність між початковими змінними однієї із задач і додатковими змінними іншої задачі можна задати таблицею 9.2:

Таблиця 9.2

Змінні вихідної задачі	
Початкові	Додаткові
$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_{m+1} \quad y_{m+2} \dots y_{m+n}$	$x_{n+1} \quad x_{n+2} \quad \dots \quad x_{n+m}$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \dots \quad \updownarrow$ $y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m$
Додаткові	Початкові
Змінні двоїстої задачі	

3. Якщо пряма ЗЛП має оптимальний план X*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y* визначається зі співвідношення $Y^* = \bar{c}_{баз} D^{-1}$, де $\bar{c}_{баз}$ - вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані. При цьому порядок слідування його координат визначається порядком запису базисних змінних у останній симплекс-таблиці;

D^{-1} - матриця, обернена до матриці D, що складена з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих ЗЛП знаходять розв'язок іншої.

4. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний *i*-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо *i*-тий компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне *i*-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння (***друга теорема двоїстості***).

5. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження (***третя теорема двоїстості***).

Економічний зміст третьої теореми двоїстості: відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Таким чином, за допомогою теорем двоїстості можна, розв'язавши симплекс-методом пряму задачу, знайти оптимальний розв'язок двоїстої, і, навпаки. Метод, при якому спочатку симплексним методом розв'язується двоїста задача, а потім оптимальний розв'язок прямої задачі відшукується за теоремами двоїстості, називається *двоїстим симплексним методом*.

9.1.3. Економічна інтерпретація двоїстої задачі

Теореми двоїстості дають можливість дати економічне тлумачення двоїстої задачі.

1. В прямій задачі кожен коефіцієнт цільової функції c_j являє собою величину прибутку, який з'явиться від реалізації *j*-го виду продукції ($j = \overline{1,n}$);

b_i ($i = \overline{1,m}$) – запаси сировини *i*-го виду, що використовується для виготовлення одиниці *j*-го виду продукції;

x_{ij} - кількість одиниць *j*-го виду продукції, яку потрібно виготовити; цільова функція *f* характеризує прибуток і має розмірністю гроші.

З того, що $f_{\max} = z_{\min}$ випливає, що розмірністю y_i $(i = \overline{1,m})$ є $\frac{гроші}{об'єми\ ресурсів}$, тобто цінність *i*-го ресурсу. Тому двоїсті оцінки називають ще *тіньовими цінами*.

2. За допомогою двоїстих оцінок можна визначити *статус* кожного ресурсу прямої задачі.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, умовно поділяють на *дефіцитні* та *недефіцитні* в залежності від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі.

Якщо $y_i > 0$, то *i*-тий ресурс *використовується повністю* і є *дефіцитним*. Якщо $y_i = 0$, то *i*-тий ресурс *використовується не повністю* і є *недефіцитним*.

3. За допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі можна визначити *рентабельність* продукції, що виготовляється.

Ліва частина *j*-го обмеження являє собою вартість усіх ресурсів, що використовуються для виробництва одиниці *j*-го виду продукції. Якщо вона більша за c_j , то виробництво *нерентабельне*, і тому в прямій задачі ЛП $x_j = 0$. Якщо ж вона дорівнює c_j , то виробництво *рентабельне*, і в оптимальному плані $x_j > 0$.

9.1.4. Післяоптимізаційний аналіз ЗЛП

Актуальність теорії двоїстості полягає в тому, що вона складає основу методів аналізу лінійних моделей на чутливість.

Якщо ЗЛП розв'язана графічно, то у рамках аналізу на чутливість розв'язуються такі три задачі: 1) аналіз на чутливість до зміни правих частин обмежень; 2) аналіз ступеня дефіцитності ресурсів; 3) аналіз розв'язку ЗЛП на чутливість до зміни коефіцієнтів цільової функції (ЦФ).

1. Перша задача на чутливість: до зміни правих частин обмежень. Вона дає відповіді на запитання: на скільки доцільно збільшити або скоротити запаси ресурсів? На яку величину можна збільшити запас деякого ресурсу для поліпшення отриманого оптимального значення ЦФ? На яку величину можна зменшити запас деякого ресурсу при збереженні отриманого оптимального значення ЦФ?

Оскільки величина запасу кожного з ресурсів фіксується в правих частинах обмежень, то цей вид аналізу називають ще аналізом на чутливість до правих частин (обмежень).

Обмеження лінійної моделі поділяються на *активні (зв'язуючі)* та *неактивні (незв'язуючі)*.

Якщо деякі обмеження є *зв'язуючими*, то ресурс, який йому відповідає, відноситься до *дефіцитних* ресурсів, оскільки він витрачається повністю.

Ресурс, з яким асоціюється *незв'язуюче* обмеження, відноситься до розряду *недефіцитних* ресурсів, тобто наявних у деякому надлишку.

Отже, аналіз на чутливість розв'язку до правих частин обмежень дає можливість визначити такі величини: 1) гранично допустиме *збільшення* запасу *дефіцитного* ресурсу, що дозволяє *поліпшити* раніше знайдений оптимальний розв'язок; 2) гранично допустиме *зниження* запасу *недефіцитного* ресурсу, що *не змінює* знайденого раніше значення ЦФ. Тоді надлишки недефіцитного ресурсу можуть бути використані для інших цілей (Задача 2 п. 9.2).

2. Друга задача на чутливість: оцінка дефіцитності ресурсів. Вона дає відповіді на запитання: збільшення якого з ресурсів є найбільш вигідним?

Для цього вводиться характеристика цінності кожної додаткової одиниці дефіцитного ресурсу, що виражається через відповідне збільшення оптимального значення ЦФ. Таку характеристику можна одержати безпосередньо за результатами першої задачі на чутливість.

Позначимо цінність додаткової одиниці ресурсу *i*-го виду через y_i, її визначають із співвідношення тіньової ціни: $y_i = \frac{\Delta f_i}{\Delta b_i}$, де Δb_i - приріст запасу *i*-го виду ресурсу, Δf_i - приріст ЦФ, що зумовлений збільшення *i*-го ресурсу на величину Δb_i..

3. Третя задача на чутливість: до зміни коефіцієнтів ЦФ. Визначає, в яких межах є допустимі зміни коефіцієнтів ЦФ, при яких оптимальний план не зміниться.

Зміна коефіцієнтів ЦФ впливає на нахил прямої ЦФ. Тому варіація коефіцієнтів ЦФ може призвести до зміни сукупності зв'язуючих обмежень, статусу якогось ресурсу (тобто зробити недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки). Отже, можуть виникнути такі питання: а) Яким є діапазон зміни (збільшення чи зменшення) якогось коефіцієнта ЦФ, при якому не зміниться оптимальний розв'язок? Б) На скільки варто змінити той чи інший коефіцієнт ЦФ, щоб зробити недефіцитний ресурс дефіцитним і навпаки?

9.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Побудувати модель двоїстої ЗЛП.

Пряма задача: $\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Зводимо до канонічної форми: $\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ &x_1 . x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

Двоїста задача: $\min f = 10y_1 + 8y_2$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} &y_1 + 2y_2 \ge 5, \\ &2y_1 - y_2 \ge 12, \\ &y_1 . + 3y_2 \ge 4, \\ &y_1 + 0y_2 \ge 0. \end{aligned}$$

y_1, y_2 - не обмежені в знаках.

Задача 2. Побудувати двоїсту задачу до даної:

$$\min z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$$.x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Розв'язання. Упорядкуємо спочатку запис задачі – нерівності мають бути смислу „$\le$", оскільки цільова функція максимізується. Для цього другу нерівність помножимо на -1 і запишемо двоїсту задачу:

$\max f = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1, \\ -2y_1 - 3y_2 = -2, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 3y_1 + y_2 = -1, \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 \le 1, \end{cases}$$

$$y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Друге і четверте обмеження виражені у вигляді рівнянь, тому що відповідні їм змінні $x_2,\ x_4$ не мають умови невід'ємності. Умови невід'ємності у двоїстій задачі стосуються лише змінних y_2, y_3, оскільки у прямій задачі їм відповідають обмеження у вигляді нерівностей.

Задача 3. Для виготовлення чотирьох видів продукції використовують три види сировини. Запаси сировини, норми її витрат і прибуток від реалізації кожного продукту наведені в таблиці 9.3.

Таблиця 9.3

Тип сировини	Норми витрат				Запаси сировини
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Ціна виробу	9	6	4	7	

Потрібно:

1. Сформулювати пряму оптимізаційну задачу на максимум загальної собівартості, указати оптимальну виробничу програму.
2. Сформулювати двоїсту задачу і знайти її оптимальний план.
3. Проаналізувати використання ресурсів у оптимальному плані.
4. Визначити, як зміниться загальна вартість продукції й план випуску при збільшенні запасів сировини II й III видів на 120 та 160 одиниць відповідно й одночасному зменшенні запасів сировини I виду на 60 одиниць.
5. Визначити доцільність включення у план виробництва продукції виду «Д» ціною 12 грошових одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду сировини.

***Розв'язання*.**

1) Нехай $x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4$ - обсяги виробництва продукції кожного виду. Тоді математична модель ЗЛП така:

Цільова функція: $\max f(\bar{x}) = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4$.

Функціональні обмеження:
$$\begin{aligned} &x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 \le 180,\\ &0x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210,\\ &4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 \le 800. \end{aligned}$$

Додаткові (прямі) обмеження: $x_{1,2,3,4} \ge 0$.

При розв'язуванні задачі на максимум загальної собівартості отримали такі результати: $x_1 = 95$; $x_2 = 210$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$.

Оптимальна виробнича програма передбачає випуск 95 одиниць першої продукції, 210 одиниць другої продукції, 0 одиниць третьої продукції та 0 одиниць четвертої продукції.

Третій і четвертий вид продукції випускати не вигідно, тому що затрати перевищують ціну.

2) Нехай y_1; y_2; y_3 - двоїсті оцінки типів ресурсів відповідно.

Цільова функція: $\min z(\bar{y}) = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3$

Функціональні обмеження:
$$\begin{aligned} &y_1 + 0y_2 + 4y_3 \ge 9,\\ &0y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 6,\\ &2y_1 + 3y_2 + 0y_3 \ge 4,\\ &y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 7. \end{aligned}$$

Додаткові (прямі) обмеження: $y_{1,2,3} \ge 0$.

Знайдемо оптимальний план цієї задачі, використовуючи теорему двоїстості:

$$\max f(\bar{x}) = 95\cdot 9 + 210\cdot 6 + 0\cdot 4 + 0\cdot 7 = 2115.$$

Перш за все, перевіримо, чи є указаний в умові задачі план допустимим розв'язком:

по ресурсу I: $1\cdot 95 + 0\cdot 210 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 \le 180$,

по ресурсу II: $0\cdot 95 + 1\cdot 210 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 210$,

по ресурсу III: $4\cdot 95 + 2\cdot 210 + 0\cdot 0 + 4\cdot 0 = 800$.

Отже, план оптимальний. Ресурс I залишається в надлишку, а ресурси II й III витрачаються повністю.

Скористаємося співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) = 0,$$
$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) = 0.$$

Оскільки $x_1 > 0$ та $x_2 > 0$, то

$$\begin{aligned} &y_1 + 4y_3 = 9,\\ &y_2 + 2y_3 = 6,\\ &y_1 = 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &y_1 = 0,\\ &y_2 = \frac{3}{2},\\ &y_3 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Обчислимо значення цільової функції двоїстої задачі:

$$z(\bar{y}) = 180\cdot 0 + 210\cdot \frac{3}{2} + 800\cdot \frac{9}{4} = 2115,$$

тобто наведений в умові план є оптимальним.

3) Ресурс I є недефіцитним ($y_1 = 0$). Ресурси II й III є дефіцитними, причому ресурс III більш дефіцитний, ніж ресурс II ($y_3 = \frac{9}{4}$, $y_2 = \frac{3}{2}$, $y_3 > y_2$).

Знайдемо норму замінюваності для дефіцитних ресурсів: $y_3 : y_2 = \frac{9}{4} : \frac{3}{2} = 3 : 2$,

отже, ресурс III в 1,5 рази більш ефективний, ніж ресурс II з точки зору впливу на максимум продукції.

4) Будемо вважати, що дані зміни об'ємів ресурсів знаходяться в межах стійкості оптимального розв'язку (в межах стійкості двоїстих оцінок), тоді за третьою теоремою двоїстості маємо:

$$\Delta f(\bar{x}) = \Delta b_i y_i,$$

$$\Delta f(\bar{x}) = (+120) \cdot \frac{3}{2} + (+160) \cdot \frac{9}{4} + (-60) \cdot 0 = 540,$$

$$f(\bar{x}) = 2655.$$

Запишемо вихідну й двоїсту ЗЛП зі зміненими обсягами ресурсів.

Вихідна:

$$\max f(\bar{x}) = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 180, \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\le 90, \\ 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 &\le 960, \end{aligned}$$

$$x_{1,2,3,4} \ge 0.$$

Двоїста:

$$\min z(\bar{y}) = 180y_1 + 90y_2 + 960y_3,$$

$$\begin{aligned} y_1 + 0y_2 + 4x_3 &\ge 9, \\ 0y_1 + y_2 + 2x_3 &\ge 6, \\ 2y_1 + 3y_2 + 0x_3 &\ge 4, \\ y_1 + 2y_2 + 4x_3 &\ge 7, \end{aligned}$$

$$y_{1,2,3} \ge 0.$$

Скористаємося співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i - c_j \right) = 0,$$

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \right) = 0.$$

Розглянемо перші співвідношення (їх два):

$0 + 4 \cdot \frac{9}{4} = 9$, отже, про x_1 нічого сказати не можна.

$\frac{3}{2} + \frac{9}{4} \cdot 2 = 6$, отже, про x_2 нічого сказати не можна.

$2 \cdot 0 + \frac{3 \cdot 3}{2} \ne 4$, $x_3 = 0$ (витрати більші від ціни),

$0 \cdot 2 + \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{9}{4} \ne 7$, $x_4 = 0$ (витрати більші від ціни).

Розглянемо другі співвідношення:

$y_1 = 0$, - нічого сказати не можна,

$y_2 = \frac{3}{2}$, - друге обмеження перетворюється у рівність.

$x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 330$,

$y_3 = \dfrac{9}{4}$, - третє обмеження перетворюється у рівність.

$4x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 960$.

Запишемо систему рівнянь та розв'яжемо її:

$$\begin{array}{lcl} x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 330, & & x_{14} = 75, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 960, & \Rightarrow & x_2 = 330, \\ x_3 = 0, & & x_3 = 0, \\ x_4 = 0, & & x_4 = 0, \end{array}$$

ЦФ: $f(x) = 9 \cdot 75 + 6 \cdot 330 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 2655$.

Це співпадає з висновком, який було зроблено раніше на основі теореми про оцінки.

5) Це завдання виконується на основі третьої властивості двоїстих оцінок, тобто оцінки як означення ефективності.

Розрахуємо показник ефективності для цієї продукції:

$$\Delta_4 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{9}{4} - 12 = -4{,}5 < 0,$$

отже, дану продукцію випускати доцільно (витрати менші від ціни).

Задача 4. Чи є для даної задачі ЛП оптимальним запропонований план
x = (0; 1/5; 8/5)?

$$z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,3}.$$

Розв'язання. Розв'язання задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Потрібно побудувати двоїсту задачу, і в припущенні, що даний план Х є оптимальним, знайти оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

Якщо при цьому оптимуми обох цільових функцій співпадуть, то припущення правильне. В протилежних випадках може бути наступне: а) даний план Х недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі; б) визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі; в) визначений план двоїстої задачі допустимий, але при цьому $f_{опт} \neq z_{опт}$, отже, не виконується перша теорема двоїстості.

Складемо двоїсту задачу до даної ЗЛП: $\max f = y_1 + 2y_2$,

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \le -4, \\ y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in R, \;\; y_2 \ge 0.$$

Перевіримо даний план на оптимальність. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі: $2\cdot0-3\cdot1/5+8/5=1$, $0+2\cdot1/5+8/5=2$.

Обидва обмеження виконуються і тому план x = (0; 1/5; 8/5) є допустимим. Припустимо тепер, що він є оптимальним, тоді для нього $z = 12\cdot0 - 4\cdot{}^{1}\!/_{5} + 2\cdot{}^{8}\!/_{5} = {}^{12}\!/_{5}$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_2 та x_3 додатні, то друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4, \\ y_1 + y_2 = 2, \end{cases} \text{, звідки } \begin{cases} y_1 = {}^{8}\!/_{5}, \\ y_2 = {}^{2}\!/_{5}. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в перше обмеження системи двоїстої задачі:

$$2\cdot8/5+2/5=18/5<12.$$

Оскільки перше обмеження виконується, тому план Y=(8/5; 2/5) є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього $f = {}^{8}\!/_{5} + 2\cdot{}^{2}\!/_{5} = {}^{12}\!/_{5}$.

Отже, екстремальні значення цільових функцій прямої та двоїстої задач збіглися, тому наше припущення оптимальності відносно даного плану виявилося правильним.

9.3. Питання для самоперевірки

1. У чому сутність двоїстості у лінійному програмуванні?
2. Які задачі ЛП називаються симетричними? Несиметричними? В чому їх відмінність?
3. Опишіть правило побудови двоїстої задачі до даної, якщо вони симетричні, несиметричні.
4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?
5. Чи правильно, що пряма задача є задачею максимізації?
6. Як за розв’язком прямої задачі знайти розв’язок двоїстої?
7. Чи правильно, що якщо для зведення обмеження прямої задачі до канонічної форми нема необхідності використовувати залишкову або

надлишкову змінну, то відповідна двоїста змінна обов’язково немає обмеження в знакові?

8. Чи правильно, що коли кількість змінних прямої задачі набагато менше числа обмежень, то більш ефективно знаходження її розв’язку шляхом розв’язування двоїстої до неї задачі?

9. Чи правильно, що в будь-якій парі допустимих розв’язків прямої й двоїстої задач значення цільової функції двоїстої задачі незалежне від її напрямку оптимізації?

10. Який висновок можна зробити про двоїсту задачу, якщо обмеження прямої задачі виявились несумісними?

11. Як визначається оптимальний розв’язок двоїстої задачі за знайденим оптимальним розв’язком вихідної задачі для симетричних і несиметричних (канонічних) двоїстих задач? Який розв’язок двоїстої задачі можна отримати відразу з останньої симплексної таблиці?

12. Наведіть економічне тлумачення двоїстої задачі до вихідної, що являє собою задачу визначення оптимального виробничого плану при даних ресурсах сировини.

9.4. Ключові поняття

Двоїста задача
Двоїсті оцінки
Допустимі межі зміни
Економічний зміст
Задачі на чутливість
Несиметричні задачі
Післяоптимізаційний аналіз
Пара взаємоспряжених задач
Пряма задача
Обмеження активні, неактивні
Ресурси дефіцитні
Ресурси недефіцитні
Симетричні задачі
Теореми двоїстості

9.5. Навчальні завдання

№ 9.56. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв’язати одну із них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

а) $$z=-5x_1+2x_2\to\max,\quad \begin{cases} x_1+x_2\ge 1,\\ 2x_1+3x_2\le 5,\end{cases}\quad x_1,x_2\ge 0.$$

б) $$z=4x_1+3x_2+x_3\to\min,\quad \begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3\ge 2,\\ x_1+x_2+x_3\le 5,\end{cases}\quad x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$$

в) $$z=5x_1+6x_2\to\max,\quad \begin{cases} x_1+x_2=5,\\ x_1+x_2\ge 3,\\ 2x_1+x_2\le 8,\end{cases}\quad x_1,x_2\ge 0.$$

г) $$z=x_1+2x_2-3x_3\to\min,\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=5,\\ x_1-x_2+2x_3\ge 4,\end{cases}\quad x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$$

д) $z = x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 \ge -13, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

е) $f = 10y_1 - 3y_2 \to \min,$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 + y_2 - y_3 \ge 3, \end{cases}$$
$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$

№ 9.57. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв'язати двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

а) $z = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \min,$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \le -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \; j = 1,2,3,4.$

б) $z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \; j = 1,2,3,4.$

в) $z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \; j = 1,2,3.$

г) $z = 2x_1 - 3x_2 \to \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \; j = 1,2,3.$

№ 9.58. Дати геометричну інтерпретацію таких взаємно двоїстих задач:
Вихідна задача(1): знайти невід'ємні значення (x_1, x_2) з умов $x_1 + 2x_2 \ge 4, \; x_1 - x_2 \ge -1$ і мінімізації лінійної функції $L = 3x_1 + 2x_2$.
Двоїста задача (1`): знайти невід'ємні значення (y_1, y_2) з умов $y_1 + x_2 \le 3, \; 2y_1 - y_2 \le 2$ і максимізації лінійної функції $T = 4y_1 - y_2$.

№ 9.59. Для виготовлення чотирьох видів продукції А, Б, В, Г використовується три види ресурсів (I, II, III). Інші умови дано в таблиці 9.4.

Таблиця 9.4

Ресурси	Норми витрат: А	Б	В	Г	Запаси ресурсів
I	2	1	0,5	4	3400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Прибуток від одиниці продукції	7,5	3	6	12	

Необхідно:

1. Визначити план випуску продукції, при якому величина прибутку від її реалізації буде максимальною.
2. Сформулювати економічно, записати й розв'язати двоїсту задачу. Дати економічне тлумачення одержаних оцінок ресурсів.

3. Знайти інтервали стійкості двоїстих оцінок по відношенню до зміни запасів ресурсів кожного виду.

4. Визначити зміни максимального прибутку від реалізації продукції при збільшенні запасу ресурсу I на 40 од., ресурсу III – на 50 од., та зменшенні запасу ресурсу II на 90 од. Оцінити окремий вплив цих змін і сумарний вплив.

5. Визначити норми змінюваності ресурсів.

6. Спів ставити оцінку витрат та прибутку за оптимальним планом та кожним видом продукції.

7. Оцінити доцільність введення в план п’ятого виду продукції Д, норми витрат сировини на одиницю якого відповідно дорівнюють 2, 4 і 2 од., а прибуток – 15 грош. од.

9.6. Завдання для перевірки знань

№ 9.60. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв’язати одну із них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

а) $$f = 2y_1 + 4y_2 + 12y_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \ge 4, \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0.$$

б) $$z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 2 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

в) $$z = -x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

г) $$z = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 6x_1 + x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Відповідь: в) X*=(95; 210; 0; 0); Y*= (0; 3/2; 9/4); $z_{max}=f_{min}=2115$.
г) X*=(0; 6; 0; 0); Y*= (1; 0); $z_{max}=f_{min}=6$.

№ 9.61. До наведених задач ЛП записати двоїсту. Розв’язати двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

а) $$z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

б) $$z = x_2 - 2x_3 - 3x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Відповідь: а) X*=(4; 5; 0; 0); Y*= (13/8; -1/4); $z_{max}=f_{min}=25$.
б) X*=(0; 7; 0; 10; 0); Y*= (1; 2); $z_{max}=f_{min}=7$.

№ 9.62. Чи є для даної задачі ЛП оптимальними запропоновані плани?

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$$

а) x = (10; 10/3); б) x = (20; 10); в) x = (10/3; 10/3).

Тема 10. Розв'язування практичної задачі симплексним методом на ПК

Застосування інформаційних технологій при розв'язуванні ЗЛП симплексним методом.

10.1. Теоретичні відомості

А) Комп'ютерний розділ на базі Mathcad

Оптимізаційні задачі в Mathcad розв'язуються за допомогою розв'язувального блока, який починається ключовим словом Given, а закінчується функцією Minimize та Maximize для визначення відповідно максимуму або мінімуму цільової функції.

Вбудована функція *Stack (* $A_1, A_2, ..., A_N$), аргументи $A_1, A_2, ..., A_N$ якої – матриці з однаковим числом стовпчиків, формує матрицю $\begin{pmatrix} \mathrm{A1} \\ \mathrm{A2} \\ \cdots \\ \mathrm{AN} \end{pmatrix}$ з тим же числом стовпчиків (матриці $A_1, A_2, ..., A_N$ розміщуються послідовно зверху вниз). Наприклад, якщо $A_1 = (1 \quad 2)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, то *stack* (*A*$_1$, *A*$_2$)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Пошук мінімуму і максимуму в функціях *minimize* та *maximize* в Mathcad реалізований декількома алгоритмами. Який із алгоритмів вибрати – залежить від виду цільової функції. На практиці рекомендується перевірити пошук розв'язку кожним методом і результати порівняти. Альтернативні методи пошуку розв'язку потрібно використовувати і в тому випадку, коли який-небудь метод не дає розв'язку. Для вибору методів розв'язування необхідно клікнути лівою кнопкою миші на функцію *minimize* або *maximize*, і викликати контекстне меню (рис. 10.1), потім клікнути правою кнопкою миші на потрібну команду в ньому, і далі поставити прапорець поряд з відповідним методом пошуку розв'язку.

