МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

РОЗРОБКА МЕТОДИЧНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО МОДУЛЯ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА» ДЛЯ МАЙБУТНІХ ПРОГРАМІСТІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка

Спеціальності 014 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти Середня освіта (математика)

Редько Олеся Володимирівна

Керівник кандидат педагогічних наук,

старший викладач Григор'єва В.Б.

Рецензент кандидат фізико-математичних наук,

доцент Валько Н.В.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Аналіз світового методичного досвіду самостійної діяльності студентів засвідчив, що самостійна робота майбутніх програмістів з позицій компетентнісного підходу є засобом індивідуалізації процесу їх професійної підготовки як основи самоосвітньої діяльності та професійної мобільності. Тому організацію самостійної діяльності кожного студента варто спрямовувати на формування вмінь самостійного опанування значимої для нього інформації, використання математичних методів, моделей та алгоритмів для вирішення практичних завдань з обов'язковим досягненням результату, творчого підходу до вирішення професійних задач. Однак передумовою реалізації зазначених завдань має бути висока мотивація навчання. Відомо, що усвідомлення значущості дисципліни у майбутній професійній діяльності фахівця сприяє мотивації її вивчення. Окрім того, велика кількість професійних задач програміста пов'язана з курсом аналітичної геометрії, наприклад в основи комп'ютерної графіки та задачі, пов'язані з геометричним моделюванням, закладені елементи аналітичної геометрії. Зміст таких задач в навчально-методичних матеріалах до вивчення дисципліни "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" не виокремлюється. Однак практичний курс дисципліни має бути орієнтований на її застосування в ІТ-сфері, яка використовується у широкому колі професій, сприяти формуванню аналітичного мислення, що позитивно впливає на самоорганізацію особистості студента, здатного планувати власну самостійну навчальну діяльність, раціонально розподіляти час, надавати пріоритетність поставленим завданням з метою їх виконання і є необхідною вимогою до конкурентоспроможного фахівця.

Мета роботи – розробка методичного забезпечення з навчального модуля «Лінійна алгебра», який є складовою частиною курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», що викладається студентам комп'ютерних спеціальностей 1-го курсу.

Об'єктом дослідження є процес підготовки майбутніх програмістів, а *предметом* – безпосередньо організація вивчення навчального модуля «Лінійна алгебра».

Завдання роботи:

1) аналіз навчально-методичної літератури з «Лінійної алгебри» та складання на основі його списків літературних джерел, що є корисними при вивченні тем дисципліни;

2) розробка планів-конспектів лекційних та практичних занять з курсу;

3) розробка методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять та самостійної роботи вдома, зокрема, розробка систем завдань для самостійного розв'язування, що стосуються основних тем навчального модуля;

4) розробка опорних блок-схем, які наочно та стисло розкривають зміст основних теоретичних питань навчального модуля «Лінійна алгебра».

Для розв'язування поставлених завдань застосовувалися такі *методи* науково-педагогічного дослідження: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження; вивчення педагогічного досвіду викладачів.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ З НАВЧАЛЬНОГО МОДУЛЯ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

1.1. Огляд літератури та аналіз сучасного стану проблеми

XXI століття – століття бурхливого проникнення математичних методів в різні сфери діяльності людини. Математичні методи широко використовуються для розв'язання практичних задач в різних галузях науки, техніки, економіки, тощо. Праця все далі стає висококваліфікованою, розумовою, вимагає безперервної мисленнєвої діяльності, аналізу складних процесів, правильних логічних висновків.

Нові соціально-економічні умови, процеси інтеграції та диференціації науки, техніки та виробництва висувають нове соціальне замовлення на підготовку висококваліфікованих фахівців. Нині наше суспільство потребує спеціалістів з чітким логічним мисленням, глибокими математичними знаннями та вміннями бачити й реалізовувати можливості застосування математики в різних конкретних ситуаціях. Тому математика і вища математична освіта в сучасних умовах відіграють базову роль у підготовці майбутніх фахівців у галузі математики, техніки, комп'ютерних та інформаційних технологій (ІТ), виробництва, економіки, управління.

Поняття математичної підготовки, її зміст та структура, проблема професійно-орієнтованої математичної підготовки фахівців різного профілю розглядались в багатьох роботах. Зокрема, це роботи таких вітчизняних та зарубіжних педагогів-науковців, як Г.Бокарева, Р.Блохіна, Г.Дутка, Ю.Колягін, О.Красножон, Г.Луканін, С.Мухіна, Т.Тарасова.

Математична підготовка студентів, зокрема студентів-програмістів, має на меті:

– оволодіння студентами системою математичних знань, умінь і навичок, необхідних у майбутній професійній діяльності та повсякденному житті, достатніх для оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти;

– формування в студентів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи математики, її роль у пізнанні дійсності;

– інтелектуальний розвиток студентів, насамперед розвиток логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культур, пам’яті, уваги, інтуїції.

Однією з дисциплін математичного циклу, що викладається майбутнім програмістам, є «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». За навчальним планом студентів комп’ютерних спеціальностей вивчення курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» передбачено протягом першого курсу. Загальний обсяг дисципліни об’єднує усі види навчальної діяльності студента: аудиторні заняття (лекційні, семінарські, практичні), самостійну роботу студентів, контрольні заходи (самостійні роботи, контрольні роботи, тестові завдання, залік або екзамен). Самостійна робота студентів має дві складові: самостійна підготовка до аудиторних занять і підготовка до модульного контролю або екзамену.

Що стосується сучасного стану проблеми методичного забезпечення курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для майбутніх програмістів, то можна зазначити, що комплекси з даної дисципліни, ймовірно, розроблені на відповідних кафедрах закладів вищої освіти, проте, як відомо, доступ до зазначених комплексів мають, як правило, або викладачі випускаючих кафедр, або студенти відповідних вишів.

1.2. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з навчального модуля «Лінійна алгебра»

До теми «Матриці та визначники»

Матрицею $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *розміру* $m\times n$ називається таблиця, що складається з m рядків та n стовпців.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця розмірності n×n називається *квадратною матрицею n-го порядку*. Елементи a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} в цьому випадку утворюють *головну діагональ* матриці.

Визначник, який складений з елементів квадратної матриці, називається *визначником* (детермінантом) *матриці* і позначається так:

$$\det A,\ d_A,\ |A|,\ \Delta_A.$$

Квадратна матриця, в якій на головній діагоналі стоять одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю, називається *одиничною* і позначається *E*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то таку матрицю називають *нульовою* і позначають O.

Дві матриці A = $(a_{ij})_{m\times n}$ і B = $(b_{ij})_{m\times n}$ називаються рівними, якщо вони однакового розміру та рівні їх елементи, що стоять на однакових місцях.

Добутком числа λ на матрицю *A* за означенням є матриця

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, щоб помножити матрицю *A* на число λ, потрібно кожний елемент матриці помножити на це число.

Сумою матриць A та B однакового розміру $m \times n$ називається матриця C розміру $m \times n$, елементи якої знаходяться так:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ для всіх i та j.}$$

Отже, додавання матриць зводиться до додавання відповідних елементів цих матриць.

Віднімання матриць визначається через дії, які вже розглядалися:

$$A - B = A + (-1)B,$$

Тобто віднімання двох матриць зводиться до віднімання їх відповідних елементів. Очевидно, що віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *та* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times k}$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B, тобто

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj} (\mathrm{i} = \overline{1,m};\ \mathrm{j} = \overline{1,k}).$$

Для добутку матриць в загальному випадку справедливе співвідношення:

$$AB \neq BA.$$

(якщо ж, звичайно, існує кожен із добутків).

Операції додавання матриць мають властивості:

1. A + B = B + A;
2. (A + B) + C = A + (B + C);
3. A + O = O + A = A;
4. Якщо A + B = O, тоді B – протилежна до A матриця.

Операції множення матриць мають такі властивості:

1. AB ≠ BA;
2. (AB)C = A(BC);
3. AE = EA = A;
4. (A + B)C = AC + BC;
5. C(A + B) = CA + CB.

Квадратна матриця A^2 – це результат множення цієї матриці самої на себе. Аналогічно вводиться поняття n-го степеня матриці A, тобто

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ разів}}.$$

Якщо в матриці A = $(a_{ij})_{m\times n}$ поміняти місцями рядки і стовпчики, то дістанемо матрицю $A^T = (a_{ij})_{m\times n}$, яку називають *транспонованою до матриці A*.

