1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.948.35

Обращение возмущенных на спектре линейных операторов

Я. Д. Плоткин, А. Ф. Турбин

1. Имеется широкий круг задач в анализе, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, квантовой механике и др., когда требуется решать уравнения вида

$$(A - zB_1 - z^2B_2 - \ldots)\, x(z) = h,$$

где A, $B_k (k = 1, 2, \ldots)$ — линейные операторы, действующие из банахова пространства $\mathfrak{B}_1$ в банахово пространство $\mathfrak{B}_2$.

Если нуль не является собственным числом оператора A, то определение $x(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k x^k$ не представляет принципиальных трудностей (см., например, [1]). Дело существенно меняется, когда нуль является собственным значением оператора A, т. е. когда оператор A возмущается на спектре. М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником ([2], а также [3]) был предложен алгоритм для построения разложения решения $x(z)$ в ряд по степеням z в случае, когда A возмущен на спектре.

Однако, если бы удалось найти разложение оператора

$$(A - zB_1 - z^2B_2 - \ldots)^{-1}$$

при условии, что он существует и ограничен в ряд по степеням z, мы получили бы возможность решать указанные уравнения явно.

Кроме того, явный вид разложения обращения возмущенного на спектре оператора представляет и определенный самостоятельный интерес. Именно определению явного вида такого разложения и посвящена данная работа.

2. Пусть A, $B_k\, (k = \overline{1, \infty})$ — линейные операторы из $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, причем оператор A является Φ-оператором [4] с числом нулей $\geqslant 1$, а B_k — ограниченные операторы. Нас будет интересовать разложение оператора

$$A^{-1}(z) = (A - zB_1 - z^2B_2 - \ldots)^{-1} \tag{1}$$

при условии, что он существует и ограничен. Естественно, поэтому, считать B_k такими, что $A(z)$ и $A^{-1}(z)$ существуют и ограничены для $0 < |z| < a$ и $0 < |z| < b$ соответственно, a и b — некоторые положительные константы.

От операторов B_k мы потребуем несколько большего. А именно, рассмотрим сужение $\overline{A}$ оператора A на подпространство

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 = \{y \in \mathfrak{B}_1;\, Ay \neq 0\} \cup \{0\}.$$

Тогда по теореме Банаха существует оператор $\overline{A}^{-1}$, действующий из

$$\overline{\mathfrak{B}}_2 = \{x \in \mathfrak{B}_2,\, x = Ay,\, y \in \mathfrak{B}_1\}$$

в $\overline{\mathfrak{B}}_1$. Пусть A_0^{-1} — расширение оператора $\overline{A}^{-1}$ на все $\mathfrak{B}_2$ такое, что

$$\forall y \in \mathfrak{B}_2 \ominus \overline{\mathfrak{B}}_2, \quad A_0^{-1} y = 0.$$

Положим $C_1 = B_1$, $C_2 = B_1 A_0^{-1} B_1 + B_2$ и вообще

$$C_k = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_l=k} B_{i_1} A_0^{-1} B_{i_2} A_0^{-1} \ldots A_0^{-1} B_{i_l} + B_k.$$

Пусть $c_k = \| C_k \|$. Считаем, что операторы B_k удовлетворяют C-условию, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z^k c_k$ имеет ненулевой радиус сходимости.

В частности, если $B_k = 0$ $(k = \overline{2, \infty})$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k c_k = \frac{z b_1}{1 - zd},$$

где

$$b_1 = \| B_1 \|, \quad d = \| A_0^{-1} B_1 \|.$$

Следовательно, в случае линейного возмущения C-условие всегда выполняется.

Пусть $N(A)$ и $N(A^*)$ — пространство нулей операторов A и A^* соответственно. В силу сделанных предположений относительно A

$$n = \dim N(A) = \dim N(A^*) \geqslant 1.$$

Следующее определение естественно обобщает понятие обобщенной жордановой цепочки векторов (см., например, [2, 5]).

