МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

«Тотожні перетворення в курсі алгебри (7-9 класів)»

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконала: студентка 4 курсу, групи 421
Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми
Желєзагло Алла Володимирівна
Керівник кандидат фізико-математичних наук, доцент Бистрянцева Анастасія Миколаївна
Рецензент кандидат фізико-математичних наук, доцент
Вейцбліт Олександр Йосипович

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Важливе місце у шкільному курсі математики належить вивченню змістової лінії курсу – вирази та їх перетворення. Вивчення різних перетворень виразів займає значну частину навчального часу. Найпростіші перетворення, які спираються на властивості арифметичних операцій, виробляються вже в початковій школі і в IV–V класах. Але основне навантаження з формування умінь і навичок виконання перетворень припадає на курс шкільної алгебри основної школи. Це пов'язано як з різким збільшенням кількості і різноманітності тотожних перетворень, так і з ускладненням діяльності по їх обґрунтуванню та з'ясуванню умов застосовності, з виділенням і вивченням таких узагальнених понять як «тотожність», «тотожні перетворення», «рівносильне перетворення», «логічне слідування» тощо.

В процесі вивчення перетворень виразів в основній школі в учнів формуються навички та вміння, необхідні для розв'язування рівнянь та нерівностей, доведення тотожностей, тощо. Виконання тотожних перетворень виразів розвиває оперативність мислення, виховує уважність та цілеспрямованість учнів. Безсумнівно, тема дипломної роботи є актуальною.

Об'єкт дослідження: процес навчання математики в основній школі.

Предмет дослідження: методика вивчення тотожних перетворень у курсі алгебри 7-9 класів.

Метою даної роботи є аналіз методичних особливостей вивчення тотожних перетворень у курсі алгебри основної школи та розробка відповідної системи завдань для самостійної роботи.

Для досягнення мети дослідження було сформульовано наступні **завдання**:

1. Провести аналіз програм, підручників та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження.

2. Розглянути методичні особливості вивчення тотожних перетворень в основній школі.

3. Підготувати систему завдань на застосування тотожних перетворень для самостійної роботи учнів.

4. Проаналізувати типові помилки учнів у ході виконання тотожних перетворень та виокремити можливі шляхи їх подолання.

Проблема, цілі і завдання дослідження зумовили вибір таких **методів дослідження**:

– вивчення і аналіз наукової, методичної та навчальної літератури з теми дослідження;

– спостереження за роботою учнів у ході проведення занять з алгебри в основній школі.

У роботі пропонується методична розробка системи завдань на тотожні перетворення виразів різного рівня складності.

Практичне значення. Подані в роботі методичні рекомендації щодо вивчення тотожних перетворень та розроблена система завдань для самостійної роботи учнів можуть бути використані вчителями математики та студентами-практикантами у ході проведення уроків алгебри у 7–9 класах.

Структура дипломної роботи. Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел (30 найменувань). Повний обсяг роботи 60 сторінок.

РОЗДІЛ 1. РОЛЬ І МІСЦЕ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У СУЧАСНОМУ ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

1.1. Основні поняття та зміст ліній тотожних перетворень

Змістова лінія вирази займає важливе місце серед інших змістових ліній та вивчається, як відомо, протягом всього курсу алгебри як основної так і старшої школи, а з деякими перетвореннями виразів починають знайомити учнів у початковій школі. Тотожні перетворення виразів не є окремою темою курсу алгебри, а дуже часто виступають вагомим апаратом реалізації інших змістових ліній освітньої галузі «Математика»: числа, рівняння і нерівності, функції, елементи комбінаторики, теорії ймовірності та математичної статистики, геометричні фігури і геометричні величини.

Саме тому, в основній школі слід велику увагу приділяти навчанню учнів правильно та раціонально виконувати тотожні перетворення виразів. Зокрема, у Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [8] серед інших завдань освітньої галузі «Математика», що визначають зміст математичної освіти в основній школі, чітко прописано наступне: «забезпечення оволодіння учнями мовою алгебри, уміннями здійснювати перетворення алгебричних виразів». У навчальній програмі з математики [20] зазначено, що одним із першочергових завдань курсу алгебри є формування умінь виконувати тотожні перетворення цілих та дробових виразів.

Але, перш ніж перейти до розгляду методичних аспектів вивчення тотожних перетворень, необхідно розглянути основні поняття з цієї теми: «вираз», «числовий вираз», «вираз зі змінною», «алгебраїчний вираз», «тотожність», «тотожні перетворення». Учень не тільки має знати те чи інше поняття, але й активно ними оперувати у процесі виконання завдань та пояснювати, чому саме таке перетворення використовується. Крім того, чітке розуміння учнем поняття «тотожні перетворення» дасть змогу відрізняти його від «нетотожних перетворень» і, тим самим, попередити велику кількість помилок учнів, що виникають у ході виконання перетворень виразів.

Означення 1.1. Вираз – це запис, що складається з чисел, букв (позначають постійні або змінні величини) та знаків математичних дій (операцій).

Означення 1.2. Вираз, що містить лише числа (постійні величини) називається числовим.

Означення 1.3. Вираз, який крім постійних величин містить змінні величини називається виразом зі змінними.

У курсі алгебри основної школи розглядають виключно алгебраїчні вирази та їх перетворення.

Означення 1.4. Алгебраїчним виразом називається вираз, складений зі скінченної кількості букв і цифр, з'єднаних між собою знаками алгебраїчних дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до цілого степеня і добування кореня з цілим показником) і, можливо, знаками послідовного виконання дій – дужками [15, с.10].

Зазначимо, що вирази, які не є алгебраїчними називаються трансцендетними (тригонометричні, показникові, логарифмічні) і їх перетворення розглядаються у курсі алгебри і початків аналізу старшої школи.

Алгебраїчні вирази бувають цілими, дробовими, раціональними та ірраціональними. Важливо дати не тільки означення цих понять, але й з'ясувати, яким чином ці поняття співвідносяться між собою, навести відповідні приклади.

Спочатку необхідно пояснити поняття «раціональний алгебраїчний вираз» (вираз, що не містить змінних під знаком кореня) та «ірраціональний алгебраїчний вираз» (змінні виразу входять під знак кореня) [15, с.10]. А потім розглянути поняття цілого алгебраїчного виразу, що є раціональним виразом, який не містить ділення на вираз зі змінною. Співвідношення між вказаними поняттями можна представити за допомогою наступної схеми.

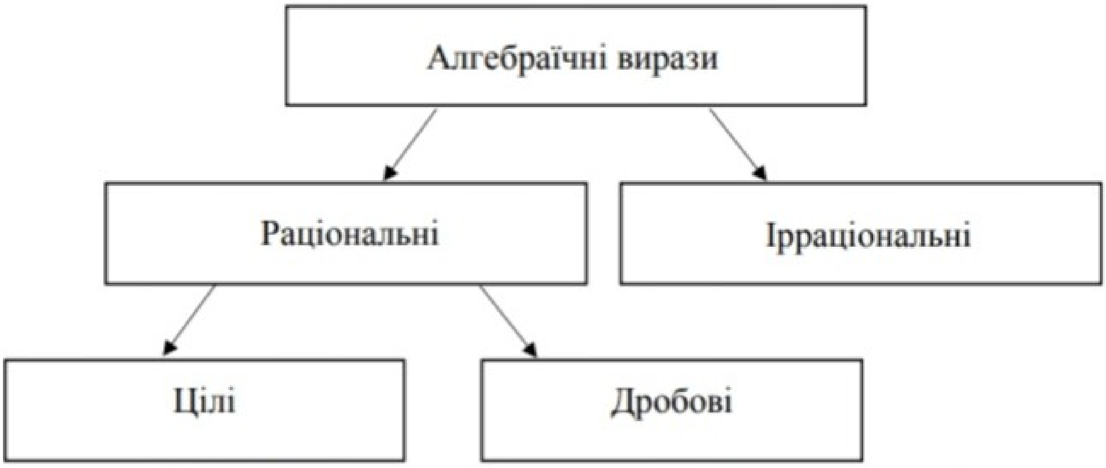


Рис. 1.1 Співвідношення між алгебраїчними виразами

Для кращого розуміння теоретичного матеріалу для учнів 7-9 класів слід навести відповідні (схожі між собою) приклади:

1) $\frac{5}{6}+a^2bc^3+\sqrt{23}x$ – цілий раціональний алгебраїчний вираз (не містить ділення на змінну);

2) $\frac{5}{6y}+a^2bc^3+\sqrt{23}x$ – дробовий раціональний алгебраїчний вираз (містить ділення на змінну y);

3) $\frac{5}{6y}+a^2bc^3+\sqrt{23x}$ – ірраціональний алгебраїчний вираз (містить змінну x під знаком кореня).

Учні основної школи у курсі алгебри знайомляться з абсолютно новим для них поняттям – «тотожність».

Означення 1.5. Тотожність – це рівність, що виконується для всіх допустимих значень змінних, що входять до цієї рівності [15, с.454; 22, с.151].

Для позначення тотожності часто використовують знак $\equiv$.

Наприклад: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b} = a-b$.

Як відомо з алгебраїчними виразами можна виконувати різноманітні перетворення як тотожні, так і нетотожні. Особливий інтерес в рамках дослідження представляють саме тотожні перетворення. ***Означення 1.6.*** Тотожні перетворення – це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому, тобто який приймає ті ж самі значення при всіх допустимих значеннях змінних, що містяться у виразі [15, с.454; 22, с.151].

Іншими словами: тотожні перетворення алгебраїчного виразу $f(a,b,c,...,l)$ є перехід від цього виразу до виразу $\varphi(a,b,c,...,l)$, що по зовнішньому вигляду відрізняється від першого, проте такому, що рівність $f=\varphi$ є тотожністю [15, с.454].

У шкільному курсі алгебри розглядають наступні тотожні перетворення виразів як розкриття дужок, винесення спільного множника за дужку, скорочення дробів, зведення подібних доданків, використання формул скороченого множення та інші.

Наведемо деякі приклади тотожних перетворень виразів

1) Вираз $2(3a^2-1)(b+2)$ тотожно рівний $6a^2b+12a^2-2b-4$.

Дійсно, розкривши дужки (виконавши множення), отримаємо:

$$2(3a^2-1)(b+2) = 2(3a^2b+6a^2-b-2) = 6a^2b+12a^2-2b-4.$$

2) Заміна виразу $\frac{2a-4}{a^2-4}$ на вираз $\frac{2}{a+2}$ для $a \neq 2$ є тотожнім перетворенням.

Дійсно, використавши у знаменнику формулу скороченого множення – різницю квадратів $\left(x^2-y^2=(x-y)(x+y)\right)$, зробивши винесення за дужки множника 2 у чисельнику та виконавши скорочення дробово-раціональних виразів, отримаємо: $\frac{2a-4}{a^2-4}=\frac{2(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\frac{2}{a+2}$.

3) Вирази $\sqrt{(x-3)^2}$ та $(x-3)$ не є тотожно рівними, оскільки рівність не виконується при $x\in(-\infty;3)$. Правильно записати, що $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$.

Перш ніж розглядати особливості виконання тотожних перетворень виразів визначимо місце цієї теми у навчальних програмах з алгебри та сучасних шкільних підручниках з алгебри для 7-9 класів.

1.2. Аналіз програм та підручників з теми дослідження

Основним документом, яким користуються вчителі при створенні календарних планів у процесі викладання алгебри, звичайно є навчальна програма з математики для 5-9-х класів для загальноосвітніх навчальних закладів, розроблена Міністерством освіти і науки України.

У навчальній програмі з математики [20] тотожні перетворення не виділено в одну окрему тему; матеріал, пов’язаний з тотожними перетвореннями, розосереджений по всьому курсу математики.

Проаналізуємо більш детально змістове наповнення навчальної програми з математики та вимоги до навчальних досягнень учнів щодо вивчення тотожних перетворень виразів (інформацію занесемо в таблицю)(див. Додаток А).

З таблиці помічаємо, що навчальний матеріал, який безпосередньо стосуються тотожних перетворень виразів, найбільш повно представлено у програмах з алгебри для 8 класу (при вивченні всіх тем курсу) та 7 класу (при вивченні першої теми). Зокрема, навчальна програма з алгебри для 7 класу передбачає повторити й уточнити відомості про числові та буквені вирази, формули, ввести поняття про тотожно рівні вирази, тотожність, тотожні перетворення виразів. У цьому класі вивчають тотожні перетворення цілих виразів (одночленів і многочленів), формули скороченого множення та застосування їх до перетворення многочленів.

У 8 класі передбачено вивчення тотожних перетворень раціональних дробів, дробових виразів і перетворень ірраціональних виразів, пов'язаних з квадратним коренем. Розширюється поняття степеня. Зокрема, вводять поняття степеня з цілим від'ємним показником і розглядають перетворення найпростіших виразів, що містять степені з від’ємним показником. Вивчається спеціальне перетворення – розкладання квадратного тричлена на множники, яке використовується для виведення загальної формули коренів квадратного рівняння, а також для побудови графіка квадратичної функції, що виконують учні 9 класу.