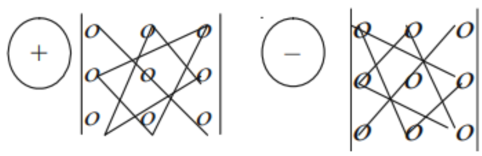
Число Δ називається *визначником (детермінантом) другого порядку* і позначається так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – елементи визначника, причому перша цифра індексу у записі числа вказує на номер рядка, в якому стоїть цей елемент, а друга цифра індексу – на номер стовпчика.

Діагональ, на якій розміщені елементи a_{11} і a_{22}, називається *головною діагоналлю*, а діагональ, на якій знаходиться $a_{12} i a_{21}$, називається *побічною*. Отже, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей.

Аналогічно, *визначником третього порядку* називається число, що утворюється з дев'яти чисел за таким правилом:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ця сума складається з шести доданків. В кожний доданок входить по одному числу з кожного рядка і в той ж час по одному елементу кожного стовпчика. Знаки доданків легко запам'ятати користуючись наведеними вище схемами.

Основні властивості визначників порядку:

1. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки замінити стовпчиками, причому кожен рядок замінюють стовпчиком з тим же самим номером.

2. Якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки (або два стовпчики), то визначник змінює знак на протилежний, зберігаючи абсолютне значення.

3. Якщо визначник має два однакових стовпчики або два однакових рядки, то він дорівнює нулю.

4. Якщо визначник містить два пропорційних рядки (стовпчики), то значення його дорівнює нулю. Якщо елементи деякого рядка (стовпчика) дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) помножити на одне й те ж число, то значення визначника також помножиться на це число. Звідси зрозуміло, що спільний множник всіх елементів рядка (стовпчика) можна винести за знак визначника.

6. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпчика) є сумою двох доданків, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників: в першому з них на місці кожної суми лишається тільки перший доданок, а в другому – тільки другий доданок (інші елементи визначника зберігаються).

7. Значення визначника не змінюється, якщо до елементів деякого рядка стовпчика) додати відповідні елемент іншого паралельного рядка (стовпчика), помноживши їх попередньо на одне й те ж число.

Якщо у визначнику Δ викреслити i-тий рядок і j-тий стовпчик, на перетині яких розміщено елемент a_{ij}, то одержимо визначник другого порядку, який називається *мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} *елемента* a_{ij} *визначника* Δ називається відповідний йому мінор зі знаком, який обчислюється за таким правилом:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпчика) на відповідні їх алгебраїчні доповнення. Якщо за цим правилом розкрити визначник Δ по першому рядку, то одержимо:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - ¿\, a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

До теми «Дії над матрицями»

Матриця A^{-1} називається *оберненою до матриці А*, якщо

$$\mathrm{A}A^{-1} = A^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}.$$

Звідси випливає, що обернену матрицю можуть мати лише квадратні матриці. Обернену матрицю можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = ¿ \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Тобто, обернена матриця складається з алгебраїчних доповнень до елементів рядків, які записуються в стовпчики з відповідними номерами, а потім кожне алгебраїчне доповнення ділиться на визначник матриці.

Обернену матрицю можна використати при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом: матрицю-стовпчик X знаходять як добуток матриці A^{-1}, оберненої до матриці системи, і матриці-стовпчика вільних членів B, тобто $\mathrm{X} = A^{-1}B$.

До теми «Системи лінійних рівнянь»

Нехай задана система n лінійних рівнянь з n невідомими x_1, x_2, …, x_n, коефіцієнтами при яких є елементи матриці A, а вільними членами є числа b_1, b_2, …, b_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}. \qquad (3.1)$$

Якщо визначник системи (3.1), тобто визначник, що складається з коефіцієнтів при невідомих

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (3.2)$$

то система (3.1) має єдиний розв’язок, цей розв’язок можна знайти різними способами. Розглянемо три з них.

Метод Крамера

Позначимо через Δ_1 визначник, що утворюється з (3.2) після заміни його першого стовпчика стовпчиком вільних членів системи (3.1). Аналогічно позначимо через Δ_2 визначник, що утворюється з (3.2) після заміни другого стовпчика стовпчиком вільних членів системи (3.1), …, Δ_n – замінено останній стовпчик стовпчиком вільних членів.

Тоді розв’язок системи (3.1) записується у вигляді:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (3.3)$$

Формули (3.3) називаються *формулами Крамера*. Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з Δ_1, Δ_2, …, Δ_n відмінний від нуля, то система (3.1) розв’язків не має. Якщо ж $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots \Delta_n = 0$, то система (3.1) має безліч розв’язків.

Матричний спосіб

Якщо позначити

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

матриці-стовпці невідомих та вільних членів, то систему (3.1) можна записати в матричній формі так:

$$AX = B. \qquad (3.4)$$

Використовуючи властивості оберненої матриці, маємо:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow EX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B. \qquad (3.5)$$

З формули (3.5) випливає твердження: щоб знайти розв'язок системи (3.1), потрібно знайти обернену матрицю A^{-1} (це можливо, бо $\Delta \neq 0$), а потім помножити на матрицю В. Результат цієї дії і дає розв'язок системи (3.1), записаної у вигляді (3.5).

Метод Гауса

Цей метод базується на послідовному виключенні невідомих і зведенні системи рівнянь до трикутного або трапецієвидного виду. Розглянемо цей метод більш докладно. Припустимо, що в системі (3.1) $a_{11} \neq 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то змінюємо порядок рівнянь, вибравши першим таке рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 не дорівнює нулю).

Перший крок: поділимо обидві частини першого рівняння системи на a_{11}; помноживши одержане рівняння спочатку на a_{21}, а потім на a_{31} і так далі, віднімемо відповідно перше рівняння від другого, третього та інших рівнянь системи.

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \dfrac{a_{14}}{a_{11}} x_4 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ 0 + \left(a_{22} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} \right) x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} a_{21} \right) x_n = b_2 - \dfrac{b_1}{a_{11}} a_{21} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + \left(a_{n2} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} a_{n1} \right) x_2 + \ldots + \left(a_{nn} - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} a_{n1} \right) x_n = b_n - \dfrac{b_1}{a_{11}} a_{n1} \end{cases}.$$

Позначимо нові коефіцієнти системи через $\overline{a_{ij}}$, $\overline{b_i}$:

$$\begin{cases} x_1 + \overline{a_{12}} x_2 + \ldots + \overline{a_{1n}} x_n = \overline{b_1} \\ 0 + \overline{a_{22}} x_2 + \ldots + \overline{a_{2n}} x_n = \overline{b_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + \overline{a_{n2}} x_2 + \ldots + \overline{a_{nn}} x_n = \overline{b_n} \end{cases}. \qquad (3.6)$$

Другий крок: з (n – 1) рівняннями системи (3.6), за виключенням першого, робимо таку ж процедуру, тобто друге рівняння системи (3.6) ділимо на $\overline{a_{22}}$ (якщо $\overline{a_{22}} \neq 0$), а потім почленно множимо на $\overline{a_{32}}, \overline{a_{32}}, \ldots, \overline{a_{n2}}$і віднімаємо від третього, четвертого, …, *n*-го рівнянь системи (3.6). Ця система прийме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + \overline{a_{12}} x_2 + \ldots + \overline{a_{1n}} x_n = \overline{b_1} \\ 0 + x_2 + a'_{23} x_3 + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ 0 + 0 + a'_{33} x_3 + a'_{34} x_3 + \ldots + a'_{3n} x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + 0 + a'_{n3} x_3 + a'_{n4} x_3 + \ldots + a'_{nn} x_n = b'_n \end{cases} \qquad (3.7)$$

$\overline{a_{ij}}$, $\overline{b_i}$ – нові коефіцієнти при невідомих.

Проводячи такі ж перетворення, систему (3.7), а отже, і задану систему (3.1), можна звести до такого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + \overline{a_{12}} x_2 + \ldots + \overline{a_{1n}} x_n = \overline{b_1} \\ 0 + x_2 + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + 0 + 0 + \ldots + a'_{nn} x_n = b'_n \end{cases}. \qquad (3.8)$$

Невідомі x_1, x_2, …, x_n знаходимо послідовно, починаючи з останнього рівняння. Спочатку визначаємо x_n. Потім підставляємо це значення в передостаннє рівняння (3.8), знаходимо x_{n-1} і т.д.