Определение. Считаем, что элемент $\varphi_0 \in N(A)$ (соответственно $\psi_0 \in N(A^*)$) имеет B-жорданову цепочку векторов (функционалов) длиной r (s), если существуют элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathfrak{B}_1$ $(\psi_1, \ldots, \psi_s \in \mathfrak{B}_2^*)$, удовлетворяющие соотношениям

$$A\varphi_k = \hat{\varphi}_{k-1} \quad (A^* \psi_l = \hat{\psi}_{l-1}), \tag{2}$$

$$\hat{\varphi}_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} B_i \varphi_{k-i} \left(\hat{\psi}_{l-1} = \sum_{i=1}^{l} B_i^* \psi_{l-i} \right). \tag{3}$$

Причем

$$(\psi_0, \hat{\varphi}_r) = \sigma_r \neq 0, \quad (\hat{\psi}_s, \varphi_0) = \delta_s \neq 0, \quad k = \overline{1, r}, \quad l = \overline{1, s}. \tag{4}$$

Предположим для простоты, что $n = 1$.
Не уменьшая общности (теперь $r = s$), можно считать, что

$$\sigma_r = \delta_r = 1. \tag{5}$$

Системы векторов φ_k и функционалов ψ_k, $k = \overline{1, r}$, удовлетворяющих (2) и (5), определяются не единственным образом. Однако, если потребовать, чтобы выполнялись условия (φ_0 и ψ_0 будем считать фиксированным вектором и функционалом из $N(A)$ и $N(A^*)$ соответственно):

$$(\psi_k, \hat{\varphi}_r) = (\hat{\psi}_r, \varphi_k) = 0, \tag{6}$$

то φ_k и ψ_k определяются однозначно. Заметим, кроме того, что из (2) следует соотношение

$$(\psi_0, \hat{\varphi}_l) = (\hat{\psi}_l, \varphi_0) = 0, \quad l = \overline{0, r-1}. \tag{7}$$

Убедимся, что условия (6) однозначно определяют φ_k и ψ_k, если φ_0 и ψ_0 фиксированы. Действительно, всякое решение уравнения (2) можно представить в виде

$$\varphi_k = \overline{\varphi}_k + \alpha_k \varphi_0, \quad \psi_k = \overline{\psi}_k + \beta_k \varphi_0,$$

где $\overline{\varphi}_k$ и $\overline{\psi}_k$— некоторые частные решения, а α_k, β_k— произвольные константы.

Подставляя эти выражения в (6) и учитывая (5), получим соответственно

$$\alpha_k = (\widehat{\psi}_r, \overline{\varphi}_k), \quad \beta_k = (\overline{\psi}_k, \widehat{\varphi}_r).$$

Обозначим

$$(\widehat{\psi}_k, \cdot)\, \widehat{\varphi}_l = \check{P}_{kl} \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$$

(тогда $\check{P}^*_{kl} = (\cdot, \widehat{\varphi}_l)\widehat{\psi}_k$).

Имеет место утверждение, близкое извесгной обобщенной лемме Э. Шмидта (см., например, [5]).

Лемма 1. *Оператор* $G = (A + \check{P}_{rr})^{-1}$ *существует и ограничен.*

Доказательство. Псложим

$$\widehat{P}_{0r} = (\psi_0, \cdot)\, \widehat{\varphi}_r, \quad \widehat{P}_{0r} \in [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_2]$$

и в силу (5) является оператором проектирования.

Рассмотрим уравнение

$$(A + \check{P}_{rr})\, x = h, \quad h \in \mathfrak{B}_2. \tag{8}$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$Ax = (I_2 - \widehat{P}_{0r})\, h, \tag{9}$$

где I_k — единичный оператор из $[\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k]$, $k = 1, 2$. Из (8) имеем

$$x = \overline{A}_0^{-1} (I_2 - \widehat{P}_{0r})\, h + \alpha\varphi_0, \tag{10}$$

где α — некоторая константа. Эту константу можно найти, снова используя (8), (10), (5). Именно, $\alpha = (\psi_0, h)$. Таким образом,

$$x = [\overline{A}_0^{-1} (I_2 - \widehat{P}_{0r}) + P_{00}]\, h,$$
$$P_{00} = (\psi_0, \cdot)\, \varphi_0 \in [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1],$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Оператор*

$$R_0 = G - P_{00} \in [\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1] \tag{11}$$

и обладает следующими свойствами:

$$R_0\widehat{\varphi}_k = \varphi_{k+1}, \quad R_0\widehat{\varphi}_r = 0, \tag{12}$$

$$R_0^*\widehat{\psi}_k = \psi_{k+1}, \quad R_0^*\widehat{\psi}_r = 0, \quad k = \overline{0, r-1}. \tag{13}$$

Доказательство. Докажем, например, (12). Подстагляя в

$$R_0\widehat{\varphi}_k = \varphi_{k+1}$$

(11) и учитывая, что в силу (7) $P_{00}\widehat{\varphi}_k = 0$ для $k = \overline{0, r-1}$, имеем

$$G\widehat{\varphi}_k = \varphi_{k+1}.$$

Лемма 1 дает

$$\widehat{\varphi}_k = A\varphi_{k+1} + \check{P}_{rr}\varphi_{k+1}.$$

Но $\check{P}_{rr}\varphi_{k+1} = 0$, что следует из (6). Равенство $R_0\widehat{\varphi}_k = \varphi_{k+1}$ таким образом доказано.