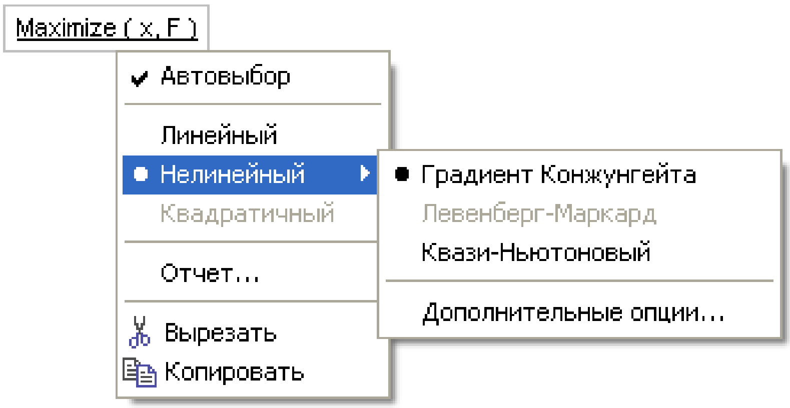


Рис. 10.1. Контекстне меню функції

Б) Комп'ютерний розділ на базі EXCEL

У складі Microsoft Excel у папці Приклади \ Розв'язання знаходиться книга з прикладами використання процедури *Пошуку рішення (Solver.xls).* У цій книзі можна довідатися про процедури максимізації чи мінімізації цільової функції, а також про накладення обмежень і збереження моделі оптимізації. Листи з прикладами розрахунків із книги *Solvsamp.xls* можна використовувати як основу для постановки користувальницьких задач оптимізації. Якщо математична модель досліджуваного процесу та обмеження на значення її параметрів лінійні, то задача досягнення цілі є ЗЛП. Книга *Solverex.xls* місить велику кількість прикладів, які можна використовувати як зразки рішення варіантів задач оптимізації ,(„Перевезення вантажів", „Графік роботи", „Оборотний капітал").

Для розв'язування задач лінійного програмування в EXCEL існує надбудова Поиск Решения. Для використання її потрібно активізувати командою Сервис-Надстройки-Поиск Решения. Тоді в меню Сервис з'явиться команда Поиск Решения. Далі потрібно описати його параметри, вказавши в *Параметрах* на *Лінійність моделі*. Запустивши Пошуку рішення, отримаємо оптимальний план.

10.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. На основі інформації, що наведена у таблиці, розв'язати задачу оптимального використання ресурсів на максимум виручки від реалізації готової продукції.

Таблиця 10.1

Вид ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції			Запаси ресурсів
	A	B	C	
Праця	1	4	3	200
Сировина	1	1	2	80
Обладнання	1	1	2	140
Ціна виробів	40	60	80	

Потрібно:

1. Сформулювати пряму оптимізаційну задачу на максимум виручки від реалізації готової продукції, отримати оптимальний план випуску продукції.

2. Сформулювати двоїсту задачу й знайти її оптимальний план за допомогою теорем двоїстості.

3. Пояснити нульові значення змінних в оптимальному плані.

4. На основі властивостей двоїстих оцінок і теорем двоїстості:

- ✓ проаналізувати використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі;
- ✓ визначити, як змінюється виручка від реалізації продукції й план її випуску при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць;
- ✓ оцінити доцільність включення в план виробу четвертого виду ціною 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.

Розв'язання. 1) *Сформулюємо пряму оптимізаційну задачу на максимум виручки від реалізації готової продукції*, щоб отримати оптимальний план випуску продукції.

X_1- норма витрат ресурсу першого виду,

X_2 - норма витрат ресурсу другого виду,

X_3 - норма витрат ресурсу третього виду.

Цільова функція має вид:

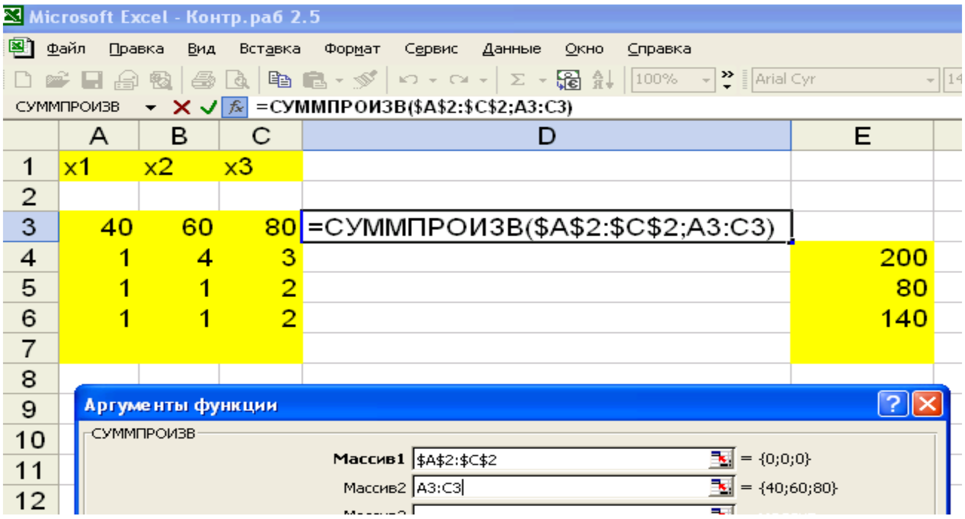
$f(\bar{x}) = 40x_1 + 60x_2 + 80x_3 \rightarrow \max$, де $x_{1,2,3} \geq 0$.

Обмеження:

1) за працею: $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 200$,
2) за сировиною $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80$,
3) за обладнанням $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 140$, $x_{1,2,3} \geq 0$.

Оптимальний план знайдемо через Поиск Решения в надбудовах Excel (Сервис / Настройки / Поиск решения). Викличемо Пошук рішення та внесемо відповідні дані.

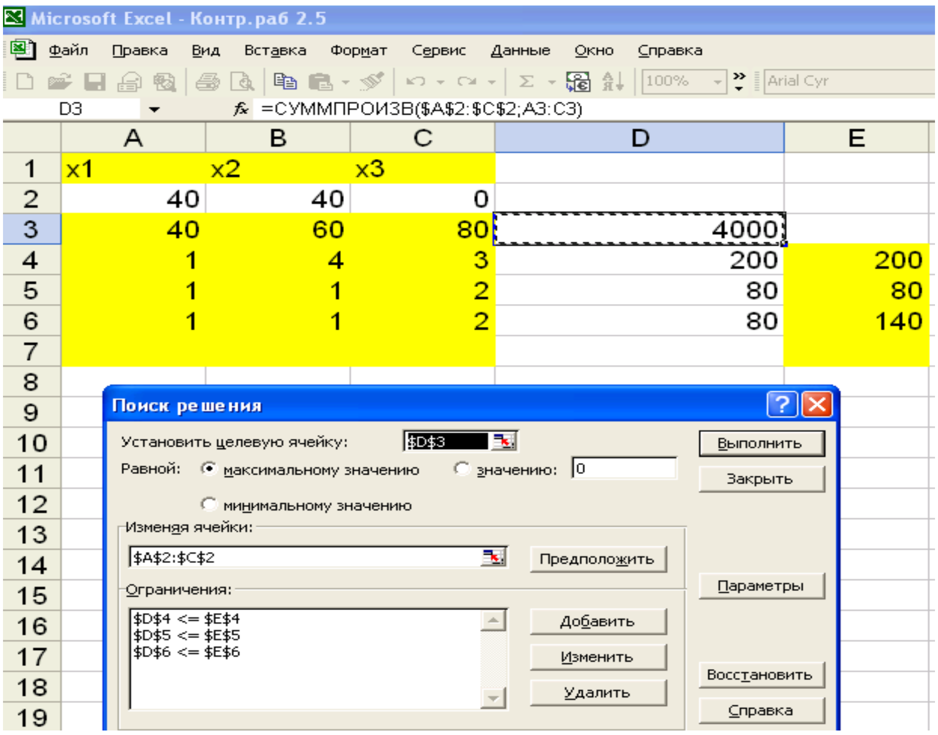
Таблиця 10.1



Тепер потрібно натиснути кнопку 

і система повідомить про знайдений розв’язок.

Таблиця 10. 2



Отриманий розв’язок означає, що максимальну виручку від реалізації готової продукції (4000 гр. од.) підприємство може отримати при випуску 40 одиниць виробів першого виду та 40 одиниць виробів другого виду. При цьому ресурси „праці” та „сировини” будуть використані повністю, із 140 одиниць обладнання буде використано лише 80 одиниць.

Excel дозволяє представити результати пошуку рішення у формі звіту (Таблиця 10. 3).

У звіті за результатами містяться оптимальні значення змінних x_1, x_2, x_3, які відповідно дорівнюють 40; 40; 0; значення цільової функції – 4000, а також недовикористаний ресурс „обладнання” у розмірі 60 одиниць.

Оптимальний план $(\bar{x})^* = (40;40;0)$.

Таблиця 10. 3

Microsoft Excel 10.0 Звіт за результатами
Робочий лист: [Задача 1.xls]
Звіт створений: 08.10.2010 14:42:36

Цільова чарунка (Максимум)

Чарунка	Ім’я	Вихідне значення	Результат
$D$3		4000	4000

Змінювані чарунки

Чарунка	Ім’я	Вихідне значення	Результат
$A$2	x1	40	40
$B$2	x2	40	40
$C$2	x3	0	0

Обмеження

Чарунка	Ім’я	Значення	Формула	Статус	Різниця
$D$4		200	$D$4<=$E$4	Зв’язана	0
$D$5		80	$D$5<=$E$5	Зв’язана	0
$D$6		80	$D$6<=$E$6	не	60

зв'язана

2) *Сформулювати двоїсту задачу й знайти її оптимальний план за допомогою теорем двоїстості*.

Число невідомих у двоїстій задачі дорівнює числу функціональних обмежень у вихідній задачі. Вихідна задача містить три обмеження: праця, сировина й обладнання. Отже, у двоїстій задачі три невідомих:

y_1 – двоїста оцінка ресурсу праця,

y_2 – двоїста оцінка ресурсу сировина,

y_3 – двоїста оцінка ресурсу обладнання..

Цільова функція двоїстої задачі формулюється на мінімум. Коефіцієнтами при невідомих в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени в системі обмежень вихідної задачі:

$g(\bar{y}) = 200y_1 + 80y_2 + 140y_3 \to \min$

Необхідно знайти такі «ціни» на типи сировини (Y_i), щоб загальна вартість використаних типів сировини була мінімальною.

***Обмеження**.* Число обмежень у системі двоїстої задачі рівне числу змінних у вихідній задачі. У вихідній задачі три змінних, отже, в двоїстій задачі три обмеження. В правих частинах обмежень двоїстої задачі стоять коефіцієнти при невідомих у цільовій функції вихідної задачі. Ліва частина визначає вартість типу сировини, яка витрачена на виробництво одиниці продукції.

Кожне обмеження відповідає певній нормі витрат сировини на одиницю продукції:

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 40$,

$4y_1 + y_2 + y_3 \geq 60$,

$3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 80$,

$y_{1,2,3,4} \geq 0$.

Знайдемо оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи теореми двоїстості.

Скористаємося першим співвідношенням другої теореми двоїстості:

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) = 0,$$

тоді

$y_1(x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 200) = 0$,

$y_2(x_1 + x_2 + 2x_3 - 80) = 0$,

$y_3(x_1 + x_2 + 2x_3 - 140) = 0$,

$(\bar{x})^* = (40;40;0)$.

Підставимо оптимальне значення вектора $\bar{x}$ в отримані вирази:

$y_1(40 + 40 \times 4 + 0 - 200) = 0$,

$y_2(40 + 40 - 80) = 0$,

$y_3(140 + 40 + 0 - 140) = 0$.

І отримаємо:

$y_1(200-200)=0$,

$y_2(80-80)=0$,

$y_3(80-140)=0$,

оскільки 80 < 140, то $y_3=0$

В задачі $x_1=40>0$ та $x_2=40>0$, тому перше і друге обмеження двоїстої задачі обертаються в рівності:

$$y_1+y_2+y_3=40$$
$$4y_1+y_2+y_3=60$$
$$y_3=0$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо: $y_1 = 6{,}67$, $y_2 = 33{,}33$, $y_3 = 0$.

Перевіряємо виконання першої теореми двоїстості:

$$g(\bar{y})=200y_1+80y_2+140y_3=$$
$$200\times 6{,}67+80\times 33{,}33+140\times 0=4000$$
$$f(\bar{x})=40x_1+60x_2+80x_3=40\times 40+60\times 40+80\times 0=4000$$

Це означає, що оптимальний план двоїстої задачі визначений правильно.

Розв'язок двоїстої задачі можна знайти, вибравши команду Поиск решений – Звіт за стійкістю надано у таблиці 10.4.

3) Пояснити нулеві значення змінних в оптимальному плані.

Підставимо в обмеження двоїстої задачі оптимальні значення вектора $\bar{y}$:

$$(\bar{y})^*=(6{,}67;33{,}33;0)$$

$y_1+y_2+y_3\ge 40$	$4y_1+y_2+y_3\ge 60$	$3y_1+2y_2+2y_3\ge 80$
$6{,}67+33{,}33+0\ge 40$	$4\times 6{,}67+33{,}33+0\ge 60$	$3\times 6{,}67+2\times 33{,}33+0\ge 80$
$40=40$	$60\ge 60$	$86{,}67\ge 80$

Витрати на три вироби перевищують ціну ($86{,}67>80$). Це ж видно і у звіті зі стійкості: значення x_3 (нормована вартість) рівна -6.67. Тобто вартість норми витрат на одиницю виробу більша ніж ціна виробу. Ці вироби не ввійдуть в оптимальний план через їх збитковість.

Таблиця 10.4

Microsoft Excel 10.0 Звіт за стійкістю

Робочий лист: Задача 1.xls

Звіт створений: 08.10.2010 12:04:27

Змінювані чарунки

Чарунка	**Ім'я**	**Результ. значення**	**Нормована вартість**	**Цільовий коефіцієнт**	**Допустиме збільшення**	**Допустиме зменшення**
\$A\$2	x1	40	0	40	20	4.000000003
\$B\$2	x2	40	0	60	100	20
\$C\$2	x3	0	-6.6666667	80	6.6666667	1E+30

Обмеження

		Результ.	**Тіньова**	**обмеження**	**Допустиме**	**Допустиме**

Чарунка	Ім'я	значення	ціна	Права част.	збільшення	зменшення
$D$4		200	6.666666667	200	120	120
$D$5		80	33.33333333	80	60	30
$D$6		80	0	140	1E+30	60

5. На основі властивостей двоїстих оцінок і теорем двоїстості:

- ✓ ***проаналізувати використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі;***
- ✓ ***визначити, як змінюється виручка від реалізації продукції й план її випуску при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць;***
- ✓ ***оцінити доцільність включення в план виробу четвертого виду ціною 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.***

Проаналізуємо використання ресурсів у оптимальному плані вихідної задачі: $200 \le 200$, $80 \le 80$, $80 \le 140$.

Запаси сировини за першим та другим видами були використані повністю, а за третім видом – обладнанням - було недовикористане на 60 одиниць.

Визначимо, як зміняться виручка й план випуску продукції при збільшенні запасів сировини на 18 одиниць.

З теореми про оцінки відомо, що коливання величини b_i призводить до збільшення або зменшення $f(\overline{X})$. Воно визначається:

$$\Delta f(\overline{X})^* = \Delta b_i y_i^*$$

$\Delta b_1 = 18$, $\Delta f_1(\overline{X})^* = \Delta b_1 y_1^* = 18 \times 33{,}33 = 600$,

$$\Delta f(\overline{X})^*_{нов.} = 4000 + 600 = 4600 \text{ (од.)}$$

З розрахунків видно, що якщо ми збільшимо запаси сировини на 18 одиниць, то виручка зросте на 600 одиниць, тобто загальна виручка складе після зміни запасів 4600 **о**диниць.

При цьому структура плану не змінилась – вироби, які були збиткові, не ввійшли і в новий план випуску, тому що ціни на них не змінились.

$$y_1 = 6{,}67 \qquad x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 200$$
$$y_2 = 33{,}33 \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80 + 18$$
$$y_3 = 0 \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 140$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$x_1 + 4x_2 = 200,$$

$$x_1 + x_2 = 98,$$

і отримаємо: $x_1 = 64$, $x_2 = 34$.

Новий оптимальний план $(\bar{x})^*_{нов} = (64;34;0)$

Зміна загальної вартості продукції на 600 одиниць отримана за рахунок збільшення плану випуску першого виду продукції на 24 одиниць за ціною 40 одиниць (40*(64-40)=960 од..) і зменшення на 6 одиниць. плану випуску продукції другого виду за ціною 60 одиниць (60*(34-40)=-360 ед.)

Оцінимо доцільність включення в план виробу четвертого виду вартістю 70 одиниць, на виготовлення якого витрачається по дві одиниці кожного виду ресурсів.

Для оцінки доцільності включення в план виробу четвертого виду скористуємося другою властивістю двоїстої оцінки.

$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 70$, підставимо $y_1 = 6.67$, $y_2 = 33.33$, $y_3 = 0$;

$2 \times 6.67 + 2 \times 33.33 + 2 \times 0 = 70$.

Оскільки 80>70, то включення в план виробу четвертого виду невигідне.

Задача 2. У склад раціону годівлі на стійловий період дійних корів входить 9 видів кормів. У таблиці 10.1 наводяться необхідні дані про корми. Для забезпечення наміченої продуктивності стада необхідно, щоб у раціоні годівлі містилось не менше 14,5 кг кормових одиниць, 1750 г перетравного протеїну, 110 г кальцію, 45 г фосфору, 660 мг каротину й 18 кг сухої речовини. В якості додаткових умов дано наступні співвідношення для окремих груп кормів у раціоні: концентратів (кукурудза, макуха та комбікорм) – 5-20%, грубих кормів (стебла кукурудзи, сіно люцернове, сіно суданки) – 15-35%, силосу – 35-60%, коренеплодів (буряк цукровий і кормовий) –10-20%. Визначити раціон годівлі тварин за критерієм мінімальної собівартості.

Розв'язання: Позначимо через x_j (j=1, ..., 9) кількість виробленої продукції. Задача зводиться до знаходження оптимального плану виробництва продукції кожного виду з метою отримання максимального прибутку. Економіко-математична модель складається з цільової функції, системи обмежень та умови невід'ємності змінних x_j, j=1, ..., 9.

Цільова функція:

$$F = 0.43x_1 + 0.65x_2 + 0.05x_3 + 0.25x_4 + 0.3x_5 + 0.6x_6 + 0.21x_7 + 0.14x_8 + 9.5x_9 \to \min$$

при обмеженнях:

Таблиця 10.1

Вміст корисних речовин у 1 кг корму та його собівартість.

Харчові речовини	Кукуру-дза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбі-корм

Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	0,4	13
Каротин, мг	4	2	5	45	15	15	-	-	-
Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,13	0,87
Собівартість грн/кг	0,43	0,65	0,05	0,25	0,3	0,6	2,1	0,14	9,5

$$\begin{cases}
1.34x_1 + 1.9x_2 + 0.37x_3 + 0.49x_4 + 0.52x_5 + 0.2x_6 + 0.26x_7 + 0.12x_8 + 0.9x_9 \ge 14.5 \\
78x_1 + 356x_2 + 14x_3 + 116x_4 + 65x_5 + 19x_6 + 12x_7 + 9x_8 + 112x_9 \ge 1750 \\
0.7x_1 + 5.9x_2 + 6.2x_3 + 17.7x_4 + 5.7x_5 + 1.5x_6 + 0.5x_7 + 0.4x_8 + 15x_9 \ge 110 \\
3.1x_1 + 9.1x_2 + x_3 + 2.2x_4 + 2.3x_5 + 0.5x_6 + 0.4x_7 + 0.4x_8 + 13x_9 \ge 45 \\
4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 45x_4 + 15x_5 + 15x_6 \ge 660 \\
0.87x_1 + 0.87x_2 + 0.8x_3 + 0.85x_4 + 0.85x_5 + 0.26x_6 + 0.24x_7 + 0.13x_8 + 0.87x_9 \ge 18 \\
x_1 + x_2 + x_9 \ge 0.5 \\
x_1 + x_2 + x_9 \le 0.2 \\
x_3 + x_4 + x_5 \ge 0.15 \\
x_3 + x_4 + x_5 \le 0.35 \\
x_6 \ge 0.35 \\
x_6 \le 0.6 \\
x_7 + x_8 \ge 0.1 \\
x_7 + x_8 \le 0.2 \\
x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,9}.
\end{cases}$$

Введемо ці дані у таблицю 10.2. У дев'ятому рядку будуть розміщатися шукані коефіцієнти. Початкове наближення повинне бути в даній задачі не рівним 0, оскільки у обмеженнях є ділення на суму коефіцієнтів і може виникнути помилка ділення на 0.

Таблиця 10.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
2	Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
3	Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
4	Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
5	Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	0,4	13
6	Каротин, мг	4	2	5	45	15	15			
7	Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,13	0,87
8	Собівартість, грн/кг	0,43	0,65	0,05	0,25	0,3	0,6	2,1	0,14	9,5
9	xj	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Побудуємо цільову функцію та систему обмежень (Таблиця 10.3).

Таблиця 10.3

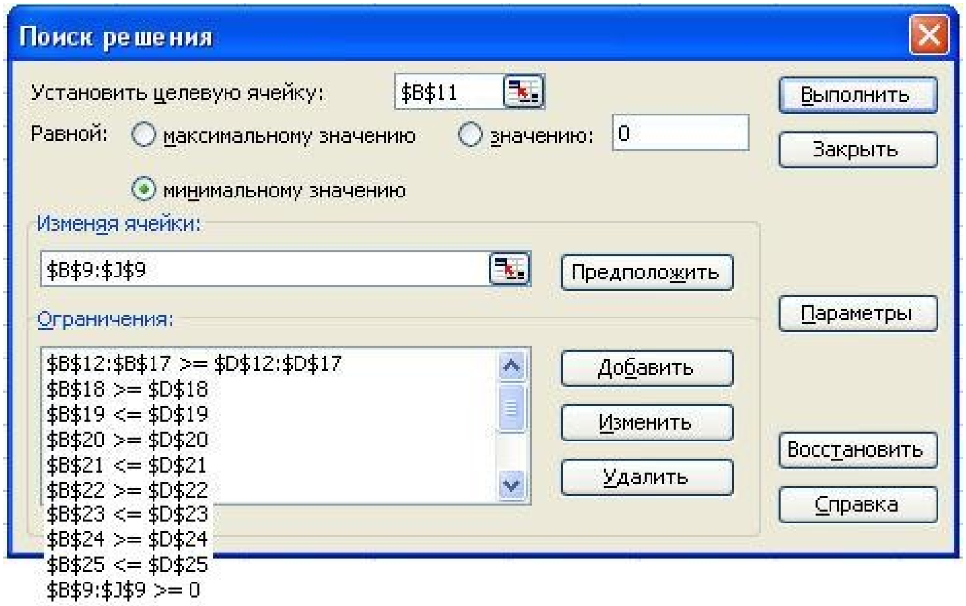
	A	B	C	D
10				
11	ЦФ:	**=СУММПРОИЗВ(B8:J8;B9:J9)**	------>min	
12	Система обмежень:	=СУММПРОИЗВ(B2:J2;$B$9:$J$9)	<=	14,5
13		=СУММПРОИЗВ(B3:J3;$B$9:$J$9)	<=	1750
14		=СУММПРОИЗВ(B4:J4;$B$9:$J$9)	<=	110
15		=СУММПРОИЗВ(B5:J5;$B$9:$J$9)	<=	45
16		=СУММПРОИЗВ(B6:J6;$B$9:$J$9)	<=	660
17		=СУММПРОИЗВ(B7:J7;$B$9:$J$9)	<=	18
18		=СУММ(B9:C9;J9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,05
19		=СУММ(B9:C9;J9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,2
20		=СУММ(D9:F9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,15
21		=СУММ(D9:F9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,35
22		=G9/СУММ(B9:J9)	>=	0,35
23		=G9/СУММ(B9:J9)	<=	0,6
24		=СУММ(H9:I9)/СУММ(B9:J9)	>=	0,1
25		=СУММ(H9:I9)/СУММ(B9:J9)	<=	0,2

Викличемо пошук розв'язку та внесемо відповідні дані (Таблиця 10.4).

Тепер потрібно натиснути кнопку Выполнить і система повідомить про знайдений розв'язок (Таблиця 10.5):

З отриманого розв'язку виходить, що мінімальні витрати на складання раціону годівлі, що містить всі необхідні елементи, складають 12,34 грошових одиниць.