До теми « Комплексні числа»

Комплексним числом називається число виду z = x + iy, в якому x, y є R, а і – символ, що задовольняє умову i^2 = – 1. Символ «і» називається *уявною одиницею*. Число *x* називається *дійсною частиною комплексного числа z*, а число y – *уявною частиною комплексного числа*. Для цих чисел прийняті позначення:

$$x = Re\ (x + iy) = Rez; \quad y = Im\ (x + iy) = Imz$$

Множина всіх комплексних чисел позначається буквою С. Поняття «менше» і «більше» для комплексних чисел не визначено. Запис $z_1 \neq z_1$ означає, що число z_1 не дорівнює числу z_2.

Комплексне число $\bar{z}$ = x – iy називається *спряженим* до комплексного числа z = x + iy. Взагалі, два комплексних числа, які відрізняються тільки знаком при уявній частині, називаються *комплексно-спряженими*.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + i y_1$ і $z_2 = x_2 + i y_2$ вважають рівними між собою, якщо відповідно рівні їхні дійсні і уявні частини, тобто $x_1 = x_1$, $y_1 = y_1$.

Комплексне число z = 0 + 0 · i називається *нулем* і позначається 0.

Геометричне зображення комплексного числа. Модуль і аргумент комплексного числа

Комплексне число z = x + iy визначається парою дійсних чисел x, y ш може бути зображене геометрично на площині Oxy точкою M(x, y) або її радіусом-вектором r = $\overline{OM}$, проекції якого на осі Ox і Oy дорівнюють x і y. При цьому координатна площина Oxy називається *комплексною площиною*, вісь абсцис – *дійсною віссю*, вісь ординат – *уявною лінією комплексної площини*.

Відстань від точки z(x, y) до центра координат називається модулем комплексного числа (позначаються $|z|$ або r)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргументом комплексного числа називається кут φ, який утворює радіус-вектор точки z(x, y) з додатним напрямом осі Ox.

Для z ≠ 0 аргумент комплексного числа визначається рівностями:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Модуль комплексного числа визначається однозначно, а аргумент – з точністю до доданка до 2kπ, k ϵ Z. Значення аргументу, яке задовольняє умову –π < φ ≤ π, називається *головним*. Головне значення аргумента комплексного числа позначається argz, а множина всіх значень аргумента – Argz:

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Якщо комплексні числа рівні між собою, то їхні модулі однакові, а аргументи відрізняються на 2kπ, k ϵ Z.

Для комплексного числа z = 0 модуль дорівнює нулю, а аргумент невизначений.

Дії над комплексними числами

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Запис комплексного числа в вигляді z = x + iy називається *алгебраїчною формою комплексного числа.*

Сумою комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число, дійсна і уявна частина якого дорівнюють сумам відповідних частин доданків:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Різницею комплексних чисел називається комплексне число, дійсна і уявна частина якого дорівнюють різницям відповідно дійсних і уявних частин доданків:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + i\,y_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Модуль різниці двох комплексних чисел

$$\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

є відстань між точками z_1 і z_2.

Множення комплексних чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$ і $z_2 = x_2 + i\,y_2$ визначається формулою

$$z_1 z_2 = (x_1 + i\,y_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Зауважимо, що добуток комплексно-спряжених чисел, що не дорівнюють нулю, дорівнює додатному дійсному числу:

$$z\,\acute{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Ділення комплексного числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ на $z_2 = x_2 + i\,y_2 \neq 0$ вводиться як дія, оберена множенню, тобто під часткою z_1/z_2 ($z_2 \neq 0$) розуміють комплексне число z: z_2z = z_1, тобто

$$(x_2 + iy_2)(x + iy) = (x_1 + i\,y_1¿$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Вважаючи в цій формулі $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, і покладаючи $x_1 = x$, $y_1 = y$, отримаємо

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Цією формулою визначається число β^{-1}, *обернене* числу $\beta = x+iy$ ($\beta \neq 0$, тобто $x^2+y^2 \neq 0$).

Піднесення комплексного числа z до степеня n (n ϵ N) розглядають як множення z на себе n разів. Визначимо натуральні степені уявної одиниці і для n:

$$\begin{cases} 1\,для\,n=4k, \\ i\,для\,n=4k+1, \\ -1\,для\,n=4k+2, \\ -i\,для\,n=4k+3, \end{cases} \quad k \in N.$$

Тепер легко знаходити результати піднесення комплексного числа до степеня з натуральним показником. Наприклад,

$$(x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

$$(x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2 - y^3)i.$$

Коренем n-го степеня з комплексного числа називається комплексне число, n-й степень якого дорівнює даному числу:

$$\sqrt[n]{a+ib} = u + i\vartheta \quad \leftrightarrow \quad (u+i\vartheta)^n = a + ib.$$

Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Множення, ділення і піднесення до степеня комплексних чисел значно спрощується, якщо подати їх у тригонометричній формі.

Будь-якому комплексному числу z, заданому в алгебраїчній формі, відповідає точка на комплексній площині, положення якої однозначно визначається її декартовими координатами x, y. Цю саму точку можна однозначно визначити заданням аргумента φ і модуля r комплексного числа z, при цьому

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

З цих формул випливає *тригонометрична форма запису комплексного числа:*

$$z = x + yi = r(cos\varphi + isin\varphi)\ (r \geq 0)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $cos\ \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $sin = \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тоді для $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$маємо:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2) = (r_1 r_2)[\cos(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отже, при множенні комплексних чисел у тригонометричній формі їхні модулі множаться, а аргументи додаються.

Аналогічно для $z \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Отже, при діленні комплексних чисел у тригонометричній формі їхні модулі діляться, а аргументи віднімаються.

Число z^nможна розглядати як множення z на себе n разів:

$$z^n = [r(cos\varphi + isin\varphi)]^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi),$$

$$тобто\ |z^n| = r^n,\ argz^n = n\ argz.$$

Звідси випливає, що для r = 1:

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Ця формула називається *формулою Муавра*.

Корінь $\sqrt[n]{z_0}$ *степеня n (n ϵN) із комплексного числа* z_0 визначається як комплексне число z, n-1 степінь якого дорівнює даному числу z_0, тобто $z^n = z_0$. Запишемо z_0, z у тригонометричній формі: $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, z = r(cos$\varphi$ + isinφ). Тоді

$$z = \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0}(cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + isin\ \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}),\ де\ k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

З формули випливає, що серед значень $\sqrt[n]{z_0}$ різними є тільки n, усі вони одержуються при k = 0, 1, 2, …, n – 1. Виходячи з формули, можна показати, що геометрично точки, які відповідають різним значенням кореня n–го степеня із комплексного числа $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0$¿, розміщуються в вершинах правильного n-кутника з центром в точці O, причому одна з вершин (яка відповідає k = 0) має полярні координати ($\sqrt[n]{r_0}$, φ_0/n).

Показникова форма комплексного числа

Найбільш зручною формою комплексного числа є показникова. Щоб одержати її, скористаємось *формулою Ейлера*, яка встановлює зв'язок між показниковою і тригонометричними функціями:

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi,\ \varphi \in R.$$

(e = 2, 7182818… - ірраціональне число).

Аналогічно можна записати $e^{-i\varphi}$ = cosφ - isinφ, звідки маємо:

$$cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Нехай комплексне число z записане у тригонометричній формі: z = r(cosφ + isinφ). Використовуючи Формулу Ейлера, дістаємо:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Це і є *показникова (експоненціальна) форма комплексного числа*, де r = $|z^n|$, $\varphi = argz + 2\pi k, k \in Z$.

Якщо $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Якщо $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{\varphi_1}}{r_2 e^{\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Якщо n ϵ N, z = r$e^{i\varphi}$, то

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

$$z_k = \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\ e^{i(\varphi + 2\pi k)/n},\ k = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1.$$

До теми «Векторний простір

Нехай $L-¿$ непуста множина елементів довільної природи, які позначатимемо малими буквами латинського алфавіту a, b, c, d, x, y, z та іншими жирним шрифтом, а $P-¿$ деяке поле, елементи якого називатимемо *скалярами* і позначатимемо, як правило малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$ і ін.

Нуль поля P позначатимемо символом 0, а одиницю – символом 1. Позначення елементів множини L і скалярів поля P можуть доповнюватися штрихами, індексами тощо.