У навчальній програмі з алгебри для 9 класу чітко не прописано можливості застосування тотожних перетворень, проте не викликає сумніву те, що саме тотожні перетворення цілих і дробових виразів використовуються для розв’язування рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, а, в деяких випадках, при розв’язуванні задач на застосування арифметичної та геометричної прогресії, комбінаторних та задач з теорії ймовірностей.

Відповідно до цілей та змісту навчальних програм створюються підручники, у яких викладено основи знань і способів діяльності учнів. Добре відомо, що успіхи в навчанні учнів багато в чому залежать від змісту й структури підручника, по якому вони займаються. По одних підручниках школярі працюють із задоволенням (читають, розглядають малюнки, активно виконують пропоновані завдання). Інші навчальні тексти сприймаються інакше: видно, що більшість учнів з небажанням відкривають підручник, знаходять потрібний текст і без ентузіазму починають працювати з ним.

Саме тому, спираючись на мету дослідження, аналізуємо теоретичний матеріал та завдання підручників для 7-8 класів, які рекомендовані Міністерством освіти і науки України з точки зору вивчення тотожних перетворень виразів. При їх аналізі важливо звернути увагу на доступність викладу теоретичного матеріалу, а також для кращого сприйняття теоретичної інформації наявність таких елементів як: виділення в тексті основних термінів, означень, властивостей математичних об'єктів, наявність розібраних прикладів, їх відповідність завданням для розв'язування, питання після тексту параграфа для закріплення матеріалу; щодо системи завдань: складність (поділ завдань по рівнням), різноманітність та цікавість (нестандартні задачі при вивченні теми) та їх достатність.

Важливо зазначити, що перше знайомство учнів з поняттям «тотожність», «тотожні перетворення» відбувається у 7 класі при вивченні теми «Цілі вирази». Проаналізуємо означення цих понять, які пропонуються у різних підручниках (див. Додаток Б).

Як бачимо з таблиці, тотожні перетворення означаються через тотожно рівні вирази, причому саме означення «тотожні перетворення виразів» досить часто належним чином не виділяється у підручниках, виняток становлять лише підручники з алгебри авторів Бевз Г. П., Бевз В. Г та Істер О. С. Найбільш лаконічним та зрозумілим для учнів 7 класу, на наше переконання, є означення основних понять, представлені у підручнику авторів Мальований Ю. І. та інші. У підручнику авторів Тарасенкова Н. А. та інші показано фактично інший підхід до подання розглянутих понять: спочатку вводиться поняття тотожних перетворень виразів та наводяться відповідні приклади, а потім в іншому параграфі окремо розглядається поняття «тотожність» та аналізуються можливі способи доведення тотожностей. Застосування цього підходу у поданні матеріалу дасть змогу учням краще розібратися в цій темі. Для самоперевірки у кінці кожного з розглянутих підручників є питання для закріплення матеріалу.

У всіх підручниках містяться історичні довідки, використання яких на уроках дасть змогу зацікавити учнів у вивченні алгебри. Зокрема, у підручнику Бевз Г. П., Бевз В. Г. пропонуються додаткові відомості для учнів, які цікавляться математикою у рубриці «Хочете знати ще більше?».

Матеріали підручників Бевз Г. П., Бевз В.Г. та Тарасенкова Н. А. та інші підходять найкраще для сприйняття учнями (виділені основні означення, властивості; відокремлено важливі структурні елементи: теоретичні питання, розв’язування завдань).

За підручником авторів Тарасенкова Н. А. та інші учні зможуть самостійно розібратися як з теоретичним матеріалом, так і з розв’язуванням різного типу завдань (міститься велика кількість досить ґрунтовно розібраних прикладів).

В усіх підручниках міститься достатня кількість завдань різного рівня складності. У підручнику авторів Мерзляк А. Г. та інші є нестандартні завдання у рубриці «Учимося робити нестандартні кроки». Схожа рубрика «Поміркуйте» є у підручнику авторів Кравчук В.Р. та інші, що містить завдання, які сприяють розвитку гнучкості мислення. Зацікавити учнів за допомогою задачного матеріалу допоможе рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих», подана у підручнику Істер О. С.

На сучасному етапі для учнів важливо не тільки мати певний бараж знань з математики, але й уміти свої знання з користю застосувати на практиці. Саме з цією метою у підручнику Тарасенкова Н. А. та інші подано задачі прикладного змісту у рубриці «Застосуйте на практиці».

Відомо, що у процесі виконання тотожних перетворень, особливо на перших етапах вивчення теми учнів припускаються великої кількості помилок. У корисній рубриці «Увага!», що міститься у підручнику авторів Мальований Ю. І. та інші, можна знайти застереження від можливих помилок, яких нерідко припускаються школярі.

Таким чином, для учнів 7 класу представлено широкий арсенал підручників, де досить ґрунтовно розібрано питання теми «Тотожні перетворення виразів», як з точки зору наявності теоретичного матеріалу, так і практичних завдань.

Так як у 8 класі тотожні перетворення виразів розглядаються у кожній темі, тому підручники з алгебри для 8 класу проаналізуємо з точки зору теми дослідження за наступним планом:

– структура теоретичного матеріалу;

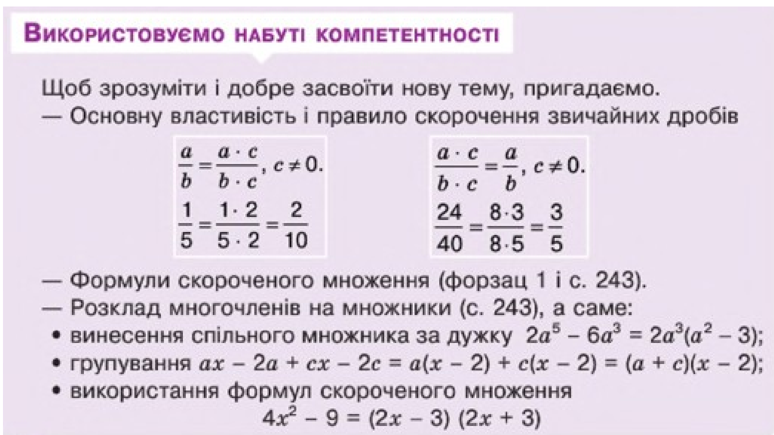
– наявність розв’язаних завдань;

– структура задачного матеріалу;

– присутність цікавих рубрик;

– питання та завдання для самоконтролю.

У підручнику Бевза Г. П., Бевз В. Г. [2] з метою ефективного сприйняття та засвоєння нового матеріалу є важлива рубрика «Використовуємо набуті компетентності», за допомогою якої можна повторити основні означення про тотожні перетворення виразів. Матеріал цієї рубрики подається стисло і коротко, за допомогою блоків та схем, а в деяких випадках даються тільки вказівки, що необхідно повторити (див. Рис. 1.1.).



ВИКОРИСТОВУЄМО НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо.

— Основну властивість і правило скорочення звичайних дробів

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, $c \neq 0$. $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10}$

$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$, $c \neq 0$. $\frac{24}{40} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

— Формули скороченого множення (форзац 1 і с. 243).

— Розклад многочленів на множники (с. 243), а саме:

- винесення спільного множника за дужку $2a^5 - 6a^3 = 2a^3(a^2 - 3)$;
- групування $ax - 2a + cx - 2c = a(x - 2) + c(x - 2) = (a + c)(x - 2)$;
- використання формул скороченого множення $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

Рис. 1.1 Вказівки для учнів з рубрики

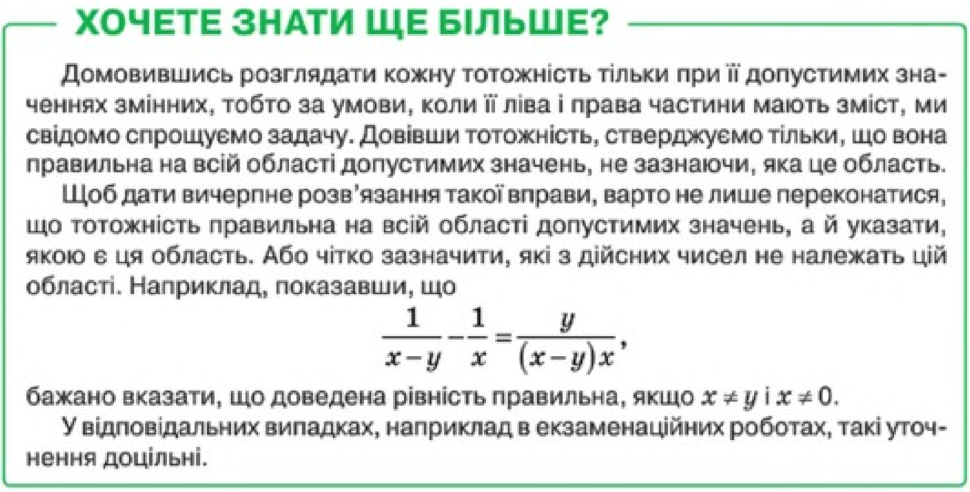
«Використовуємо набуті знання»

Теоретичний матеріал, поданий у параграфах підтверджується відповідними прикладами, основні означення виділені жирним шрифтом та позначені стрілкою, а інші властивості, які необхідно знати містяться у рамочці та виділені жирним шрифтом.

У кінці параграфа є коротка інформація щодо вивченого на уроці (рубрика «Скарбничка досягнень»), а у кінці розділу «Головне в розділі».

Перевірити свої знання можна за допомогою питання для самоперевірки. У підручнику також з метою зацікавлення учнів міститься історичний матеріал.

Розширити свої знання з теми чи то більш глибоко усвідомити певні питання допоможе рубрика «Хочете знати ще більше?». Так, наприклад, слушне зауваження щодо доведення тотожностей пропонують автори підручника для зацікавлених учнів (див. Рис. 1.2).



ХОЧЕТЕ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Домовившись розглядати кожну тотожність тільки при її допустимих значеннях змінних, тобто за умови, коли її ліва і права частини мають зміст, ми свідомо спрощуємо задачу. Довівши тотожність, стверджуємо тільки, що вона правильна на всій області допустимих значень, не зазнаючи, яка це область.

Щоб дати вичерпне розв'язання такої вправи, варто не лише переконатися, що тотожність правильна на всій області допустимих значень, а й указати, якою є ця область. Або чітко зазначити, які з дійсних чисел не належать цій області. Наприклад, показавши, що

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x}=\frac{y}{(x-y)x},$$

бажано вказати, що доведена рівність правильна, якщо $x \neq y$ і $x \neq 0$.

У відповідальних випадках, наприклад в екзаменаційних роботах, такі уточнення доцільні.

Рис. 1.2 Додатковий матеріал рубрики «Хочете знати ще більше?»

Задачний матеріал підручника є досить різноманітним: усні вправи, завдання рівнів А і Б. Також пропонуються завдання, які сприяють розвитку логічного мислення, дослідницьких умінь та творчості (рубрика «Відкритих задач»). Наприклад, автори пропонують учням розв’язати наступні завдання (див. Рис. 1.3.):

Рис. 1.3 Завдання для допитливих учнів

Розв’язані завдання містяться у рубриці «Виконаємо разом», проте вони є типовими, як правило не містять завдань підвищеного рівня складності. Згадати основні види тотожних перетворень, що розглядалися у 7 класі допоможуть задачі рубрики «Вправи для повторення».

Особливістю іншого підручника з алгебри авторів Мерзляк А.Г. та інші [17] є виклад теоретичного матеріалу на основі принципів доступності та науковості. Автори, наприклад, для більш глибокого розуміння учнями зв’язку між поняттями пропонують наступну схему (див. рис 1.4.).

Рис. 1.4 Зв’язок між поняттями

У кожному параграфі спочатку подається повністю теоретичний матеріал теми (означення та основні властивості виділені жирним шрифтом), а потім, окремо, розв’язуються завдання різного рівня складності, причому розв’язування завдань прописується досить детально. Наприклад, виконуючи скорочення дробів або зводячи дроби до спільного знаменнику, у підручнику пропонується вирази, що є спільними та додатковими множниками на перших заняттях виділяти іншим кольором.

Наприкінці параграфа подані запитання для самоконтролю та вправи трьох рівнів складності. У рубриці «Перевір себе» містяться тестові завдання. Крім цього, окремо є вправи для повторення, розв’язуючи які можна повторити уже вивчений матеріал, а також вправи рубрики «Готуємося до вивчення нової теми». Для допитливих учнів, яким подобається розв’язувати нестандартні завдання є рубрика «Учимося робити нестандартні кроки».

Прикладами нестандартних завдань на застосування тотожних перетворень виразів є наступні (див. Додаток В).

Для учнів, які цікавляться математикою важливою є рубрика «Коли зроблено уроки», де подано іноді непростий, проте корисний матеріал. Цікавим є той факт, що першою задачею на першій математичній олімпіаді в Україні (1935 р.) була задача на знаходження значення виразу через виконання тотожних перетворень: $\frac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$, якщо $a=-\frac{1}{2},\ b=-0{,}19,\ c=0{,}18,\ d=0{,}04$ [17, с.95].