Таблиця 10.4



Таблиця 10.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
9	xj	6,2653785	0	0,573197	10,39124	0	10,96444	0	3,132712	0
10										
11	ЦФ:	12,337827	------>min							
12	Система обмежень:	16,268212	>=	14,5						
13		1938,6272	>=	1750						
14		209,56432	>=	110						
15		49,591909	>=	45						
16		660	>=	660						
17		18	>=	18						
18		0,1999995	>=	0,05						
19		0,1999995	<=	0,20						
20		0,35	>=	0,15						
21		0,35	<=	0,35						
22		0,35	>=	0,35						
23		0,35	<=	0,60						
24		0,1000005	>=	0,10						
25		0,1000005	<=	0,20						

Отже, цільова функція:

$$F_{\min} = 0.43x_1 + 0.65x_2 + 0.05x_3 + 0.25x_4 + 0.3x_5 + 0.8x_6 + 0.15x_7 + 0.14x_8 + 0.75x_9 = 12{,}34 .$$

Оптимальний раціон годівлі:

X = (6,2653785; 0; 0,573197; 10,39124; 0; 10,96444; 0; 3,132712; 0), тобто в раціон ввійдуть:

Кукурудза – 6,2653785 кг

Стебла кукурудзи – 0,573197 кг

Сіно люцерни – 10,39124 кг
Силос кукурудзи – 10,96444 кг
Буряк кормовий – 3,132712 кг

Решта кормів (макуха, сіно суданки, буряк цукровий та комбікорм) в раціон не ввійшли..

Двоїста задача.

До даної задачі можна скласти двоїсту. Вона будується на основі прямої задачі шляхом транспортування матриці коефіцієнтів. При цьому коефіцієнти цільової функції прямої задачі стають вільними членами системи обмежень двоїстої задачі, і, навпаки. Отже, в даному прикладі цільова функція двоїстої задачі:

$$F = 14{,}5y_1 + 1750y_2 + 110y_3 + 45y_4 + 660y_5 + 18y_6 + 0.05y_7 - 0.2y_8 +$$
$$+ 0.15y_9 - 0.35y_{10} + 0.35y_{11} - 0.6y_{12} + 0.1y_{13} - 0.2y_{14} \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases}
1.34y_1 + 78y_2 + 0{,}7y_3 + 3{,}1y_4 + 4y_5 + 0{,}87y_6 + y_7 - y_8 \le 0.43 \\
1.9y_1 + 356y_2 + 5.9y_3 + 9.1y_4 + 2y_5 + 0.87y_6 + y_7 - y_8 \le 0.65 \\
0.37y_1 + 14_2 + 6.2y_3 + y_4 + 5y_5 + 0.8y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.05 \\
0{,}49y_1 + 116y_2 + 17.7y_3 + 2.2y_4 + 45y_5 + 0.85y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.25 \\
0.52y_1 + 65y_2 + 5.7y_3 + 2.3y_4 + 15y_5 + 0.85y_6 + y_9 - y_{10} \le 0.3 \\
0.2y_1 + 19y_2 + 1.5y_3 + 0.5y_4 + 15y_5 + 0.26_6 + y_{11} - y_{12} \le 0.6 \\
0.26y_1 + 12y_2 + 0.5y_3 + 0.4y_4 + 0.24y_6 + y_{13} - y_{14} \le 0.21 \\
0.12y_1 + 9y_2 + 0.4y_3 + 0.4y_4 + 0.13y_6 + y_{13} - y_{14} \le 0.14 \\
0.9y_1 + 112y_2 + 15y_3 + 13y_4 + 0.87y_6 + y_7 - y_8 \le 9.5 \\
y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,14}.
\end{cases}$$

Розв’язок прямої задачі дає оптимальний план мінімізації витрат на раціон годівлі, а розв’язок двоїстої задачі – оптимальну систему оцінок поживної цінності використаних кормів.

Розв’язавши цю задачу за допомогою команди Поиск Решения, отримаємо наступний висновок: значення цільових функцій двоїстих задач рівні:

Z(X)=F(Y)=12,34

З отриманих даних видно, що всі ресурси використовуються оптимально, крім сіна суданки та комбікорму, які взагалі не ввійшли в раціон.

На основі розв’язку задачі можна зробити наступний висновок: отриманий розв’язок прямої задачі є оптимальним, тобто ферма, використовуючи даний раціон, мінімізує його собівартість, при цьому поживна цінність раціону знаходиться в межах норм.

10.3. Навчальні завдання і завдання для перевірки знань

Розв'язати задачу за допомогою ПК.

№ 10.63. У склад раціону годівлі на стійловий період дійних корів входить 9 видів кормів. В таблиці 10.6 наводяться необхідні дані про корми. Для забезпечення наміченої продуктивності стада необхідно, щоб у раціоні годівлі містилось не менше (14,5+0,1N) кг кормових одиниць, (1750+N) г перетравного протеїну, (110+N) г кальцію, (45+0,1N) г фосфору, (660+0,1N) мг каротину й (18+0,1N) кг сухої речовини. В якості додаткових умов дано наступні співвідношення для окремих груп кормів у раціоні: концентратів (кукурудза, макуха та комбікорм) – 5-20%, грубих кормів (стебла кукурудзи, сіно люцернове, сіно суданки) – 15-35%, силосу – 35-60%, коренеплодів (буряк цукровий і кормовий) –10-20%. Визначити раціон годівлі тварин за критерієм мінімальної собівартості.**(**N – сума двох останніх цифр залікової книжки студента).

Таблиця 10.6

Вміст корисних речовин у 1 кг корму та його собівартість.

Харчові речовини	Кукурудза	Макуха	Стебла кукурудзи	Сіно люцерни	Сіно суданки	Силос кукурудзи	Буряк цукровий	Буряк кормовий	Комбікорм
Кормові одиниці, кг	1,34	1,9	0,37	0,49	0,52	0,2	0,26	0,12	0,9
Перетравний протеїн, г	78	356	14	116	65	19	12	9	112
Кальцій, г	0,7	5,9	6,2	17,7	5,7	1,5	0,5	0,4	15
Фосфор, г	3,1	9,1	1	2,2	2,3	0,5	0,4	13	---
Каротин, мг	4	2	5	45	15	15	---	---	---
Суха речовина	0,87	0,87	0,8	0,85	0,85	0,26	0,24	0,12	0,87
Собівартість, грн/кг	0,43+0,01N	0,65-0,01N	0,05+0,01N	0,25+0,01N	0,3+0,01N	0,8-0,01N	0,15+0,01N	0,14+0,01N	0,75-0,01N

Розділ III

Тема 11. Розв'язування транспортної задачі методом потенціалів.

Формулювання транспортної задачі ЛП, складання її математичної моделі; формування її початкового опорного плану різними методами; відшукування оптимального плану ТЗ методом потенціалів.

11.1.Теоретичні відомості

Нехай маємо *m* пунктів відправлення (постачальники) $A_1, A_2,...,A_m$, в яких знаходиться однорідна продукція в кількостях $a_1, a_2,..., a_m$ відповідно. Нехай є n пунктів призначення (споживачі) $B_1, B_2,..., B_n$, яким потрібна ця продукція відповідно в кількостях $b_1, b_2, \ldots, b_n$ Нехай відомі c_{ij} витрати за перевезення одиниці продукції з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Нехай x_{ij} - кількість продукції, яка вивозиться з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Задача полягає в тому, щоб визначити, скільки продукції з кожного пункту відправлення треба вивезти в кожний пункт призначення, щоб сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Наведемо математичну модель транспортної задачі для будь-яких m постачальників і n споживачів: знайти такі значення змінних x_{ij} $i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$, які задовольняють обмеження

$$\begin{cases} x_{11} & + & x_{12} & + & ... & + & x_{1n} & = & a_1 \\ x_{21} & + & x_{22} & + & ... & + & x_{2n} & = & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{m1} & + & x_{m1} & + & ... & + & x_{mn} & = & a_m \\ x_{11} & + & x_{21} & + & ... & + & x_{m1} & = & b_1 \\ x_{12} & + & x_{22} & + & ... & + & x_{m2} & = & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{1n} & + & x_{2n} & + & ... & + & x_{mn} & = & b_n \end{cases}$$

(тобто з кожного пункту відправлення повністю вивозиться продукція і кожний пункт споживання одержує потрібну кількість цієї продукції) і перетворюють у мінімум цільову функцію

$$Z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{mn}x_{mn}$$

Ці співвідношення і цільову функцію можна зобразити в більш компактній формі:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}(\min), \qquad \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_1(j=\overline{1,n}), \qquad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_1(i=\overline{1,m}),$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Необхідною і достатньою умовою розв'язку транспортної задачі є умова балансу $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,

тобто загальна кількість виробленої продукції дорівнює загальній кількості попиту споживачів.

Транспортна задача, де виконується ця умова, називається **закритою** (збалансованою). Кожна транспортна задача розв'язується за тією самою схемою, що й будь-яка задача лінійного програмування симплексним методом, а саме:

1) знаходимо спочатку будь-який базисний невід'ємний розв'язок;

2) перевіряємо, чи буде знайдений розв'язок оптимальним;

3) якщо знайдений розв'язок не оптимальний, то виконуємо кілька кроків заміни, які приводять до оптимального розв’язку.

Всі дані та шукані величини можна розмістити в таблиці 11.1:

Таблиця 11.1

Пункти відправлення	Пункти призначення				
	B_1	B_2	...	B_n	Запаси
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
…	…	…	...	…	...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	...	b_n	

11.2. Знаходження початкового опорного плану. Спосіб "північно-західного кута" (діагональний спосіб)

Цей спосіб полягає в тому, що ми розподіляємо продукцію постачальників і задовольняємо потреби споживачів у тому порядку, в якому записано в таблиці: спочатку розподіляємо продукцію першого постачальника а1, намагаючись повністю задовольнити за його рахунок перших записаних у таблиці споживачів B_1,.B_2,..., Bn, наскільки це можливо. Вичерпавши продукцію постачальника A_1, розподіляємо продукцію постачальника A_2 за тим самим принципом: задовольняємо потреби дальших споживачів, яких не вдалося задовольнити за рахунок постачальника A_1, і так доти, поки не буде розподілена вся продукція всіх постачальників. Таким чином заповнення кліток таблиці починається з крайньої в лівому верхньому кутку клітки, з "північно-західного кута", і продовжується в напрямі діагоналі таблиці до крайньої клітки в правому нижньому кутку. Розглянемо застосування цього методу на прикладі.

11.3. Спосіб мінімальної вартості

Цей спосіб полягає в тому, що з усієї таблиці вартостей вибираємо найменшу і в клітці, яка їй відповідає, записуємо менше з чисел a_i і b_j. З розгляду виключаємо або рядок, відповідний постачальнику, запаси якого вичерпані; або стовпчик, відповідний споживачеві, потреби якого повністю задоволенні, або рядок і стовпчик, якщо вичерпані запаси постачальника і задоволенні потреби споживача. В частині таблиці, що залишилася, знову вибираємо найменшу вартість, і процес розподілу запасів продовжуємо, доки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені. При використанні способу мінімальної вартості клітки кількість ітерацій, як правило, є меншою, ніж при використанні способу "північно-західного кута".

11.4. Спосіб подвійної переваги

Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, що позначені двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, що позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім – за методом мінімальної вартості.

11. 5. Поліпшення плану

Природно поліпшувати треба той початковий опорний план, для якого транспортні витрати найменші. В нашому прикладі таким планом є план, знайдений способом "північно-західного кута".

Підрахуємо кількість заповнених кліток *k*. Якщо початковий опорний план транспортної задачі має m+n-1 додатних перевезень ($k=m+n-1$), то він називається **невиродженим** (або неособливим). Якщо початковий опорний план має менше m+n-1 ($k<m+n-1$) додатних перевезень, то він називається **виродженим** (особливим).

В даному прикладі початковий опорний план невироджений, тому що кількість заповнених кліток дорівнює 7 ($k=m+n-1$).

Теорема (умова оптимальності опорного плану). Якщо план транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система з m+n чисел U_i і V_j, які задовольняють умовам:

$U_i+V_j=C_{ij}$ для $X_{ij}>0$ (для заповнених кліток) і

$U_i+V_j\le C_{ij}$ для $X_{ij}=0$ (для не заповнених кліток),

$$(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}).$$

Числа U_i. і V_j називаються **потенціалами** постачальників і споживачів відповідно.

Таким чином, якщо виявиться, що хоч для однієї вільної клітки $\Delta_{ij}=U_i+V_j-C_{ij}>0$, то план *не оптимальний і його треба поліпшувати*. Поліпшення плану полягає в тому, що вільну клітку, для якої $\Delta_{ij}>0$, заповнюємо, перемістивши в неї за певним правилом число з іншої клітки, щоб для цієї заповненої клітки $\Delta_{ij}=0$. Якщо є декілька кліток, для яких $\Delta_{ij}>0$, то заповнюємо ту клітку, для якої Δ_{ij} *найбільше*. При цьому будуємо ланцюг (цикл) перерозподілу постачань. Це замкнена ламана лінія, ребра якої знаходяться у рядках і стовпчиках таблиці, перша вершина із знаком „+” у клітці, яка потребує навантаження (A_3B_2), а інші вершини з почерговими знаками „-” і „+” у навантажених клітках.

Ланцюги можуть мати різноманітну форму (рисунок 11.1):

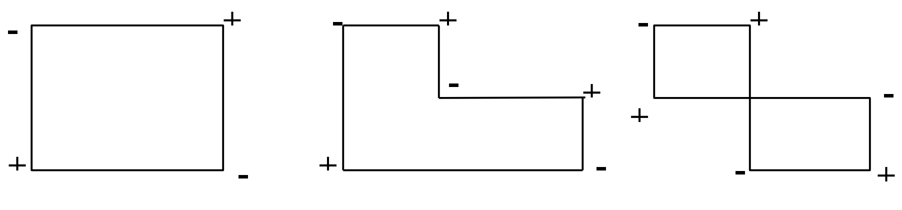


Рис. 11.1. Цикл перерозподілу

Точка самоперетину не є вершиною ланцюга, і в цій клітці знак не ставиться. Знак „-” означає, що клітку треба розвантажити (частково або повністю), а знак „+”, що клітку треба навантажити або довантажити. Щоб не порушити умову балансу, по ланцюгу треба перекинути одне й те ж число одиниць вантажу. У якості такого числа вибираємо найменше навантаження кліток із знаком „-”.

11.5. Випадок виродження транспортної задачі

Якщо початковий опорний план має менше m+n-1 ($k<m+n-1$) додатних перевезень (завантажених кліток), то він називається **виродженим** (особливим). Щоб **зняти виродження**, необхідно $m+n-1-k$

кліток навантажити нульовими постачаннями. При цьому ніяких перевезень не відбувається. Це необхідно тільки, щоб можна було знайти всі потенціали, і саме у процесі розташування потенціалів краще вводити нульові постачання. Ці навантаження можна робити довільно, але таким чином, щоб через навантажені клітки не можна було б провести замкнений ланцюг.

Виродження у транспортній задачі може виявитися не тільки у початковому плані, а й якщо у ланцюгу серед кліток із знаком „–" зустрічаються клітки з однаково найменшими постачаннями. При цьому, щоб позбутися виродження, треба одну з цих кліток розвантажити повністю, а в інших залишити нульові постачання

11.6. Відкрита модель транспортної задачі

Ми розглядали транспортну задачу, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто попит і пропозиція збалансовані. На практиці часто ця умова не виконується. Якщо під час перевірки умови збалансованості виявилося, що ТЗ є відкритою, то її потрібно звести до закритої. Можуть бути такі випадки:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва більший від сумарних потреб споживачів, у цьому випадку вводять у задачу фіктивного споживача B_{n+1} з потребами $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і з вартостями перевезень $C_{in+1}=0$;

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва менший від сумарних потреб споживачів. У цьому випадку вводять фіктивного постачальника A^{ϕ}_{m+1} із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{in1}^{n} b_j - \sum_{ji1}^{nm} a_i$, і з вартостями перевезень $C_{in+1}=0$ $(i = \overline{1, n})$.

Відповідні навантаження у цих клітках будуть мати зміст додаткових змінних, а саме: невивезеного вантажу від постачальників у першому випадку і незадоволеного попиту споживачів у другому випадку.

Після того, як задача збалансована, вона розв'язується звичайним способом.

11.7. Методичні вказівки до розв’язування типових задач

Задача 1. З трьох пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт в п'ять пунктів споживання. Транспортні виграти, об'єм виробництва і об'єм споживання подано в таблиці 11.2. Знайти початковий опорний план методом північно-західного кута.

Розв'язання. В цій задачі маємо три постачальники і п'ять споживачів. Кількість базисних невідомих дорівнює m+n-1, тобто 7. Будемо заповнювати нову таблицю 11.3. Запишемо спочатку можливості постачальників і потреби споживачів. Як бачимо, споживачеві B_1 потрібно 30 одиниць продукції, постачальник A_1 має 125 одиниць; отже, за рахунок постачальника A_1 можна повністю задовольнити потреби споживача B_1. Записуємо в клітку (1; 1) найменше з чисел 30 і 125: $x_{11} = min$ (30, 125) = 30. Перший стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпчика проставимо нулі (пусті клітки).

У постачальника A_1 залишається ще 125 – 30 = 95 одиниць. Тепер будемо заповнювати клітку (1; 2) .Споживачеві B_2 необхідно 50 одиниць. Отже, за рахунок постачальника A_1, у якого залишалося ще 95 одиниць, можна повністю задовольнити потреби споживача B_2. В клітку (1; 2) записуємо найменше з чисел 50 і 95, тобто $x_{12} = min$ (50,95) = 50. Другий стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпчика проставимо пулі. У постачальника, A_1 залишається ще 95-50=45 одиниць.

Таблиця 11.2

B_j / A_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	8	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Тепер будемо заповнювати клітку (2; 3). Споживачеві B_3 необхідно ще додати 55 одиниць, постачальник A_2 має 60 одиниць. В клітку (2; 3) записуємо найменше з чисел 55 і 60 , тобто $x_{23} = min$ (55, 60) = 55. Третій стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в останній клітці цього стовпчика поставимо нуль.

У постачальника A_2 залишається ще 60-55=5 одиниць. Тепер будемо заповнювати клітку (2;4). Споживачеві B_4 необхідно 40 одиниць. Записуємо в клітку (2; 4) найменше з чисел 5 і 40, тобто $x_{24} = min$ (5; 40) = 5. Потреби споживача B_4 задоволено частково, залишилась потреба в 40 – 5 = 35 одиницях. Резерви постачальника A_2 вичерпані. Другий рядок виключаємо з розгляду, тобто в останній клітці цього рядка ставимо 0.

Тепер будемо заповнювати клітку (3; 4). Споживачеві B_4 необхідно додати 35 одиниць, постачальник A_3 має 115 одиниць. В клітку (3; 4) записуємо найменше з чисел 35 і 115, тобто $x_{34} = min$ (35, 115) = 35. У постачальника A_3 залишається 115 – 35 = 80 одиниць.

Заповнюємо останню клітку (3; 5). Споживачеві B_5 необхідно 80 одиниць, тобто x_{35} = 80. На цьому процес побудови початкового опорного плану способом "північно-західного кута" закінчується.

Таблиця 11.3

B_j A_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	30	50	45			125
A_2			55	5		60
A_3				35	80	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Таким чином, початковий .опорний план, знайдений цим способом, буде таким: x_{11}=30, x_{12}=50, x_{13}=45, x_{23}=55, x_{24}=5, x_{34}=35, x_{35}=80, решта x_{ij}=0.

Значення цільової функції:

$$Z = 7\cdot 30 + 5\cdot 50 + 2\cdot 45 + 4\cdot 55 + 6\cdot 5 + 2\cdot 35 + 3\cdot 80 = 1110$$

Задача 2. Розглянемо другий спосіб знаходження початкового опорного плану – методу мінімальної вартості.

Розв’язання. Розглянемо застосування цього методу на попередньому прикладі. Для цього випишемо таблицю вартостей, розмістивши їх в кутку кожної клітки (таблиця 11.4). Шукаємо в таблиці вартостей найменший елемент. У нашому випадку він дорівнює 1 і розміщений у клітці (3; 2). В клітку (3; 2) поміщаємо найменше з чисел 50 і 115, тобто

$$x_{12} = \min (50, 115) = 50.$$

Другий стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_3 залишилося 115 - 50 = 65 одиниць. В частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом буде 2. Він знаходиться в клітці (1; 3). У цю клітку поміщаємо найменше з чисел 100 і 125, тобто

$$x_{13} = \min (100, 124) = 100.$$

Третій стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилося 125 – 100 = 25 одиниць. В частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом буде 2. Він знаходиться в клітці (3; 4). Споживачеві B_4 треба 40 одиниць, а у постачальника A_3 залишилося 65 одиниць. В клітку (3; 4) поміщаємо найменше з чисел 40 і 65, тобто

$$x_{34} = \min (40, 65) = 40.$$

Четвертий стовпчик далі не розглядаємо. Споживачеві B_5 залишилась потреба 80 – 25 = 55 одиниць.

Таблиця 11.4

B_j A_j	B_i	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7 25	5	2 100	8	7 0	125
A_2	8 5	9	4	6	9 55	60
A_3	5	1	9	2	3	115

	0	50		40	25	
Потреби	30	50	100	40	80	300

Аналогічно, продовжуючи заповнення таблиці, одержуємо такий опорний план: $x_{11} = 25$, $x_{13} = 100$, $x_{21} = 5$, $x_{25} = 55$, $x_{32} = 50$, $x_{34} = 40$, $x_{35} = 25$, решта $x_{ij} = 0$. Значення цільової функції

$$Z = 7 \cdot 25 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 55 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 25 = 1115.$$

Перевіримо на **оптимальність** план, що знайдений способом "північно-західного кута". Складемо систему рівнянь для визначення потенціалів, використовуючи таблицю 2. Для заповнених кліток маємо:

$$C_{11}=U_1+V_1=7, \qquad C_{23}=U_2+V3=4,$$
$$C_{24}=U_2+V_4=6, \qquad C_{12}=U_1+V_2=5,$$
$$C_{34}=U_3+V_4=2, \qquad C_{13}=U_1+V_3=2,$$
$$C_{35}=U_3+V_5=3.$$

Маємо систему 7 рівнянь з 8 невідомими. Така система має безліч розв'язків. Знайдемо один з них. Нехай $U_1= 0$, тоді з першого рівняння знаходимо $V_1=7-U_1=7-0=7.$

Аналогічно з останніх рівнянь знаходимо значення всіх інших змінних:

$$V_2=5-U_1=5, \qquad V_3=2-U_1=2, \qquad U_2=4-V_3=2,$$
$$V_4=6-U_2=4, \qquad U_3=2-V_4=-2, \qquad V_5=3-U_3=5.$$

Для визначення потенціалів U_i і V_j можна використати таблицю 11.1. У тих клітках, де були постачання, записуємо транспортні витрати. Нехай $U_1= 0$. Тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13} , можна знайти V_1, V_2, V_3.

$$V_1=C_{11}-U_1 \qquad V_2=C_{12}-U_1, \qquad V_3=C_{13}-U_1.$$
$$V_1=7, \qquad V_2=5, \qquad V_3=2.$$

Знаючи V_3 і C_{23}, знаходимо $U_2= 2$. Знаючи U_2 і C_{24}, знаходимо $V_4= 4$. Знаючи V_4 і C_{34}, знаходимо $U_3= - 2$. Знаючи U_3 і C_{35}, знаходимо $V_5 = 5$.

Ті клітки, для яких не було постачань, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, в нижній - суму U_i+V_j і порівнюємо її з транспортними витратами C_{ij} , тобто перевіримо умову $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$. Потенціали рядків і стовпців можна записувати в останньому стовпцеві та останньому рядку таблиці 11.4 відповідно.

Таблиця 11.5

v_j / u_i	7	5	2	4	5
0	7	5	2	8 / **4**	7 / **5**
2	8 / **9**	9 / 7	4	6	9 / **7**

-2	5 **5**	1 **3**	9 **0**	2	3

Δ_{14}=4-8=-4, Δ_{15}=5-7=-2, Δ_{21}=9-8=1, Δ_{22}=7-9=-2,
Δ_{25}=7-9=-2, Δ_{31}=5-5=0, Δ_{32}=3-1=2, Δ_{33}=0-9=-9.

Оскільки Δ_{21}= 1 > 0 і Δ_{32}=2 >0, то знайдений опорний план не є оптимальним. Його можна поліпшити, побудувавши ланцюг (цикл) перерозподілу постачань. Найбільша оцінка відповідає клітці (3, 2).

Запишемо план; що знайшли способом "північно-західного кута" (таблиця 11.6).