Вважатимемо, що на множині L визначено операцію множення на скаляри з поля P, якщо задано відображення $P \times L \to L$, тобто кожній упорядкованій парі (α, x) поставлено у відповідність деякий елемент з множини L. Цей елемент називатимемо *добутком* елемента x на скаляр α і позначатимемо символом αx.

Множина L називається векторним, або лінійним, простором над полем P, якщо на L означено бінарну операцію – додавання і операцію множення на скаляри з поля P, причому виконуються такі умови:

1. L є абелевою групою відносно операції додавання.
2. Операція множення на скаляр асоціативна: $\forall\ \alpha, \beta \in P \forall\ x \in L[(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)]$.
3. $\forall\ x \in L[1 \cdot x = x]$.
4. Операція множення на скаляр дистрибутивна відносно додавання елементів множини: $\forall\ \alpha \in P \forall\ x, y \in L[\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y]$.
5. Операція множення на скаляр дистрибутивна відносно додавання скалярів: $\forall\ \alpha, \beta \in P \forall\ x \in L[(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x]$.

Умови 1-5 означення називають *аксіомами векторного простору*.

Елементи векторного простору L називаються *векторами*.

Лінійний простір над полем дійсних чисел R називають *дійсним лінійним простором*, а над полем комплексних чисел C – *комплексним лінійним простором*.

Найпростіші наслідки з аксіом лінійного простору. Нехай L – довільний лінійний простір. Оскільки простір L є абелевою групою за додаванням, то він має всі властивості абелевої групи. Зокрема, в L є нульовий вектор, який позначатимемо символом θ; для кожного вектора $a \in L$ в L протилежний вектор $-a$; в L здійснена операція віднімання.

З аксіом векторного простору випливає справедливість таких тверджень.

1. $\forall \alpha \in P[\alpha^{()} = \theta]$.
2. $\forall x \in L[0 \cdot x = \theta]$.
3. $\forall \alpha \in P \forall x \in L[\alpha x = \theta \Rightarrow \alpha = \alpha^{()} \vee x = \theta]$.
4. $\forall \alpha \in P \forall x \in L[\alpha(-x) = -\alpha x]$
5. $\forall \alpha \in P \forall x \in L[(-\alpha)x = -\alpha x]$
6. Операція множення векторів на скаляр дистрибутивна відносно віднімання векторів: $\forall \alpha \in P \forall x, y \in L[\alpha(x-y) = \alpha x - \alpha y]$.
7. Операція множення векторів на скаляр дистрибутивна відносно віднімання скалярів: $\forall \alpha, \beta \in P \forall x \in L[(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x]$.

Вектор b векторного простору L називається пропорційним вектору a цього ж простору, якщо існує такий скаляр $\gamma \in P$ що $b = \gamma a$.

Нульовий вектор $\theta \in L$ пропорційний будь-якому вектору $a \in L$, оскільки $\theta = 0 \cdot a$. Якщо нульовий вектор b пропорційний деякому вектору a, тобто $b = \gamma a$, то $\gamma \neq 0$ і, отже, $a = \gamma^{-1} b, a \neq 0$.

Нехай

$$a_1, a_2, \ldots, a_m (5.1)$$

довільно вибрана система векторів простору L. Вважають, що вектор b векторного простору над полем P є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m (m \geq 1)$ (або лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$) цього простору, якщо в полі P існують такі скаляри $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, що $b = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_m a_m$.

Скаляри $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ називаються *коефіцієнтами* цієї лінійної комбінації. Будь-який вектор a_k системи (5.1) є лінійною комбінацією векторів цієї системи:

$$a_k = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_{k-1} + 1 \cdot a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \ldots + 0 \cdot a_m.$$

Нульовий вектор $\theta \in L$ є лінійною комбінацією векторів будь-якої системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$, оскільки

$$\theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_m.$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m (m \geq 1)$ векторного простору L над полем P називається лінійно залежною, якщо в P можна знайти такі скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m,$ з яких хоча б один відмінний від нуля, що справджується рівність

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = \theta . (5.2)$

Система векторів називається *лінійно незалежною*, якщо рівність (5.2) можлива лише при $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, m)$.

За цим означенням, система векторів, що складається з одного вектора a, лінійно залежна, якщо $a = \theta$, і лінійно незалежна, якщо $a \neq \theta$. Справді, якщо $a = \theta$, то $\gamma a = \theta$, наприклад, при $\gamma = 1$; якщо ж $a \neq \theta$, то з $\gamma a = \theta$ випливає, що $\gamma = 0$.

Векторний простір L називається n-вимірний якщо в ньому є лінійно незалежна система, що містить n векторів, а всяка система, яка складається з більшого, ніж n числа векторів лінійно залежна. Число n в цьому разі називають *розмірністю* простору L.

Отже, розмірність векторного простору – це максимальне число лінійно незалежних векторів цього простору. Розмірність простору L позначають символом $dim L$. n-вимірний векторний простір позначатимемо символом L_n.

Нехай $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ деяка система векторів (скінчена чи нескінчена) простору L. Система векторів S простору L називається системою твірних цього простору, якщо кожен вектор x простору L є лінійною комбінацією кількох векторів системи S.

Будь-яке лінійно незалежна система твірних $a_1, a_2, \ldots, a_m$ простору L називається базисом цього простору. Інакше кажучи, лінійно незалежна система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ із L називається базисом векторного простору $L,$ якщо кожний вектор $x \in L$ є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Теорема 5.1. Система векторів (6.1) лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли принаймні один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших її векторів.

З теореми випливає, що всяка система, яка складається з двох пропорційних векторів, лінійно залежна.

Теорема 5.2. Якщо система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно незалежна, а система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ лінійно залежна, то вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Множину, що складається з будь-яких $k(k \le m)$ векторів системи (6.1) називатимемо *підсистемою* цієї системи.

Теорема 5.3. Якщо деяка підсистема системи векторів (5.1) лінійно залежна, то й система (5.1) лінійно залежна.

Зауважимо що теорема (5.3), очевидно, рівносильна такому твердженню: якщо система векторів (5.1) лінійно незалежна, то і будь-яка її підсистема також лінійно незалежна.

З теореми (5.3) безпосередньо випливає, що всяка система векторів яка містить два рівні або пропорційні вектори лінійно залежна.

Якщо вектор b простору L є лінійною комбінацією векторів системи (1), то кажуть, що вектор b лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ або лінійно виражається через систему (5.1).

Якщо вектор b лінійно виражається через деяку підсистему, наприклад $a_1, a_2, \ldots, a_s (s < m)$ системи векторів (6.1), то він лінійно виражається і через систему (5.1) оскільки із $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_s a_s$ випливає, що $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_s a_s + 0 \cdot a_{s+1} + 0 \cdot a_m$.

Прийнято також говорити, що система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів (5.1), якщо кожен вектор цієї системи лінійно виражається через систему векторів (5.1).

Теорема 5.4. Якщо система векторів $c_1, c_2, \ldots, c_r$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$, а система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то система $c_1, c_2, \ldots, c_r$ лінійно виражається через систему $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Теорема 5.5. Векторний простір n-вимірний тоді і тільки тоді, коли в ньому є базис, що складається з n векторів.

Наслідок. Кожен базис n-вимірного простору L_n складається з n векторів.

Теорема 5.6. В n-вимірному векторному просторі L_n кожна лінійно незалежна система з n векторів є базисом цього простору.

Теорема 5.7. В n-вимірному векторному просторі L_n будь-яку лінійно незалежну систему векторів можна доповнити до базису цього простору.

До теми «Евклідовий простір»

Скалярним добутком на дійсному лінійному просторі L називатимемо будь-яке відображення $L \times L \to R$, *яке* кожній упорядкованій парі $[x, y]$ векторів $\acute{x}, \acute{y} \epsilon L$ставить у відповідність дійсне число, що називається *скалярним добутком* вектора $\acute{x}$ на вектор $\acute{y}$ і позначається символом $(\acute{x}, \acute{y})$, при цьому виконуються такі умови для будь-яких $\acute{x}, \acute{y}, \acute{z} \epsilon L$ і будь-якого $\lambda \epsilon R$:

1. $(\acute{x}, \acute{y}) = (\acute{y}, \acute{x})$;
2. $(\acute{x} + \acute{y}, z) = (\acute{x}, z) + (\acute{y}, z)$;
3. $(\lambda \acute{x}, \acute{y}) = \lambda (\acute{x}, \acute{y})$;
4. $(\acute{x}, \acute{x}) > 0$, якщо $\acute{x} \neq 0$.