Проаналізуємо підручник [11] з алгебри для 8 класу автора Істер О.С. Теоретичний матеріал, що подано у підручнику написаний доступною для учнів мовою та проілюстровано величезною кількістю відповідних прикладів. Наприклад, при вивченні теми «Тотожні перетворення раціональних виразів» теоретичний матеріал майже відсутній, автор на прикладах пояснює яким чином слід виконувати перетворення, а при вивченні теми «Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені» наведено тільки назви відповідних тотожних перетворень (винесення множника з-під знака кореня; внесення множника під знак кореня; додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня виразів, що містять квадратні корені; скорочення дробів; звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу), а виконання цих перетворень показано на прикладах. Основні поняття виділяються жирним шрифтом та заливкою тексту, наприкінці параграфа є запитання для самоконтролю. В кінці підручника подано відомості з курсу математики 5-6 класів та алгебри 7 класу, що допоможе учням згадати уже вивчений матеріал.

Особливістю підручника автора Істер О. С. є те, що в ньому міститься велика кількість задач як розв'язаних, так і для самостійного розв'язання. Завдання поділено за чотирма рівнями складності, наведемо відповідні приклади задач:

1) завдання початкового рівня (усно):

– виконати дії $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$;

2) завдання середнього рівня:

– спростити вираз, використовуючи формули скороченого множення: $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2-8$.

3) завдання достатнього рівня:

– спростити вираз: $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{360}$;

4) завдання високого рівня:

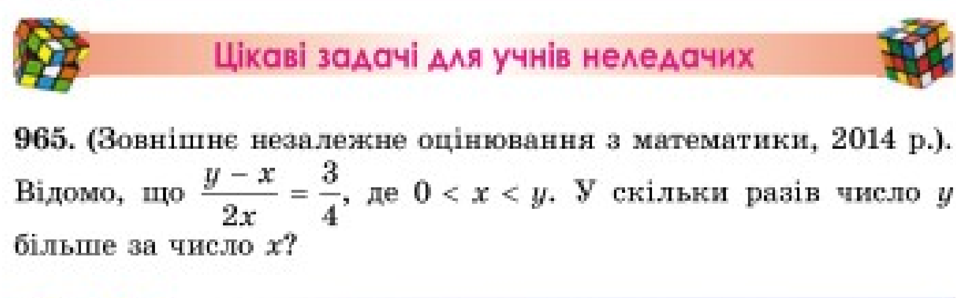
– знайдіть суму: $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{49}}$.

Крім цього, у кінці підручника містять задачі підвищеної складності, наприклад:

– спростити вираз: $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}{2\sqrt{x^3y}}:\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\right)$, якщо $x>y>0$.

У підручнику також є вправи на повторення та вправи рубрики «Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу». Наприкінці вивчення теми є завдання для домашньої самостійної роботи у тестовій формі.

Корисною для допитливих школярів є рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих». Наведемо приклад завдання, взятого з підручника, для розв'язування якого необхідно виконати тотожне перетворення виразів (рис. 1.6.).


Цікаві задачі для учнів неледачих

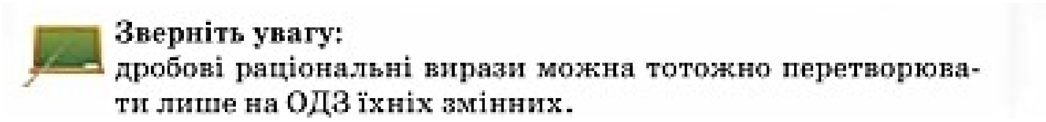
965. **(Зовнішнє незалежне оцінювання з математики, 2014 р.).** Відомо, що $\frac{y-x}{2x}=\frac{3}{4}$, де $0<x<y$. У скільки разів число y більше за число x?

Рис. 1.6 Задача з рубрики «Цікаві задачі для учнів неледачих»

Таким чином, підручник [11] багатий на різноманітні завдання.

Підручник з алгебри для 8 класу авторів Тарасенкова Н. А. та інші [29] прекрасно підходить для самостійного вивчення тем учнями. Теоретичний матеріал вибудовано строго логічно, з врахуванням принципів доступності та науковості. Для кращого сприйняття теоретичного матеріалу у підручнику подано приклади розв'язування відповідних завдань на застосування тієї чи іншої теорії. Основні означення виділено жирним шрифтом і відокремлено пунктирними лініями, важливі терміни друкуються курсивом. У ході подання теоретичного матеріалу зустрічаються вказівки з рубрики «Зверніть увагу», що допоможуть учням розібратися в матеріалі, а такою раціонального його використовувати на практиці, попередять небажану появу помилок різного характеру.

Наведемо приклад зауваження щодо виконання тотожних перетворень раціональних виразів (рис. 1.7.).



Зверніть увагу:
дробові раціональні вирази можна тотожно перетворювати лише на ОДЗ їхніх змінних.

Рис. 1.7 Зауваження з рубрики «Зверніть увагу»

При розв’язуванні завдання, яке пропонується учням у рубриці «Поміркуйте» (див. рис. 1.8), вказане зауваження є дуже важливим.

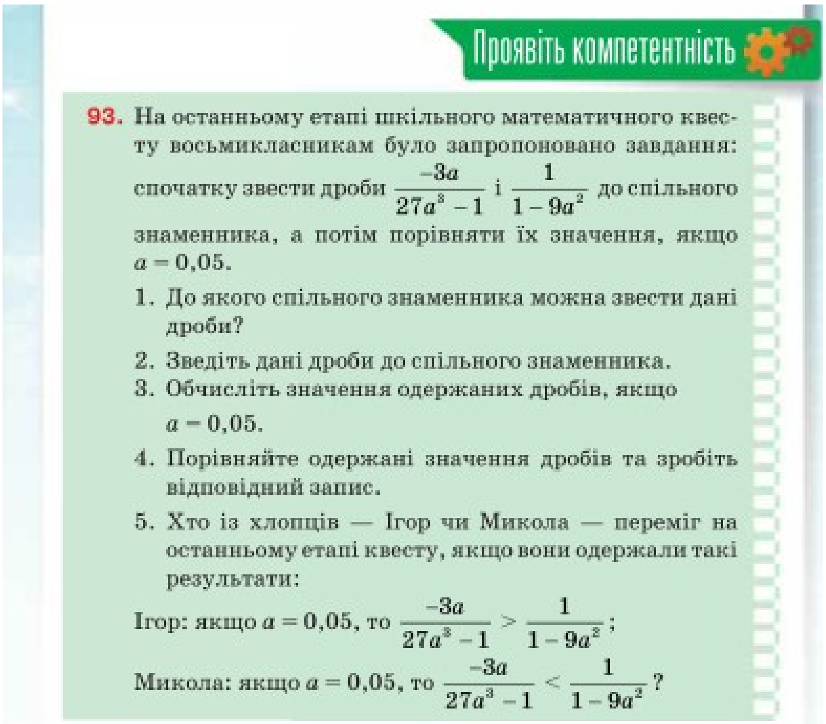
Чи є тотожно рівними вирази $8a^2 : 4a$ і $2a$? Поміркуємо.

Рис. 1.8 Завдання з рубрики «Поміркуйте»

Перевірити знання можна за допомогою запитань рубрики «Пригадайте головне». Для учнів, які цікавляться математикою у рубриці «Дізнайтеся більше» зібрано корисний додатковий матеріал.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Після кожного параграфа подано задачі на повторення.

Цікавою та новою, у порівнянні з іншими підручниками є рубрика «Проявіть компетентність», де пропонуються цікаві задачі, які дуже часто мають практичне застосування. Наприклад, задача [29, 33] на виконання тотожних перетворень дробово-раціональних виразів (рис. 1.9).



Проявіть компетентність

93. На останньому етапі шкільного математичного квесту восьмикласникам було запропоновано завдання: спочатку звести дроби $\frac{-3a}{27a^3-1}$ і $\frac{1}{1-9a^2}$ до спільного знаменника, а потім порівняти їх значення, якщо $a = 0{,}05$.

1. До якого спільного знаменника можна звести дані дроби?
2. Зведіть дані дроби до спільного знаменника.
3. Обчисліть значення одержаних дробів, якщо $a = 0{,}05$.
4. Порівняйте одержані значення дробів та зробіть відповідний запис.
5. Хто із хлопців — Ігор чи Микола — переміг на останньому етапі квесту, якщо вони одержали такі результати:

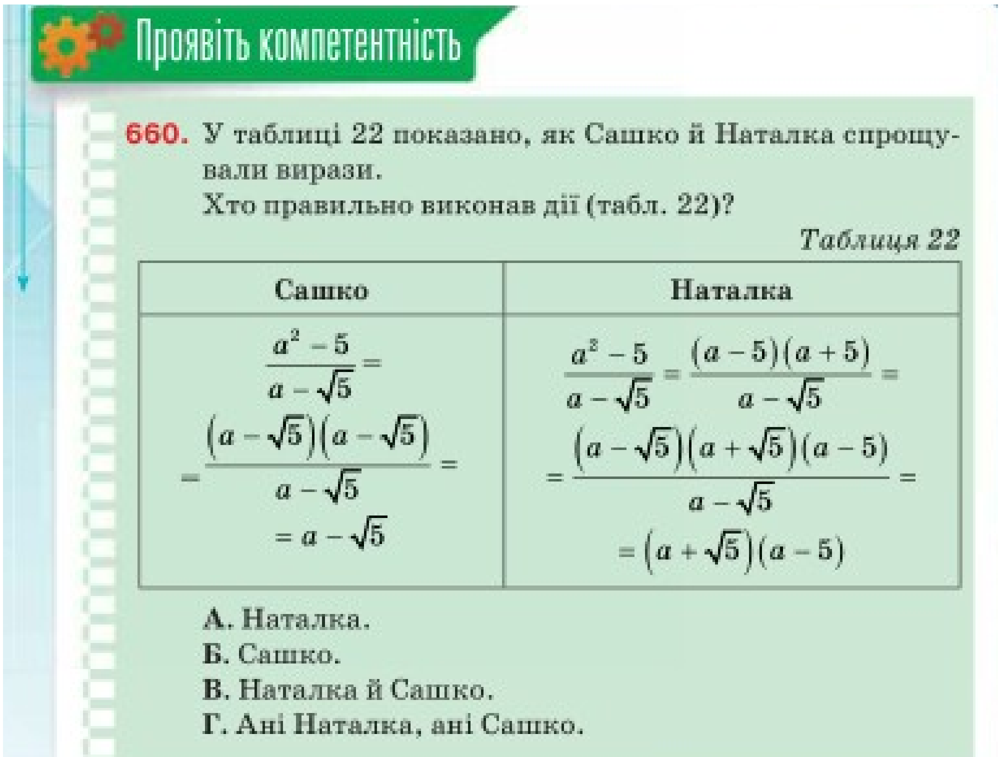
Ігор: якщо $a = 0{,}05$, то $\frac{-3a}{27a^3-1} > \frac{1}{1-9a^2}$;

Микола: якщо $a = 0{,}05$, то $\frac{-3a}{27a^3-1} < \frac{1}{1-9a^2}$?

Рис. 1.9 Задача з рубрики «Проявіть компетентність»

Для більш глибокого та ґрунтовного усвідомлення матеріалу, а також з метою розвитку творчих здібностей учнів доцільно розв’язувати задачі на виправлення помилок.

Приклад такого завдання є у даному підручнику (див. рис. 1.10).



Проявіть компетентність

660. У таблиці 22 показано, як Сашко й Наталка спрощували вирази.
Хто правильно виконав дії (табл. 22)?

Таблиця 22

Сашко	Наталка
$\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}{a-\sqrt{5}} = a-\sqrt{5}$	$\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-5)(a+5)}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})(a-5)}{a-\sqrt{5}} = (a+\sqrt{5})(a-5)$

А. Наталка.
Б. Сашко.
В. Наталка й Сашко.
Г. Ані Наталка, ані Сашко.

Рис. 1.10 Завдання на виправлення помилок

Розв’язуючи такого типу завдання учні навчаються аналізувати ту чи іншу ситуацію, пояснювати.

З метою самоперевірки та повторення вивченого матеріалу у підручнику Тарасенкової Н. А. та інших пропонуються тестові завдання наприкінці кожного розділу.

Таким чином, проведений аналіз програм та підручників з теми дослідження дає змогу стверджувати, що тотожні перетворення виразів є однією з найважливіших тем шкільного курсу алгебри, оскільки дуже часто при розв’язуванні задач з різних розділів математики досить часто виникає необхідність використання різноманітних тотожних перетворень.

1.3. Основні види тотожних перетворень у курсі алгебри 7-9 класів та етапи їх вивчення

На основі аналізу навчальної програми та шкільних підручників для 7-8 класів робимо висновок, що тотожні перетворення краще розглядати в тій же послідовності як вини подаються у школі.

Таким чином, виділяємо наступні етапи вивчення тотожних перетворень в основній школі:

1) тотожні перетворення цілих раціональних виразів (вивчаються у 7 класі);

2) тотожні перетворення дробово-раціональних виразів (вивчаються у 8 класі);

3) тотожні перетворення ірраціональних виразів (вивчаються у 8 класі).