Таблиця 11.6

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	**-** Θ 50	**+** Θ 45		
A_2			- Θ 55	+ Θ 5	
A_3		**+** Θ		- Θ 35	80

В клітку (3, 2) треба розмістити вантаж, позначимо кількість його через Θ. Тепер треба знайти замкнений цикл, який забезпечить баланс в задачі. Для цього треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (3, 4) (щоб сума перевезень у третьому рядку залишилася без зміни); далі треба додати Θ до об'єму перевезення клітки (2, 4) (щоб сума перевезень у четвертому стовпці залишилася без зміни); далі треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (2, 3), (щоб сума перевезень у другому рядку залишилася без зміни); далі треба додати Θ до об'єму-перевезення клітки (1, 3) (щоб сума перевезень у третьому стовпчику залишилася без зміни); нарешті, треба відняти Θ з об'єму перевезення клітки (1, 2) (щоб сума перевезень у першому рядку і у другому стовпці залишилася без зміни).

Величина Θ визначає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити за знайденим циклом. Θ визначаємо як *найменшу* з усіх поставок, що стоять в клітках, де Θ віднімається (*найменша поставка зі знаком „мінус”*).

В даному прикладі Θ = min (50, 55, 35) = 35. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, поданий в таблиці 11.7.

Для перевірки на оптимальність нового опорного плану треба знову побудувати систему потенціалів і перевірити виконання умови оптимальності

Таблиця 11.7

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	$-\Theta$ 30	15	$+\Theta$ 80		
A_2	$+\Theta$		$-\Theta$ 20	40	
A_3		35			80

для кожної вільної клітки. Щоб знайти U_i та V_j, складемо таблицю 11.8.

У тих клітках, де були постачання, записуємо транспортні витрати C_{ij}. Нехай U_i= 0, тоді, знаючи C_{11}, C_{12}, C_{13},, можна знайти V_1, V_2, V_3,:

$V_1=C_{11}-U_1=7-0=7$, $V_2=C_{12}-U_2=5-0=5$, $V_3=C_{13}-U3=2-0=2$.

Знаючи C_{23} і V_3 , можна знайти U_2: $U_2=C_{23}-V_3=4-2=2$.

Таблиця 11.8

U_i \ V_j	7	5	2	4	7
2	7	5	2	8 / 4	7 / 7
0	8 / 9	9 / 7	4	6	9 / 9
-4	5 / 3	1	9 / -2	2 / 0	3

Знаючи C_{24} і U_2, знаходимо $V_4=C_{24}-U_3=6-2=4$.
Знаючи C_{32} і V_2, знаходимо $U_3=C_{32}-V_2=1-5=-4$.
Знаючи C_{35} і U_3 знаходимо $V_5=C_{35}-U_3=3-(-4)=7$.

Ті клітки, в яких не було постачань, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, а у нижній - суму $U_i + V_j$ і порівняємо її з транспортними витратами C_{ij} , тобто перевіримо умову $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$. Бачимо, що для клітки (2, 1) $\Delta_{21} = 9 – 8 = 1 > 0$, тобто друга умова оптимальності не виконується. Таким чином, план не є оптимальним, його можна поліпшити.

В клітку (2, 1) таблиці 11.7 розміщуємо вантаж Θ. Знаходимо замкнений цикл, переміщуючись по клітках (2, 3), (1, 3), (1, 1). Вибираємо клітки, в яких Θ віднімається: Θ = min (20, 30) = 20. В результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план, поданий у таблиці 11.9.

Таблиця 11.9

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5

A_1	10	15	100		
A_2	20			40	
A_3		35			80

Для перевірки на оптимальність нового опорного плану треба знову побудувати систему потенціалів і перевірити виконання другої умови оптимальності для кожної вільної клітки. Для знаходження U_i і V_j, складемо таблицю 11.10, як це робили в таблиці 11.5 і в таблиці 11.8 (в наступних таблицях обчислення без пояснень).

Таблиця 11.10

V_j / U_i	7	5	2	5	7
0	7	5	2	8 5	7 7
1	8	9 6	4 3	6	9 8
-4	5 3	1	9 -2	2 1	3

Усі ненавантажені клітки цієї таблиці мають $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} = 0$, тобто для них виконується друга умова оптимальності, отже, розв'язок

$$x_{11} = 10, x_{12} = 15, x_{13} = 100, x_{21} = 20, x_{24} = 40, x_{32} = 35, x_{35} = 80$$

і решта $x_{ij} = 0$, буде оптимальним.

Транспортні витрати на перевезення дорівнюють:

$$Z_{min} = 7•10 + 5•15 + 2•100 + 8•20 + 6•40 + 1•35 + 3•80 = 1020.$$

Примітка. Потенціали можна виставляти і в робочому плані: для рядків U_i у останньому правому стовпчику, і для стовпчиків V_j – останньому рядку таблиці. Так, для останнього плану таблиця матиме вигляд (таблиця 11.11):

Таблиця 11.11

Потреби B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_i Запаси		30	80	100	40	80	U_i
A_1	125	10	15	100			0
A_2	60	20			40		1
A_3	115		35			80	-4
V_j		7	5	2	5	7	1020

На рисунку 11.2 надана схема перевезень, яка відповідає оптимальному плану:

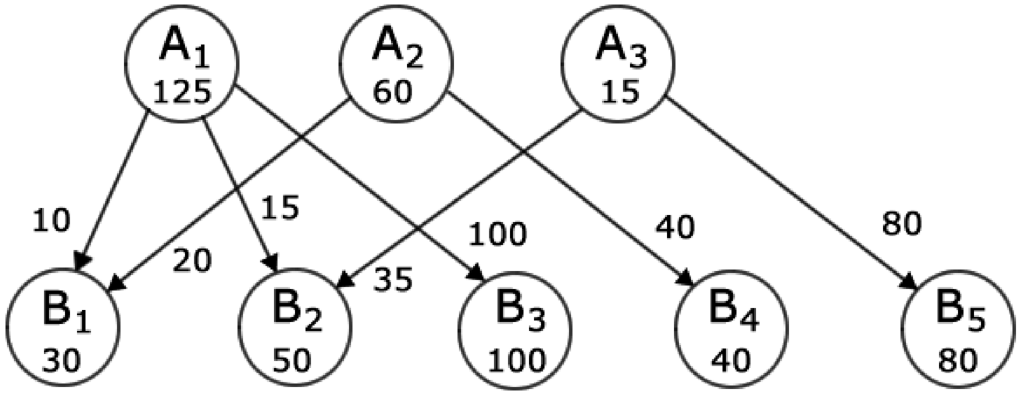


Рис. 11.2. Схема перевезень

Перевірка:

$Z_{min}=Z_{поч.}-\Theta\bullet\Delta_{ij}\bullet Z_{поч}=1100 Z'_{нов.}=1100-35\bullet2=1030$ (після першого перерозподілу).

$Z''_{нов}$ = 1030-20•1= 1010 (після другого перерозподілу).

Задача 3. Розв'язати транспортну задачу (таблиця 11.12). Сформулювати економіко-математичну модель вихідної транспортної задачі, знайти оптимальний план закріплення постачальників за споживачами, встановити єдиність або неєдиність оптимального плану.

Таблиця 11.12

Запаси постачальника	Потреби споживача				
	25	10	20	30	15
40	5	3	4	6	4
20	3	4	10	5	7
40	4	6	9	3	4

Розв'язання. Сформулюємо ЕММ цієї задачі:
Нехай x_{ij} - об'єми перевезень від i - того постачальника до j - того споживача.
Цільова функція:

$$\min f(\bar{x}) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 4x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 5x_{24} + 7x_{25} +$$
$$+ 4x_{31} + 6x_{32} + 9x_{33} + 3x_{34} + 4x_{35}$$

Перевіримо, чи виконується умова балансу:

$\sum M_i = 40 + 20 + 40 = 100$, $\qquad \sum N_j = 25 + 10 + 20 + 30 + 15 = 100$,

тобто умова балансу виконується – транспортна задача закрита.

Функціональні обмеження:

за постачальниками: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 40$,

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 20$,

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 40$;

за споживачами:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 25,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100,$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20,$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30,$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 15.$

Таблиця 11.13

Запаси постачальника	Потреби споживача					u_i
	25	10	20	30	15	
40	5	3 **10**	4 **20**	6	4 **10**	0
20	3 **20**	4	10	5	7	-1
40	4 **5**	6	9	3 **30**	4 **5**	0
v_j	4	3	4	3	4	340

Оцінимо вартість перевезень:

$$f(\bar{x}) = 3 \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 4 = 340.$$

$$u_i + c_{ij} = v_j;\ \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}, \qquad \Delta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: оптимальний план перевезень представлений у таблиці 11.12 та 11.13. Вартість перевезень за цим планом складає 340 грошових одиниць. Оптимальний план є єдиним.

Задача 4. З трьох пунктів виробництва треба вивезти однорідний продукт в чотири пункти споживання. Транспортні витрати, об'єм виробництва і об'єм споживання подано в таблиці 11.14.

Треба спланувати перевезення вантажу з пунктів виробництва до пунктів споживання при мінімальних транспортних витратах.

Таблиця 11.14.

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	2	400
A_2	2	4	5	1	180
A_3	3	2	4	3	250
Потреби	100	140	200	90	

Розв'язання. Підрахуємо сумарні запаси $\sum_{i=1}^{3} a_i$ = 400 + 180 + 250 = 830 та сумарні потреби $\sum_{j=1}^{4} b_i$ =100+140+200+90 = 530. Запаси перевищують потреби на 300 одиниць. Необхідно ввести фіктивного споживача з потребою 300 одиниць і вартостями перевезень, що дорівнюють нулю. Після того, як задача збалансована, знаходимо початковий опорний план, наприклад, способом *"північно-західного кута"* (таблиця 11.15).

Таблиця 11.15

A_i	B_j					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B^{Φ}_5	
A_1	100	140	160			400
A_2			40	90	50	180
A_3					250	250
Потреби	100	140	200	90	300	830

Спочатку заповнюємо клітку (1, 1): X_{12} = min (100, 400) = 100. Перший стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (1, 2). X_{12} = min (140, 400) = 140. Другий стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (1, 3). X_{13} = min (160, 200) = 160. Перший рядок далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (2, 3). X_{23} = min (40, 180) = 40. Третій стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо клітку (2,4). X_{24} = min (90, 140) = 90. Четвертий стовпчик далі не розглядаємо.

Заповнюємо дві клітки $X_{25} = 50$, $X_{35} = 250$.

Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до одержаного плану будуть такі:

$$Z = 4•100 + 5•140 + 3•160 + 5•40 + 1•90 + 0•50 + 0•250 = 1870.$$

Знайдемо тепер початковий опорний план способом *мінімальної вартості*.

У таблиці (11.16) відшукуємо найменшу вартість, не враховуючи поки що фіктивного споживача (клітки фіктивного постачальника чи споживача з нульовими тарифами заповнюються в останню чергу). Таким елементом є 1 в клітці (2, 4). Заповнюємо цю клітку, X_{24} = min (90, 180) = 90. Четвертий стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_2 залишилося 90 одиниць.

Таблиця 11.16

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	B_4	$B^{ф}_5$	U_i
		100	140	200	90	300	
A_1	400	4	5	3 200	2	0 200	0
A_2	180	2 90	4	5	1 90	0	-1
A_3	250	3 10	2 140	4	3	0 100	0
V_j		3	2	3	2	0	1180

В частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 2, що знаходиться в клітці (2, 1) і (3, 2). Заповнюємо клітку (3,2) (сюди можна більше перевезти).

X_{32} = min (140, 250) = 140. Другий стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_3 залишилося 110 одиниць. Заповнюємо клітку (2, 1): X_{21} = min (100, 90) = 90. Другий рядок далі не розглядаємо. Споживачеві B_1 треба ще 10 одиниць.

В частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 3, що знаходиться в клітках (1, 3) і (3, 1). Заповнюємо клітку (1, 3). X_{13} = min (200, 400) = 200. Третій стовпчик далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилося 200 одиниць. Далі заповнюємо клітку (3, 1). X_{31} = min (10, 110) = 10. Перший стовпчик далі не розглядаємо. Тепер заповнюємо останній стовпчик.

X_{15}=200, X_{35}=100.

Транспортні витрати на перевезення вантажу відповідно до отриманого плану такі:

$$Z = 3 \cdot 200 + 2 \cdot 90 + 1 \cdot 90 + 3 \cdot 10 + 2\text{-}140 = 1180.$$

Ці витрати менші, ніж при знаходженні способом "північно-західного кута", тому перевіряти на оптимальність будемо план, знайдений способом мінімальної вартості. Кількість заповнених кліток дорівнює 7, тобто план невироджений.

Для перевірки на оптимальність у таблиці 11.16 запишемо потенціали рядків U_i та стовпчиків V_j .

Нехай U_1 = 0. Тоді знаходимо V_3 = 3 - 0 =3 і V_5 = 0 - 0 = 0. Тепер можна знайти U_3=0-0=0. Знаючи U3, заходимо V1=3-0=3 і V2=2-0 =2. Тепер можна знайти U_2=2-3=-1. Нарешті, V_4=1-(-1)=2. Для кліток, в яких не було поставок, друга умова оптимальності виконується. Усі клітки в таблиці 11.16 мають $\Delta_{ij} \leq 0$. Отже, розв'язок X_{13}=200, X_{21}=90, X_{24} = 90, X_{31} = 10, X_{32} = 140 буде оптимальним. При такому плані весь попит задоволений, але не всі запаси вивезені: у постачальника A_1 залишається 200 одиниць, а у A_3 залишається 100 одиниць вантажу. Транспортні витрати будуть мінімальними і становитимуть 1180 грошових одиниць.

11.8. Питання для самоперевірки

1. Постановка транспортної задачі (ТЗ) за критерієм вартості.
2. Що називають постачальниками і їхніми запасами (потужностями), споживачами і їхніми потребами (попитом)?
3. Сформулюйте умову збалансованості ТЗ. Яка модель ТЗ називається закритою?
4. Яка модель ТЗ називається відкритою? Як звести її до закритої моделі?
5. Чи завжди можна збалансувати транспортну задачу?
6. Що називається матрицею перевезень та матрицею витрат? Яку основну умову задовольняють елементи цих матриць?
7. Запишіть математичну модель ТЗ за критерієм вартості перевезень.
8. Скільки ненульових елементів повинен містити невироджений базисний план транспортної задачі?
9. Який опорний план ТЗ називається невиродженим? Виродженим?
10. Що потрібно робити при виникненні ситуації виродженості поточного плану в транспортній задачі?
11. Які клітинки таблиці ТЗ називається завантаженими, які не завантаженими? Яким невідомим відповідають завантажені клітинки?
12. Що називається ланцюгом (циклом) перерозподілу? Якого виду вони можуть бути?

13. Що таке система потенціалів рядків і стовпців, яким вона відповідає?

14. Сформулюйте умову оптимальності плану ТЗ.

15. Опишіть побудову початкового опорного плану ТЗ методом: а) північно-західного кута; б) мінімальної вартості; в) подвійної переваги.

16. Опишіть побудову нового опорного плану ТЗ за попереднім планом.

17. Для чого вводяться фіктивні пункти?

11.9. Ключові поняття

Відкрита транспортна задача

Закрита транспортна задача

Критерій оптимальності

Метод мінімального елемента

Метод північно-західного кута

Метод подвійної переваги

Постачальники

Потенціали

Споживачі

Транспортна задача ЛП

Умова існування розв'язку ТЗ

Фіктивні постачальники, споживачі

11.10. Навчальні завдання

№ 11.64. Зерно з 4-х районів повинне бути вивезене на 3 елеватори. Очікуваний збір зерна в районах: a_1 = 400 тис. центнерів; a_2 = 500 тис. центнерів; a_3 = 800 тис. центнерів; a_4 = 500 тис. центнерів.

Потужність елеваторів: b_1 = 700 тис. центнерів; b_2 = 800 тис. центнерів;
b_3 = 700 тис. центнерів.

Витрати на перевезення 1 ц зерна (у грош. од.) з районів до елеваторів наведені в таблиці 11.17. Скласти план перевезень зерна з мінімальними транспортними витратами. Первісний розподіл перевезень скласти методом «північно-західного кута».

Таблиця 11.17

Райони	Елеватори		
	1-й	2-й	3-й
А	10	40	30
Б	70	10	50
В	40	80	30
Г	40	20	80

Відповідь: z_{min} = 480 млн. гр. од.

№ 11.65. На чотирьох станціях A_1, A_2, A_3,A_4 є деякий однорідний вантаж, який потрібно перевезти чотирьом замовникам B_1, B_2, B_3. Потреби замовників (в умовних одиницях) і тарифи (вартість перевезення одиниці вантажу, у гр. од.) зазначені в таблиці 11.18. Потрібно спланувати перевезення так, щоб загальна сума вартостей була найменшою. Первісний план перевезення скласти методом найменшої вартості.

Таблиця 11.18

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	15	9	120
A_2	11	2	7	3	180
A_3	4	5	12	8	200
A_4	85	65	90	60	300
Потреби	180	200	190	230	800

Відповідь: z_{min} = 1815 гр. од.

№ 11.66. Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу з мінімальними транспортними витратами при вихідних даних, наведених у таблиці 11.19:

Таблиця 11.19.

Пункти відправлення	Пункти призначення						Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	8	6	4	7	5	550
A_2	8	5	4	7	6	3	700
A_3	12	6	10	4	8	5	450
A_4	14	7	5	4	10	6	800
Потреби	550	400	300	500	450	300	2500

Початковий опорний план скласти методом «північно-західного кута».

Відповідь: z_{min} = 14650 гр. од.

№ 11.67. Скласти план посівів кормових культур за трьома ділянками землі різної родючості так, щоб загальні витрати засобів були мінімальними. Необхідні дані наведені в таблиці 11. 20:

Таблиця 11.20

Кормові культури	Витрати на 1 га за ділянками, тис. гр. од.			Посівні площі
	1	2	3	

Кукурудза на силос	11	14	15	600
Кормовий буряк	40	45	46	80
Однолітні трави	4	3,5	4,5	130
Картопля	38	36	40	100
Озимі на корм	4	5	4,5	50
Кормові бахчі	42	46	50	40
Розміри ділянок, га	500	200	300	1000

Відповідь: z_{min} = 16670 тис. гр. од.

№ 11.68. Скласти оптимальний план перевезень пального зі складів ремонтно-транспортного підприємства (РТП) району на склади господарств. Критерій оптимальності – мінімум тонно-кілометрів. Запаси пального на складах, потребі господарств у пальному і відстані від складів до господарств дано в таблиці 11. 21.

Таблиця 11.21

Склади	Пункти призначення					Запаси пального, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	20	22	28	30	18	1400
A_2	24	22	25	25	20	1200
A_3	23	20	24	26	25	1300
Потреби, т	1100	850	750	800	600	3900 / 4100

Відповідь: z_{min} = 83700 тонно-кілометрів.

№ 11.69. Розв'язати ТЗ, вихідні дані якої наведені в таблиці 11. 22.

Таблиця 11.22

B_j / A_i	**20**	**45**	**30**
74	7	3	6
40	4	8	2
36	1	5	9

Відповідь: z_{min} = 215.

№11.70. Розподілити сільськогосподарські роботи за марками тракторів так, щоб загальні витрати на виконання робіт були мінімальними. Вихідні дані наведено в таблиці 11.23.

Таблиця 11.23

Вид роботи	Собівартість 1 га робіт, тис. гр. од.				Об'єм робіт, ум. га
	С-80 (2 шт.)	ДТ-54 (10 шт.)	Бєларусь (5 шт.)	КПД-35 (2шт.)	
Культивація	0,80	1,00	0,90	0,85	1500
Оранка	2,40	3,00	3,40	3,20	2000
Сіяння	-	-	1,00	0,95	800
Боронування	0,20	0,27	0,25	0,27	700
Сезонна норма робіт	1000	1600	1550	600	5000 / 4750

Відповідь: z_{min} = 6974 тис гр. од.

11.11. Завдання для перевірки знань

№ 11. 71. У трьох постачальників A_1, A_2, A_3 є деякий однорідний вантаж, який потрібно перевезти чотирьом споживачам B_1, B_2, B_3, B_4. Попит споживачів (в умовних одиницях), запаси вантажів у постачальників (у тих же одиницях), і тарифи (у гр. од.) дано в таблиці 11.24.

Таблиця 11.24

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	8	7	11	160
A_2	14	3	1	8	400
A_3	9	5	16	7	240
Потреби	180	200	190	230	800

Скласти план перевезень з мінімальними транспортними витратами. Первісний розподіл постачань скласти методом «північно-західного кута».

Відповідь: z_{min} = 3070 гр. од.

№ 11. 72. Скласти оптимальний план перевезень бензину з мінімальними транспортними витратами (у тис. гр.) за наступними вихідними даної таблиці (таблиця 11.25):

Таблиця 11.25

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси, т
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	4	5	2	3	100
A_2	1	4	2	3	3	40
A_3	3	5	2	1	2	30
A_4	2	6	3	5	4	30
Потреби, т	50	50	10	60	30	200

Первісний розподіл постачань скласти методом «північно-західного кута».

Відповідь: z_{min} = 480 тис. гр. од.

№ 11. 73. Скласти оптимальний план перевезень вантажів від трьох постачальників з вантажами 240, 40, 110 т до чотирьох споживачів потребами 90, 190, 40 та 130 т відповідно. Тарифи на перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задано матрицею

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}$$

Відповідь: z_{min} = 3120 гр. од.,

оптимальний розв'язок $\begin{pmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 90 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

№ 11.74. В області є три спеціалізовані майстерні з ремонту двигунів сільськогосподарських машин, що обслуговують 6 районів. Виробничі потужності майстерень, потреба районів у ремонті двигунів за рік і витрати (тис. гр. од.) на перевезення одного двигуна з районів до майстерень наведені в таблиці 11.26.

Таблиця 11.26

Райони	Майстерні			Потреби в ремонтах двигунів, шт.
	I	II	III	
1-й	4,5	2,7	8,3	110
2-й	2,1	4,3	2,4	200
3-й	7,5	3,1	4,2	170
4-й	5,3	1,9	6,2	140
5-й	4,1	6,7	3,1	100
6-й	3,5	4,8	5,1	120
Потужності	400	250	150	760

Продовження таблиці 11.26

майстерен ь, шт.				800

Скласти план прикріплення районів до ремонтних майстерень, що забезпечує мінімальні транспортні витрати.

Відповідь: z_{min} = 2315 тис. гр. од.

Тема 12. Задачі, що розв'язуються за схемою транспортної задачі, але зі знаходженням максимуму цільової функції

Розв'язування задач економічного змісту методом максимальної оцінки.

12.1. Теоретичні відомості

Існує ряд практичних економічних ЗЛП, які можна розв'язати за схемою транспортної задачі, хоча їх умова прямо не пов'язана з транспортними перевезеннями. У деяких з цих задач треба знайти максимум цільової функції. Початковий опорний план у таких задачах можна складати методом "північно-західного кута", але доцільніше застосувати метод *найбільшої оцінки* клітки, аналогічний до методу найменшого тарифу. Оцінками кліток у задачах, які розв'язуються за схемою ТЗ, будемо називати коефіцієнти цільової функції (аналогічні тарифам у ТЗ).

Критерій оптимальності транспортної задачі, при знаходженні максимуму цільової функції методом потенціалів, складається з двох умов.

1. Сума потенціалів рядка і стовпчика дорівнює оцінці *навантаженої* клітки: $u_i + v_j = \boxed{c_{ij}}$.

2. Сума потенціалів рядка і стовпчика не менша від оцінки *ненавантаженої* клітки: $u_i + v_j \geq c_{ij}$.

Якщо друга умова не виконується для якихось кліток таблиці, то план не є оптимальним і його можна покращити, вибравши серед цих кліток для навантаження клітку з найбільшою величиною $c_{ij} - (u_i + v_j)$.

12.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача. На трьох ділянках з різними попередниками потрібно скласти план посівів 3 сортів озимої пшениці: А, В, С з критерієм оптимальності – максимум валової продукції. Розміри ділянок попередників, посівні площі сортів пшениці та їх урожайність за ділянками наведені в таблиці 12.1.

Таблиця 12.1.

Попередники	Сорти пшениці	A	B	C
	посівна площа розміри ділянок	**1000**	**600**	**400**
Чистий пар	**800**	30	28	25
Кукурудза на силос	**400**	28	26	24
Багаторічні трави	**600**	26	24	23
Бобові	**200**	28	30	22

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати за схемою ТЗ, але за критерієм максимуму ЦФ. При цьому у ролі постачальників будуть ділянки з різними попередниками, а споживачами – різні сорти пшениці. Оцінками кліток будуть урожайності різних сортів пшениці за різними попередниками.

Баланс між загальною площею ділянок і запланованою площею посівів пшениці виконується.