Рассмотрим далее $R_0\widehat{\varphi}_r = 0$. Так как $P_{00}\widehat{\varphi}_r = \varphi_0$ в силу (5), последнее равенство можно записать в виде

$$G\widehat{\varphi}_r = \varphi_0$$

или (лемма 1)

$$\widehat{\varphi}_r = A\varphi_0 + \check{P}_{rr}\varphi_0. \tag{14}$$

Так как $A\varphi_0 = 0$ и $\check{P}_{rr}\varphi_0 = \widehat{\varphi}_r$, получаем требуемое.

Аналогично проверяем равенства (13).

В некоторых случаях бывает интересно установить связь между R_0 (а следовательно и G) и оператором

$$T_0 = (A + \pi_0^{-1}\widetilde{P}_{00})^{-1} - \pi_0^{-1}P_{00},$$

где $\widetilde{P}_{00} = (J^*\psi_0;)\, J\varphi_0 \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ и $J \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ в предположении, что

$$\pi_0 = (\psi_0, J\varphi_0) \neq 0.$$

Существование оператора $(A + \pi_0^{-1}\widetilde{P}_{00})^{-1}$ обеспечивается в этом случае обобщенной леммой Э. Шмидта.

Соответствующий результат сформулируем в виде леммы.

Л е м м а 3. *Если* $\pi_0 = (\psi_0, J\varphi_0) \neq 0$, *то*

$$R_0 = T_0 - (T_0\widehat{P}_{0r} + \widehat{P}_{r0}T_0) + (\widehat{\psi}_r, T_0\widehat{\varphi}_r)\, P_{00}. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что

$$G = T_0 - (T_0\widehat{P}_{0r} + \widehat{P}_{r0}T_0) + [1 + (\widehat{\psi}_r, T_0\widehat{\varphi}_r)]\, P_{00}.$$

Иными словами, надо доказать, что

$$G^{-1}\, [T_0 - (T_0\widehat{P}_{0r} + \widehat{P}_{r0}T_0) + (1 + (\widehat{\psi}_r, T_0\widehat{\varphi}_r))\, P_{00}] = I_2, \tag{16}$$

$$[T_0 - (T_0\widehat{P}_{0r} + \widehat{P}_{r0}T_0) + (1 + (\widehat{\psi}_r, T_0\widehat{\varphi}_r))\, P_{00}]\, G^{-1} = I_1.$$

Прежде всего нетрудно видеть, что

$$AT_0 = I_2 - \pi_0^{-1}(\psi_0, \cdot)\, J\varphi_0,$$

$$T_0A = I_1 - \pi_0^{-1}(J^*\psi_0, \cdot)\, \varphi_0.$$

Используя это замечание, докажем первое из равенств (16)

$$(A + \check{P}_{rr})\, [T_0 - (T_0\widehat{P}_{0r} + \widehat{P}_{r0}T_0) + \gamma P_{00}] = I_2 - \pi_0^{-1}(\psi_0, \cdot)J\varphi_0 +$$

$$+ \check{P}_{rr}T_0 - I_2\widehat{P}_{0r} + \pi_0^{-1}(\psi_0, \cdot)\, J\varphi_0\widehat{P}_{0r} - \check{P}_{rr}T_0\widehat{P}_{0r} - \check{P}_{rr}\widehat{P}_{r0}T_0 +$$

$$+ \gamma\check{P}_{rr}P_{00}, \quad \gamma = 1 + (\widehat{\psi}_r, T_0\widehat{\varphi}_r).$$

Но по определению соответствующих операторов

$$(\psi_0, \cdot)\, J\varphi_0\widehat{P}_{0r} = (\psi_0, \cdot)\, J\varphi_0; \quad I_r\widehat{P}_{0r} = \widehat{P}_{0r};$$

$$\check{P}_{rr}T_0\widehat{P}_{0r} = (\widehat{\psi}_r, T_0\widehat{\varphi}_r)\, \widehat{P}_{0r};$$

$$\check{P}_{rr}\widehat{P}_{r0} = \check{P}_{rr}; \qquad \check{P}_{rr}P_{00} = \widehat{P}_{0r}.$$

Учитывая эти равенства, получаем требуемое.