Розглянемо більш розгорнуто кожен з етапів.

Тотожні перетворення цілих раціональних виразів.

Введемо означення цілого раціонального виразу.

Означення 1.7. Цілими раціональними виразами називаються алгебраїчні вирази, які не містять ділення на змінні та операції добування кореня (зокрема, піднесення до степеня з дробовим показником) [6, с.82].

У шкільних підручниках при вивченні даної теми вводиться також поняття одночлена та многочлена.

Означення 1.8. Цілий вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів, називається одночленом [28, с.65].

Означення 1.9. Многочлен – це сума одночленів.

Методист В. І. Мішин [19], при вивченні тотожних перетворень цілих раціональних виразів, виділяє наступні досить важливі аспекти:

– на множині одночленів корисно розглядати лише одну операцію – множення;

– не потрібно розглядати окремо ділення многочленів, краще ці питання розглянути при вивченні тотожних перетворень дробово-раціональних виразів;

– доцільно вважати тотожно рівними два цілих раціональних вирази, значення яких збігаються при однакових значеннях змінних, що належать їм;

– тотожні перетворення краще будувати на основі законів арифметичних дій (аксіом напівгрупи і кільця), вважати їх аксіомами тотожних перетворень.

Виділяють такі види тотожних перетворень цілих виразів:

1) розкриття дужок (внесення та винесення спільного множника за дужки);

2) зведення подібних доданків;

3) приведення одночленів до стандартного вигляду;

4) додавання, віднімання і множення многочленів між собою та на одночлен;

5) застосування формул скороченого множення;

6) групування та деякі спеціальні прийоми (перегрупування, зведення до різниці квадратів чи до повного квадрату).

Тотожні перетворення дробових раціональних виразів.

Означення 1.10. Дробово-раціональними виразами називаються алгебраїчні вирази, що утворюються із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня з натуральним показником і ділення, причому ділення виконується на вираз зі змінними [6, 82].

У процесі виконання тотожних перетворень необхідно пам'ятати та використовувати основну властивість дробу.

Означення 1.11. Якщо чисельник та знаменник дробу помножити на один і той же вираз, який не дорівнює нулю, то одержимо дріб, тотожно рівний даному.

В. І. Мішин [19] розглядає два підходи при вивченні тотожних перетворень дробових раціональних виразів:

1) Алгебраїчний підхід, полягає в тому, що вивчаються операції над виразами з точки зору вищої алгебри. Для школи цей підхід не представляється можливим, тому що для чіткого обґрунтування дій над раціональними виразами необхідне знання таких понять, як кільце многочленів і поле раціональних дробів.

2) Теоретико-функціональний підхід (розглядають многочлен як цілу раціональну функцію (однієї або декількох змінних), а алгебраїчний дріб як дробово-раціональну функцію.

В шкільному курсі математики необхідно ці два підходи з'єднувати в один та розглядати комплексно.

Основними тотожними перетвореннями [30], що виконуються з дробово-раціональними виразами є:

1) скорочення дробів;

2) зведення дробів до спільного знаменника;

3) додавання, віднімання, множення та ділення раціональних виразів;

4) піднесення до степеня та інші.

Зазначимо, що в процесі виконання тотожних перетворень дробово-раціональних виразів у чисельнику чи знаменнику можуть використовуватися тотожні перетворення для цілих виразів, що розглядалися раніше.

Тотожні перетворення ірраціональних виразів.

Спочатку введемо поняття ірраціонального виразу.

Означення 1.12. Якщо в алгебраїчному виразі використовується добування кореня із виразу зі змінними (або піднесення до дробового степеня), то такий вираз називають ірраціональним [6, с.83].

Тотожні перетворення ірраціональних виразів базуються на властивостях арифметичного кореня.

Означення 1.13. Невід'ємне значення квадратного кореня з числа *a* називають арифметичним квадратним коренем із числа *a* [29, с.146].

З означення арифметичного кореня випливають наступні властивості [29, с.147]:

1. $\sqrt{a} \ge 0$, причому $a \ge 0$.

2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, якщо $a \ge 0$.

3. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = |a|$, якщо a – будь-яке число.

4. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, якщо $a \ge 0$ і $b \ge 0$.

5. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, якщо $a \ge 0$ і $b \ge 0$.

Основними тотожними перетвореннями ірраціональних виразів є наступні:

– винесення множника з-під знака кореня;

– внесення множника під знак кореня;

– додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня виразів, що містять квадратні корені;

– звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.

Отже, тотожні перетворення виразів складають одну з основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є необхідним підґрунтям для виконання обчислень, розв’язування рівнянь, нерівностей та їх систем, дослідження функцій тощо. Тотожні перетворення мають широкий спектр застосувань не тільки в курсах геометрії, алгебри і початків аналізу, але й фізики, хімії та інших дисциплін. Від рівня сформованості навичок застосування тотожних перетворень виразів залежить успішність та результативність навчання учнів математики, саме тому необхідним є аналіз методичних прийомів навчання учнів виконувати тотожні перетворення.

РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

2.1. Особливості вивчення тотожних перетворень у 7-9 класах

Вивченню змістової лінії «вирази та їх перетворення» у математиці відведено велику частину навчального часу. Це пояснюється тим, що перетворення виразів є основою для обчислення значень виразів зі змінними, для розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, доведення тотожностей та нерівностей тощо. Тотожні перетворення виразів, що вивчаються в основній школі широко використовують і у старшій школі при вивченні елементів диференціального та інтегрального числення.

Вивчення тотожних перетворень розвиває в учнів вміння логічно мислити, дає можливість більш швидше, оперативніше і зручніше виконувати різноманітні обчислення, розв'язувати рівняння та інше.

З методичної точки зору найважливішими є наступні аспекти.

1) Учні мають розуміти та уміти формувати основні поняття такі як «вираз», «числові вирази», «вирази зі змінними», «тотожно рівні вирази», «тотожність», «тотожні перетворення», «одночлен», «многочлен». В основній школі учні мають справу з цілими, дробово-раціональними та ірраціональними виразами, саме тому вони повинні знати способи перетворення того чи іншого виду виразів.

В. І. Мішин [19] диференціює наступні поняття:

– тотожності-рівності (формули скороченого множення, властивості ступеня з натуральним показником і ін.);

– тотожності-дії (винесення спільного множника за дужки, приведення подібних доданків і ін.) або тотожні перетворення.

2) Виконуючи перетворення учні мають розуміти, які з перетворень є тотожними, а які не є тотожними.

З цього приводу, важливою є думка Н. С. Подходової, Н. Л. Стефанової [27], які пропонують розглядати дві точки зору на тотожність алгебраїчних виразів і тотожне перетворення: формальну і функціональну.

З формальної точки зору якщо два вирази будуть отримані один з одного за допомогою елементарних перетворень тобто застосовуючи послідовно тотожні перетворення та основні закони дій, то вони тотожні.

З функціональної точки зору якщо два вирази приймають однакові числові значення при довільних значеннях змінних, що входять в дані вирази, то вони тотожні.

У методичній літературі зустрічається ще один з видів алгебраїчних рівностей: умовні тотожності [9]. Умовна тотожність – це алгебраїчна рівність, права і ліва частини якої тотожно рівні за умови виконання деякого додаткового співвідношення (можливо, не одного, а декількох).

Наведемо приклад умовної тотожності:

$$\frac{x^2+y^2}{3x-y}=\frac{-x^2+2y^2}{2x}.$$

Наведена рівність не є тотожністю, оскільки при $x=y=1$ ліва частина не дорівнює правій.

Перевіримо це: $\frac{1^2+1^2}{3-1}=\frac{-1^2+2\cdot 1^2}{2\cdot 1}\Rightarrow \frac{2}{2}\neq\frac{1}{2}\Rightarrow 1\neq\frac{1}{2}$.

Накладемо додаткову умову: $x+y=0$.

Розглянемо, чи будуть права і ліва частини співвідношення $\frac{x^2+y^2}{3x-y}=\frac{-x^2+2y^2}{2x}$ рівними за умови, що виконується рівність $x+y=0$. Якщо вона виконується, то $y=-x$.

Підставивши умову $y=-x$ у вихідну рівність, перетворимо її ліву і праву частини окремо, а потім зробимо відповідний висновок:

$\frac{x^2+y^2}{3x-y}=\frac{x^2+(-x)^2}{3x-(-x)}=\frac{x^2+x^2}{3x+x}=\frac{2x^2}{4x}=\frac{x}{2}$ – ліва частина рівності;

$\frac{-x^2+2\cdot(-x)^2}{2x}=\frac{-x^2+2x^2}{2x}=\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2}$ – права частина рівності.

Помічаємо, що ліва частина дорівнює правій, тобто задана рівність $\frac{x^2+y^2}{3x-y}=\frac{-x^2+2y^2}{2x}$ є тотожністю за умови, що $y=-x$.

3) застосування тотожних перетворень виразів при обчисленні значень різних величин, при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, їх систем, при побудови графіків функцій та виконанні різноманітних доведень [3].

В алгебрі є декілька різних способів доведення тотожностей, розглянемо найосновніші з них:

– зробити рівносильні перетворення у лівій частині тотожності та порівняти її з правою. Якщо в результаті отримаємо праву частину рівності, то тотожність вважається повністю доведеною;

– виконати рівносильні перетворення в правій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо ліву частину, тоді тотожність вважається доведеною;

– виконати рівносильні перетворення в лівій і правій частині тотожності. Якщо в результаті отримаємо однаковий результат, тоді тотожність вважається доведеною;

– з правої частини тотожності віднімаємо ліву частину. Виконуємо над різницею рівносильні перетворення. І якщо в результаті отримуємо нуль, то тотожність вважається доведеною.

– з лівої частини тотожності віднімають праву частину. Виконуємо над різницею рівносильні перетворення. І якщо в результаті отримуємо нуль, то тотожність вважається доведеним.

У своїй книзі Я. І. Груденов, відзначає серед прийомів, що сприяють свідомому засвоєнню учнями тотожних перетворень наступні:

1) Теоретичні пояснення тотожностей (наскільки це можливо) в 5–6 класах і строге їх доведення у 7–11 класах. Розкриття взаємозв'язку з раніше вивченим матеріалом.

2) Першочерговою є вимога знання і розуміння учнями словесного формулювання властивостей, тотожності.

3) Формування грамотної математичної мови, вміння по-різному тлумачити вивчені властивості і тотожності, давати різні словесні інтерпретації завдання, що виконується.

4) Варіювання прикладів на застосування тотожностей.

5) Демонстрація зразків розв'язання завдань на застосування тотожних перетворень, правила з докладними записами та обґрунтуваннями, а також вимога виконання учнями завдань за зразком на початковому етапі вивчення.

6) Застосуванні засобів наочності.

7) Проведення аналогії між тотожністю і числовими рівностями.

8) Уважне вивчення виразу, його аналіз, пошук різних шляхів перетворення, аналіз виконаних перетворень.

9) Здійснення контролю за виконанням перетворень як зі боку вчителя, так і з боку учнів [5].

Розглянемо кожен прийом окремо і, у випадку необхідності, наведемо відповідні приклади:

1) У підручнику з математики [18] для 6 класу розглядається винесення спільного множника за дужки та зведення подібних доданків наступним чином:

– заміну виразу $ab+ac$ на вираз $a\left(b+c\right)$ називають винесенням спільного множника за дужки. Наприклад: $8c-8=8c-8\cdot 1=8\left(c-1\right)$;

– щоб звести подібні доданки, треба додати їхні коефіцієнти й отриманий результат помножити на спільну буквену частину: $5c+6c-3c=c\left(5+6-3\right)=8c$.

А при вивченні тотожних перетворень у курсі алгебри основної школи учні уже не формулюють відповідні означення, а виконують дані перетворення досить швидко. Учні уже починають розуміти яким чином перевіряється правильність виконання перетворень, тобто вони уже можуть довести, що перетворення є тотожним.

2) Учні основної школи, які тільки починають працювати з великою кількістю формул (наприклад, формули скороченого множення) дуже часто допускають помилки: застосовують іншу формулу замість необхідної або взагалі не можуть обрати потрібну формулу для виконання того чи іншого перетворення тощо.

Наприклад, учні не допустили б помилки при застосуванні наступної формули скороченого множення, якщо б вони використовували відповідне словесне формулювання:

– $\left(2+x\right)^2=4+x^2$ (відсутній подвоєний добуток): «квадрат суми двох чисел дорівнює квадрату першого числа плюс подвоєний добуток першого числа на друге і плюс квадрат другого числа».

Таким чином, вчитель має перевіряти не тільки вміння учнями зробити відповідний формальний запис, але й словесне пояснення цього запису.

3) Запишемо формулу різницю квадратів: $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$.

Виявляється, що її можна прочитати та трактувати по-різному:

а) подання різниці квадратів двох виразів у вигляді добутка;

б) розкладання многочлена на множники, що є різницею двох невід'ємних виразів;

в) подання різниці двох невід'ємних виразів у вигляді добутка дільника на частку.