Вимоги 1-4 називаються *аксіомами скалярного добутку*. Розглянемо найпростіші наслідки, що випливають з аксіом 1-4. З співвідношення (3) при $\acute{x} = 0$дістаємо рівність

$$(\theta, \acute{y}) = 0 \quad (6.1)$$

тобто скалярний добуток нульового вектора θна будь-який вектор у дорівнює нулю; дорівнює нулю, зокрема, і скалярний квадрат нульового вектора

$$(\theta,\theta)=0 \qquad (6.2)$$

З аксіом 1, 2 випливає, що

$(\acute{x},\acute{y}+z)=(\acute{y}+z,\acute{x})=(\acute{y},\acute{x})+(z,\acute{y})=(\acute{x},\acute{y})+(\acute{x},z)$,

тобто

$$(\acute{x},\acute{y}+z)=(\acute{x},\acute{y})+(\acute{x},z). \qquad (6.3)$$

Застосовуючи аксіоми 1 та 3, отримаємо

$(\acute{x},\lambda\acute{y})=(\lambda\acute{y},\acute{x})=\lambda(\acute{y},\acute{x})=\lambda(\acute{x},\acute{y})$,

тобто

$$\acute{x}=\lambda(\acute{x},\acute{y}). \qquad (6.4)$$

Вектор *e* простору F_n, довжина якого дорівнює 1, називається *нормованим*. Базис $e_1, e_2, \ldots e_n$ евклідового простору F_n називаються *ортонормованим*, якщо він ортогональний, а всі його вектори нормовані. Інакше кажучи, базис $e_1, e_2, \ldots e_n$ називаються ортонормованим, якщо

$$(e_i,e_k)=\begin{cases}0\, при\, i\neq k,\\ 1\, при\, i=k.\end{cases}$$

Вектор *a* простору F_n називають *ортогональним до підпростору V* (записують $a \quad V ¿$, якщо він ортогональний до будь-якого вектора цього підпростору.

Підпростори $V i V'$ простору F називають *ортогональними* і записують $V \quad V'$, якщо кожен вектор $v \epsilon V$ ортогональний кожному вектору $v' \epsilon V'$.

Евклідовим простором називається дійсний векторний простір *L*, на якому задана деяка додатно визначена симетрична білінійна функція *A*. Причому функція *A* вважається скалярним множенням на просторі *L*, і її значення $A(x,y)$ на векторах $\acute{x}$ і $\acute{y}$ — скалярний добуток цих векторів — позначається символом $(\acute{x},y)$.

Кутом між векторами x і $\acute{y}$ (відмінними від θ) евклідового простору *E* називають таке число $\varphi\,(0\leq\varphi\leq\pi)$, що $\cos\varphi=\frac{(\acute{x},\acute{y})}{\|\acute{x}\|\|\acute{y}\|}$.

Теорема 6.1. На будь-якому *n*-вимірному дійсному векторному просторі L_nможна задати скалярний добуток і, отже, перетворити простір L_n в евклідовий простір E_n.

Теорема 6.2. (нерівність Коші – Буняковського). Для будь-яких векторів *x і ý* евклідового простору справджується нерівність

$(\acute{x}\cdot\acute{y})^2 \le \|\acute{x}\|^2\|\acute{y}\|^2$.

Теорема 6.3. а) Базис $e_1, e_2, \dots e_n$ евклідового простору E_n є орнонормованим тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ і $y=\sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ цього простору $(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

б) Базис $e_1, e_2, \dots e_n$ евклідового простору U_n є ортонормований тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ і $y=\sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ цього простору $(x, y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Теорема 6.4. Якщо $e_1, e_2, \dots e_n$ – ортонормований базис евклідового простору F_n, то *i*-та координата x_i, будь-якого вектора $x \epsilon F_n$ в цьому базисі дорівнює скалярному добуткові вектора x на вектор e_i.

Теорема 6.5. Для того щоб вектор *a* був ортогональним до підпростору *V,* достатньо, щоб він був ортогональний кожному вектору деякого базису цього підпростору.

Теорема 6.6. Для того, щоб підпростори $V i V'$ простору F_n були ортогональними, достатньо, щоб кожний вектор деякого базису підпростору *V* був ортогональним кожному вектору деякого базису підпростору V'.

Теорема 6.7. Евклідовий простір F_n є прямою сумою будь-якого лінійного підпростору *V* і його ортогонального доповнення V : $F_n = V \oplus V$.

РОЗДІЛ 2
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З НАВЧАЛЬНОГО МОДУЛЯ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

Практичне заняття № 1
з теми «Матриці та визначники»

Аудиторні завдання:

Задача 1.1. Для матриць

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

знайти матриці A + B, A^T, C^2, AB, BA.

Розв'язання.

$$\mathrm{A+B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 5\\ 7 & -1 & 6\end{pmatrix};$$

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix};$$

$$C^2=CC=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2-1(-1) & 1\cdot2+2\cdot1-1\cdot1 & 1(-1)+2\cdot0-1\cdot3\\ 2\cdot1+1\cdot2+0(-1) & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1 & 2(-1)+1\cdot0+0\cdot3\\ -1\cdot1+1\cdot2+3(-1) & -1\cdot2+1\cdot1+3\cdot1 & -1(-1)+1\cdot0+3\cdot3\end{pmatrix}$$

;

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4\\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12\\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 11 & 7 & 12\\ 11 & 11 & 2\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0\\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4\\ 8-3+16 & 6+0-12 & -3+6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 9 & -4 & 0\\ 24 & -6 & 11\end{pmatrix}.$$

Помічаємо, що $AB \neq BA$.

Задача 1.2. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -7 & 5\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & -11\end{vmatrix}.$$

Задача 1.3. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 1.4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 1.5. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Практичне заняття № 2
з теми «Системи лінійних рівнянь»

Аудиторні завдання:

Задача 2.1. Розв'язати задану систему рівнянь методом Крамера, за допомогою матричного методу та методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-6, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=20, \\ 5x_1-6x_2+4x_3=-12. \end{cases}$$

Розв'язання.

I. *Метод Крамера.* Знаходимо визначник системи Δ, розкладаючи його за елементами першого рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}=2(16-12)+3(12+10)+(-18-20)=8+66-$$

Знаходимо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 20 & 4 & -2 \\ -12 & -6 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -10 & 4 & -2 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 10 & -6 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(-2)(-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=12(12-6)=12\cdot 6=$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 20 & -2 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & -2 \\ 11 & -14 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & -4 & 0 \\ 11 & -14 & 0 \end{vmatrix}=-2\cdot 1\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 11 & -14 \end{vmatrix}=(-$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & 20 \\ 5 & -6 & -12 \end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -10 \\ 5 & -6 & 6 \end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & -10 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(-2)(-6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=12(2\cdot 6-5\cdot 3)=12($$

Тоді:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{72}{36}=2\,;\;x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{108}{36}=3\,;\;x_3=\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{-36}{36}=-1.$$

II. *Матричний спосіб.* Матриця *A* з коефіцієнтів при невідомих для заданої системи рівнянь має вид:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -6 & 4\end{pmatrix}.$$

Шукаємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=4\cdot4-(-6)(-2)=16-12=4.$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=(3\cdot4-5(-2))=-(12+10)=-22.$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3(-6)-5\cdot4=-18-20=-38.$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-((-3)4-(-6)1)=-(-12+6)=6.$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2\cdot4-5\cdot1=3.$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=-(2(-6)-5(-3))=-(-12+15)=-3.$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=(-3)(-2)-4\cdot1=6-4=2.$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(2(-2)-3\cdot1)=-(-4-3)=7.$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot4-3(-3)=8+9=17.$$

Щоб отримати обернену матрицю A^{-1} необхідно алгебраїчні доповнення до елементів рядка записати у відповідний стовпчик, попередньо поділивши їх на визначник матриці A.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{36} & \frac{6}{36} & \frac{2}{36}\\ \frac{-22}{36} & \frac{3}{36} & \frac{7}{36}\\ \frac{-38}{36} & \frac{-3}{36} & \frac{17}{36}\end{pmatrix}.$$

Стовпчик вільних членів $B=\begin{pmatrix}-6\\20\\-12\end{pmatrix}$.