До сих пор мы считали, что B-жорданова цепочка векторов и функционалов φ_k и ψ_k конечна. Докажем в некотором смысле обратное утверждение.

Лемма 4. *Пусть операторы B_k удовлетворяют C-условию и оператор $A^{-1}(z)$ существует для $0 < |z| < b$, где b — некоторая константа. Тогда элемент φ_0 (соответственно ψ_0) имеет конечную B-жорданову цепочку.*

Доказательство. (см. также [3, лемма 30.1]). Пусть, напротив, элемент φ_0 имеет бесконечную B-жорданову цепочку и $A^{-1}(z)$ существует и ограничен. Тогда, как нетрудно видеть (см. (2)),

$$\varphi_i = A_0^{-1}C_i\varphi_0, \ i = 1, 2, \ldots$$

Для всех z из круга сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k c_k$ (C-условие) ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k$$

сходится абсолютно и равномерно и $A(z)\,\varphi(z) = 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Всюду в дальнейшем мы считаем выполненными условия леммы 4. Положим $R(z) = A^{-1}(z)$, $0 < |z| < b$, и пусть длина B-жордановой цепочки элементов φ_0 и ψ_0 равна r.

Лемма 5. *$R(z)$ удовлетворяет «обобщенному» уравнению резольвенты:*

$$R(z) - R(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (z^k - s^k)\, R(z)\, B_k R(s). \tag{17}$$

Доказательство леммы немедленно следует из следующего равенства

$$R(z) - R(s) = R(z)\, A(s)\, R(s) - R(s)\, A(z) R(z).$$

Основная задача, которая решается в данной работе, состоит в определении разложения $R(z)$ в ряд по степеням z.

Разложение резольвенты $R(z)$ будем искать в виде [2]

$$R(z) = \sum_{k=-r-1}^{\infty} D_k z^k. \tag{18}$$

Как будет показано ниже, главная часть ряда Лорана (18) определяется последовательностью векторов φ_k и функционалов ψ_k. Коэффициенты же главной части зависят еще и от R_0. Определяем операторы из $[\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1]$

$$F_{nm}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} D_{n-i}B_k D_{m-(k-1)+i} \tag{19}$$

и рассмотрим ряд

$$G_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} F_{nm}^{(k)}. \tag{20}$$

В силу того, что $D_k = 0$, если $k = -r-2, -r-3, \ldots$, в сумме (20) лишь конечное число операторов отлично от нуля.

Теорема 1.

$$G_{nm} = G_{mn} = [\chi(n) + \chi(m) - 1] D_{n+m+1}, \tag{21}$$

где

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть Γ_1 — некоторый спрямляемый контур вокруг нуля, не содержащий внутри себя и на себе других собственных значений оператора A, а Γ_2 — непересекающийся с Γ_1 спрямляемый контур, содержащий внутри себя область, ограниченную контуром Γ_1, и обладающий тем же свойством

Известно, что

$$D_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} z^{-k-1} R(z)\, dz. \tag{22}$$

Подставляя (22) в выражение для G_{nm} и учитывая (17), получаем

$$G_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} F_{nm}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} D_{n-i} B_k D_{m+i-(k-1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} z^{-n+i-1} s^{-m+(k-1)-i-1} \times$$

$$\times R(z) B_k R(s)\, dz ds = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} z^{-n+i-1} s^{-m+(k-1)-i-1} R(z) B_k R(s)\, dz ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} z^{-n-1} s^{-m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} z^i s^{k-1-i} R(z) B_k R(s)\, dz ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{z^{-n-1} s^{-m-1}}{z-s} \sum_{k=1}^{\infty} (z^k - s^k) R(z) B_k R(s)\, dz ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma_2} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{z^{-n-1} s^{-m-1}}{z-s} [R(z) - R(s)]\, dz ds = [\chi(n) + \chi(m) - 1] D_{n+m+1}.$$

Отсюда же, в частности, следует, что $G_{nm} = G_{mn}$. Теорема доказана.