Використання цих трактувань значно розширює клас задач на застосування формул скороченого множення, зокрема різниці квадратів. З трактування б) випливає, що будь-який вираз виду: $c-d$, якщо $c \geq 0$, $d \geq 0$ можна розкласти на множники.

Дійсно, $c-d=\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{d}\right)^2=\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)$.

У трактуванні в) наголошується на тому, що тотожність можна використовувати для скорочення виразів:

$$\frac{c-d}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{d}\right)^2}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\sqrt{c}-\sqrt{d}.$$

4) Тут мається на увазі розв'язування завдань, в яких тотожність використовується як зліва направо, так і справа наліво, а також завдань, в яких враховані всі можливі випадки чергування знаків, види виразів, вивчених на даному етапі, які можуть бути підставлені замість змінних.

Наприклад, одним з варіантів тотожності $-(a+b)=-a-b$ є тотожність $-a-b=-(a+b)$. Здавалося б однакові тотожності, але з методичної точки зору сенс цих двох записів різний.

В першій тотожності необхідно розкрити дужки, перед якими стоїть знак «мінус», або внести множник (-1) в дужки.

У другому випадку – потрібно записати в дужках вираз, що не містить знаку «мінус» або винести множник (-1) за дужки.

Є й інші варіанти схожих тотожностей:

$-(a-b)=-a+b$ і $-a+b=-(a-b)$;

$-(-a-b)=a+b$ і $a+b=-(-a-b)$;

$-(-a+b)=a-b$ і $a-b=-(-a+b)$.

Для прикладу, розглянемо різні варіанти застосування формули скороченого множення – різниця квадратів:

а) m^2-n^2; б) a^2-4; в) $9-b^2$;

г) 53^2-43^2; д) $49a^2b^2-16$; е) $36x^2c^{14}-0,16d^4$;

є) $(2x-5)^2-49$; ж) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$;

з) $(2a+3b)^2-(4a-5b)^2$; і) $16x^4-1$.

Проаналізуємо кожне із наведених завдань:

а) усне завдання, для розуміння формулювання та формального запису різниці квадратів (мало відрізняється від самої формули: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$);

б)-д) завдання крім буквених виразів містить також числові:

– простішим для розв’язування є завдання г);

– більш складнішими завдання б), в), д), оскільки вирази по зовнішньому вигляду на перший погляд несхожі на різницю квадратів, тобто спочатку необхідно виконати певні перетворення (наприклад, $49a^2b^2-16=(7ab)^2-4^2$);

– завдання е) дещо схоже на завдання д), проте для учнів є більш складнішим в плані перетворень, а ще одна особливість цього завдання – воно містить коефіцієнт, що є десятковим дробом;

– завдання є)-з) дозволяють учням зрозуміти, що тотожність може бути використано і в тому випадку, коли розглядається різниця квадратів многочлена і одночлена, двох многочленні. При розв’язуванні завдання з) необхідно застосовувати формули для квадрата суми і квадрата різниці;

– останнє завдання і) є найскладнішим для розуміння учнями з вказаного списку завдань, оскільки формулу різниця квадратів потрібно застосувати двічі: $16x^4-1=\left(4x^2\right)^2-1^2=\left(4x^2-1\right)\left(4x^2+1\right)=\left(\left(2x\right)^2-1\right)\left(4x^2+1\right)=$

$=\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)\left(4x^2+1\right)$.

5) Тривалість етапу докладного запису і обґрунтування розв’язуваних вправ залежить від індивідуальних особливостей учнів і рівня їх математичної підготовки. Якщо швидко переходити до короткого запису і не вимагати обґрунтувань, то в процесі згортання алгоритму розв’язання вправ може статися втрата деяких, несуттєвих на погляд учня, етапів. Саме використання учнями таких неповних і неусвідомлених алгоритмів розв’язування завдань даного виду є причиною появи помилок.

Саме тому, ефективність вивчення тотожних перетворень дуже часто напряму пов’язано із застосуванням так званого алгоритмічного підходу, тобто навчаючи учнів виконувати тотожні перетворення не слід забувати про алгоритми [26].

Наведемо приклади різних алгоритмів, що пропонуються у шкільних підручниках з алгебри.

1) Алгоритм зведення одночлена до стандартного вигляду (7 клас)

Алгоритм зведення одночлена до стандартного вигляду

1. **Перемножити числа, що входять до нього, отримавши єдиний числовий множник (коефіцієнт).**
2. **Добутки однакових змінних замінити степенями з відповідними основами.**
3. **Приписати до отриманого числового множника кожну змінну (або відповідний степінь) по одному разу в алфавітному порядку змінних.**

Рис 2.1 Алгоритм зведення одночлена до стандартного вигляду

2) Алгоритм множення многочленів, який запропоновано у підручнику [28] для 7 класу:

Зверніть увагу:

щоб помножити два многочлени:

— помножте кожний член одного многочлена на кожний член іншого многочлена і запишіть суму цих добутків;

— подайте кожний член отриманого многочлена у стандартному вигляді;

— зведіть подібні доданки, якщо вони є.

Рис. 2.2 Правило множення многочленів

3) Алгоритми зведення дробу до нового знаменника та до спільного знаменника (8 клас) [29]:

Правило зведення раціонального дробу до нового знаменника

Щоб звести даний раціональний дріб до нового знаменника, потрібно:

1) записати новий знаменник у знаменнику нового дробу;

2) знайти додатковий множник;

3) помножити чисельник даного дробу на додатковий множник і результат записати в чисельнику нового дробу.

Рис. 2.3 Алгоритм зведення раціонального дробу до нового знаменника

Правило зведення двох раціональних дробів до спільного знаменника

Щоб звести два дані раціональні дроби до спільного знаменника, потрібно:

1) знайти спільний знаменник даних дробів;

2) знайти додатковий множник для першого дробу;

3) звести перший дріб до нового знаменника;

4) знайти додатковий множник для другого дробу;

5) звести другий дріб до нового знаменника.

Рис. 2.4 Алгоритм зведення раціонального дробу до спільного знаменника

6) Для демонстрації алгоритмів доцільно застосовувати засоби наочності: роздатковий матеріал, плакати, стенди, презентацію тощо.

Безумовно, заучувати кожен із поданих вище алгоритмів учням не треба. Завдання вчителя – сформувати в учнів ті чи інші уміння (наприклад, зводити дроби до спільного знаменника), тобто навчити учнів діяти в зазначеному порядку.

Це досягається шляхом неодноразової демонстрації зразків розв’язування завдань, представлення спеціальної добірки вправ, спрямованої як на відпрацювання кожного елемента алгоритму, так і на усвідомлення всього складного процесу виконання дій в цілому, з врахуванням індивідуальних особливостей учнів, рівня їх математичної підготовки.

7) Проведення аналогії між тотожністю і числовими рівностями.

Будь-яку тотожність можна розглядати як узагальнення відповідних числових рівностей. Слід використовувати цей факт для здійснення контролю за виконанням тотожних перетворень. Наприклад, якщо навіть учень допустив помилку при виконанні тотожних перетворень, то дуже просто це перевірити, знайшовши значення виразів правої та лівої частини (більш детально про типові помилки такого виду у пункті 2.2).

8) Для прикладу розглянемо вираз $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$. У ході виконання перетворень дехто з учнів буде застосовувати формулу квадрат суми і квадрат різниці, інші, охопивши вираз в цілому, відразу знайдуть різницю квадратів двох виразів. Корисно такого плану завдання пропонувати у якості домашнього завдання, щоб учні мали

змогу спростити вираз двома способами і обрати найбільш раціональний.

I спосіб (застосування формул квадрат суми і квадрат різниці):

$$(a+b+c)^2-(a+b-c)^2=((a+b)+c)^2-((a+b)-c)^2=$$

$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2-\left((a+b)^2-2(a+b)c+c^2\right)=$$

$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2-(a+b)^2+2(a+b)c-c^2=4(a+b)c.$$

II спосіб (застосування формул різниці квадратів):

$$(a+b+c)^2-(a+b-c)^2=(a+b+c-a-b+c)(a+b+c+a+b-c)=$$

$$=2c(2a+2b)=4c(a+b).$$

9) Важливо, щоб учні привчалися самі контролювати свою діяльність. Тому при вчиненні учнем помилки не варто поспішати вказувати на неї. Можна, наприклад попросити учня виконати одне із наступних завдань [5]:

а) перечитати текст завдання (можливо, він не правильно його зрозумів);

б) перевірити записане в зошиті із записом на дошці або в підручнику (можливо, неправильно записана умова);

в) сформулювати правило, властивість, назвати формулу і перевірити, чи правильно вона застосовується;

г) зробити розгорнутий запис розв’язання;

д) перевірити правильність виконання перетворення, підставивши замість змінних числа;

е) провести перетворення у зворотному порядку;

ж) пояснити сутність допущеної помилки, коли вона знайдена, або учитель переконав в тому, що вона є, підібравши відповідний контрприклад.

Отже, врахування основних методичних прийомів у процесі вивчення тотожних перетворень виразів в основній школі робить навчання ефективним, цікавим для учнів, а головне результативним, а також дає змогу попередити виникнення математичних помилок учнів.

2.2. Типові помилки учнів у ході виконання тотожних перетворень і шляхи їх подолання

У ході виконання тотожних перетворень виразів учні досить часто припускаються помилок. Психологи встановили, що допущена учнем помилка є достатньо стійкою і її занадто важко викорінити у процесі навчання математики. Саме тому, дуже важливо своєчасно аналізувати самостійні та контрольні роботи, встановлювати причини виникнення помилок, організовувати і проводити роботу по їх попередженню та подоланню.

З. І. Слєпкань [25, с.166] вважає, що типові помилки допускаються частиною учнів навіть у випадку вдалого пояснення вчителя, який акцентує увагу на цих помилках. Це пов’язано, перш за все, з тим, що людська свідомість, як правило, об’єктивно не в змозі охопити всі сторони явища. Але і допущену учнем помилку вчитель повинен використати для поглибленого розуміння школярами математичних фактів та закономірностей.

На думку авторів статті [4] з метою вдосконалення роботи з попередження помилок, доцільно розглянути проблему попередження і виправлення помилок учнів під час вивчення алгебри з погляду поділу навчального матеріалу на змістові лінії: числа і дії над ними; вирази і їх перетворення; рівняння, нерівності та їх системи; функції та їх графіки. Це дасть можливість покращити роботу з попередження помилок учнів у ході вивчення алгебри в основній школі, попередити неуспішність під час розширення і поглиблення вивчення названих змістових ліній у старшій профільній школі. З. І. Слєпкань цей підхід було реалізовано у методичному посібнику [25].

Проаналізуємо деякі типові помилки, які допускають учні у ході виконання тотожних перетворень виразів.

1) *<u>Помилки, пов’язані з тотожними перетвореннями цілих виразів</u>.*

Помилки, пов’язані з розкриттям дужок (особливо, якщо перед дужками стоїть знак мінус «–»). В учнів часто виникають труднощі при виконанні наступних перетворень: $a-(b+c)$, $a-(-b+c)$, $a-(-b-c)$. Як правило, учні або зовсім не змінюють знаки при розкритті дужок, або «забувають» зміни знак перед другим алгебраїчним доданком: $a-(-b-c)=a+b\boxed{-}c$).

Для попередження виникнення помилки та для її подолання необхідно учням пропонувати завдання, для розв’язання яких потрібно розкрити дужки перед якими стоїть мінус. Корисно давати такі завдання на початку уроку навіть в усній формі.

Помилки, пов’язані з зведенням подібних доданків.

Учні часто припускаються наступних помилок:

– додають коефіцієнти, а змінні прибирають: $7a-3a=\boxed{4}$;

– додають окремо коефіцієнти, а окремо змінні: $7a+3a=\boxed{10}+7a$;

– коефіцієнти додаються, а змінні перемножують: $7a+3a=10a^{\boxed{2}}$ та інших.

Для попередження помилок учням слід пропонувати виконувати перетворення, що пов’язані з зведенням подібних доданків, можна давати такого плану тренувальні завдання додому з метою повторення вивченого матеріалу, а також намагатися підбирати завдання таким чином, щоб учні мали змогу звести подібні доданки (наприклад, при розв’язуванні рівнянь, систем рівнянь, нерівностей тощо).

Помилки при множенні одночленів.

Можливі наступні помилки пов’язані із множенням одночленів:

– перемножують не лише коефіцієнти але й показники степенів при однакових основах: $5c^3d^2 \cdot 2d^4c^5 = 10c^{\boxed{15}}d^{\boxed{8}}$;

– перемножують лише коефіцієнти, а вирази зі змінними (якщо вони однакові) залишають без змін: $6ab \cdot 4ab = 24\boxed{ab}$;

– при множенні трьох многочленів застосовують розподільний закон множення відносно додавання [25, 172]:

$$7c \cdot 6b^3 \cdot 2a^2 = 42cb^3 \cdot 14ca^2 = \boxed{588c^2}b^3a^2.$$

З метою попередження виникнення такого виду помилок на перших заняттях варто виконувати множення наступним чином:

$$3a^2b \cdot 2ab^2c \cdot 4abc = 3aab \cdot 2abbc \cdot 4abc = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \underset{4}{\cancel{aaaa}} \cdot \underset{4}{\cancel{bbbb}} \cdot \underset{2}{\cancel{cc}} = 24a^4b^4c^2.$$

Помилки при піднесенні одночленів до степеня.