Розв’язок системи шукаємо так:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{4}{36}&\frac{6}{36}&\frac{2}{36}\\\frac{-22}{36}&\frac{3}{36}&\frac{7}{36}\\\frac{-38}{36}&\frac{-3}{36}&\frac{17}{36}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\20\\-12\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{4(-6)+6\cdot20+2(-12)}{36}\\\frac{(-22)(-6)+3\cdot20+7(-12)}{36}\\\frac{(-38)(-6)+(-3)20+7(-12)}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12(-2+10-2)}{36}\\\frac{12(11+5-7)}{36}\\\frac{12(19-5-17)}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{3}\\\frac{9}{3}\\\frac{-3}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=2;x_2=3;x_3=-1$.

III. *Метод Гауса.* Поділимо кожний член першого рівняння на a_{11}, тобто на 2, оскільки $a_{11}\neq0$.

$$\begin{cases}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=-3,\\3x_1+4x_2-2x_3=20,\\5x_1-6x_2+4x_3=-12.\end{cases}$$

Віднімемо з другого рядка перший,помножений на – 3, а з третього рядка перший, помножений на – 5:

¿

$$\begin{cases}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=-3,\\0+\frac{17}{2}x_2-\frac{7}{2}x_3=29,\\0+\frac{3}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3=6.\end{cases}$$

Помножимо друге і третє рівняння на 2.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3, \\ 0 + 17x_2 - 7x_3 = 29, \\ 0 + 3x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Поділимо останнє рівняння системи на 3 і поміняємо місцями друге та третє рівняння. Розв’язок системи при цьому не зміниться, але коефіцієнт при x_2 у другому рівнянні буде дорівнювати одиниці.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3, \\ 0 + x_2 - x_3 = 1, \\ 0 + 17x_2 - 7x_3 = 29. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на – 17 та додамо його до третього:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3, \\ 0 + x_2 - x_3 = 1, \\ 0 + + -24x_3 = 24. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо

$x_3 = -1.$

З другого рівняння

$x_2 = 2 - x_3 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3.$

З першого рівняння

$x_1 = -3 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 + \frac{3}{2}3 - \frac{1}{2}(-1) = -3 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -3 + \frac{10}{2} = -3 + 5 = 2.$

Відповідь: $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = -1.$

Метод Гауса застосовується також і для розв’язання системи лінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь менша кількості невідомих.

Практичне заняття № 3
з теми «Векторний простір»

Аудиторні завдання:

Задача 3.1. Довести, що всі квадратні матриці порядку n з дійсними елементами (або елементами з будь-якого поля P) утворюють векторний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

Розв'язання.

Нехай M – множина всіх квадратних матриць порядку n а дійсними елементами. Покажемо спочатку, що M – абелева група відносно операції додавання.

1. Операція додавання матриць замкнена, тобто для будь-яких матриць $A,B\in M$ $A+B\in M$. Справді, нехай $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, де $a_{ij},b_{ij}\in R$, $i,j=1,2,\dots,n$. Тоді за означенням додавання матриць

$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$.

Оскільки $a_{ij}+b_{ij}\in R$, то $A+B\in M$.

2. Операція додавання матриць асоціативна, тобто для будь-яких матриць $A,B,C\in M$

$(A+B)+C=A+(B+C)$.

Справді, нехай $A=(a_{ij}), B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$, де $a_{ij},b_{ij},c_{ij}\in R$, $i,j=1,2,\dots,n$. Тоді за означенням додавання матриць

$(A+B)+C=((a_{ij})+(b_{ij}))+(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=([a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij})$,

$A+(B+C)=(a_{ij})+((b_{ij})+(c_{ij}))=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}])$.

Оскільки a_{ij},b_{ij},c_{ij} – дійсні числа, то $[a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij}=a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}]$, і тому $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. У множині матриць M є матриця N, яка є нейтральним елементом відносно операції додавання матриць (нульовим елементом), тобто для довільної матриці $A\in M$

$A+N=N+A$.

Очевидно, такою матрицею N є нульова матриця $0=(o_{ij})$

4. У множині матриць M для кожної матриці A існує протилежна матриця $\acute{A}$, тому $A+\acute{A}=\acute{A}+A=0$.

Очевидно, протилежною для даної матриці $A=(a_{ij})$ є матриця $-A=(-a_{ij})$.

5. Операція додавання матриць комутативна. Тоді для будь-яких матриць $A,B\in M$

$A+B=B+A$.

Нехай $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, де $a_{ij}, b_{ij} \in R, i, j=1,2,\ldots,n.$ За означенням додавання матриць

$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$,

$B+A=(b_{ij})+(a_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})$

Оскільки для додавання дійсних чисел справедливий комутативний закон, то $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, тому $(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})$, тобто

$A+B=B+A$.

Покажемо тепер, що для множини M виконується також решта аксіом векторного простору.

6. Операція множення матриць на число асоціативна в тому розумінні, що для будь-якої матриці $A\in M$ і довільних дійсних чисел k, l

$[kl]A=k[lA]$.

Нехай $A=(a_{ij})$, де $a_{ij}\in R$ і $i, j=1,2,\ldots,n$. Тоді за означенням множення матриці на число

$[kl]A=[kl](a_{ij})=([kl]a_{ij})$,

$k[lA]=k[l(a_{ij})]=k(l a_{ij})$.

Оскільки $k(l a_{ij})=k[l(a_{ij})]$, а k, l, a_{ij} – дійсні числа, то $[kl]a_{ij}=k[l a_{ij}]$, тому

$[kl]A=k[lA]$.

7. Для будь-якої матриці $A\in M$ і дійсного числа 1 маємо

$1\cdot A=A$.

Це випливає з означення множення матриці на число.

8. Операція множення матриці на число дистрибутивна відносно додавання матриць, тобто

$\forall\ \forall\ [\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B]$.

Справді якщо $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, де $a_{ij}, a_{ij}\in R, i, j=1,2,\ldots,n,$ то за означенням множення матриці на число

$\alpha(A+B)=\alpha[(a_{ij})+(b_{ij})]=\alpha(a_{ij}+b_{ij})=(\alpha[a_{ij}+b_{ij}])$,

$\alpha A+\alpha B=\alpha(a_{ij})+\alpha(b_{ij})=(\alpha a_{ij})+(\alpha b_{ij})=(\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij})$.

Оскільки α, a_{ij}, b_{ij} – дійсні числа, то $\alpha[a_{ij}+b_{ij}]=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}$, тому

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

9. Операція множення матриці на число дистрибутивна відносно додавання чисел, тобто
$\forall\ \forall\ \left[(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\right]$.

Справді, якщо $A=(a_{ij})$, де $a_{ij}\in R, i, j=1,2,\ldots,n,$ то за означенням множення матриці на число
$[\alpha+\beta]A=[\alpha+\beta](a_{ij})=([\alpha+\beta]a_{ij})$,
$\alpha A+\beta A=\alpha\,(a_{ij})+\beta\,(a_{ij})=(\alpha\, a_{ij})+(\beta a_{ij})=(\alpha\, a_{ij}+\beta a_{ij})$.

Оскільки α,β,a_{ij} – дійсні числа, то $[\alpha+\beta]a_{ij}=\alpha\, a_{ij}+\beta a_{ij}$, тому $[\alpha+\beta]A=\alpha A+\beta A$

Усі аксіоми аксіоми векторного простору виконуються. Отже M – векторний простір над полем дійсних чисел R. Якщо в наших міркуваннях замість поля R взяти довільно вибране поле P то все залишиться без змін.

Задача 3.2. Довести, що всі симетричні матриці порядку n з дійсними елементами (або елементами з будь-якого поля P) утворюють векторний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

Практичне заняття № 4
з теми «Координати вектора в базисі»

Аудиторні завдання:

Задача 4.1. Довести, що кожна з двох заданих систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між базисами (матриці переходу від одного базису до іншого):
$B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3), де\, \vec{e}_1=(1,0,1), \vec{e}_2=(0,-1,0), \vec{e}_3=(0,0,-1)$
$B(\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3), де\, \vec{e}\,'_1=(0,-1,1), \vec{e}\,'_2=(-1,0,1), \vec{e}\,'_3=(0,1,0)$

Розв'язання.

Оскільки розглядуваний простір має розмірність 3 (це ми визначили з кількості координат у заданих векторах), то досить довести, що системи векторів B і B' лінійно незалежні. Для цього слід впевнитися, що матриці складені з координат векторів систем B і B', мають ранг 3.

Виконаємо це, користуючись елементарними перетвореннями матриць, від яких ранг не змінюються. Для системи B маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тут легко побачити, що ранг цієї матриці дорівнює 3.