Таблиця 12.2

Попередники	Сорти пшениці	B_1	B_2	B_3	U_i
	посівна площа розміри ділянок	**1000**	**600**	**400**	
A_1	**800**	$\boxed{30}$ **800**	28	25	0
A_2	**400**	$\boxed{28}$ **200**	$\boxed{26}$ **200**	24	-2
A_3	**600**	26	$\boxed{24}$ **200**	$\boxed{23}$ **400**	-4
A_4	**200**	28	$\boxed{30}$ **200**	22	2
V_j		30	28	27	54800

Початковий опорний план складаємо методом найбільшої оцінки клітки, починаючи з кліток $(A_1;B_1),(A_4;B_2)$ з найбільшою оцінкою 30. Відповідно до цього плану валовий збір зерна складе:

$$f_1 = 30\cdot 800 + 28\cdot 200 + 26\cdot 200 + 24\cdot 200 + 30\cdot 200 + 23\cdot 400 = 54800.$$

Далі знаходимо потенціали за першою умовою критерію оптимальності і перевіряємо другу умову. Друга умова виконується для усіх незавантажених кліток, отже, цей план є оптимальним.

12.3. Питання для самоперевірки

1. Постановка задач економічного змісту, які розв'язуються за схемою транспортної задачі, але зі знаходженням максимуму цільової функції.

18. Сформулюйте умову оптимальності плану при знаходженні максимуму цільової функції методом потенціалів.

19. Опишіть побудову початкового опорного плану ТЗ методом максимальної оцінки клітки.

20. Опишіть побудову нового опорного плану ТЗ за попереднім планом при знаходженні максимуму цільової функції.

12.4. Ключові поняття

Критерій максимуму ЦФ
Метод максимальної оцінки клітки
Максимум цільової функції

12.5. Навчальні завдання

№ 12.75. Скласти план посівів пшениці та кукурудзи, який забезпечує максимальний збір зерна за вихідними даними в таблиці 12.3:

Таблиця 12.3

Ресурси	Затрати ресурсів на 1 га посівів		Обсяги ресурсів
	пшениця	кукурудза	
Пашня, га	1	1	800
Витрати праці, люд. /дні	2	34	2300
Добрива, ц / га	2,2	1,2	1420
Урожайність, ц / га	36	45	

№ 12.76. Розподілити посіви кормових культур за ділянками землі різної родючості таким чином, щоб одержати максимальну кількість продукції в центнерах кормових одиниць.

Посівна площа за культурами, розміри ділянок та врожайність наведені в таблиці 12.4.

Таблиця 12.4

Кормові культури	Урожайність за ділянками, ц корм. од. з 1 га.				Посівна площа, га
	1-й	2-й	3-й	4-й	
Кукурудза на силос	10	40	70	100	1400
Вико-вівсяна суміш	8	12	16	30	1300

Суданка	9	14	24	35	900
Картопля	10	24	36	50	150
Кормові баштанні	7	11	15	25	250
Площа ділянок	700	800	1500	1000	4000

Відповідь: z_{max} = 170750 ц корм. од.

№ 12.77. Скласти план посівів зернових культур за ділянками землі різної родючості, при якому загальний збір зерна виявиться максимальним.

Розміри ділянок, запланована посівна площа за культурами і прогнозовані врожайності дано в таблиці 12.5.

Таблиця 12.5

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц/га				Площа посівів, га
	1-а	2-а	3-я	4-а	
Кукурудза на зерно	50	40	40	30	1000
Пшениця	35	30	25	20	6000
Ячмінь	25	21	18	16	1200
Просо	32	25	20	18	1800
Площа ділянок, га	2000	3000	3500	1500	10000

Відповідь: z_{max} = 282,6 тис. ц.

№12.78. Розподілити посіви п'яти культур на трьох ділянках землі різної родючості з метою одержання максимуму вартості валової продукції.

Необхідні дані наведено в таблиці 12.6.

Таблиця 12.6

Культури	Урожайність за ділянками, ц / га			Посівні площі, га	Ціна реалізації 1 ц, тис. гр. од.
	I	II	III		
Пшениця	25	24	30	500	6,5
Кукурудза на зерно	40	35	45	400	5,0
Картопля	140	150	160	200	3,0
Овочі	210	230	220	30	6,0
Озимі зернові	20	16	24	300	7,5

Розміри ділянок, га	630	500	30	1430	-

Відповідь: $z_{мах}$ = 354470 тис. гр. од.

12.6. Завдання для перевірки знань

№12.79. А) Скласти план посівів пшениці та ячменю, який забезпечує максимальний збір зерна за вихідними даними з таблиці 12.7:

Таблиця 12.7

Ресурси	Затрати ресурсів на 1 га посівів		Обсяги ресурсів
	пшениця	кукурудза	
Пашня, га	1	1	700
Витрати праці, люд. /дні	4	3	2800
Добрива, ц / га	2	1	1150
Урожайність, ц / га	36	28	

Б) Скласти план посівів зернових культур на ділянках різної родючості, який забезпечує максимальний валовий збір зерна за вихідними даними з таблиці 12.8:

Таблиця 12.8

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц/ га			Обсяги ресурсів
	I	II	III	
Пшениця	34	28	32	800
Жито	24	20	26	430
Ячмінь	25	30	27	650
Кукурудза	40	42	30	320
Площа ділянок, га	600	850	750	-

№12.80. Скласти план розміщення посівів зернових культур за ділянками землі різної родючості з метою одержання максимального прибутку.

Посівні площі за культурами, розміри ділянок, урожайність та ціни реалізації дано в таблиці 12.9.

Витрати на 1 га за ділянками наведені в таблиці 12.10.

Таблиця 12.9

Зернові культури	Урожайність за ділянками, ц / га				Посівна площа, га	Ціна реалізації, тис. гр. од.
	I	II	III	IY		
Пшениця	35	25	20	15	2400	6,5
Кукурудза	60	40	30	50	1700	5,0
Ячмінь	30	20	15	15	350	4,3
Жито	25	30	20	15	250	7,0
Просо	40	20	15	10	100	7,2
Розміри ділянок, га.	3000	1000	300	500	4800	-

Таблиця 12.10

Зернові культури	Витрати засобів на 1 га, тис. гр. од.			
	I	II	III	IY
Пшениця	50	40	40	40
Кукурудза	90	90	70	65
Ячмінь	50	40	40	45
Жито	50	50	45	40
Просо	60	50	50	50

Відповідь: z_{max} = 804450 тис. гр. од.

Тема 13. Застосування транспортних моделей в економічних задачах. Розподільні задачі

Застосування теорії про призначення для розв'язування задач лінійного програмування.

13.1. Теоретичні відомості

Алгоритм і методи розв'язування транспортної задачі можуть бути використані при розв'язуванні деяких економічних задач, які не мають відношення до транспортування вантажів. В цьому випадку величини тарифів c_{ij} мають різний смисл у залежності від конкретної задачі (наприклад, відстань, вартість, час, продуктивність праці тощо). Економічні задачі можуть мати наступний зміст:

1. Оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. В них величина c_{ij} є продуктивністю. Задача дозволяє визначити, скільки часу та на якій операції потрібно використати кожен із верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Так як транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з від'ємним знаком.

2. Оптимальні призначення або проблема вибору. Є *m* механізмів, які можуть виконувати *n* різних робіт з продуктивністю c_{ij}. Задача позволяє визначити, який механізм та на яку роботу потрібно призначити, щоб добитися максимальної продуктивності.

3. Задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції.

4. Збільшення продуктивності автомобільного транспорту за рахунок мінімізації порожнього пробігу, скорочення якого дозволить зменшити кількість автомобілів для перевезення за рахунок збільшення їх продуктивності.

5. Розв'язання задач за допомогою методу заборони перевезень. Використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника з якихось причин не може бути направлений одному зі споживачів. Дане обмеження можна врахувати, присвоївши відповідній клітці достатньо велике значення вартості.

Перші з цих задач називаються розподільчими або задачами на закріплення (призначення). Величини c_{ij} можуть мати різний зміст. Їх можна розв'язати за схемою транспортної задачі, хоча їх умова прямо не пов'язана з транспортними перевезеннями.

Розглянемо ситуацію, коли потрібно розподілити m робіт (або виконавців) за n верстатами. Робота I (=1,2,3,...,m) виконується на верстаті j (=1,2,3, ...n), пов'язана з витратами c_{ij}. Задача полягає в такому розподілі робіт за верстатами (одна робота виконується одним верстатом), який відповідає мінімуму сумарних витрат. Така задача відома як задача про призначення.

Цю задачу можна розглядати як частинний випадок транспортної задачі. Тут „роботи" являють "вихідні пункти", а „верстати" - "пункти призначення". Пропозиція в кожному вихідному пункті дорівнює 1, тобто a_i= 1 для всіх *i* (тобто один працівник може працювати лише на одному верстаті). Аналогічно, попит у кожному пункті призначення дорівнює 1, тобто b_j=1 для всіх j (тобто на кожен верстат може бути призначений лише один працівник). Вартість перевезень (закріплення) роботи I до верстата j дорівнює c_{ij}. Якщо яку-небудь роботу не можна виконати на деякому верстаті, то відповідна вартість c_{ij} береться рівною дуже великому числу М. В таблиці 1 ілюструється загальна структура задачі про призначення.

Перш ніж розв’язувати задачу методами, які асоціюються з транспортною моделлю, необхідно "ліквідувати" дисбаланс, додавши фіктивні роботи або верстати в залежності от початкових умов (m<n або m>n). Тому без утрати загальності можна покласти m=n.

Задачу про призначення можна уявити наступним чином. Нехай

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо j - та робота не виконується на i - му верстаті,} \\ 1, & \text{якщо j - та робота виконується на i - му верстаті.} \end{cases}$$

Таблиця 13.1.

Види робіт	Верстати				
	1	2.	j	. . .	n
1	0	0	1	0	0
. . . . .	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
. . . . .	0	0	0	1	0
m	0	0	0	0	1

Тепер задача буде формулюватися так:

$$z=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \to \min$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ I=1,2, ... ,n,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ j=1,2, ... ,n,}$$

$$x_{ij}\text{=0 або 1.}$$

Початковий розв’язок буде виродженим. Ця особливість характерна для задачі про призначення незалежно від методу, що використовується для отримання початкового базису. Насправді розв’язок буде залишатися на всіх ітераціях.

Специфічна структура задачі про призначення дозволяє розробити ефективний метод її розв’язування. Покажемо, як реалізується цей метод.

Оптимальний розв’язок задачі про призначення не зміниться, якщо до будь-якого рядка або стовпчика матриці вартостей додати (або відняти) сталу величину. Цей факт можна довести наступним чином.

Якщо p_i та q_j віднімаються з і-го рядка та j-го стовпчика, то нові вартості мають вид $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$. Звідси отримується нова цільова функція

$$z' = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} - x_{ij} - \sum_i p_i \sum_j x_{ij} - \sum_j q_i \sum_i x_{ij} .$$

Оскільки $\sum_j x_{ij} = \sum_i x_{ij} = 1$, то *z′ =z - const*. Звідси випливає, що мінімізація початкової цільової функції *z* приводить до такого ж розв’язку, що і мінімізація *z′*.

Наведені міркування показують, що якщо побудувати нову c'_{ij} - матрицю з нульовими елементами й ці нульові елементи або їхня підмножина відповідає допустимому розв’язку, то такий розв’язок буде оптимальним, оскільки вартість не може бути від’ємною.

Результатом розв’язування задачі про призначення є вектор $x^* = \{x^*_{ij}\}$, компоненти якого – цілі числа. Оптимальний план задачі про призначення можна представити у вигляді квадратної матриці призначень, в кожному рядку і в кожному стовпчику якої знаходиться рівно одна одиниця. Таку матрицю іноді називають матрицею перестановок. Значення цільової функції, що відповідає оптимальному плану, називають *ефективністю призначень*.

Інша інтерпретація задач про призначення наступна:

Економічна постановка задачі про призначення така:

Для виконання n різних робіт виділено n виконавців (робітників, станків, фірм,...). За кожною роботою можна закріпити лише одного виконавця. Кожен виконавець може виконувати лише одну роботу. Прибуток від виконання *i*-ої роботи *j*-тим виконавцем становить c_{ij}.

Потрібно розподілити виконавців за роботами так, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Для побудови відповідної математичної моделі введемо змінні x_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,n) так:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

залежно від того, чи і-ий виконавець виконує j-у роботу, чи не виконує її.

Отже, проблема полягає у тому, щоб в наступній таблиці (таблиці 4) проставити нулі та одиниці найкращим способом. У кожному рядку, як і в кожному стовпці допускається рівно одна одиниця.

Таблиця 13.2.

Виконавці	Р о б о т и				
	1	.....	j	.....	n
1	0	0	1	0	0

. . . . .	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
. . . . .	0	0	0	1	0
n	0	0	0	0	1

Математична постановка задачі про призначення така:
знайти невідомі величини x_{ij} так, щоб надати максимум лінійній формі L з обмеженнями чотирьох типів:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,...,n) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,...,n) \qquad (3)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \quad (i = 1,...,n;\ j = 1,...,n) \qquad (4)$$

$$x_{ij} - цілі (i = 1,...,n;\ j = 1,...,n) \qquad (5)$$

Це типова **цілочисельна задача** лінійного програмування. Розв'язувати її симплексним методом неможливо, оскільки так будуть отримані різні дійсні значення між нулем та одиницею. Цілочисельні задачі розв'язуються спеціальними методами, зокрема методом Гоморі, які будуть розглянуті окремо.

13.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. На підприємстві є три групи станків, кожна з яких може виконувати п'ять операцій з обробки деталей (операції можуть виконуватися в будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи станків рівний 100, 250 і 180 год. відповідно. Час виконання кожної операції становить 100, 120, 70, 110 та 130 год. відповідно. Визначити, скільки часу й на якій операції потрібно використати кожну групу станків, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи станків на кожній операції задана матрицею

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом розв'язування закритої транспортної задачі, при цьому під тарифом будемо розуміти продуктивність станків за операціями. Оскільки в задачі потрібно знайти максимум, а відповідно до алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на (-1).

Складемо таблицю 13.3 задачі.

Таблиця 13.3

B_j / A_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
		100	120	70	110	130	
A_1	100	-3 40	-5	-11	-10	-5 60	0
A_2	250	-5 60	-10 120	-15 70	-3	-2	-2
A_3	180	-4	-8	-6	-12 110	-10 70	-5
V_j		-3	-8	-13	-7	-5	-4870

Знаходимо потенціали вільних кліток: $\Delta_{12}=-3$, $\Delta_{13}=-2$, $\Delta_{14}=3$, $\Delta_{24}=-6$, $\Delta_{25}=-5$, $\Delta_{31}=-4$, $\Delta_{32}=-5$, $\Delta_{33}=-12$. Оскільки $\Delta_{14}=3>0$, то план не оптимальний, і необхідно провести перерозподіл вантажів, перекинувши по циклу 60 одиниць вантажу.

+	- 60
- 110	+70

60	
50	130

Отриманий перерозподіл операцій занесемо в нову таблицю 13.4.

Таблиця 13.4

B_j / A_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	U_i
		100	120	70	110	130	
A_1	100	-3 40	-5	-11	-10 60	-5	0
A_2	250	-5 60	-10 120	-15 70	-3	-2	-2
A_3	180	-4	-8	-6	-12 50	-10 130	-2
V_j		-3	-8	-13	-10	-8	-5170

Оцінки вільних кліток складають: $\Delta_{12}=-3$, $\Delta_{13}=-2$, $\Delta_{15}=-3$, $\Delta_{24}=-9$, $\Delta_{25}=-8$, $\Delta_{31}=-1$, $\Delta_{32}=-2$, $\Delta_{33}=-9$.

Знайдений розв’язок є оптимальним, тому що всі оцінки вільних кліток від’ємні; цей розв’язок має вид:

$$\begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, на першій групі станків варто виконувати операції 1 та 4 тривалістю 40 та 60 год. відповідно, на другій групі — операції 1, 2 та 3 тривалістю 60, 120 та 70 год. відповідно, на третій групі - операції 4 та 5 тривалістю 50 та 130 год. відповідно. При цьому максимальне число оброблених деталей складе 5170 штук.

Задача 2. Фірма отримала замовлення на розробку п’яти програмних продуктів. Для виконання цього замовлення потрібно залучити п’ять досвідчених програмістів. Кожен із них повинен написати одну програму. В наступній таблиці наведені оцінки часу (у днях), який необхідний програмістам для виконання кожної з цих робіт:

Таблиця 13. 5

	Програми				
Програмісти	1	2	3	4	5
А	46	59	24	62	67
Б	47	56	32	55	70
В	44	57	19	61	60
Г	47	59	17	64	73
Д	43	65	20	60	75

Розподілити роботи між програмістами так, щоб загальна кількість людино-днів на виконання всіх п’яти замовлень була мінімальною.

Розв’язання. Таблиця призначень задана в умові. Провівши розрахунки, а саме: вибравши в кожному рядку і в кожному стовпчику мінімальну „оцінку”, отримаємо наступну матрицю призначень:

Таблиця 13. 6

	Програми				
Програмісти	1	2	3	4	5
А	0	0	0	0	1
Б	0	0	0	1	0
В	0	1	0	0	0
Г	0	0	1	0	0
Д	1	0	0	0	0

Враховуючи умову, отримуємо такий результат:

Таблиця 13. 7

Програмісти	Програми	Кількість людино-днів
А	5	67
Б	4	55
В	2	57
Г	3	17
Д	1	43
Всього		239

Отже, на виконання замовлень потрібно 239 людино-днів. При цьому програміст А повинен розробити п'яту програму, Б – четверту, В – другу, Г – третю, Д – першу.

13.3. Питання для самоперевірки

1. Чи можна розв'язати задачу про призначення методом, який використовується для розв'язування транспортної задачі?
2. Чи правильне твердження, що вихідний розв'язок задачі про призначення буде виродженим?
3. Алгоритм розв'язування задачі про призначення та інтерпретація її розв'язку.
4. Порівняйте алгоритми симплексних перетворень та розподільного методу.

13.4. Ключові поняття

Ефективність призначень
Задача про призначення
Задача на закріплення
Матриця перестановок
Матриця призначень
Цілочисельна задача

13.5. Навчальні завдання

№13.81. Фірма отримала замовлення на 3 види продукції (А, Б, В), які необхідно виготовити протягом тижня. Об'єми замовлень: А — 4000 штук, Б —
2400 штук, В - 1000 штук.

Ділянка з виготовлення продукції має 3 станки, на кожному з яких можна виготовляти будь-який із заказаних видів продукції з однаковою продуктивністю. Одиничні витрати з кожного виду продукції різні в залежності від станка, що використовується, і задані таблицею 13.8.

Таблиця 13.8

Станок / Продукція	А	Б	В
1	1,2	1,3	1,1
2	1,4	1,2	1,5
3	1,1	1,0	1,3

Крім того, відомо, що виробничі потужності 2-го та 3-го станків на цей тиждень складуть 3000 штук, а станка 1 — 2000 штук. Використовуючи модель транспортної задачі, знайти оптимальний план виробництва, що забезпечує мінімум витрат при виготовленні заказаних видів продукції.

№ 13.82. Розв’язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в таблиці. Знайти оптимальний розв’язок.

А) Таблиця 13.9

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	10	15	10	20
Б	5	50	21	10
В	17	30	18	34
Г	25	14	11	46

Б) Таблиця 13.10

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	10	25	12	24
Б	15	35	21	10
В	37	30	18	34
Г	25	4	11	50

13.6. Завдання для перевірки знань

№ 13.83. Потрібно спланувати перевезення будівельного матеріалу з трьох заводів до чотирьох будівельних майданчиків, використовуючи залізницю. Протягом кожного кварталу на чотирьох майданчиках потрібно, відповідно, 5, 10, 20, 15 вагонів будівельних матеріалів. Можливості заводів рівні 10, 15 та 25 вагонів у квартал відповідно. Умова задачі наведена в таблиці 13. 11. Числа на перетині рядків та стовпців таблиці означають вартість перевезень одним вагоном (гр. од.).

Таблиця 13.11

Завод і його можливості		Потреба будівельних майданчиків			
		1	**2**	**3**	**4**
		5	10	20	15
A	10	8	3	5	2
B	15	4	1	6	4
C	25	1	9	4	3

№ 13.84. Розв'язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в таблицях. Знайти оптимальний розв'язок.

А)

Таблиця 13.12

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	11	40	25
Б	15	31	21	10
В	7	30	18	14
Г	22	24	16	5

Б)

Таблиця 13.13

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	35	10	12	27
Б	15	20	2	10
В	31	30	18	34
Г	25	3	11	16

Тема 14. Цілочислове програмування

Застосовування теорії цілочислового програмування при аналізі дробового алгоритму розв'язання повністю цілочислової задачі.

14.1. Теоретичні відомості

Цілочислове програмування орієнтоване на розв'язування задач математичного програмування, в яких всі або деякі змінні повинні приймати тільки цілочислові значення. Задача називається ***повністю цілочисловою***, якщо умову цілочисельності накладено на всі її змінні; коли ця умова стосується лише деяких змінних, задача називається ***частково цілочисловою***. Задача є ***лінійною цілочисловою***, якщо цільова функція і функції, що входять у обмеження, – лінійні.

Методи розв'язування задач цілочислового програмування можна класифікувати як методи відсікань (відтинань) і комбінаторні методи. Розглянемо алгоритми, що реалізують метод відтинаючих площин.

14.1.1. Дробовий алгоритм розв'язування повністю цілочислових задач

Необхідною умовою застосування даного алгоритму є цілочисельність всіх коефіцієнтів і правих частин обмежень вихідної задачі, тобто наявність у обмеженнях дробових коефіцієнтів призводить до порушення цілочисельності додаткових змінних.

При розв'язуванні цілочислової задачі лінійного програмування виконуються такі кроки:

- ✓ Розв'язується задача з послабленими обмеженнями (яка виникає в результаті виключення вимоги цілочисельності змінних). Якщо отриманий оптимальний розв'язок виявляється цілочисловим, то він є розв'язком вихідної задачі.
- ✓ У противному випадку потрібно ввести додаткові обмеження, які породжують (разом з вихідними обмеженнями) нову задачу лінійного програмування, розв'язок якої виявляється цілочисловим і співпадає з оптимальним розв'язком вихідної цілочислової задачі. Нехай отримана симплекс – таблиця (остання) задачі з послабленими обмеженнями має вид:

Таблиця 14.1.

	x_1 . . .	x_i . . .	x_m	W_1 . . .	W_j . . .	W_n	B
x_1	1 . . .	0 . . .	0	α_1^1 . . .	α_1^j . . .	α_1^n	$\beta 1$
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		
x_i	0 . . .	1 . . .	0	α_i^1 . . .	α_i^j . . .	α_i^n	βi

x_m z	0 . . . 0 . . . 1 αm^1 . . . αm^j . . . αm^n 0 . . . 0 . . . 0 C1 . . . Cj . . . Cn	βm βo

Через x_i (i= l, m) позначимо базисні змінні;

W_i (i= l, n) позначимо небазисні змінні.

Розглянемо *i*-ий рядок симплекс-таблиці, якому відповідає неціле (дробове) значення базисної змінної xi , і виразимо xi через небазисні змінні:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} W_j \text{ , де } \beta_i \text{ - неціле.}$$

Кожний рядок симплекс-таблиці, що породжується аналогічною нерівністю, будемо називати *твірним* рядком. Так як коефіцієнти цільової функції можна вважати цілими числами, змінна Z також повинна бути цілою і нижній рядок таблиці допустимо вибирати в якості твірного.

Нехай $\beta_i = [\beta_i] + f_i, \ a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij}$,

де $N = [a]$ – ціла частина числа а, тобто найбільше ціле число, яке задовольняє умові $N \le a$, звідси слідує, що 0<fi<l - додатний дріб; 0<fij<l - від'ємний дріб.

Наприклад,

a	[a]	f=a-[a]
1,5	1	0,5
-2,5	-3	0,5
-1	-1	0
-0,4	-1	0,6

Після підстановки, рівняння для x_i набуває виду:

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j = x_i - [\beta_i] + \sum [a_{ij}] W_j \qquad (14.1)$$

Оскільки всі змінні xi і Wj - цілі, то права частина повинна бути цілою, отже, ліва частина також повинна приймати цілі значення.

Так як $f_{ij} \ge 0$ і Wj≥0 для всіх *i* та *j*, то $\sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \ge 0$.

Отже, виконується нерівність $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \le f_{ij}$.

Так як $f_i < 1$, то $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j \le 1$.

Так як ліва частина розглядуваної нерівності повинна приймати ціле значення, то запишемо цю умову цілочисельності у вигляді: $f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_i \le 0$

Останнє обмеження перепишемо у вигляді рівності: $S_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_i - f_i$,

де S_i – невід'ємна додаткова змінна, яка повинна приймати цілі значення.

Таке обмеження - рівність визначає відсікання Гоморі для повністю цілочислової задачі.

Із симплекс-таблиці видно (так як W_i небазисна), що W_i=0, і S_i=-f_i - дана компонента розв'язку не є допустимою, отже, це означає, що отриманий раніше розв'язок задачі не задовольняє нове обмеження.