Значна кількість помилок пов’язана із піднесенням до степеня:

– при піднесенні до степеня коефіцієнт множать на показник степеня: $6^3 = \boxed{18}$, $\left(2a^5\right)^3 = \boxed{6}a^{15}$;

– до степеня підносять лише числовий коефіцієнт: $\left(3a^3bc^2\right)^3 = 27\boxed{a^3bc^2}$;

– до степеня підносять лише змінні, числовий коефіцієнт залишається без змін: $\left(3a^3bc^2\right)^3 = \boxed{3}a^9b^3c^6$;

– при піднесенні до степеня показники

а) додають: $\left(a^3bc^2\right)^3 = a^{\boxed{6}}b^{\boxed{4}}c^{\boxed{5}}$ або

б) підносять до відповідних степенів: $\left(a^3bc^2\right)^3 = a^{\boxed{27}}b^{\boxed{1}}c^{\boxed{8}}$.

Всі ці помилки виникають у зв’язку з тим, що учні погано розуміють властивості степенів. Саме тому, їх слід періодично повторювати (у кабінеті математики бажано, щоб був стенд «Властивості степенів» (див. рис. 2.5).

На уроках алгебри учням, з метою повторення дій над степенями, можна пропонувати виконувати експрес-завдання, проводити математичні диктанти, заповняти таблиці із пропусками тощо.

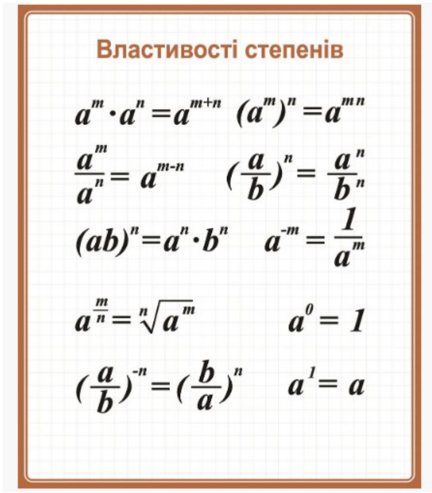


Рис. 2.5 Властивості степенів

Помилки, пов’язані із розкладом многочленів на множники.

Такого виду помилки часто пов’язані із винесенням за дужки спільного множника:

– при винесенні одночлена за дужки на його місце, як правило, не ставлять одиницю: $2a^3bc + 3a^2b^3 + ab = ab\left(2a^2c + 3ab^2\right)$, у цьому випадку пропонуємо виконати наступні записи, щоб учням було зрозуміло, чому необхідно залишити ще один доданок – одиницю: $2a^3bc + 3a^2b^3 + ab = 2a^3bc + 3a^2b^3 + 1ab = ab\left(2a^2c + 3ab^2 + 1\right)$;

– при винесенні одночлена зі знаком мінус за дужки знаки в дужках не змінюють на протилежні: $2a^3bc - 3a^2b^3 - ab^2 = -ab\left(\boxed{?}2a^2c\boxed{-}3ab^2\boxed{-}b\right)$;

– при винесенні двочлена за дужки, що є різницею двох одночленів не звертають уваги на знак:

$$x^4 - x^3y - y^3 + y^2x = x^3\underline{(x-y)} - y^2\underline{(y-x)} = (x-y)\left(x^3\boxed{-}y^2\right);$$

– при винесенні двочлена за дужки учні в результаті його записують два рази:

$$x^4 - x^3y - y^3 + y^2x = x^3(x-y) + y^2(x-y) = (x-y)\boxed{(x-y)}\left(x^3+y^2\right).$$

З метою виявлення таких помилок учням слід пропонувати зробити обернене перетворення помножити одночлен на відповідний многочлен, чи перемножити многочлени.

Помилки при застосуванні формул скороченого множення.

Нерозуміння чи поверхневе засвоєння матеріалу щодо застосування формул скороченого множення призводить до ряду помилок, серед яких виділимо наступні:

– при піднесенні двочлена до квадрату: $2a^3bc + 3a^2b^3 + ab$ $\left(m^2+n\right)^2 = m^4 + n^2$, у цьому випадку доцільно нагадати учням формулу квадрат суми $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, а також дати завдання замість піднесення до квадрату перемножити двочлени:

$$\left(m^2+n\right)\left(m^2+n\right) = m^4 + m^2n + nm^2 + n^2 = m^4 + 2m^2n + n^2;$$

– при застосуванні формули різниця квадратів:

а) $\left(c^2+d\right)\left(c^2-d\right) = c^4\boxed{+}d^2$;

б) $4c^2 - 9d^2 = (2c-3d)\left(2c\boxed{-}3d\right)$;

в) $4c^2 + 9d^2 = \boxed{(2c+3d)(2c-3d)}$.

– при застосуванні формули формул сума (різниця) кубів: $c^3 \pm 8 = c^3 \pm 2^3 = (c \pm 2)\left(c^2 \mp \boxed{4}c + 4\right)$ (замість неповного квадрату записують повний квадрат).

Для всіх випадків правильність результату пропонуємо перевіряти шляхом множення відповідних многочленів. Причому, при вивченні формул скороченого множення необхідно постійно повторювати та закріплювати на практиці уже вивчені формули. У кабінеті математики має бути стенд «Формули скороченого множення» (рис. 2.6).

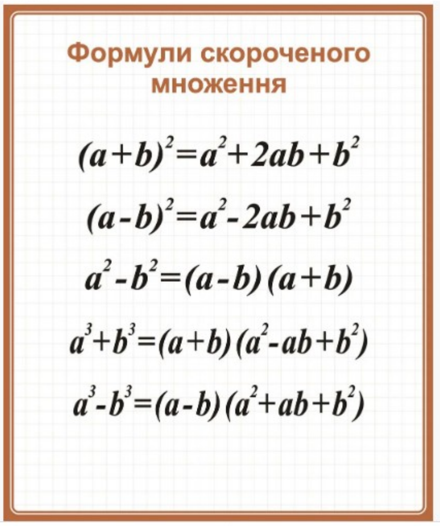


Рис. 2.6 Формули скороченого множення

2) ***<u>Помилки, пов'язані з тотожними перетвореннями дробово-раціональних виразів.</u>***

Помилки пов'язані зі зміною знаку перед дробом. Учні часто допускають помилки, навіть з більшою ймовірністю, ніж у першому випадку, коли необхідно виконати перетворення такого плану: $-\frac{a+b}{c+d}$, $-\frac{a-b}{c+d}$, $-\frac{-a-b}{c-d}$ тощо. Ця помилка в основному зв'язана з нерозумінням учнів де саме необхідно змінювати знак: у чисельнику чи у знаменнику дробово-раціонального виразу. Тому вчитель має пояснити учням особливості виконання таких завдань, наприклад таким чином:

$$-\frac{a-b}{c+d}=(-1)\cdot\frac{a-b}{c+d}=\frac{(-1)\cdot(a-b)}{c+d}=\frac{-a+b}{c+d}.$$

З. І. Слєпкань [25, с.172] наголошує на тому, що, з метою попередження помилок, учні мають добре засвоїти перетворення двох видів:

а) $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$;

б) $\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}=-\frac{a}{-b}=\frac{-a}{-b}$.

Помилки при скороченні дробових виразів.

Учні часто при скороченні дробу, особливо якщо в чисельнику двочлен, а у знаменнику одночлен, скорочують лише перший доданок чисельника: ... У цьому випадку необхідно виконувати ділення на вираз у знаменнику почленно: $\frac{cd+b^2}{c}=\frac{cd}{c}+\frac{b^2}{c}=d+\frac{b^2}{c}$.

Проте, буває так, що саме неправильне розуміння та виконання почленного ділення приводить до наступної помилки: $\frac{c}{cd+b^2}=\boxed{\frac{c}{cd}+\frac{c}{b^2}}$.

Інші помилки, пов'язані з неправильним виконанням дій з дробами (особливо додавання та віднімання): $\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{c+a}{d+b}$. Помилка такого виду, зазвичай, пояснюється нерозумінням учнями поняття «зведення до спільного знаменника». В цьому випадку вчитель має пояснити яким чином виконується зведення до спільного знаменника, розглянувши спочатку на прикладі звичайних дробів: $\frac{5^{(3}}{7}-\frac{1^{(7}}{3}=\frac{15-7}{21}=\frac{8}{21}$, а потім повернутися до розв'язання завдання, у якому виявлено помилку:

$$\frac{c^{(b}}{d}+\frac{a^{(d}}{b}=\frac{cb+ad}{db}.$$

З. І. Слєпкань [25, с.174] пропонує для подолання помилок, що виникають у процесі виконання тотожних перетворень дробово-раціональних виразів, знаходити значення вихідного та отриманого виразів.

3) ***<u>Помилки, пов'язані з тотожними перетвореннями ірраціональних виразів.</u>***

Помилки, пов'язані із винесенням з-під знака кореня множників.

– При винесенні одночлена з-під знака квадратного кореня коефіцієнт ділять на 2:

а) $\sqrt{16abc} = \boxed{8}\sqrt{abc}$;

б) $\sqrt{12abc} = \boxed{6}\sqrt{abc}$.

Для попередження таких помилок пропонуємо:

в завданні а) коефіцієнт під коренем подати як квадрат відповідного числа: $\sqrt{16abc} = \sqrt{4^2 abc} = 4\sqrt{abc}$;

в завданні б) коефіцієнт записати як добуток двох чисел, одним з яких є квадратом певного числа: $\sqrt{12abc} = \sqrt{4 \cdot 3abc} = \sqrt{2^2 \cdot 3abc} = 2\sqrt{3abc}$.

– При внесенні одночлена під знак кореня коефіцієнт множать на показник кореня: $3\sqrt[4]{c^3 d} = \sqrt[4]{\boxed{12}c^3 d}$. В цьому випадку учням необхідно нагадати ще раз основні властивості коренів та особливості внесення виразів під знак кореня.

– При знаходженні алгебраїчної суми двох коренів. Учні за аналогією з наступними властивостями коренів: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, припускаються досить грубих помилок: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \boxed{\sqrt{a \pm b}}$. Щоб переконати учнів у неправильності міркувань необхідно знайти значення лівої та правої частини рівності, надавши змінним a і b числових значень (проте, для випадку $\sqrt{a-b}$, $a > b$.

– При знаходженні добутку та частки коренів (особливо, якщо показники коренів різні): $\sqrt{abc} \cdot \sqrt[3]{abc} = \sqrt[5]{a^2 b^2 c^2}$; $\frac{\sqrt[5]{a^2 b^2 c^2}}{\sqrt{abc}} = \sqrt[3]{abc}$.

Пропонуємо у вирази для лівої та правої частин підставити конкретні значення для змінних та переконатися, що рівність не виконується.

– При виконанні перетворень типу: $\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b^2}}}$, показники коренів або додаються або перемножуються:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b^2}}} = \sqrt[\boxed{2+3+4}]{ab^2} = \sqrt[\boxed{9}]{ab^2} \text{ або } \sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b^2}}} = \sqrt[\boxed{2\cdot3\cdot4}]{ab^2} = \sqrt[\boxed{24}]{ab^2}.$$

Для полегшення перетворень і кращого сприйняття пропонуємо перейти від кореня до степеня з дробовим показником:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b^2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{a\left(b^2\right)^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{ab^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{2}{12}}b^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a^2b}.$$

– При позбавленні від ірраціональності в знаменнику дробу. Розглянемо два випадки неправильного виконання даної операції:

а) $\dfrac{2a^2b}{\sqrt[3]{c}} = \dfrac{2a^2b\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c}\cdot\boxed{\sqrt[3]{c}}} = \dfrac{2a^2b\sqrt[3]{c}}{\boxed{c}}$ – помилку було зроблено двічі: перший раз, коли помножили чисельник і знаменник дробу на $\sqrt[3]{c}$, а другий – помилка при знаходженні добутку $\sqrt[3]{c}\cdot\sqrt[3]{c}$ (причина: неправильна аналогія з коренем квадратним). В даному завданні для позбавлення від ірраціональності в знаменнику дробу необхідно і чисельник і знаменник помножити на вираз $\sqrt[3]{c^2}$.

б) $\dfrac{2a^2b}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}} = \dfrac{2a^2b\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{d}\right)}{\left(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}\right)\boxed{\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{d}\right)}} = \dfrac{2a^2b\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{d}\right)}{\boxed{c-d}}$.