Обратимся к непосредственному определению операторов D_k в (18). Из теоремы 1 следует, что если известны операторы D_k, $k = -r-1, -r, \ldots, 0$, то все последующие однозначно определяются формулой (21). Покажем, что

$$D_{-r-1} = \lambda_0 P_{00},$$

$$D_{-r} = \lambda_0 (P_{01} + P_{10}) + \lambda_1 P_{00}^{*} \tag{23}$$

---

* Как удалось показать позднее, все λ_k, начиная с $k=1$, равны нулю

и вообще

$$D_{-k}=\sum_{l=0}^{r+1-k}\sum_{m+n=r+1-k-l}\lambda_l P_{mn}, \quad \text{если } k=1,2,\ldots,r+1,$$

$$D_0=R_0+\lambda_0\sum_{i=1}^{r}P_{ir+1-i}+\sum_{l=1}^{r+1}\sum_{m+n=r-l+1}\lambda_l P_{mn}, \tag{24}$$

где $\lambda_k\,(k=\overline{0,r+1})$ — некоторые константы; $P_{ij}=(\psi_i,\cdot)\,\varphi_j$; R_0 — оператор, фигурирующий в лемме 2.

Действительно, если D_k, $k=-r-1,\ldots,0$, имеют указанный вид, то, подставляя (23) и (24) в

$$A(z)\,R(z)=I_2, \qquad R(z)\,A(z)=I_1,$$

например в первое из этих равенств, последовательно получаем, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z:

$$z^{-r-1}: \quad \lambda_0 AP_{00}=\lambda_0(\psi_0,\cdot)\,A\varphi_0=0,$$

$$z^{-r}: \quad \lambda_0 A(P_{01}+P_{10})+\lambda_1 AP_{00}-\lambda_0 B_1 P_{00}=0.$$

Это следует из того, что $AP_{00}=AP_{10}=0$ и $AP_{01}=B_1P_{00}$ по определению P_{01} и в силу (2).

Продолжая аналогично, имеем для коэффициентов при z^{-1}

$$AD_{-1}=\sum_{l=0}^{r}\sum_{m+n=r-l}\lambda_l AP_{mn},$$

но (см. (2))

$$AP_{mn}=\sum_{i=1}^{n}(\psi_m,\cdot)\,B_i\varphi_{k-i}=\widehat{P}_{mn-1},$$

поэтому

$$AD_{-1}=\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{m+n=r-l-1}\lambda_l\widehat{P}_{mn-1},$$

$$\sum_{i=1}^{r}B_iD_{-i-1}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{r+1-i}\sum_{m+n=r+1-i-l}\lambda_l B_i P_{mn}.$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^{r}B_iD_{-i-1}=\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1-l}\sum_{i=1}^{r-j}\lambda_l B_i P_{r-i-j-lj}=$$

$$=\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{m+n=r-l-1}\lambda_l\widehat{P}_{mn-1}.$$

Отсюда коэффициент при z^{-1} в $A(z)\,R(z)$ равен

$$AD_{-1}-\sum_{i=1}^{r}B_iD_{-i-1}=0.$$

Покажем далее, что

$$AD_0-\sum_{i=1}^{r+1}B_iD_{-i}=I_2.$$

Для этого заметим, что

$$AR_0 = I_2 - \widehat{P}_{0r} = I_2 - (\psi_0, \cdot)\widehat{\varphi}_r.$$

Поэтому (см. (24))

$$AD_0 = I_2 - \widehat{P}_{0r} + \lambda_0 (\widehat{P}_{r0} + \widehat{P}_{r-11} + \ldots + \widehat{P}_{1r-1}) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{m+n=r-l} \lambda_l \widehat{P}_{mn},$$

$$\sum_{i=1}^{r+1} B_i D_{-i} = \sum_{j=1}^{r+1} \sum_{i=0}^{r+1-j} \sum_{k+l=r+1-i-j} \lambda_i B_j P_{kl} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \sum_{l=0}^{r-i} \sum_{j+k=r+1-l-i} \lambda_i B_j P_{kl} =$$

$$= \lambda_0 (\widehat{P}_{r0} + \ldots + \widehat{P}_{1r-1} + \widehat{P}_{0r}) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k+l=r-i} \lambda_i \widehat{P}_{kl}.$$

Таким образом,

$$AD_0 - \sum_{i=1}^{r+1} B_i D_{-i} = I_2 - (1 + \lambda_0)\widehat{P}_{0r}. \tag{25}$$

С другой стороны, коэффициенты D_k разложения (18) удовлетворяют в силу теоремы 1 условию (21).