В такій ситуації потрібно використати двоїстий симплекс-метод, реалізація якого забезпечує відсікання деяких областей многогранника розв'язків, що не містить точок з цілочисловими координатами.

Перетворимо вихідну таблиці шляхом приписування до неї рядка і стовпчика, що відповідають побудованому відсіканню Гоморі для повністю цілочислової задачі.

Отримаємо нову таблицю (таблиця 14.2):

Таблиця 14.2

	x_i ... x_i ... x_m W_l ... W_j ... W_n	S_i	B
x_1 x_i x_m	1 ... 0 ... 0 a_1^1 ... a_1^j ... a_1^n 0 ... 1 ... 0 α_i^1 ... α_i^1 ... α_i^n 0 ... 0 ... 1 αm^1 ... αm^j … αm^n	0 0 0	β1 βi βm
S_i	0 ... 0 ... 0 -fi^1 ... -fij ... –fin	1	fi
Z	0 ... 0 ... 0 C1 ... Cj ... Cn	0	βo

Якщо отриманий розв'язок (в результаті застосування двоїстого симплекс-метода) є цілим, то процес розв'язання задачі завершено. В противному випадку необхідно ввести нове відсікання на базі отриманої таблиці і знову скористуватися двоїстим симплекс-методом. Загальне число обмежень не може перевищувати кількості змінних вихідної задачі (m+n).

Вид нерівності, що визначає деяке відсікання, залежить від вибору твірного рядка. Одна і та ж симплекс-таблиця породжує різні відсікання. Для визначення найбільш ефективного відсікання використовують емпіричні правила. Два таких правила приписують будувати відсікання на основі твірного рядка, якому відповідає:

- ✓ $\max_i \{f_i\}$

n

✓ $\max_i \{f_i / \sum_{j=1} f_{ij}\}$

Друге правило більш ефективне.

Якщо на деякій ітерації симплекс-метода виявиться відсутність допустимого розв'язку, то розглядувана задача не має цілочислового оптимального розв'язку.

Назва дробовий алгоритм пов'язана з тим, що всі ненульові коефіцієнти введеного відсікання менші одиниці.

14.1.2. Алгоритм розв'язування частково цілочислових задач

Розглянемо відповідний базисній змінній рядок симплекс-таблиці, що містить розв'язок задачі з послабленими обмеженнями. Цей рядок породжує рівність

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j = [\beta_i] + f_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_j$$

Оскільки деякі зі змінних не є цілочисловими, для розв'язування поставленої задачі не можна використати процедуру відсікань, що розглянута вище. Можна побудувати відсікання іншого типу.

Для цілочислової змінної повинна виконуватися одна з двох нерівностей: $x_i \le [\beta_i]$ або $x_i \ge [\beta_i]+1$. Провівши необхідні перетворення (14.1), отримаємо рівняння відсікання: $S_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jj} W_i - f_i$, де

$$\lambda_j = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} \ge 0, \quad W_j \text{ – неціле,} \\ \dfrac{\mathrm{f_i}}{(\mathrm{f_i}-1) a_{ij}}, & a_{ij} \le 0, \quad W_j \text{ – неціле,} \\ \mathrm{f_{ij}}, & f_{ij} \le f_i, \quad W_j \text{ – ціле,} \\ \dfrac{f_i}{1-f_i}(1-f_{ij}) & f_{ij} > f_i \quad W_j \text{ – ціле.} \end{cases}$$

Ефективнішим за метод Гоморі ЗЦП є метод „віток" і „меж".

14.1.3. Алгоритм розв'язування методом „віток" і „меж"

1. За допомогою симплекс-методу розв'язується послаблена ЗЦП, тобто знаходиться умовно-оптимальний план ЗЦП.

Якщо деяка компонента x_j^* опорного плану останньої симплекс-таблиці є дробовою, то, очевидно, можна стверджувати, що в інтервалі $([x_j^*];[x_j^*]+1)$ цілих значень взагалі немає.

2. Для однієї з дробових компонент x_j^* опорного плану останньої симплекс-таблиці формуються додаткові обмеження: $x_j \le [x_j^*]$ або

$$x_j \ge [x_j^*] + 1 \qquad (14.2)$$

3. Початкова задача ЦЧП розбивається на дві задачі з урахуванням

умов цілочисельності змінних і додаткових обмежень (2). При цьому останні матимуть вигляд:

Перша задача: Знайти $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$ (14.3)

при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le = \ge b_i \ (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}})$, (14.4)

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n})$, (14.5)

$x_j \in Z$, (14.6)

$x_j \le \left[x_j^* \right]$ (14.7)

Друга задача: Знайти $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$ (14.8)

при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le = \ge b_i \ (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}})$, (14.9)

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n})$, (14.10)

$x_j \in Z$, (14.11)

$x_j \ge \left[x_j^* \right] + 1$ (14.12)

4. Далі симплекс-методом розв'язуються послаблені задачі (14.3) - (14.7) і (14.8) - (14.12), тобто відповідні ЗЛП без обмежень (14.6) і (14.11). Якщо знайдені оптимальні плани цих задач задовольняють умові цілочисельності, то ці плани визначають розв'язок початкової ЗЦЧП. Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження береться задача з *більшим* значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на max, і з *меншим* значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на min. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлена неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий план – оптимальний.

Зауваження. 1) Розв'язування ЗЦЧП методом „віток" і „меж" можна значно прискорити, приєднуючи обмеження виду (14.7) і (14.12) до останньої симплекс-таблиці не початкової ЗЦП, а відповідних задач.

2) Якщо дробових значень невідомих в умовно-оптимальному плані декілька, то додаткові обмеження складають для тієї з них, яка має найбільшу дробову частину.

Типові цілочисельні задачі економіко-математичного моделювання або дослідження операцій можна розв'язувати вищевказаними методами. Але іноді це неможливо, оскільки можуть бути отримані різні дійсні значення між нулем та одиницею. Тому цілочисельні задачі рекомендується розв'язувати за використанням інформаційних технологій. Обмеження в команді TOOLS.SOLVER в Пошуку Рішень системи EXCEL можуть мати вигляд: комірка =int (комірка = цел), і розв'язують цілочисельні задачі.

14.2. Методичні вказівки до розв'язування типових задач

Задача 1. Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП):

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 25x_1 + 10x_2 \le 100, \\ 40x_1 + 20x_2 \le 190 \end{cases},$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 \text{ - цілі.}$$

Розв'язання. Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисельності. Остання симплекс-таблиця набере наступного вигляду (таблиця 14.3).

Таблиця 14.3

C_{ij}	Базисні змінні	0	350	150	0	0
		b	x_1	x_2	x_3	x_4
350	x_1	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
150	x_2	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
Δ_i		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка останньої симплекс-таблиці додаткове обмеження виду $\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \ge \{b_i\}$:

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \ge \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Враховуючи, що $\{1\} = 0,\ \{0\} = 0,\ \left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5},\ \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4},\ \left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, додаткове обмеження набере вигляду: $\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \ge \frac{1}{2}$. Зведемо його до канонічного виду та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 \ge \frac{1}{2}.$$

Приєднавши отримане обмеження до останньої симплекс-таблиці з умовно-оптимальним планом, дістанемо наступну симплекс-таблицю 14.4.

Розв'язавши останню задачу, знайдемо, нарешті, оптимальний план:

$$Z_{\max} = 1450 \text{ при } x_1 = 2,\ x_2 = 5.$$

Задача 2. Методом „віток" і „меж" розв'язати попередню **задачу 1** цілочислового програмування (ЗЦЧП).

Розв'язання. Відкинувши умову цілочисельності, дістанемо умовно-оптимальний план $x_1 = 2$, $x_2 = 7\frac{1}{2}$. Тому допустиме ціле значення x_2 повинне задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor = 7$ або $x_2 \ge \left\lfloor 7\frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 8$.

Таблиця 14.4

C_{ij}	Базисні змінні	0	350	150	0	0	0	-M
		b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
350	x_1	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
150	x_2	$7\frac{1}{2}$	0	1	$7\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
-M	x_6	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
Δ_i		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Приєднуючи до задачі кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисельності, розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі. Для першого обмеження $x_2 \le 7$ умовно-оптимальним буде розв'язок $x_1' = 1{,}2;\ x_2' = 7$, при цьому $Z_{\max}' = 1470$. Для другого обмеження $x_2 \ge 8$ умовно-оптимальним буде розв'язок $x_1'' = \frac{3}{4};\ x_2'' = 8$, при цьому $Z_{\max}'' = 1462{,}5$. Цілочислового розв'язку знову не отримали, тому процес відсікання треба продовжити, узявши для наступного розгалуження першу із задач, умовно-оптимальний план якої дає більше значення цільової функції. Далі розглядаємо дві задачі, приєднуючи умови $x_1 \le 1;\ x_2 \ge 2$, звідки й отримуємо оптимальний план $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $Z_{\max} = 1450$.

14.3. Питання для самоперевірки

1. Приклади задач цілочислового програмування.
2. Загальний вид ЗЦЧП.
3. Суть методу Гоморі розв'язування ЗЦП.
4. Поняття послабленої ЗЛП.
5. Поняття умовно-оптимального плану для ЗЦП.
6. Чи можна отримати допустимий цілочисловий розв'язок шляхом заокруглення розв'язку задачі з послабленими обмеженнями у вигляді рівностей?
7. Як скласти додаткове обмеження, якщо компоненти оптимального плану, обчисленого симплекс-методом, є дробовими?
8. Чи може значення цільової функції в оптимальному розв'язку цілочислової задачі максимізації бути більшим оптимального значення цільової функції відповідної задачі з послабленими обмеженнями?
9. В чому полягає розв'язування частково цілочислової задачі лінійного програмування?

10. Недоліки методу Гоморі.
11. Метод „віток” і „меж” розв’язування ЗЦЧП.
12. Недоліки методу „віток” і „меж”.

14.4. Ключові поняття

Допустимий цілочисловий розв’язок
Дробова частина числа
Методи відсікань (відтинань)
Метод „віток” і „меж”
Метод Гоморі
Послаблені обмеження
Умовно-оптимальний план для ЗЦЧП
Ціла частина числа
Цілочислова ЗЛП
Частково цілочислова ЗЛП

14.5. Навчальні завдання

№ 14.85. Методом Гоморі розв’язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП):

а) $$Z = x_1 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 24, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

б) $$Z = x_1 + x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

в) $$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36, \\ x_2 \le 13, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

г) $$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

д) $$Z = 6x_1 + 4x_2 \to \min, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

е) $$Z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -6, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

№ 14.86. Методом „віток” і „меж” розв’язати задачу цілочислового програмування (ЗЦЧП).

а) $$Z = 2x_1 + x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 6x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

б) $$Z = 3x_1 + 7x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

в) $$Z = 3x_1 + 2x_2 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 \quad + x_5 = 9, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

д) $$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 3x_1 + 9x_2 \le 27, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

Відповідь: в) (9;4;0; 1;32); 35.

14.6. Завдання для перевірки знань

№ 14.87. Методом Гоморі та методом „віток” і „меж» розв’язати ЗЦЧП.

а) $$Z = 8x_1 + 5x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 12x_1 + x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

б) $$Z = x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

в) $$Z = 12x_1 + 3x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 8x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

г) $$Z = 3x_1 + 5x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \le 32, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ x_j - \text{цілі}.$$

№ 14.88. Розв’язати частково цілочислові задачі.

а) $$\begin{gathered} Z = 5x_1 + x_2 \to \max, \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{2}, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1, \end{cases} \\ x_j \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}. \end{gathered}$$

б) $$\begin{gathered} Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max, \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ -2x_1 + 6x_2 + \frac{5}{2}x_3 \le 5, \end{cases} \\ x_j \ge 0,\ x_{2,3} - \text{цілі}. \end{gathered}$$

Відповідь: а) 15: (3; 0; ½; 5); б) ½; (1/2; 1; 0).

Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання з основних тем курсу містять тридцять варіантів. Номер варіанта співпадає з сумою трьох останніх цифр номера залікової книжки студента.

Індивідуальні завдання до теми 1

Скласти за умовою задачі математичну модель задачі лінійного програмування, і визначити її форму.

№ 1. Бройлерне господарство птахівничої ферми нараховує 2000 курчат, які вирощуються до восьмитижневого віку і після відповідної обробки поступають у продаж. Хоч тижнева витрата корму для курчат залежить від їх віку, в подальшому будемо вважати, що в середньому (за 8 тижнів) він становить 500г.

Для того, щоб курчата досягли до восьмого тижня необхідних вагових кондицій, кормовий раціон повинен задовольняти певним вимогам за поживністю. Цим вимогам можуть відповідати суміші різних видів кормів, або інгредієнтів. Зазвичай перелік інгредієнтів достатньо широкий (для того, щоб спростити процес побудови моделі, обмежимося лише трьома інгредієнтами: вапном, зерном і соєвими бобами). Вимоги до поживності сформулюємо також у спрощеній формі, враховуючи лише три види поживних речовин: кальцій, білок і клітковину. В таблиці 1.2 наведені дані, що характеризують вміст (по масі) поживних речовин у кожному з інгредієнтів і питому вартість кожного інгредієнта. Відзначимо, що вапно не містить ні білка, ні клітковини.

Таблиця 1.2

Інгредієнт	Вміст поживних речовин, грам/грам інгредієнта			Вартість / грам
	Кальцій	Білок	Клітковина	
Вапно	0.38	------	-----	0.04
Зерно	0.001	0.09	0.02	0.15
Соєві боби	0.002	0.50	0.08	0.40

Суміш повинна містити:

1) не менше 0,8%, але не більше 1,2% кальцію;
2) не менше 22% білка;
3) не більш 5% клітковини.

Для птахоферми потрібно визначити кількість (у грамах) кожного із трьох інгредієнтів, що утворюють суміш мінімальної вартості, при дотриманні вимог до загальних витрат кормової суміші та її поживності.

№ 2. Виконати замовлення по виготовленню 32 виробів виду B_1 та 4 виробів виду B_2 взялися бригади $Б_1$ та $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ по виготовленню 32 виробів виду B_1 та B_2 складає відповідно 4 і 3 вироби за одиницю часу, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 од. Продуктивність бригади $Б_1$ – відповідно 1 і 3, а її фонд робочого часу – 4 од. Витрати, що пов'язані з виготовленням одиниці виробу, для бригади $Б_1$ дорівнює відповідно 9 і 20 тис. гр.. од., для бригади $Б_2$ – 15 і 30 тис. гр.. од. Потрібно:

1) Скласти математичну модель задачі за показником витрат на виконання замовлення;
2) Знайти оптимальний план розміщення замовлення при додатковій вимозі: фонд робочого часу бригади $Б_2$ повинен бути повністю використаний.

№ 3. Промислова фірма виробляє виріб, що являє собою пристрій із 3-х різних вузлів. Ці вузли виготовляються на 2 заводах. Через відмінності у складі технологічного обладнання продуктивність заводів з випуску кожного із 3-х видів вузлів неоднакова. У наведеній таблиці 1.3 містяться вихідні дані, що характеризують як продуктивність заводів з випуску кожного із вузлів, так і максимальний сумарний ресурс часу, який протягом тижня має кожний із заводів для виробництва цих вузлів.

Ідеальною є така ситуація, коли виробничі потужності обох заводів використовуються таким чином, що в результаті забезпечується випуск однакової кількості кожного із видів вузлів. Але цього важко досягти через різницю в продуктивності заводів. Більш реальна мета полягає, очевидно, в тому, щоб максимізувати випуск виробів, що, по суті, еквівалентне мінімізації дисбалансу, що виникає внаслідок некомплектності постачання з одного або двох видів вузлів.

Таблиця 1.3

Завод	Максимальний тижневий фонд часу, год.	Продуктивність, вузол / год.		
		Вузол №1	Вузол №2	Вузол №3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Можливий об'єм виробництва кожного із трьох видів вузлів залежить від того, який фонд часу виділяє кожний завод для їх виготовлення.

Потрібно визначити щотижневі витрати часу (в годинах) на виробництво кожного із 3-х видів вузлів на кожному заводі, що не перевищують у сумі часові ресурси кожного заводу і забезпечують максимальний випуск виробів

№ 4. Фірма XYZ випускає 3 види продукції. В процесі виробництва використовуються 3 технологічні операції. На рисунку 1.1 показана технологічна схема виробництва виробів видів 1, 2 і 3. При виготовленні виробу 2 відсутня технологічна операція 2, а при виготовленні виробу 3 використовуються лише технологічні операції 1 і 2. На рисунку указана тривалість технологічних операцій при виготовленні одного виробу кожного виду.

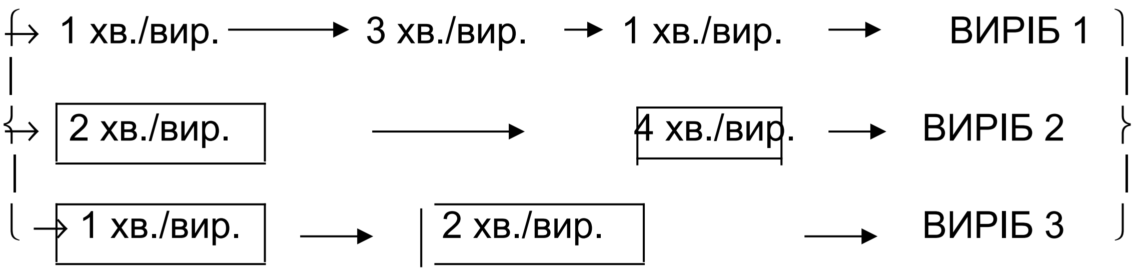


Рис. 1.1

Так як ці технологічні операції використовуються і для інших виробничих цілей, фонд робочого часу, протягом якого операції 1, 2 і 3 можуть бути застосовані для виробництва виробів, що розглядаються, обмежений такими граничними значеннями (за добу):

для 1-ої операції —— 430 хв.
для 2-ої операції —— 460 хв.
для 3-ої операції —— 420 хв.

Можливий об’єм виробництва Вивчення ринка збуту показало, що очікуваний прибуток від продажу одного виробу видів 1 , 2 і 3 становить 3, 2 і 3 $ відповідно. Знайти найвигідніший добовий об’єм виробництва кожного виду продукції.

№ 5. Є три технологічних процеси для виділення із руди двох необхідних речовин A та B. Із кожної тонни руди при застосуванні процесів 1, 2 і 3 отримується відповідно (таблиця. 1.4):

Таблиця 1.4

Речовини	Вихід речовини (в кг) із тонни руди при застосуванні процесу		
	1	2	3
A B	0.4 0.6	0.6 0.4	0.2 0.2
Витрати	5000	1600	1000

Визначити оптимальний розподіл 10т руди по процесам 1, 2 і 3, щоб витрати були мінімальними, якщо необхідно отримати не менше 3 кг кожної речовини.

№ 6. Промислова фірма виробляє виріб, що містить три різних вузли. Ці вузли виготовляються на 2 заводах. Через різницю в складі технологічного обладнання продуктивність заводів по випуску кожного із трьох видів вузлів неоднакова. В таблиці 1.5 містяться вихідні дані, що характеризують як продуктивність заводів по випуску кожного із вузлів, так і максимальний сумарний ресурс часу, який протягом тижня має кожний із заводів для виробництва цих вузлів.

Ідеальною є така ситуація, коли виробничі потужності обох заводів використовуються таким чином, що в результаті забезпечується випуск однакового кількості кожного із видів вузлів. Але цього важко досягти через

Таблиця 1.5

Завод	Максимальний тижневий фонд часу, год.	Продуктивність, вузол/год.		
		Вузол №1	Вузол №2	Вузол№3
1	120	10	6	10
2	100	8	10	6

різницю в продуктивності заводів. Більш реальна мета полягає, очевидно, в тому, щоб максимізувати випуск виробів, що, по суті, еквівалентно мінімізації кожного із трьох видів вузлів і залежить від того, який фонд часу виділяє кожний завод для їх виготовлення. Потрібно визначити щотижневі витрати часу (в годинах) на виробництво кожного з трьох видів вузлів на кожному заводі, що не перевищують в сумі часові ресурси кожного заводу і забезпечують максимальний випуск виробів.

№ 7. Для виготовлення трьох видів виробів A, B і C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання вказані в таблиці 1.6. В ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 1.6

Обладнання	Витрати часу			Фонд часу
	A	B	C	
Токарне	8	6	10	150
Фрезерне	9	4	7	120
Зварювальне	4	2	12	80
Шліфувальне	6	12	8	100
Прибуток	10	8	12	

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації била максимальним.

№ 8. Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості потрібно щодня виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальний. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня повинна отримати не менш як 60 од. поживної речовини A, не менше 50 од. речовини B і не менше 12 од. речовини C. Вказані поживні речовини містять три види корму. Вміст одиниць поживних речовин у 1кг кожного із цих видів корму наведено в таблиці 1.7:

Таблиця 1.7

Речовина	Вид корму		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, який забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових затратах, якщо ціна 1кг корму I-го виду становить 9 коп., корму II-го виду – 12 коп. , і корму III-го виду - 10 коп.

№ 9. На швейній фабриці тканина може бути розкроєна кількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Нехай при і-му варіанті розкрою (і=1, n) із 100 кв. м тканини виготовляється bij деталей і-го виду (і=1 , m), а величина відходів при даному варіанті розкрою рівна 1 кв. М. Знаючи, що деталей і-го виду потрібно виготовляти B1 штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано необхідну кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель задачі.

№ 10. В трьох пунктах відправлення є однорідний вантаж в кількостях, які відповідно рівні 420, 380, 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількостях, які відповідно рівні 260, 520 і 420 т. Вартості перевезень 1т вантажу із кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, який забезпечує вивезення наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пунктах призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень.

№ 11. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі A, B і C використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду наведені в таблиці 1.8. В ній же вказана загальна кількість сировини кожного виду, яке може бути використана фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Таблиця 1.8

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на одну тонну карамелі			Кількість
	A	B	C	
Цукровий пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре		0,1	0,1	120
Прибуток	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

№ 12. Продукцією міського молочного заводу є: молоко, кефір і сметана, які розфасовані в пляшки. На виробництво 1т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливанні 1т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. На розфасовці 1т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Всього для виробництва сметанно-молочної продукції завод може використати 136000 кг молока. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21,4 машино-годин, а автомати з розфасовки сметани - протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1т молока, кефіру і сметани відповідно рівний 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень.

№ 13. В m пунктах можуть бути розміщені підприємства, які виробляють деяку однорідну продукцію. Ця продукція поступає в n пунктів її споживання, причому в i-му пункті потреби в продукції, рівні a_i одиницям. Витрати, що пов’язані з доставкою одиниці продукції з i-го пункту відправлення в i-й пункт споживання, складають c_{ij} грн. Відомо, що в і-му пункті виготовлення продукції максимальний об’єм її виробництва не може перевищувати b_i одиниць, а витрати, пов’язані з виготовленням одиниці продукції, складають d_i грн. Визначити таке розміщення підприємств, при якому забезпечуються потреби в продукції в кожному із пунктів її споживання при найменших загальних витратах, що пов’язані з виробництвом і доставкою продукції.

№ 14. На звірофермі можуть вирощуватися чорно-бурі лисиці і песці. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовуються три види кормів. Кількість корму кожного виду, який повинні щодня отримувати лисиці і песці, наведено в таблиці 1.9. В ній же вказані загальна кількість корму кожного виду, яка може бути використана звірофермою, і прибуток від реалізації одної шкурки лисиці і песця.

Таблиця 1.9

Вид корму	Кількість одиниць корму		Загальна кількість
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки	16	12	

Визначити, скільки лисиць і песців потрібно вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальний.

№ 15. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальна кількість наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці 1.10. Визначити, скільки столів і шаф фабриці потрібно виготовляти, щоб прибуток від їхньої реалізації був максимальний.

Таблиця 1.10

Ресурси	Стіл	Шафа	Кількість
Деревина (кв.м)			
1-го виду	0,2	0,1	40
2-го виду	0,1	0,3	60
Трудомісткість	1,2	1,5	371,4
Прибуток	6	8	

№ 16. Для виробництва двох видів виробів А і В використовуються токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Норми витрат часу для кожного із типів обладнання на один виріб даного виду наведені в таблиці 1.11. В ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного із типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Таблиця 1.11

Тип обладнання	Виріб		Загальний фонд Робочого часу
	А	В	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації Одного виробу	14	18	

Знайти план випуску виробів A і B, який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

№17. Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 1.13. В ній же вказані прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством. Враховуючи, що вироби A і B можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації усіх виробів є максимальний.

№ 18. На меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів у кількості, відповідно рівній 24, 31 і 18 шт. Кожний лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість отримуваних заготовок при даному способі розкрою наведено в таблиці 1.12. В ній же вказана величина відходів, які отримуються при даному способі розкрою одного листа фанери.