В даному випадку не можна чисельник і знаменник множити на спряжений вираз до знаменника. Варто учням спочатку зробити підказку: чисельних і знаменник дробу необхідно помножити на такий вираз, щоб можна було застосувати формулу сума кубів. Тобто, знаменник $\left(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}\right)$ слід помножити на вираз $\left(\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{cd}+\sqrt[3]{d^2}\right)$, отримаємо:

$$\frac{2a^2b}{\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}}=\frac{2a^2b\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{d}\right)}{\left(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{d}\right)\left(\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{cd}+\sqrt[3]{d^2}\right)}=\frac{2a^2b\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{d}\right)}{c-d}.$$

– При виконанні перетворень типу: $\sqrt{a^2}$. Найчастіше учні записують: $\sqrt{a^2}=a$ і припускаються помилки, яка пов’язане з нерозумінням однієї з основних властивостей арифметичного кореня: $\left(\sqrt{a}\right)^2=|a|$, якщо a – будь-яке число. Таким чином рівність $\sqrt{a^2}=a$ може виконуватися за умови $a\ge 0$.

З метою попередження такого типу помилок учням необхідно показати на прикладі, що рівність $\sqrt{a^2}=a$ не виконується для довільного значення *a*. Наприклад, застосовуючи попередню формулу, отримаємо явно неправильну рівність: $\sqrt{\underbrace{(-7)^2}_{>0}}=\underbrace{-7}_{a}<0$.

Розглянемо деякі приклади застосування цієї властивості арифметичного кореня при виконанні тотожних перетворень ірраціональних виразів.

а) Спростити вираз [21, 20]: $\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

Розв’язання.

$$\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{1-4\sqrt{2}+8}+\sqrt{2-4\sqrt{2}+4}=$$

$$=\sqrt{1-4\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{2}+2^2}=\sqrt{\Big(\underbrace{1-2\sqrt{2}}_{<0}\Big)^2}+\sqrt{\Big(\underbrace{\sqrt{2}-2}_{<0}\Big)^2}=$$

$$= \left|1 - 2\sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{2} - 2\right| = 2\sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1.$$

Запропоноване завдання можна також розв'язати за допомогою формули складного радикала: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

б) Спростити вираз [23, 8]: $\sqrt{(m+n)^2 - 4mn} + n - m$.

Розв'язання.

$$\sqrt{(m+n)^2 - 4mn} + n - m = \sqrt{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn} + n - m =$$

$$= \sqrt{m^2 - 2mn + n^2} + n - m = \sqrt{(m-n)^2} + n - m = |m - n| + n - m.$$

Останню рівність запишемо наступним чином:

$$|m - n| + n - m = \left[\begin{array}{c} m - n + n - m = 0, m \geq n, \\ -m + n + n - m = 2(n - m), m < n. \end{array}\right.$$

Отже, у процесі аналізу типових помилок, які допускають учні при виконанні тотожних перетворень виразів, можна зробити висновок про те, що виникнення помилок краще завчасно попередити, ніж, потім, важко працювати над їх подоланнях.

2.3. Система завдань для самостійної роботи учнів з теми «Тотожні перетворення виразів» (7-9 класи)

Самостійна робота учнів – це така навчально-пізнавальна діяльність, коли послідовність мислення учня, його розумові і практичні операції і дії залежать і визначаються самим учнем [19]. Присутність самостійної роботи є необхідною умовою на уроках, в тому числі і на уроках математики, так як самостійне виконання завдань тренує волю, виховує працездатність, увагу, дисциплінує учнів. Вчителю на уроках математики необхідно спиратися на самостійну роботу учнів, їх самостійне міркування.

Самостійна робота – це метод, який дуже допомагає вчителю для виявлення математичних здібностей учнів. І навіть сам учень, працюючи самостійно, повинен поступово оволодіти такими загальними прийомами самостійної роботи як чітке уявлення мети роботи, її виконання, перевірка та виправлення помилок.

Так як основною метою навчання є навчити кожного учня самостійно здобувати знання, формувати навички, то самостійна діяльність учнів є дійсно важливим аспектом. Відомо, що кожен учень засвоює знання в залежності від своїх розумових здібностей, пам'яті, темпераменту, навичок навчальної праці. Так як рівень знань, пізнавальних здібностей не у всіх дітей однаковий, то на уроках при колективної форми роботи необхідний диференційований підхід в підборі завдань, тобто бажано пропонувати завдання різного рівня складності.

Найбільш успішно пізнавальна самостійність розвивається в тому випадку, якщо учень, виконуючи спочатку легкі математичні завдання, а потім більш складні, сам наштовхується на посильні для нього завдання, усвідомлює їх і розв'язує самостійно. Від того, як оцінює школяр свої пізнавальні можливості, багато в чому залежить його робота.

Основними формами організації самостійних робіт є [3; 12]:

– індивідуальні, тобто кожному учневі дають картка з посильними йому завданнями, тут враховується диференціює підхід в навчанні математики;

– фронтальні, в даному випадку самостійна робота пропонується вибірково, коли необхідно визначити рівень засвоєння матеріалу конкретного учня;

– групові, зазвичай це бувають загальні самостійні або контрольні роботи.

У своїй статті автор В. А Далінгер [7] вважає, що самостійна робота як прийом навчання застосовується на різних етапах процесу навчання для досягнення тих же цілей, що переслідуються на роботах, виконуваних під керівництвом вчителя.

Організація самостійної роботи на уроці вимагає від вчителів не меншою підготовки, а навіть більшою, коли навчальний матеріал він викладає сам. Якщо при цьому він ставить завдання формування в учнів навичок самостійної роботи, то йому потрібно визначити наступне [24]:

– мету, час і характер самостійної роботи, а також ті навички самостійної навчальної роботи, які необхідно сформувати у ході самостійного вивчення математики, на які можна звернути увагу учнів при виконанні саме цієї роботи;

– спосіб та шлях повторення того мінімуму фактичних знань і умінь, без яких неможливе успішне виконання даної самостійної роботи;

– мета роботи з книгою: для повторення, для пошуку довідкової інформації, для знайомства з новим матеріалом. Тут же визначаються ті моменти уроку, де можна підкреслити роль і значення тих чи інших навичок самостійної роботи.

– Вид вправ: виконання завдань на повторення, а також супутні їм вміння самостійної роботи;

– методику усунення в учнів можливих труднощів в ході виконання завдань, а також спосіб швидкої перевірки отриманих результатів і методику розбору допущених помилок.

При розробці системи самостійних робіт по даній темі були розглянуті та проаналізовані такі основні дидактичні вимоги:

1. Система самостійних робіт повинна сприяти набуттю учнями міцних знань, формуванню навичок тотожних перетворень і безпомилково застосування їх на практиці.

2. Система повинна задовольняти основним принципам дидактики, і, перш за все принципам доступності і систематичності.

3. Завдання повинні бути різноманітними за навчальною метою і змістом, щоб забезпечити формування в учнів відповідних умінь і навичок.

4. Послідовність виконання домашніх і класних самостійних робіт логічно випливало з попередніх і було підґрунтям для виконання наступних. У цьому випадку між окремими роботами забезпечуються не тільки «ближні», а й «далекі» зв'язку. Успішність розв'язання цього завдання залежить не тільки від педагогічної майстерності вчителя, а й від того, наскільки він розуміє значення і місце кожної окремої роботи в системі робіт, у розвитку пізнавальних здібностей учнів, їх мислення та інших важливих якостей.

При розробці системи завдань для самостійної роботи учнів було враховано наступні особливості:

– клас, для якого пропонується самостійна робота (це врахування типу завдань, їх тематики);

– завдання різного рівня складності (І рівень – середній, ІІ рівень – достатній, ІІІ рівень – високий) ля 7 класу;

– завдання пропонуються для двох варіантів(див. Додаток Г).

Зауваження: до самостійної роботи для достатнього рівня додано завдання на застосування перетворень через розв'язування рівняння, всі інші види завдань залишаються.

Завдання для самостійної роботи для учнів 8 класу з теми «Тотожні перетворення алгебраїчних виразів»

(Достатній рівень)

І варіант:

1. Спростити вираз:

а) $(x+6y)^2-(6y+5x)(6y-5x)+x(12y-6x)$;

б) $8(5y+3)^2+9(3y-1)^2$;

в) $(a+8)^2-2\cdot(a+8)(a-2)+(a-2)^2$.

2. Розкласти многочлен на множники:

а) $8a^3-b^3+4a^2+2ab+b^2$; б) $-12x^3+12x^2-3x$.

3. Знайти значення виразу: $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right):\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{y}{x}+1\right)$.

II варіант

1. Спростити вираз:

а) $(x-3y)(x+3y)+(2x-3y)^2-4x(y-x)$;

б) $(4y^2+3)^2+(9-4y^2)^2-2(4y^2+3)(4y^2-9)$;

в) $(a-7)^2-2\cdot(a-7)(a-9)+(a-9)^2$.

2. Розкласти многочлен на множники:

а) $8a^3-b^3+4a^2-4ab+b^2$; б) $5x^3-5a^2x$.

3. Знайти значення виразу: $\left(\frac{y^2-x^2}{m^2-n^2}\cdot\frac{m+n}{x-y}-\frac{x}{n-m}\right)\cdot\frac{m-n}{2y}$.

Завдання для самостійної роботи для учнів 9 класу з теми «Тотожні перетворення алгебраїчних виразів»

(Достатній рівень)

I варіант

1. Знайти тотожне перетворення (відповідь обґрунтувати).

1) $(x-2)y=x-2y$; 2) $(x+y)(y-x)=x^2-y^2$.

2. Знайти значення змінних *x* та *y*, при яких вираз не має змісту.

$$1-\frac{2}{2-\frac{x}{x-1}}+\frac{2}{3-\frac{2}{y}}$$

3. Скоротити дріб:

$$\frac{8xy-4x+2y}{4y^2-4y+1}$$

4. Розкласти на множники:

1) $c^2-a-1+ac^2$

2) $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+yz^2+y^2z+2xyz$

5. Спростити вираз:

1) $\frac{(\sqrt{a}-1)^2-4}{5(\sqrt{a}+1)^2}\cdot\frac{10\sqrt{a}+10}{\sqrt{a}-3}$;

2) $\frac{p^3+4p^2+10p+12}{p^3-p^2+2p+16}\cdot\frac{p^3-3p^2+8p}{p^2+2p+6}$

6. Довести тотожність:

$$\frac{x^2+4x+4}{4x^2}:\left(\frac{x}{2x-4}-\frac{2}{x^2-2x}\right)=\frac{x+2}{2x}$$

II варіант

1. Знайти тотожне перетворення (відповідь обґрунтувати).

1) $(2-x)^2=4-4x+x^2$; 2) $(x+y)^2=x^2+y^2$

2. Знайти значення змінних *x* та *y*, при яких вираз не має змісту.

$$1-\frac{2}{2-\frac{x}{x-1}}+\frac{2}{3-\frac{2}{y}}$$

3. Скоротити дріб:

$$\frac{2a^2-7a+6}{6a^2-13a+6}$$

4. Розкласти на множники:

1) $(a^2+6ab)^2-81b^4$;

2) $(a^2+a+3)(a^2+a+4)-12$.

5. Спростити вираз:

1) $\left((a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3})(b^3-a^2b-a^3)^{-1}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{a^4-a^3+a^2-a+1}{a^5+1}-\dfrac{a^2+a+1}{a^3-1}$.

5. Довести тотожність:

$$\frac{x^2+4x+4}{4x^2}:\left(\frac{x}{2x-4}-\frac{2}{x^2-2x}\right)=\frac{x+2}{2x}.$$

ВИСНОВКИ

На основі проведеного дослідження зробимо основні висновки:

1. Проведений аналіз науково-методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження показав тотожні перетворення виразів мають широкий спектр застосувань не тільки в математиці, але й в інших галузях наук.

2. Основну базу знань щодо виконання тотожних перетворень виразів учнів отримують в основній школі, у процесі вивчення тотожних перетворень цілих, дробово-раціональних та ірраціональних виразів.

3. Дотримання основних методичних рекомендацій щодо вивчення теми «Тотожні перетворення» та щодо запобігання математичним помилкам дасть змогу зробити процес навчання більш ефективним.

У процесі дослідження отримані наступні результати:

1. Проаналізовано основний понятійний апарат теми «Тотожні перетворення виразів». Зроблено аналіз програм та підручників з теми дослідження.

2. Запропоновано основні методичні рекомендації щодо вивчення теми в основній школі.

3. Детально проаналізовано основні типові помилки, які допускають учні у процесі виконання тотожних перетворень виразів, наведено можливі шляхи їх попередження та усунення.

4. Підібрано завдання для самостійної роботи учнів 7-9 класів.

Вважаємо, що матеріал дипломної роботи може бути корисним для вчителів, які викладають математику в основній школі, а також для студентів-практикантів при підготовці до уроків з теми «Тотожні перетворення виразів» у 7, 8 та 9 класах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г П. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Видавництво «Відродження», 2015. – 288 с.
2. Бевз Г П. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2016. – 253 с.
3. Бевз Г. П. Методика викладання математики: 3-тє вид., доп. та передоб / Г. П. Бевз. –. К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
4. Благодир Л. А. Математичні помилки як об'єкт наукових досліджень [Текст] / Л. А. Благодир, В. О. Швець // Наукові записки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні та історичні науки / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. – Вип. 93. – С. 19-28.
5. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики / Я.И. Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 205 с.
6. Гусев В. А. Математика: Учебно-справочное пособие. / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович. – М.: Астрель, 2013. – 672 с.
7. Далингер В. А. Самостоятельная деятельность учащихся – основа развивающего обучения. / В. А. Далингер // Математика в школе. – №6. – 1994. – С. 17-21.
8. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. №1392.
9. Ізюмченко Л. В. Вирази та тотожні перетворення: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів. Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-

математичної школи. / Л. В. Ізюмченко, Л. І. Лутченко, В. В. Нічишина, Р. Я. Ріжняк – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 22 с.

10. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / О. С. Істер. – К.: Генеза, 2015. – 256 с.

11. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / О. С. Істер. – К.: Генеза, 2016. – 272 с.

12. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе Учеб. пособие для студентов физ. -мат. фак. пед. институтов. / Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканин Г.Л. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

13. Кравчук В. Р. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / В. Р. Кравчук, М. В. Підручна, Г. М. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2015. – 224 с.

14. Мальований Ю. І. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Ю. І. Мальований, Г. М. Литвиненко, Г. М. Бойко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2015. – 256 с.

15. Мантуров О. В. Толковый словарь математических терминов: пособие для учителей / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин. – М: Просвещение, 1965. – 509 с.

16. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2015. – 256 с.

17. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 240 с.

18. Мерзляк А. Г. Математика: підруч. для 6 кл. заг. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2014. – 400 с.

19. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат.

спец./ А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др; Сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – Гл.5. – 416 с.

20. Навчальна програма з математики для 5-9-х класів для загальноосвітніх навчальних закладів затверджена наказом МОН від 07.06.2017 № 804.

21. Павлович В. С. Анализ ошибок абитуриентов по математике / В. С. Павлович. – К.: «Вища школа», 1975. – 232 с.

22. Романов А. М. Математика от А до Я: Справочное пособие. / А. М. Романов, А. С. Попова, Г. Н. Леонов, Р. В. Дегтерева – Барнаул: Изд - во АлтГТУ, 2003. – 224 с.

23. Самусенко А. В. Математика: Типичные ошибки абитуриентов / А. В. Самусенко, В. В. Казаченок: Справочное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – 194 с.

24. Ситникова Е. В. Самостоятельная работа учащихся в процессе личностно ориентированного обучения в современной школе. [Режим доступа]: http://festival.1september.ru/articles/214474/

25. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: методическое пособие / З. И. Слепкань. – К.: Радянська школа, 1983 . – 192 с.

26. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. 2-ге вид., доп. і переробл. / З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.

27. Стефанова Н. Л. Методика и технология обучения математике. / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова. – М.: Дрофа, 2008. – 416 с.

28. Тарасенкова Н. А. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. – 288 с.

29. Тарасенкова Н. А. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. – К.: УОВЦ «Оріон», 2016. – 336 с.

30. Тождественные преобразования: Методическая разработка для учащихся 8 и 9 классов заочного отделения МММФ / Под редакцией А. В. Деревянкина. – М.: Изд-во центра прикладных исследований при механикоматематическом факультете МГУ, 2007. – 16 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця А.1

Порівняння навчальних програм з алгебри щодо вивчення тотожних перетворень

Клас	К-ть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення учнів
7	30	**Тема 1.** **ЦІЛІ ВИРАЗИ.** Цілі раціональні вирази. Вирази зі змінними. Тотожність. Тотожні перетворення виразу. Властивості степеня з натуральним показником. Одночлен. Множення одночленів. Многочлен. Зведення подібних членів многочлена. Додавання, віднімання та множення многочленів. Формули квадрата двочлена, різниці квадратів, суми і різниці кубів. Розкладання	**наводить приклади**: числових виразів; виразів із змінними; одночленів та многочленів **пояснює поняття**: тотожні вирази, тотожні перетворення виразів; **формулює**: означення: одночлена, многочлена, подібних членів многочлена; властивості степеня з натуральним показником; правила: множення одночлена на многочлен та двох многочленів; **розв'язує вправи на:** обчислення значень виразів зі змінними; перетворення добутку одночлена і многочлена, суми, різниці, добутку двох многочленів у многочлен; розкладання многочлена на множники способом винесення спільного

		многочленів на множники.	множника за дужки, способом групування, за формулами скороченого множення та із застосуванням декількох способів; використання зазначених перетворень у процесі розв'язування рівнянь, доведення тверджень [20].
8	**24**	**Тема 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ** Степінь із цілим показником та його властивості. Раціональні вирази. Раціональні дроби. Основна властивість раціонального дробу. Арифметичні дії з раціональними дробами.	**наводить приклади:** раціонального виразу; **розпізнає:** цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази; **пояснює**: як виконати скорочення дробу; як звести дріб до нового знаменника; як звести дроби до спільного знаменника; **формулює:** основну властивість дробу; правила: додавання, віднімання, множення, ділення дробів, піднесення дробу до степеня; **розв'язує вправи, що передбачають:** скорочення дробів; зведення дробів до спільного знаменника; знаходження суми, різниці, добутку, частки дробів; тотожні перетворення раціональних

			виразів; розв'язування рівнянь [20].
8	**10**	**Тема 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА** Арифметичний квадратний корінь. Властивості арифметичного квадратного кореня.	**формулює:** означення арифметичного квадратного кореня з числа; властивості арифметичного квадратного кореня; **розв'язує вправи, що передбачають:** застосування поняття арифметичного квадратного кореня для обчислення значень виразів, спрощення виразів, розв'язування рівнянь, порівняння значень виразів; перетворення виразів із застосуванням винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня, звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу [20].
8	**16**	**Тема 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ**. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.	**наводить приклади:** квадратних тричленів; **формулює:** означення квадратного тричлена; **записує:** формулу розкладання квадратного тричлена на множники; **розв'язує вправи, що**

			передбачають: розкладання квадратного тричлена на лінійні множники [20].

Додаток Б

Таблиця Б.1

Означення понять «тотожність», «тотожні перетворення» у підручниках з алгебри для 7 класу

Автори підручника	Означення
Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. [16, с.28-29]	Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, що входять до них, називають ***тотожно рівними***. Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають ***тотожністю***. Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називається тотожним перетворенням виразу.
Бевз Г.П., Бевз В.Г. [1, с.14]	Два вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають ***тотожно рівними***, або ***тотожними***. Два тотожно рівні вирази, сполучені знаком рівності, утворюють тотожність. Заміну даного виразу іншим, тотожним йому, називається ***тотожним перетворенням виразу***.
Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М. [13, с.13-14]	Два вирази називають ***тотожно рівними***, якщо для будь-яких значеннях змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному. Рівність, яка є правильною для всіх значень змінних, називають ***тотожністю***. Заміну одного виразу тотожно рівним йому, називається тотожним перетворенням виразу.
Істер О.С. [10, с.11-12]	Два вирази, відповідні значення яких рівні між собою при будь-яких значеннях змінних, називають ***тотожними***, або ***тотожно рівними***. Рівність, яка є правильною при будь-яких

	значеннях змінних, називають ***тотожністю***. Заміна одного виразу іншим, йому тотожним, називають ***тотожним перетворенням виразу***.
Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О.	Два вирази зі змінними називають ***тотожно рівними***, якщо вони набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їх змінних [28, с.23]. Заміну виразу тотожно рівним йому виразом називається тотожним перетворенням виразу [28, с.24]. Рівність, ліва і права частини якої є тотожно рівними виразами, називається ***тотожністю*** [28, с.33].
Мальований Ю. І., Литвиненко Г. М., Бойко Г. М. [14, с.17]	Вирази називають ***тотожно рівними***, якщо всі їхні відповідні значення дорівнюють одне одному. ***Тотожність*** – це рівність, правильна за всіх значень змінних, що входять до неї. Заміну виразу тотожно рівним йому називають тотожним перетворенням виразу.

Додаток В

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

67. На сторонах квадрата записано чотири натуральних числа. У кожній вершині квадрата записано число, яке дорівнює добутку чисел, записаних на сторонах, для яких ця вершина є спільною. Сума чисел, записаних у вершинах, дорівнює 55. Знайдіть суму чисел, записаних на сторонах квадрата.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

175. Василь і Петро по черзі заміняють у рівнянні $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак * на деяке число. Першим заміну робить Василь. Петро хоче отримати рівняння, яке має корінь. Чи може Василь йому завадити?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

204. На дошці написано многочлени $x + 2$ і $2x + 1$. Дозволяється записати суму, різницю або добуток будь-яких двох з уже написаних многочленів. Чи може на дошці з'явитися многочлен $2x^3 + x + 5$?

Рис. В.1. Нестандартні завдання на виконання тотожних перетворень виразів

Додаток Г

Завдання для самостійної роботи для учнів 7 класу з теми «Тотожні перетворення одночленів»

Таблиця Г.1

Завдання для 7 класу (I рівень складності)

I варіант	II варіант
I рівень складності	
1. Обчислити: 4^3, $\left(\frac{1}{9}\right)^2$, $(-5)^2\cdot(-5)^3$. 2. Виконати дії: $a^7\cdot a^2$, $a^{22}:a^2$, $\left(a^3\right)^4\cdot a^3$. 3. Знайти значення виразу: 6^2+2^2, $(6+2)^2$, 6^6+2^8, $24^4\cdot 4^4$. 4. Спростити вираз: $\frac{\left(a^8\right)^3\cdot a^5}{a^9}$. 5. Обчислити значення виразу: $\frac{2\left(a^2\right)^3\cdot a^9}{a^7}$, якщо $a=2$.	1. Обчислити: 3^3, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $(-4)^2\cdot(-4)^3$. 2. Виконати дії: $b^{10}\cdot b^4$, $a^{30}:a^{12}$, $\left(a^5\right)^2:a^3$. 3. Знайти значення виразу: 7^2+7^2, $(7+3)^2$, 5^6+2^8, $16^4\cdot 2^4$. 4. Спростити вираз: $\frac{\left(b^7\right)^5\cdot b^3}{b^8}$. 5. Обчислити значення виразу: $\frac{2\left(a^3\right)^2\cdot a^7}{a^6}$, якщо $a=2$.

Таблиця Г.2

Завдання для 7 класу (II рівень складності)

I варіант	II варіант
II рівень складності	
1. Обчислити:	1. Обчислити:

а) $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$;	а) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2$;
б) $\left(8\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{41}\right)^7$.	б) $\left(4\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{14}\right)^4$.
2. Розв’язати рівняння:	2. Розв’язати рівняння:
а) $5^8 \cdot x = 5^{11}$;	а) $7^5 \cdot x = 7^7$;
б) $x : 4^2 = 4$;	б) $x : 3^2 = 3^3$;
в) $\left(13^2\right)^x = 13^{20}$.	в) $\left(11^2\right)^x = 13^{16}$.
3. Подати у вигляді степеня з основною 5:	3. Подати у вигляді степеня з основною 2:
а) 125;	а) 32;
б) $5^7 \cdot 25$;	б) $2^9 \cdot 32$;
в) $25^2 \cdot 5^{11}$.	в) $8^3 \cdot 2^{11}$.
4. Знайти значення виразу: $\frac{2^7 \cdot 16}{4^5}$.	4. Знайти значення виразу: $\frac{2^5 \cdot 32}{4^3}$.
5. Обчислити значення виразу: $\left(-4x^2\right)^2 \cdot \left(4x^3\right)^2$, якщо $x = -\frac{1}{2}$.	5. Обчислити значення виразу: $\left(-3x^2\right)^2 \cdot \left(3x^3\right)^2$, якщо $x = -\frac{1}{3}$.

Таблиця Г.3.

Завдання для 7 класу (ІІІ рівень складності)

І варіант	ІІ варіант
ІІІ рівень складності	
1. Знайдіть значення виразу $2m^2 - \frac{1}{3}n$, якщо: $m = -\frac{1}{2},\ n = 2,7$.	1. Знайдіть значення виразу $2m^2 - \frac{1}{3}n$, якщо: $m = \frac{1}{2},\ n = 2,4$.
2. Спростити вираз:	2. Спростити вираз:

$\left(3a^2\cdot 4c\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}a^3\cdot 5b^5\right)^2$.	$\left(-4x^3\cdot\frac{1}{4}a^6\right)^3\cdot\left(5a^2\cdot 3x^4\right)^2$.
3. Обчислити значення виразу: $\left(11^7\cdot 11^5\right)^3:\left(11^7\cdot 11^6\right):\left(11^2\right)^{11}$	3. Обчислити значення виразу: $\left(25^4\cdot 25^9\right)^3:25^{11}:\left(25^9\cdot 25^5\right)$
4. Подати одночлен у вигляді квадрату: $-64x^{48}y^{36}$	4. Подати одночлен у вигляді квадрату: $-81x^{24}y^{36}$
5. Знайти значення виразу: $\left(-4xy^2\right)^{2n}\cdot\left(4x^3y^2\right)^{2n}$, якщо $x=-\frac{1}{4}$, $y=2$, $n=80$.	5. Знайти значення виразу: $\left(5^m\cdot a^{m+1}b^{m+2}\right)^2\cdot(5ab)^m$, якщо $a=0,1$, $b=2$, $m=51$.

Додаток Д

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Железагло Алла Володимирівна, учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

28.04.2020р		Алла Железагло
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)