Положим в (21) $n = -1$, $m = -r-1$. В результате получим

$$D_{-1}B_1D_{-r-1} + D_{-2}B_2D_{-r-1} + \ldots + D_{-r-1}B_{r+1}D_{-r-1} = -D_{r-1}. \tag{26}$$

Подставляя сюда вместо D_k их выражения из (23), находим, что в силу (6) и (7), коэффициенты при P_{kj}, $k + j = 1, 2, \ldots, r+1$, в левой части (26) равны нулю, а для коэффициентов при P_{00} имеем

$$\lambda_0^2 \left(\sum_{k=1}^{r+1} \psi_{r+1-k}, B_k \varphi_0 \right) + \ldots + \lambda_0 \lambda_r (\psi_0, B_1 \varphi_0) = -\lambda_0.$$

Снова используя (7) и (5), получаем

$$\lambda_0^2 = -\lambda_0;$$

λ_0 нулю равняться не может, ибо мы должны были бы иметь $AD_{-r} = 0$, в то время как $AD_{-r} = \lambda_1 B_1 P_{00}$, т. е. и $\lambda_1 = 0$ и т. д.

Итак, $\lambda_0 = -1$, следовательно (см. (25)),

$$AD_0 - \sum_{i=1}^{r+1} B_i D_{-i} = I_2.$$

Теорема 1 дает возможность последовательно определять и все остальные $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots)$ в (23) и (24).

Так, полагая в (21) $n = -1$, $m = -r$, получим (мы не приводим здесь выкладки ввиду их чрезвычайно громоздкого вида, однако характер этих выкладок вполне понятен из предыдущего):

$$\lambda_1 = \left(\sum_{k=2}^{r+1} \psi_{r+2-k}, B_k \varphi_0 \right). \tag{27}$$

Продолжая аналогично ($n = -1$, $m = -r+1, -r+2, \ldots$), имеем

$$\lambda_2 = -\lambda_1^2 + \left(\sum_{k=3}^{r+1} \psi_{r+3-k}, B_k \varphi_0 \right) + \left(\sum_{k=2}^{r+1} \psi_{r+2-k}, B_k \varphi_1 \right), \tag{28}$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1^3 - 2\lambda_1\lambda_2 + \left(\sum_{k=4}^{r+1}\psi_{r+4-k}, B_k\varphi_0\right) + \ldots + \left(\sum_{k=2}^{r+1}\psi_{r+2-k}, B_k\varphi_2\right), \quad (29)$$

. . . .

Резюмируем сказанное в следующем виде.

Теорема 2. *Если* $n = \dim N(A) = \dim N(A^*) = 1$, *оператор* $A^{-1}(z)$, $0 < |z| < b$, *существует и ограничен и длина В-жордановой цепочки элемента* $\varphi_0 \in N(A)$ $(\psi_0 \in N(A^*))$ *равна* r, *то*

$$R(z) = z^{-r-1}\lambda_0 P_{00} + z^{-r}[\lambda_0(P_{01} + P_{10}) + \lambda_1 P_{00}] + \ldots + z^{-1} \times$$
$$\times [\lambda_0 \sum_{i+j=r} P_{ij} + \lambda_1 \sum_{i+j=r-1} P_{ij} + \ldots + \lambda_r P_{00}] + R_0 + \lambda_0 \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{r} P_{ir+1-i} + \sum_{l=1}^{r}\sum_{i+j=r-l} \lambda_l P_{ij} + zD_1 + z^2 D_2 + \ldots,$$

где $P_{ij} = (\psi_i, \cdot)\varphi_j$, φ_i и ψ_i $(i = \overline{1, r})$ — B-жордановы цепочки, отвечающие вектору φ_0 и функционалу ψ_0 соответственно, λ_i определяются так, как указано в (27)—(29):

$$D_i = \sum_{k=1}^{\infty} F_{nm}^{(k)}, \; n + m = i - 1, \; i = 1, 2, \ldots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer — Verlag, Berlin, 1966.
2. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН, т. 15, вып. 3, 1960.
3. В. А. Треногин, Обобщение и приложение метода Вишика — Люстерника, УМН, т. 25, вып. 4, 1970.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, т. 12, вып. 2, 1957.
5. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, «Наука», М., 1969.

Поступила 20.XI 1970 г.

Херсонский педагогический институт,
Киевский педагогический институт