Таблиця 1.12

Вид заготовки	Кількість заготовок	
	I спосіб	II спосіб
1-й вид	2	6
2-й вид	5	4
3-й вид	2	3
Величина відходів	12	16

Визначити, скільки листів фанери і яким способом потрібно розкроїти так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

№ 19. Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 1.13. В ній же вказані прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством. Враховуючи, що вироби A і B можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації усіх виробів є максимальний.

№ 20. Для виготовлення різних виробів A, B і C підприємство використовує три різні види сировини. Норми витрат сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A, B і C, а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведені в таблиці 1.14. Вироби A, B і C можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений),

Таблиця 1.13

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на один виріб		Кількість сировини
	A	B	
1	16	10	360
2	18	120	300
3	6	8	180
Прибуток	7	12	

але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду. Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною.

Таблиця 1.14

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на один виріб			Кількість
	A	B	C	
1	0,8	0,5	0,6	86
2	0,4	0,5	0,3	60
3	0,7	0,8	0,1	90
Прибуток	18	12	16	

№ 21. На швейній фабриці для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрат тканин усіх артикулів на пошив одного виробу наведені в таблиці 1.15. В ній же вказані наявні в розпорядженні фабрики загальна кількість тканини кожного артикула і ціна одного виробу даного виду. Визначити, скільки виробів кожного виду повинна виготовити фабрика, щоб вартість виготовлено продукції була максимальною.

№ 22. Підприємство випускає чотири види продукції і використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне і шліфувальне. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного із типів обладнання наведені в таблиці 1.16. В ній же вказані загальний фонд робочого часу кожного із типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Таблиця 1.15

Артикул	Норми витрат тканини (м) на один виріб				Загальна кількість тканини (м)
	А	В	С	Д	
1-й	1		2	1	180
2-й		1	3	2	210
3-й	4	2		4	800
Ціна одного виробу	9	6	4	7	

Визначити такий об'єм випуску кожного із виробів, при якому загальний прибуток від їх реалізації є максимальний.

Таблиця 1.16

Тип обладнання	Витрати часу на одиницю продукції				Фонд робочого часу
	I	II	I	IY	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1		2	1	70
Шліфувальне	1	2	1		340
Прибуток	8	3	2	1	

№ 23. Для перевезення вантажу на трьох лініях можуть бути використані судна трьох типів. Продуктивність суден при використанні їх на різних лініях характеризується даними, наведеними в таблиці 1.17. В ній же указані загальний час, протягом якого судна кожного типу знаходяться в експлуатації, і мінімально необхідні об'єми перевезень на кожній лінії. Визначити, які судна, на якій лінії і протягом якого часу потрібно використати, щоб забезпечити максимальне завантаження суден з урахуванням можливого часу їх експлуатації.

Таблиця 1.17

Тип судна	Продуктивність суден			Загальний час експлуатації
	I	II	III	
1-й	8	14	11	300
2-й	6	15	13	300
3-й	12	12	4	300
Обсяг перевезень	3000	5400	3300	

№ 24. Із трьох видів сировини необхідно скласти суміш, в склад якої повинні входити не менше 26 одиниць хімічної речовини А, 30 одиниць речовини В та 24 одиниць речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1кг сировини кожного виду, наведено в таблиці 1.18. В ній же наведена ціна 1 кг сировини кожного виду.

Таблиця 1.18

Речовина	Кількість одиниць речовини в 1 кг сировини			
	I	II	III	IY
A	1	1		4
B	2		3	5
C	1	2	4	6
Ціна 1 кг сировини	5	6	7	4

Скласти суміш, яка містить не менше потрібної кількості речовин даного виду і яка має мінімальну вартість.

№ 25. Стальні прути довжиною 110 см необхідно розрізати на заготовки довжиною 45, 35 і 50 см. Потрібна кількість заготовок даного виду становить відповідно 40, 30 і 20 штук. Можливі варіанти розрізу і величина відходів при кожному із них наведені в наступній таблиці 1.19. Визначити, скільки прутів по кожному із можливих варіантів потрібно розрізати, щоб отримати не менше необхідної кількості заготовок кожного виду при мінімальних відходах.

Таблиця 1.19

Довжина заготовки	Варіанти розподілу					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1			
35		1		3	1	
50			1		1	2
Величина відходів	20	30	15	5	25	10

№ 26. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 1.20. В ній же вказані прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством.

Враховуючи, що вироби А та В можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації усіх виробів є максимальний.

Таблиця 1.20

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на один виріб		Кількість сировини
	A	B	
I	16	10	360
II	18	9	200
III	16	8	180
Прибуток	7	12	

№ 27. Є три технологічних процеси для виділення із руди двох необхідних речовин A та B. Із кожної тонни руди при застосуванні процесів 1, 2 і 3 отримується відповідно (таблиця 1.21):

Таблиця 1.21

Речовини	Вихід речовини (в кг) із тонни руди при застосуванні процесу		
	1	2	3
A B	0.4 0.6	0.6 0.4	0.8 0.2
Витрати	500	160	100

Визначити оптимальний розподіл 10т руди за процесами 1, 2 і 3, щоб витрати були мінімальними, якщо необхідно отримати не менше 4 кг кожної речовини.

№ 28. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів в кількості, відповідно рівній 29, 32 і 18 штук. Кожний лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість отримуваних заготовок при даному способі розкрою наведено в таблиці 1.22. В ній же вказана величина відходів, які отримуються при даному способі розкрою одного листа фанери.

Таблиця 1.22

Вид заготовки	Кількість заготовок за видами	
	I	II
1-й	2	
2-й	5	4
3-й	2	3
Величина відходів	12	18

Визначити скільки листів фанери і яким способом потрібно розкроїти так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

№ 29. Для виготовлення трьох видів виробів A, B та C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання указані в таблиці 1.23. В ній же вказано загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний.

Таблиця 1.23

Обладнання	Витрати часу			Фонд часу
	A	B	C	
Токарне	8	5	10	150
Фрезерне		4	7	120
Зварювальне	4	7	12	180
Шліфувальне	6	12		120
Прибуток	10	18	12	

№ 30. **У** трьох пунктах відправлення зібрано однорідний вантаж в кількості, відповідно рівній 280, 620 і 440 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількості, відповідно рівній 260, 520 і 420 т. Вартості перевезень 1т вантажу із кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$\left(c_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2&4&3\\7&0&8\\6&9&8\end{pmatrix}$$

Знайти план перевезень, що забезпечує вивезення наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пункти призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень. Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальний при умові, що виробів B потрібно випустити не менше, ніж виробів A.

Індивідуальні завдання до теми 2

Знайти: а) вектор валового випуску; б) матрицю повних витрат; в) виробничу собівартість кожного виду продукції.

№ 1. $$\begin{aligned}x_1&=0,1x_2+0,1x_3+8\\x_2&=0,03x_1+0,2x_3+0,1x_4+4\\x_3&=0,04x_1+0,1x_2+0,02x_4+2\\x_4&=0,1x_1+0,1x_2+8\end{aligned}$$

№ 2. $$\begin{aligned}x_1&=0,1x_2+0,1x_3+8\\x_2&=0,2x_1+0,3x_3+0,08x_4+8\\x_3&=0,09x_1+0,2x_2+0,2x_4+2\\x_4&=0,2x_1+0,1x_2+7\end{aligned}$$

№ 3.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,25x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,3x_1 + 0,1x_2 + 6 \end{aligned}$$

№ 4.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,03x_1 + 0,02x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 5 \end{aligned}$$

№ 5.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,2x_1 + 0,08x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,15x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,05x_1 + 0,07x_2 + 4 \end{aligned}$$

№ 6.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,02x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,06x_1 + 0,1x_2 + 3 \end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,09x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,05x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,25x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,07x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$$

№ .8.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,08x_1 + 0,3x_2 + 1 \end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,1x_3 + 8 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,25x_3 + 0,05x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,08x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,09x_1 + 0,1x_2 \end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 9 \end{aligned}$$

№ 11.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,1x_1 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 7 \end{aligned}$$

№ 12.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 8 \end{aligned}$$

№ 13.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 5 \end{aligned}$$

№ 14.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_2 + 6 \end{aligned}$$

№ 15.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 4 \end{aligned}$$

№.16.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,06x_1 + 0,1x_2 + 3 \end{aligned}$$

№ 17.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$$

№ 18.
$$\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 1 \end{aligned}$$

№ 19. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 6 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 \end{aligned}$

№ 20. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_2 + 9 \end{aligned}$

№ 21. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 8 \end{aligned}$

№ 22. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 5 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 7 \end{aligned}$

№ 23. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_1 + 0,1x_2 + 6 \end{aligned}$

№ 24. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,1x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,2x_1 + 0,1x_2 + 5 \end{aligned}$

№ 25. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,03x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,05x_1 + 0,1x_2 + 4 \end{aligned}$

№ 26. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,08x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,06x_1 + 0,1x_2 + 3 \end{aligned}$

№ 27. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_1 + 0,06x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,07x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$

№ 28. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,02x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,04x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,08x_1 + 0,1x_2 + 1 \end{aligned}$

№ 29. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 + 4 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,09x_1 + 0,1x_2 + 2 \end{aligned}$

№ 30. $\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_2 + 0,4x_3 + 0,3x_4 + 2 \\ x_2 &= 0,3x_1 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 4 \\ x_3 &= 0,2x_2 + 0,2x_4 + 2 \\ x_4 &= 0,1x_2 + 9 \end{aligned}$

Індивідуальні завдання до тем 3 - 4

Знайти область допустимих розв’язків (ОДР) систем нерівностей і координати однієї з її вершин.

№ 1. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 3. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -15, \\ 4x_1 - x_2 \ge 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 30, \\ x_1 - 2x_2 \le 20. \end{cases}$

№ 6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1. \end{cases}$

№ 13. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le -1, \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$

№ 14. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 5x_1 - 2x_1 \le 10, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10. \end{cases}$

№ 15. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 2_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28. \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -1, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 17. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 18. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 21. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 22. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 23. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - 2x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 1. \end{cases}$

№ 25. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -3, \\ 2x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_1 - x_2 - 1 \le 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3 \le 0. \end{cases}$

№ 26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \le \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

№ 27. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge -4, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$

№ 28. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 6x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 29. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

№ 30. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

Індивідуальні завдання до теми 5

Розв’язати графічно задачу лінійного програмування:

№ 1.
$$\begin{aligned} &F = -3x_1 + 6x_2 \to \min; \\ &5x_1 - 2x_2 \le 4, \\ &x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ &x_1 + x_2 \ge 4, \\ &x_1 \ge 0, \\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

№ 2.
$$\begin{aligned} &F = 3x_1 + 3x_2 \to \max; \\ &x_1 + x_2 \le 8, \\ &3x_1 + 7x_2 \ge 21, \\ &x_1 - 2x_2 \le 10, \\ &0 \le x_1 \le 5, \\ &0 \le x_2 \le 1. \end{aligned}$$

№ .3.
$$\begin{aligned} &F = x_1 + x_2 \to \max; \\ &-5x_1 + x_2 \le 0, \\ &-x_1 + 5x_2 \ge 0, \\ &x_1 + x_2 \le 6, \\ &x_1 \ge 0, \\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

№ 4.
$$\begin{aligned} &F = x_1 + x_2 \to \max; \\ &5x_1 - 2x_2 \le 7, \\ &-x_1 + x_2 \le 5, \\ &x_1 + x_2 \le 6, \\ &x_1 \ge 0, \\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

№ 5.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 - 4x_2 \to \max;\\
&8x_1 - 5x_2 \le 16,\\
&x_1 + 3x_2 \ge 2,\\
&2x_1 + 7x_2 \le 9,\\
&x_1 \ge 0,\\
&x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 6.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;\\
&3x_1 - 2x_2 \ge -6,\\
&x_1 + x_2 \ge 3,\\
&0 \le x_1 \le 3,\\
&0 \le x_2 \le 5.
\end{aligned}
$$

№ 7.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 - x_2 \to \max;\\
&x_1 - x_2 \ge -3,\\
&6x_1 + 7x_2 \le 42,\\
&2x_1 - 3x_2 \le 6,\\
&x_1 \ge 0,\\
&x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 8.
$$
\begin{aligned}
&F = 7x_1 + 6x_2 \to \max;\\
&2x_1 + 5x_2 \ge 10,\\
&5x_1 + 2x_2 \ge 10,\\
&x_1 \le 6,\\
&x_2 \le 5,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 9.
$$
\begin{aligned}
&F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;\\
&x_1 + x_2 \le 4,\\
&3x_1 + x_2 \ge 4,\\
&x_1 + 5x_2 \ge 4,\\
&0 \le x_1 \le 3,\\
&0 \le x_2 \ge 3.
\end{aligned}
$$

№ 10.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 - x_2 \to \max;\\
&x_1 - x_2 \ge -3,\\
&6x_1 + 7x_2 \le 42,\\
&2x_1 - 3x_2 \le 6,\\
&x_1 + x_2 \ge 4,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 11.
$$
\begin{aligned}
&F = 5x_1 + x_2 \to \min;\\
&x_1 + 7x_2 \ge 7,\\
&-2x_1 + x_2 \le 6,\\
&2x_1 + 5x_2 \ge 10,\\
&5x_1 + 2x_2 \ge 10,\\
&7x_1 + x_2 \ge 7,\\
&x_1 \le 6, x_2 \le 7,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 12.
$$
\begin{aligned}
&F = x_1 - x_2 \to \max;\\
&-x_1 + x_2 \ge 8,\\
&8x_1 + 5x_2 \le 80,\\
&x_1 - 2x_2 \le 2,\\
&x_1 + 4x_2 \ge 4,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 13.
$$
\begin{aligned}
&F = 7x_1 + x_2 \to \max;\\
&x_1 + x_2 \le 14,\\
&3x_1 - 5x_2 \le 15,\\
&5x_1 + 3x_2 \ge 21,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 14.
$$
\begin{aligned}
&F = x_1 - x_2 \to \max;\\
&3x_1 + x_2 \ge 8,\\
&x_1 + 2x_2 \ge 6,\\
&x_1 - x_2 \le 3,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 15.
$$
\begin{aligned}
&F = 7x_1 - x_2 \to \min;\\
&x_1 + x_2 \ge 3,\\
&5x_1 + x_2 \ge 5,\\
&x_1 + 5x_2 \ge 5,\\
&0 \le x_1 \le 4,\\
&0 \le x_2 \le 4.
\end{aligned}
$$

№ 16.
$$
\begin{aligned}
&F = 5x_1 - 3x_2 \to \min;\\
&3x_1 + 2x_2 \ge 6,\\
&2x_1 - 3x_2 \ge -6,\\
&x_1 - x_2 \le 4,\\
&4x_1 + 7x_2 \le 28,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 17.
$$
\begin{aligned}
&F = x_1 + 3x_2 \to \max;\\
&-x_1 + x_2 \le 3,\\
&4x_1 + 3x_2 \le 20,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 18.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;\\
&8x_1 - 5x_2 \le 16,\\
&x_1 + 3x_2 \ge 2,\\
&x_1 + 7x_2 \le 9,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 19.
$$
\begin{aligned}
&F = x_1 + 2x_2 \to \max;\\
&2x_1 + x_2 \le 14,\\
&-3x_1 + 2x_2 \le 9,\\
&3x_1 + 4x_2 \le 27,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 20.
$$
\begin{aligned}
&F = x_1 + 2x_2 \to \max;\\
&5x_1 - 2x_2 \le 4,\\
&x_1 - 2x_2 \ge -4,\\
&x_1 + x_2 \ge 4,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 21.
$$
\begin{aligned}
&F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;\\
&5x_1 - 2x_2 \le 3,\\
&x_1 + x_2 \ge 1,\\
&-3x_1 + x_2 \le 3,\\
&2x_1 + x_2 \le 4,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 22.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 - x_2 \to \max;\\
&x_1 - 2x_2 \ge 4,\\
&5x_1 + 2x_2 \ge 10,\\
&4x_1 - 3x_2 \le 12,\\
&7x_1 + 4x_2 \le 28,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 23.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;\\
&3x_1 - 2x_2 \ge -6,\\
&x_1 + x_2 \ge 3,\\
&x_1 \le 3,\\
&x_2 \le 5,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 24.
$$
\begin{aligned}
&F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;\\
&x_1 - 4x_2 \le 4,\\
&3x_1 + 2x_2 \le 6,\\
&-x_1 + x_2 \le 1,\\
&x_1 + 2x_2 \ge 2,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 25.
$$
\begin{aligned}
&F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;\\
&3x_1 - 2x_2 \ge -6,\\
&x_1 + x_2 \ge 3,\\
&0 \le x_1 \le 3,\\
&0 \le x_2 \le 5.
\end{aligned}
$$

№ 26.
$$
\begin{aligned}
&F = x_1 + 2x_2 \to \max;\\
&5x_1 - 2x_2 \le 4,\\
&x_1 - 2x_2 \ge -4,\\
&x_1 + x_2 \ge 4,\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

№ 27. $$\begin{aligned}&F=-2x_1+x_2\to\min;\\&2x_1+x_2\le 8,\\&x_1+3x_2\ge 6,\\&3x_1+x_2\ge 3,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 28. $$\begin{aligned}&F=x_1+x_2\to\min;\\&2x_1+x_2\ge 8,\\&x_1+2x_2\ge 6,\\&x_1-x_2\le 3,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 29. $$\begin{aligned}&F=-3x_1+2x_2\to\min;\\&x_1+2x_2\ge 10,\\&3x_1+x_2\ge 15,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 30. $$\begin{aligned}&F=3x_1-2x_2\to\max;\\&2x_1+x_2\le 11,\\&-3x_1+2x_2\le 10,\\&3x_1+4x_2\ge 20,\\&x_1\ge 0,\\&x_2\ge 0.\end{aligned}$$

Індивідуальні завдання до тем 6 - 8

Розв’язати ЗЛП за допомогою симплекс-методу.

№ 1. $$\begin{aligned}&L=2x_1+x_2-3x_3\to\max;\\&x_1+3x_2-2x_3\le 4,\\&5x_1+x_3\ge -12,\\&-2x_1+x_2-3x_3\ge -4,\\&x_1+x_2\ge 4,\\&x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{aligned}$$

№ 2. $$\begin{aligned}&L=3x_1+2x_2\to\max;\\&4x_1+2x_2\ge 12,\\&x_1+2x_2\le 10,\\&2x_1+2x_2=6,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 3. $$\begin{aligned}&L=2x_1+6x_2\to\max;\\&8x_1-5x_2\le 40,\\&2x_2+5x_3\ge 10,\\&-6x_1+5x_2\le 60,\\&2x_1+x_2\le 14,\\&x_1,x_2\ge 0.\end{aligned}$$

№ 4. $$\begin{aligned}&L=x_1+2x_2+3x_3-x_4\to\max;\\&x_1+2x_2+3x_3=15,\\&2x_1+x_2+5x_3=20,\\&x_1+2x_2+x_4=10,\\&x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0.\end{aligned}$$

№ 5. $$\begin{aligned}&L=(-2x_3+2x_4+x_5)\to\max;\\&x_1-2x_3+x_4+x_5=4,\\&x_2+3x_3-x_4+2x_5=2,\\&x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0.\end{aligned}$$

№ 6. $$\begin{aligned}&L=(x_1+x_2+2x_3+8x_4)\to\max;\\&2x_1-x_2+3x_3-2x_4=3,\\&-x_1+3x_2-4x_3+4x_4=1,\\&x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0.\end{aligned}$$

№ 7.
$$\begin{aligned}&L = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + 5x_5 \to \min;\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \le 30,\\&3x_1 \le 10,\\&x_2 + 4x_3 \le 20,\\&2x_4 + x_5 \le 15,\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 8.
$$\begin{aligned}&L = (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) \to \max;\\&x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40,\\&x_1 + 3x_2 \le 30,\\&2x_1 + x_2 \le 20,\\&x_3 \le 10,\\&x_4 \le 10,\\&x_3 + x_4 \le 15,\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 9.
$$\begin{aligned}&L = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 +\\&6x_5 + 12x_6) \to \max;\\&3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 \le 24,\\&x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 18,\\&x_5 + 2x_6 \le 10,\\&3x_5 + x_6 \le 12,\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 10.
$$\begin{aligned}&L = (2x_1 - x_2 + 3x_4) \to \max;\\&x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \le 2,\\&2x_1 - x_2 \le 1,\\&x_1 + 2x_2 \le 3,\\&-x_3 + 2x_4 \le 2,\\&-2x_3 + x_4 \le 1,\\&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 11.
$$\begin{aligned}&L = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min;\\&2x_1 + 4x_2 \ge 10,\\&3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 12.
$$\begin{aligned}&L = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min;\\&2x_1 + 4x_2 \ge 10,\\&3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 10,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 13.
$$\begin{aligned}&L = (3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + x_5 \to \max;\\&x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 28,\\&x_1 + x_2 + 2x_3 \le 16,\\&x_4 + 2x_5 \le 12,\\&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 14.
$$\begin{aligned}&L = 2x_1 + x_2 \to \max;\\&7x_1 + 4x_2 \le 28,\\&-x_1 + 2x_2 \le 14,\\&5x_1 + 2x_2 \ge 10,\\&4x_1 - 3x_2 \le 12,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 15.
$$\begin{aligned}&L = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;\\&x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4,\\&5x_1 - x_3 \le 12,\\&2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 16.
$$\begin{aligned}&L = x_1 + 2x_2 \to \max;\\&2x_1 + 3x_2 \le 8,\\&2x_1 + x_2 \le 6,\\&x_1 + x_2 \ge 1,\\&x_1, x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 17.
$$\begin{aligned}&L = 8x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;\\&5x_1 - x_2 + x_3 \le 2,\\&x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4,\\&x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

№ 18.
$$\begin{aligned}&L = 6x_1 + 4x_2 \to \min;\\&2x_1 + x_2 \ge 3,\\&x_1 - 2x_2 \le 2,\\&3x_1 + 2x_2 \ge 1.\end{aligned}$$

№ 19.
$$L = x_1 + x_2 \to \max;$$
$$5x_1 - 2x_2 \le 7,$$
$$-x_1 + x_2 \le 5,$$
$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 20.
$$L = 3x_1 + x_2 \to \max;$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 5,$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 16,$$
$$3x_1 + x_2 \ge 6,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 9,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 21.
$$L = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$2x_1 - 3x_2 \le 6,$$
$$3x_1 + x_2 \ge 2,$$
$$x_1 - x_2 \ge -3,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 22.
$$L = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 20,$$
$$3x_1 + x_2 \le 7,$$
$$4x_1 - 3x_2 \le 5,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 23.
$$L = 2x_1 - x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$3x_1 + x_2 \ge 3,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 24.
$$L = x_1 + x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + 11x_2 \le 38,$$
$$x_1 + x_2 \le 7,$$
$$4x_1 - 5x_2 \le 5,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 25.
$$L = 5x_1 - 3x_2 \to \min;$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 6,$$
$$2x_1 - 3x_2 \ge -6,$$
$$x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 26.
$$L = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \min;$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 40,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 80,$$
$$3x_2 + 3x_3 - 1{,}5x_4 \ge 36,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

№27.
$$L = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to \max;$$
$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 35,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

№ 28.
$$L = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2,$$
$$3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 6,$$
$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 10,$$
$$x_1 - x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

№ 29.
$$L = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$$
$$5x_1 + 3x_2 \le 3,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4,$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

№ 30.
$$L = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 9,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Індивідуальні завдання до теми 9

Скласти двоїсту задачу; розв'язати одну із задач симплексним методом і знайти оптимальний план іншої задачі; показати взаємозв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач.

№ 1.
$$L=(x_1+2x_2)\to\max;$$
$$2x_1+3x_2\le 8,$$
$$2x_1+x_2\le 6,$$
$$x_1+x_2\ge 1,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 2.
$$L=(-2x_1+3x_2)\to\min;$$
$$2x_1+x_2\le 8,$$
$$x_1+3x_2\ge 6,$$
$$3x_1+x_2\ge 3,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 3.
$$L=(6x_1+4x_2)\to\min;$$
$$2x_1+x_2\ge 3,$$
$$x_1-x_2\le 1,$$
$$-x_1+2x_2\ge 1,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 4.
$$L=(4x_1+3x_2)\to\max;$$
$$5x_1+2x_2\ge 20,$$
$$x_1+3x_2\le 15,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 5.
$$L=(x_1+3x_2)\to\max;$$
$$x_1+x_2\ge 3,$$
$$6x_1+x_2\le 42,$$
$$2x_1-3x_2\ge 6,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 6.
$$L=(x_1-2x_2)\to\max;$$
$$5x_1-2x_2\le 3,$$
$$x_1+x_2\ge 1,$$
$$-3x_1+x_2\le 3,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 7.
$$L=(8x_1+2x_2)\to\max;$$
$$x_1+4x_2\le 4,$$
$$-4x_1+x_2\le 4,$$
$$x_1+x_2\le 6,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 8.
$$L=(2x_1-3x_2)\to\min;$$
$$5x_1+2x_2 10,$$
$$x_1+3x_2\le 12,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 9.
$$L=(5x_1+4x_2)\to\max;$$
$$2x_1+3x_2\le 3,$$
$$x_1+3x_2\le 4,$$
$$-x_1+x_2\le 5,$$
$$5x_1+4x_2\le 6,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 10.
$$L=(2x_1+3x_2)\to\max;$$
$$x_1+5x_2\ge 16,$$
$$3x_1+2x_2\ge 12,$$
$$2x_1+4x_2\ge 16,$$
$$x_1\ge 1,$$
$$x_2\ge 0.$$

№ 11.
$$L=(5x_1+4x_2)\to\max;$$
$$2x_1+3x_2\le 3,$$
$$x_1+3x_2\le 4,$$
$$-x_1+x_2\le 5,$$
$$5x_1+4x_2\le 6,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 12.
$$L=(-2x_1-x_2)\to\max;$$
$$-x_1+2x_2\le 14,$$
$$5x_1+2x_2\ge 10,$$
$$4x_1-3x_2\le 12,$$
$$7x_1+4x_2\le 28,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 13.
$$L=(7x_1-2x_2)\to\max;\quad x_1+x_2\le 5,\quad 2x_1-3x_2\le 6,\quad 3x_1+x_2\ge 2,\quad x_1-x_2\ge -3,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 14.
$$L=(5x_1+4x_2+6x_3)\to\max;\quad x_1+x_2+x_3\le 6,\quad 2x_1+x_2+x_3\ge 9,\quad 3x_1+x_2+2x_3\ge 11,\quad x_1,x_2,x_3\ge 0.$$

№ 15.
$$L=(-7x_1+2x_2)\to\min;\quad x_1+x_2\ge 1,\quad 5x_1+x_2\ge 3,\quad -3x_1+x_2\le 3,\quad 2x_1+x_2\le 4,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 16.
$$L=(2x_1+x_2-3x_3)\to\max;\quad x_1+3x_2-2x_3\le 4,\quad -5x_1+x_3\ge -12,\quad 2x_1+x_2-3x_3\ge -4,\quad 2x_1+x_2\le 4,\quad x_1,x_2,x_3\ge 0.$$

№ 17.
$$L=(2x_1-x_2)\to\max;\quad 3x_1+x_2\ge 16,\quad x_1+2x_2\le 12,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 18.
$$L=(6x_1+4x_2)\to\min;\quad x_1+x_2\ge 3,\quad x_1-2x_2\le 2,\quad 3x_1+2x_2\ge 1,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 19.
$$L=(-x_1-2x_2)\to\min;\quad 5x_1-2x_2\le 4,\quad -x_1+2x_2\le 4,\quad x_1+x_2\ge 4,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 20.
$$L=(x_1+2x_2)\to\min;\quad 5x_1-2x_2\le 20,\quad x_1-2x_2\ge -20,\quad x_1+x_2\ge 16,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 21.
$$L=(x_1+x_2)\to\max;\quad 2x_1+x_2\le 18,\quad x_1+2x_2\le 16,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 22.
$$L=(x_1+x_2)\to\max;\quad 2x_1+x_2\le 8,\quad x_1+2x_2\ge 4,\quad x_1+4x_2\le 10,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 23.
$$L=(x_1+2x_2)\to\max;\quad 2x_1+x_2\le 18,\quad x_1+2x_2\ge 14,\quad x_1-2x_2\le -10,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 24.
$$L=(x_1+x_2)\to\min;\quad 2x_1+x_2\ge 8,\quad x_1+3x_2\ge 6,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

№ 25.
$$L=(3x_1+2x_2)\to\max;$$
$$3x_1+x_2\le 21,$$
$$2x_1+3x_2\le 30,$$
$$2x_1\le 16,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 26.
$$L=(7x_1+x_2)\to\min;$$
$$x_1+x_2\ge 3,$$
$$5x_1+x_2\ge 5,$$
$$x_1+5x_2\ge 5,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 27.
$$L=(x_1+2x_2)\to\max;$$
$$6x_1+2x_2\ge 6,$$
$$3x_1-2x_2\le 6,$$
$$3x_1-x_2\ge -3,$$
$$2x_1+2x_2\le 10,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 28.
$$L=(15x_1+33x_2)\to\min;$$
$$3x_1+2x_2\ge 6,$$
$$6x_1+x_2\ge 6,$$
$$x_2\ge 1,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 29.
$$L=(2x_1-x_2)\to\min;$$
$$5x_1+9x_2\le 45,$$
$$6x_1+3x_2\le 18,$$
$$-x_1+2x_2\ge 2,$$
$$x_1,x_2\ge 0.$$

№ 30.
$$L=(x_1-3x_2)\to\min;$$
$$-x_1+3x_2-x_3+2x_4\le 6,$$
$$2x_1+x_2+2x_3-3x_4\ge 4,$$
$$1\le x_1\le 3,$$
$$x_2,x_3,x_4\ge 0.$$

Індивідуальні завдання до тем 11 - 12

Знайти опорний та оптимальний плани задачі транспортного типу. Для задач використати нижченаведені дані:

Постачальник / Споживач	B_1 = 55+3M	B_2 = 115-M	B_3 = 10+2M	B_4 = 200-4M
A_1 =68+M	8-K	7	5+K	9
A_2 =25+2M	1	2	4	3
A_3 =99-3M	2	1+K/2	7	7-K

№ 1. K=2; M=15.
№ 2. K=4; M=17.
№ 3. K=6; M=19.
№ 4. K=2; M=21.
№ 5. K=4; M=18.
№ 6. K=6; M=20.
№ 7. K=2; M=10.
№ 8. K=4; M=15.
№ 9. K=3; M=10.
№ 10. K=4; M=35.
№ 11. K=1; M=11.
№ 12. K=6; M=16.
№ 13. K=4; M=32.
№ 14. K=5; M=31.

№ 15. К=6; М=23. **№ 16**. К=2; М=11.

№ 17. К=4; М=18. **№ 18**. К=6; М=6.

№ 19. К=6; М=5. **№ 20**. К=2; М=33.

№ 21. К=2; М=12. **№ 22**. К=6; М=30.

№ 23. К=5; М=20. **№ 24.** К=3; М=15.

№ 25. К=4; М=14. **№ 26**. К=7; М=13.

№ 27. К=2; М=9. **№ 28**. К=4; М=13.

№ 29. К=5; М=14. **№ 30**. К=6; М=22.

Індивідуальні завдання до теми 13

Розв'язати задачу про розподіл чотирьох працівників за чотирма верстатами так, щоб загальна вартість робіт була мінімальною. Відповідні коефіцієнти вартості наведені в таблиці. Прочерк (нуль) означає, що даний робітник не може працювати на даному верстаті. Знайти оптимальний розв'язок.

№ 1.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	10	10	30
Б	5	56	21	10
В	7	34	18	34
Г	23	24	11	56

№ 2.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	3	1	3	10
Б	5	4	7	5
В	6	38	8	8
Г	27	5	2	6

№ 3.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	5	7	9
Б	8	9	7	3
В	6	5	8	5
Г	5	3	6	8

№ 4.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	1	10	1	30
Б	5	56	2	13
В	7	34	18	34
Г	32	42	12	1

№ 5.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	10	51	3
Б	53	45	23	1
В	4	34	48	3
Г	5	24	2	5

№ 6.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	34	10	20	40
Б	55	66	45	10
В	27	43	38	24
Г	77	78	22	37

№ 7.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	10	3	10
Б	8	4	7	1
В	7	3	9	3
Г	3	4	10	6

№ 8.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	3	5	7	46
Б	2	35	6	3
В	5	3	34	7
Г	3	3	56	54

№ 9.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	5	7	8	4
Б	9	5	6	7
В	5	6	8	8
Г	4	5	7	5

№ 10.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	4	3	5
Б	4	5	7	5
В	5	4	8	4
Г	6	5	9	6

№ 11.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	4	2	1
Б	3	5	6	4
В	7	8	8	3
Г	5	6	3	8

№ 12.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	23	45	57	34
Б	45	65	66	85
В	65	35	44	67
Г	35	44	34	45

№ 13.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	45	77	5
Б	6	46	4	6
В	10	80	76	74
Г	45	8	6	5

№ 14.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	2	2	42
Б	35	5	3	5
В	45	6	5	18
Г	6	3	4	24

№ 15.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	30	45	25
Б	35	46	6	10
В	67	5	4	5
Г	4	43	45	76

№ 16.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	21	35	54	34
Б	44	67	77	56
В	21	87	99	63
Г	11	56	78	54

№ 17.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	23	4	7	65
Б	4	5	56	10
В	5	67	8	7
Г	44	34	9	8

№ 18.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	34	32	37	80
Б	23	2	21	42
В	43	30	23	23
Г	25	23	78	14

№ 19.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	2	5	6	7
Б	4	6	7	10
В	6	7	8	4
Г	7	4	6	4

№ 20.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	34	56	67	88
Б	56	34	45	67
В	45	53	63	78
Г	34	45	45	56

№ 21.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	10	20	35
Б	5	505	21	5
В	17	25	18	32
Г	21	34	11	56

№ 22.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	4	2	3	10
Б	6	4	17	5
В	15	38	3	4
Г	21	15	2	6

№ 23.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	5	7	9
Б	25	18	7	23
В	6	5	8	25
Г	5	13	6	18

№ 24.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	4	10	11	22
Б	25	56	22	13
В	16	24	8	34
Г	32	42	15	10

№ 25.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	12	10	5	1
Б	3	24	23	3
В	4	14	48	4
Г	5	4	2	25

№ 26.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	3	10	30	40
Б	5	7	5	1
В	2	3	3	24
Г	7	7	2	36

№ 27.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	22	12	3	10
Б	38	4	17	20
В	17	3	19	3
Г	52	35	28	6

№ 28.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	13	2	27	9
Б	22	4	16	3
В	15	3	34	7
Г	23	5	56	14

№ 29.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	15	27	13	4
Б	26	14	26	17
В	35	36	37	28
Г	14	25	7	25

№ 30.

Виконавці	Верстати			
	1	2	3	4
А	22	2	1	35
Б	14	8	7	5
В	25	12	38	4
Г	6	15	19	5

Індивідуальні завдання до теми 14

Розв'язати задачі у цілих числах або довести, що вони не мають розв'язку: а) методом Гоморі; б) методом „віток і меж”.

1. $F = 3x_1 - 2x_2 \to \max;$
$2x_1 + x_2 \le 11,$
$-3x_1 + 2x_2 \le 10,$
$3x_1 + 4x_2 \ge 20,$
$x_1 \ge 0,$
$x_2 \ge 0.$

2. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$3x_1 - 2x_2 \ge -6,$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$0 \le x_1 \le 3,$
$0 \le x_2 \le 5.$

5. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$5x_1 - 2x_2 \le 4,$
$x_1 - 2x_2 \ge -4,$
$4x_1 - 3x_2 \le 12,$
$x_1 + x_2 \ge 4,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

6. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 - x_2 \ge -3,$
$6x_1 + 7x_2 \le 42,$
$2x_1 - 3x_2 \le 6,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

7. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;$

$8x_1 - 5x_2 \le 16,$
$x_1 + 3x_2 \ge 2,$
$2x_1 + 7x_2 \le 9,$
$x_1, x_2 \le 0.$

8. $F = -2x_1 + x_2 \to \max;$

$2x_1 + x_2 \le 8,$
$x_1 + x_2 \le 6,$
$-3x_1 + 2x_2 \ge 3,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

9. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$

$8x_1 - 5x_2 \le 16,$
$x_1 + 3x_2 \le 2,$
$2x_1 + 7x_2 \ge 9,$
$x_1, x_2 \le 0.$

10. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$5x_1 - 2x_2 \le 4,$
$x_1 - 2x_2 \ge -4,$
$x_1 + x_2 \ge 4,$
$x_1, x_2 \le 0.$

11. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$

$x_1 - 4x_2 \le 4,$
$3x_1 + 2x_2 \le 6,$
$-x_1 + x_2 \le 1,$
$x_1 + 2x_2 \ge 2,$
$x_1, x_2 \le 0.$

12. $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$

$5x_1 - 2x_2 \le 3,$
$x_1 + x_2 \ge 1,$
$-3x_1 + x_2 \le 3,$
$2x_1 + x_2 \le 4,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

13. $F = -2x_1 + x_2 \to \min;$

$2x_1 + x_2 \le 8,$
$x_1 + 3x_2 \ge 6,$
$3x_1 + x_2 \ge 3,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

14. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$2x_1 + x_2 \le 14,$
$-3x_1 + 2x_2 \le 9,$
$3x_1 + 4x_2 \le 27,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

15. $F = x_1 + 3x_2 \to \max;$

$-x_1 + x_2 \le 3,$
$4x_1 + 3x_2 \le 20,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

16. $F = -3x_1 + 2x_2 \to \min;$

$x_1 + 2x_2 \ge 10,$
$3x_1 + x_2 \ge 15,$
$x_1, x_2 \le 0.$

17. $F = 5x_1 + x_2 \to \min;$

$x_1 + 7x_2 \ge 7,$
$-2x_1 + x_2 \le 6,$
$2x_1 + 5x_2 \ge 10,$
$5x_1 + 2x_2 \ge 10,$
$7x_1 + x_2 \ge 7,$
$x_1 \le 6, x_2 \le 7$
$x_1, x_2 \ge 0.$

18. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$

$3x_1 - 2x_2 \ge -6,$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$x_1 + x_2 \ge 3,$
$x_1 \le 3,$
$x_2 \le 5,$
$x_1, x_2 \ge 0.$

19. $F = x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 \le 8, \\ &8x_1 + 5x_2 \le 80, \\ &x_1 - 2x_2 \le 2, \\ &x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

20. $F = 7x_1 - x_2 \to \min;$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \ge 3, \\ &5x_1 + x_2 \ge 5, \\ &x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ &0 \le x_1 \le 4, \\ &0 \le x_2 \le 4. \end{aligned}$$

21. $F = 7x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 14, \\ &3x_1 - 5x_2 \le 15, \\ &5x_1 + 3x_2 \ge 21, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

22. $F = x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 \ge 8, \\ &x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ &x_1 - x_2 \le 3, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

23. $F = 5x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ &2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ &x_1 - x_2 \le 4, \\ &4x_1 + 7x_2 \le 28, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

24. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \ge -3, \\ &6x_1 + 7x_2 \le 42, \\ &2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ &x_1 + x_2 \ge 4, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

25. $F = 7x_1 + 6x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ &5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ &x_1 \le 6, \\ &x_2 \le 5, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

26. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 \ge 4, \\ &x_1 + x_2 \ge 10, \\ &4x_1 - x_2 \le 12, \\ &7x_1 + x_2 \le 7, \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

27. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &3x_1 - 2x_2 \ge -6, \\ &x_1 + x_2 \ge 3, \\ &0 \le x_1 \le 3, \\ &x_2 \le 5, \\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

28. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &8x_1 - 5x_2 \le 16, \\ &x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ &2x_1 + 7x_2 \le 9, \\ &x_1 \ge 0, \\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

29. $F = -3x_1 + 6x_2 \to \min;$

$$\begin{aligned} &5x_1 - 2x_2 \le 4, \\ &x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ &x_1 + x_2 \ge 4, \\ &x_1 \ge 0, \\ &x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

30. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 8, \\ &3x_1 + 7x_2 \ge 21, \\ &x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ &0 \le x_1 \le 1, \\ &0 \le x_2 \ge 1. \end{aligned}$$

Програма курсу "Економіко-математичне моделювання"

Програма складена на основі освітньо-професійних програм підготовки бакалавра з напрямів 6.030509 „Облік та аудит” і 6.030504 “Економіка підприємства”, які затверджені МОН України 07.06.2006 р. Вона охоплює всі змістовні модулі, визначені для мінімальної кількості годин, передбачених цими стандартами для відповідної дисципліни.

Предметом вивчення дисципліни «Економіко-математичне моделювання» є моделі та методи системного аналізу, способи дослідження й оптимізації досліджень.

Міждисциплінарні зв’язки: «Економіко-математичне моделювання» викладається після вивчення студентами дисципліни „Вища математика”, „Теорія ймовірностей та математична статистика”, передує вивченню курсу, „Економетрія”, „Операційний менеджмент”.

Мета дисципліни «Економіко-математичне моделювання» – формування у майбутніх спеціалістів теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів, вивчення в систематизованій формі та активне засвоєння студентами основних методів розв’язування, аналізу та використання задач зі знаходження екстремуму функції на множині допустимих варіантів у широкому спектрі теоретико-економічних та практичних проблем на всіх рівнях ієрархії управління.

Дисципліна має практичну спрямованість на вирішення питань найкращого (оптимального) розподілу обмежених ресурсів, вибір оптимального варіанта (об’єкта, проекту) з множини альтернативних. Внаслідок вивчення дисципліни студент повинен: опанувати основні категорії, поняття, теореми та задачі, необхідні при застосуванні економіко-математичних методів в АПК; уміти приймати обґрунтовані рішення шляхом застосування надійних комп’ютерних технологій в умовах ринкової економіки.

Завдання: вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв’язування та аналізу з метою використання в економіці.

Предмет: методологія та інструментарій побудови і розв’язування оптимізацій них задач.

Зміст дисципліни розкривається в темах:

1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки.
2. Оптимізаційні економіко-математичної моделі.
3. Задача лінійного програмування та методи її розв’язування.
4. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізацій них задач.
5. Цілочислове програмування.
6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем.
7. Аналіз та управління ризиком в економіці.
8. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику.

9. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія.

10. Лінійні моделі множинної регресії.

11. Узагальнені економетричні моделі.

12. Економетричні моделі динаміки.

Критерії оцінки завдань

Для розрахунку оцінки використані такі критерії:

- якщо на 70...80% завдань, що входять до складу індивідуальних, дано правильні розв’язання та відповіді, то оцінка "задовільно" ;
- на 81...90% завдань - "добре";
- на 91...100% завдань - "відмінно".

Оцінка національна	Оцінка ECTS	Співвідношення між оцінками ECTS*, %	Визначення ECTS	Рейтинг з дисципліни, бали
1	2	3	4	5
Відмінно	A	10	ВІДМІННО – відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок	$(0{,}90-1{,}00)\cdot R_{дис}$
Добре	B	25	ДУЖЕ ДОБРЕ – вище середнього рівня з кількома помилками	$(0{,}82-0{,}89)\cdot R_{дис}$
	C	30	ДОБРЕ – в загальному правильна робота з певною кількістю грубих помилок	$(0{,}75-0{,}81)\cdot R_{дис}$
Задовільно	D	25	ЗАДОВІЛЬНО - непогано, але із значною кількістю недоліків	$(0{,}66-0{,}74)\cdot R_{дис}$
	E	10	ДОСТАТНЬО - виконання задовільне мінімальні критерії	$(0{,}60-0{,}65)\cdot R_{дис}$
Незадовільно	FX	-	НЕЗАДОВІЛЬНО - потрібно працювати перед тим, як отримати залік (позитивну оцінку)	$(0{,}35-0{,}59)\cdot R_{дис}$
	F	-	НЕЗАДОВІЛЬНО - необхідна серйозна подальша робота	$(0{,}1-0{,}34)\cdot R_{дис}$

Список рекомендованої літератури

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - Москва: Высшая школа, 1986.
2. Алдохин Н.П., Кулиш З.А. Экономическая кибернетика. – Харьков: Вища школа, 1983.
3. Андрийчук В.Г. Наконечный З.Н. Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства. - ДО.: КНИХ, 1982.
4. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с.
5. Барковський В., Барковська Н. Математика для економістів. Т. 1-3. - К., 1997.
6. Боровиков В. Statistica: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. – СПб.: Питер, 2001. – 656 с.
7. Браславец М.Е., Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельскохозяйственном производстве.- М.: Колос, 1972.- 589 с.
8. Бугір М.К. Математика для економістів. – К.: ВЦ Академія, 2003. - 520 с.
9. Бугір М.К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: ВЦ Академія, 1998. – 272 с.
10. Бугір М.К., Криворучка С В., Сирник О.Й. Навчально-методичний посібник щодо використання ПК в задачах лінійної оптимізації. – Тернопіль: Економічна думка, 2000.
11. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем. - М.: Наука, 1978.
12. Вітлінський В. В., Верченко П. І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни. — К.: КНЕУ, 2000. — 292 с.
13. Вітлінський В.В. Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. – К.: Борисфен, 1996. – 336 с.
14. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Шарапов О.Д. Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник. - К.: ІЗМН, 1996. – 400 с.
15. Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир, 1976.
16. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. – К., 2001.
17. Гетманцев В.Д. Математика для економістів. Дослідження операцій. Математичне програмування. – К.: КНЕУ, 2006. – 308 с.
18. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е. Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. - М.: Финансы и статистика, 1999.
19. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. - М.:Наука, 1976.
20. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. - Москва: Наука, 1979.

21. Жданов З. Экономические модели и методы управления. - М.: Эльта, 1998.
22. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Київ: Вища школа, 1988. -
23. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. - Київ: Вища школа, 1990.
24. Замков О.О., Толстонятенко А.В., Черемних Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДНСС, 1997.
25. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория: Пер. с англ. - М.: Прогресс,1975.
26. Исследование операций в экономике:. / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. – М.: ЮНИТИ, 2002. - 407 с.
27. Кабак Л.Ф., Суворовский А.А. Математическое программирование. - К.: IМКВО, 1992.
28. Калихман М.Л. Линейная алгебра и программирование. – М.: Высшая школа, 1967. – 428 с.
29. Калихман М.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975. – 276 с.
30. Карасев А.І., Кремер Н.Ш., Савельева Т.Н. Математические методы и модели в планировании. - М.: Экономика, 1987.
31. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
32. Крупка М., Островерх П., Реверчук С. Основи економічної теорії. - Львів, 1997.
33. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0.- СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997.- 384 с.
34. Линейное и нелинейное программирование. / Под. Ред. И.Н.Ляшенко. - К.: Вища шк., 1975.
35. Малихин В.І. Математическое моделирование экономики. - М.: Изд-во УРАО, 1998.
36. Михайленко В., Федоренко Н. Математичний аналіз для економістів. – К., 1999.
37. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування. – К., 2003.
38. Острейковский В.А. Теория систем. - М.: Высшая школа, 1997.
39. Пономаренко О., Перестюк М., Бурим В. Математичні методи в економіці. - К., 1995.
40. Ржевський С.В., Александрова В.М. Дослідження операцій. – К.: Академвидав, 2006. – 560 с.
41. Романюк Т.П., Терещенко Т.О., Присенко Г.В., Городкова І.М. Математичне програмування.: Навч. посібник – К. ІЗМН, 1996.
42. Савченко О.Г., Малік Я.Г., Плоткін С.Я. Методичні вказівки та варіанти контрольної роботи з математичного програмування. - Херсон, 2010. – 35 с.
43. Ситник В.Ф., Каратодава Е.А. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. - К.: Вища школа, 1985.

44. Скурихин Н.П. Математическое моделирование. - М.: Высшая школа, 1989.
45. Советов Б. Моделирование систем. - М.: Высшая школа, 1999.
46. Таха Х. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом „Вильямс”, 2001. - 912 с.
47. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. - М.: Статистика, 1988.
48. Тунеев М.М., Сухоруков В.Ф. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. - М.: Колос, 1977. - 224 с.
49. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці. – Харків, 2003.
50. Ушкаренко В.О., Коваленко В.П., Плоткін С.Я., Поляков М.Г. Використання персональних комп'ютерів для розв’язування задач оптимізації сільськогосподарського виробництва. - Навчальний посібник. - Херсон, 2001.- 94 с.
51. Хазанова Л. Математическое моделирование в экономике. - М., 1998.
52. Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В. Математика для экономистов на базе Mathcad - СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 496 с.
53. Шарапов О.Д., Терехов Л.П., Сіднев С.П. Системний аналіз: Навч. посібник. - К.: Вища школа, 1993.
54. Ястремский А.И. Стохастические модели математической экономики. – К., 1983.
55. Ястремський О. Основи теорії економічного ризику. - К., 1997.
56. http://monax.ru/order

Навчально-методичне видання

Савченко Олександр Григорович
Валько Наталія Валеріївна
Кузьмич Людмила Василівна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Навчально-методичний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

Технічні редактори – Осадчий А.А.

Підписано до друку 23.03.2010р. Формат 60х84/16
Друк ризографія. Гарнітура Times New Roman.
Умовних друк.арк. 10,0. Наклад 300 примірників.

Віддруковано редакційно – видавничим центром "Колос"
Херсонського державного аграрного університету
73006, м. Херсон, вул. Р. Люксембург, 23, ХДАУ,
тел. 41-44-32