Для системи B' маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} III_{p.} + I \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} I_{p.} \cdot (-1) + II \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що ранг останньої матриці дорівнює 3. Отже, B і B', – базиси. Знайдемо зв'язок між ними. Кожен вектор $\vec{e}'_i (i=1,2,3)$, як і будь-який вектор простору, однозначно лінійно виражається через вектори базису B. Нехай

$$\vec{e}'_1 = \tau_{11}\vec{e}_1 + \tau_{12}\vec{e}_2 + \tau_{13}\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}'_2 = \tau_{21}\vec{e}_1 + \tau_{22}\vec{e}_2 + \tau_{23}\vec{e}_3, (4.1)$$
$$\vec{e}'_3 = \tau_{31}\vec{e}_1 + \tau_{32}\vec{e}_2 + \tau_{33}\vec{e}_3,$$

Матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

рядками якої є координатні рядки векторів базису B' в базисі B, і є матрицею переходу переходу від базису B до базису B'. Знайдемо її. Для цього в рівностях (4.1) замість і підставимо їх значення, а потім використаємо умову рівності векторів

$$(0,-1,1) = (\tau_{11}, -\tau_{12}, \tau_{11} - \tau_{13})$$

$$(-1,0,1) = (\tau_{21}, -\tau_{22}, \tau_{21} - \tau_{23})$$

$$(0,1,0) = (\tau_{31}, -\tau_{32}, \tau_{31} - \tau_{33})$$

Звідси

$$\left.\begin{matrix} \tau_{11} = 0, \\ -\tau_{11} = -1 \\ \tau_{11} - \tau_{13} = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \tau_{21} = -1 \\ \tau_{22} = 0 \\ \tau_{21} - \tau_{23} = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \tau_{31} = 0 \\ -\tau_{32} = 1 \\ \tau_{31} - \tau_{33} = 0 \end{matrix}\right\}$$

Розв'язуючи ці системи лінійних рівнянь, дістанемо:

$\tau_{11}=0,\ \tau_{21}=-1\ \ \tau_{31}=0$

$\tau_{12}=1\ \ \ \tau_{22}=0\ \ \tau_{32}=-1$

$\tau_{13}=-1\,\tau_{23}=-2\ \ \tau_{33}=0$

Отже, матриця має вигляд

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для знаходження матриці $T^{'}$ переходу від базису $B^{'}$ до базису B можна було б скористатися тільки що викладеним прийом. Відомо про те, що $T^{'}=T^{-1}$. Оскільки

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

то

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.2. У базисі $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ вектор $\vec{x}$ має координатний рядок $[2,-1,1]$. Знайти координати вектора $\vec{x}$ у базисі $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, якщо $\vec{e}_1=(-1,0,0),\vec{e}_2=(0,0,1),\vec{e}_3=(0,-1,0),\vec{e}^{'}{}_1=(1,0,1),\vec{e}^{'}{}_2=(0,-1,1),\vec{e}^{'}{}_3=(0,1,0)$.

Практичне заняття № 5

з теми «Евклідовий простір»

Аудиторні завдання:

Задача 5.1. Чи стане арифметичне простір R^2 евклідовим, якщо скалярний добуток ввести за формулою $x\cdot\acute{y}=|\acute{x}_1||\acute{y}_1|+|\acute{x}_2||\acute{y}_2|$, де $\acute{x}=(\acute{x}_1,\acute{x});\acute{y}=(\acute{y}_1,\acute{y}_2)$.

Розв'язання.

Ні, тому що не виконується дистрибутивний закон скалярного множення щодо додавання векторів. Наприклад: $\acute{x}=(1,1),\acute{y}=(-2,-2);$

$$p=(3;3),(\acute{x}+\acute{y})\,p=|1-2|3+|1-2|3=6,\acute{x}\cdot p=1\cdot3+1\cdot3=6,$$

$\acute{y}\cdot p=|-2|3+|-2|3=12$, тобто $\acute{x}\cdot p+\acute{y}\cdot p=18\neq(x+\acute{y})\cdot p=¿6$.

Задача 5.2. Нехай $\acute{x}=2e_1+3e_2-3e_3$ і $\acute{y}=e_5-2e_3$, базис e ортонормований. Обчислити $\acute{x}\cdot\acute{y}$ і довжини векторів $|\acute{x}|$ і $|\acute{y}|$.

Задача 5.3. Знайти нормований вектор, ортогональний векторам

$\acute{a}_1 = (1,1,1), \acute{a}_2 = (1,-1,-1), \acute{a}_3 = (2,1,1),$

з арифметичного тривимірного простору.

Задача 5.4. Знайти ортонормований базис лінійної оболонки векторів:

$\acute{a}_1 = (2,1,3), \acute{a}_2 = (7,4,3,-3), \acute{a}_3 = (1,1,-6.0), \acute{a}_4 = (5,7,7,8).$

Практичне заняття № 6

з теми «Ортогональне доповнення простору»

Аудиторні завдання:

Задача 6.1. Знайти базис ортогонального доповнення до лінійної оболонки системи векторів $\acute{a}_1 = (-2,1,0,0)$, $\acute{a}_2 = (-1,0,-1,1)$, $\acute{a}_3 = (-3,1,-1,1)$.

Розв'язання.

Нехай $A = \langle \acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3 \rangle$ і A є ортогональне доповнення до підпростору A . Тоді для будь-якого $x \epsilon A$ і будь-якого $a \epsilon A$ вірно $\acute{a} \cdot x = 0$. Зокрема,

$$\left.\begin{array}{l} \acute{a}_1 \cdot x = 0; \\ \acute{a}_2 \cdot x = 0; \\ \acute{a}_3 \cdot x = 0. \end{array}\right\}$$

Покладемо $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ і розпишемо докладніше останні систему рівностей:

$$\left.\begin{array}{c} -2x_1 + x_2 = 0; \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0; \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{array}\right\}$$

Ортогональним доповненням A є простір розв'язків цієї системи лінійних однорідних рівнянь, тобто буде натягнуто на фундаментальний набір розв'язків як на базис. Обчислимо фундаментальний набір розв'язків:

$$\begin{pmatrix} -2100 \\ -10-11 \\ -31-11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2100 \\ -10-11 \\ -10-11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2100 \\ -10-11 \\ 0000 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок наступний $x = (x_1, 2x_1, -x_1 + x_4, x_4)$. Фундаментальний набір складається з двох розв'язків:

$$b_1=(1,2,-1,0), \quad b_2=(0,0,1,1). \quad A=\langle b_1,b_2\rangle.$$

Задача 6.2. Знайти базис ортогонального доповнення до підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$\left.\begin{array}{c} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=0; \\ x_1+x_2-x_3+x_4=0; \\ x_1+2x_2+x_4=0. \end{array}\right\} \quad (6.1)$$

Задача 6.3. Уявімо вектор $\acute{b}=(4,-1,-34)$ у вигляді суми векторів, які є елементами підпростору A і його ортогонального доповнення, якщо A є лінійна оболонка векторів $\acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3$ (знайти проекції вектора на ортогональне доповнення підпростору):

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було здійснено аналіз навчально-методичної літератури з «Лінійної алгебри» та складено на основі його списків літературних джерел (основної, додаткової та інтернет-ресурсів), які можуть бути корисними при вивченні тем дисциплін.

Також під час виконання роботи було розроблено плани-конспекти лекційних та практичних занять з курсу, які містять стислі теоретичні відомості з навчального матеріалу, а також приклади розв'язування завдань з тем курсу, що можуть бути запропоновані під час проведення практичних занять або для забезпечення дистанційного навчання студентів. Окрім наведених прикладів для організації аудиторної роботи студентів, розроблено системи вправ з відповідних тем курсу для організації самостійної роботи студентів в аудиторії та в позааудиторний час.

В роботі наведено розробку методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять з лінійної алгебри, а також розробку опорних блок-схем, які містять теоретичний матеріал з питань, що відносяться до навчального модуля «Лінійна алгебра», та є зручними для підготовки студентів до складання заліку або для організації самостійної роботи по відпрацюванню навичок розв'язування задач.

Структурні компоненти роботи повністю відповідають структурним компонентам навчально-методичного комплексу дисципліни, нормативні вимоги до якого визначені для навчально-методичних комплексів з дисциплін кафедр Херсонського державного університету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна

1. Знаенко, Н. С. Опорные схемы по высшей математике: учеб. Пособие / Н. С. Знаенко. – Ульяновск: УВАГ ГА(И), 2011. – 90 с.

2. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

3. Пастушенко С. М., Підченко Ю. П. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв’язування задач: Навчальний посібник для студентів вищих закладів освіти. – К.: Діал, 2002. – 160 с.

Додаткова

1. Баврин, И. И. Высшая математика: учеб. для студ. естественно-научных спеціальностей педагогических вузов / И. И. Баврин. – М.: Академия, 2004, - 616 с.

2. Вища математика: Навчальний посібник: у 2-х ч. / К.Г.Валєєв, І.А.Джаладова: – К.: КНЕУ, 2001, 2003.

3. Вища математика для економістів. / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, Н.М.Тришин, М.Н.Фридман. – Н.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.

4. Высшая математика. Общий курс. / А.В.Кузнецов, Л.Ф.Янчук, С.А.Мызгаева и др. – Минск: Высшая школа, 1993.

5. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. / А.Д.Тевяшев, О.Г.Литвин. – Х.: Рубікон, 1999.

6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I . – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 304 с., ил.

7. Вища математика. / В.П.Дубовик, І.І.Юрик, — К.: Вища школа, 1993.

8. Сборник задач по курсу высшей математики. / Под редакцией Г.И.Кручковича/, — М.: Высшая школа, 1978.

9. Практические занятия по высшей математике, часть I–V. / И.А.Каплан. — Х.: Издательство Харьковского университета, 1972.

10. Сборник задач по математике для втузов. ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. /под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. – М: Наука, 1986.

Інтернет-ресурси

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/Аналітична_геометрія
2. http://matan.kpi.ua/public/files/Алгебра_геометрия_лекции.pdf
3. https://ru.onlinemschool.com/math/library/analytic_geometry/
4. http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/angem/AGLA.pdf
5. https://nmetau.edu.ua/file/kaplmath_17942.pdf

ДОДАТКИ

Додаток А
Плани практичних занять

Практичне заняття № 1
з теми «Матриці та визначники»

Аудиторні завдання:

Задача 1.1. Для матриць

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

знайти матриці A + B, A^T, C^2, AB, BA.

Розв'язання.

$$\text{A + B} = \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 5\\ 7 & -1 & 6\end{pmatrix};$$

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix};$$

$$C^2=CC=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2-1(-1) & 1\cdot2+2\cdot1-1\cdot1 & 1(-1)+2\cdot0-1\cdot3\\ 2\cdot1+1\cdot2+0(-1) & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1 & 2(-1)+1\cdot0+0\cdot3\\ -1\cdot1+1\cdot2+3(-1) & -1\cdot2+1\cdot1+3\cdot1 & -1(-1)+1\cdot0+3\cdot3\end{pmatrix}$$

;

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4\\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12\\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 11 & 7 & 12\\ 11 & 11 & 2\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0\\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4\\ 8-3+16 & 6+0-12 & -3+6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 9 & -4 & 0\\ 24 & -6 & 11\end{pmatrix}.$$

Помічаємо, що $AB \neq BA$.

Задача 1.2. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -7 & 5\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & -11\end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Зробимо це двома способами:

а) Обчислимо визначник, розкладаючи його за елементами третього рядка :

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2$$

$$(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1((-7)3 - 5(-2)) + 2(-1)(3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11)1 ¿$$

б) В цьому випадку утворимо нулі у другому рядку (бо в ньому є одиниця, або ж вибирається той рядок (чи стовпчик), в якому є пропорційні елементи). Для цього до елементів другого стовпчика додамо елементи першого, попередньо помноживши їх в уяві на 2, потім до елементів третього стовпчика додамо елементи першого стовпчика, помножені перед тим на -3. Значення визначника при цьому, згідно властивості 7, не зміниться.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -7+3\cdot 2 & 5+3(-3) \\ 1 & -2+1\cdot 2 & 3+1(-3) \\ 4 & 2+4\cdot 2 & -11+4(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & -23 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 1\,A_{21} + 0\,A_{22} +$$

Задача 1.3. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Додамо перший рядок до другого і четвертого, утворивши визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями перший і третій стовпчики:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & -1 & 8\end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього і четвертого рядків і винесемо спільний множник елементів третього і четвертого рядків:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 5 & 10\\ 0 & 0 & 3 & 15\end{vmatrix}=-5\cdot 3\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix}.$$

Віднявши третій рядок від четвертого, одержимо:

$$\Delta=-5\cdot 3\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=(-5\cdot 3)\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 3=-90.$$

Задача 1.4. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Перетворимо на нулі всі елементи першого рядка, крім першого елементу, для чого перший і другий стовпчики залишаємо без зміни, замість третього стовпчика запишемо різницю між першим і третім стовпчиком, а замість четвертого – суму четвертого і першого, помноженого на (– 2).

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & -4\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Далі без зміни залишаємо перший і третій стовпчики, замість другого запишемо різницю між третім і другим стовпчиками, а замість четвертого – суму четвертого стовпчика і третього, помноженого на -4.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

І, нарешті, остаточно перетворимо останній стовпчик на нулі. Замість нього запишемо різницю між другим і четвертим стовпчиками.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одержана матриця містить три ненульових елемента, тобто r(A) = 3.

Задача 1.5. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Обчислимо визначник матриці *A* і алгебраїчні доповнення всіх елементів.

$$\Delta = detA \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -68.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-17;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-17;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=17;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-21.$$

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{-1}{68}\begin{pmatrix}-17 & -17 & 17\\ -5 & 7 & -11\\ 9 & 1 & -21\end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} знайдена правильно, тому що:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 3 & -3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{68}\begin{pmatrix}-17 & -17 & 17\\ -5 & 7 & -11\\ 9 & 1 & -21\end{pmatrix}=\text{¿}-\frac{1}{68}\begin{pmatrix}2(-17)+5(-5)-1\cdot 9 & 2(-17)+5\cdot 7-1\cdot 1 & 2\cdot 17\\ 3(-17)-3(-5)+4\cdot 9 & 3(-17)-3\cdot 7+4\cdot 1 & 3\cdot 17\\ 1(-17)+2(-5)+3\cdot 9 & 1(-17)+2\cdot 7+3\cdot 1 & 1\cdot 17\end{pmatrix}$$

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Для матриць

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -6\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 8 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

обчислити $2A^T-3B, AB+E, AB-C$.

2. Для матриць

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 8\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -7\end{pmatrix}$$

обчислити $2B-3C, A(B+C), BC^T-A^2$.

3. Для матриць

$$A=\begin{pmatrix}3&4&5\\-1&1&0\\2&-1&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-3&4\\0&1&2\\1&1&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&-4&6\\4&2&-2\end{pmatrix}$$

обчислити $4A-3B+C$, A^T+B^T, $AB, BA, BC+A^2$.

4. Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох даних матриць:

а) $\begin{pmatrix}1&3\\-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\4&2\end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix}2&1\\3&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&4&-3\end{pmatrix}.$

5. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix}3&4&5\\-1&-2&2\\13&-7&4\end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix}25&8&3\\-3&4&1\\2&-5&-2\end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix}7&8&3\\-3&1&4\\2&6&5\end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix}11&5&6\\1&-2&-3\\7&4&4\end{vmatrix};$

д) $\begin{vmatrix}3&1&-2\\2&10&5\\4&-1&3\end{vmatrix};$

е) $\begin{vmatrix}3&9&1\\7&12&5\\2&-3&-2\end{vmatrix};$

ж) $\begin{vmatrix} 20 & 3 & 7 \\ -5 & -6 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$

6. Знайти ранг матриці:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$

7. Для заданих матриць знайти обернені матриці:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Практичне заняття № 2

з теми «Системи лінійних рівнянь»

Аудиторні завдання:

Задача 2.1. Розв'язати задану систему рівнянь методом Крамера, за допомогою матричного методу та методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-6, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=20, \\ 5x_1-6x_2+4x_3=-12. \end{cases}$$

Розв’язання.

I. *Метод Крамера.* Знаходимо визначник системи Δ, розкладаючи його за елементами першого рядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}=2(16-12)+3(12+10)+(-18-20)=8+66-$$

Знаходимо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 20 & 4 & -2 \\ -12 & -6 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -10 & 4 & -2 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 10 & -6 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(-2)(-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=12(12-6)=12\cdot 6=$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 20 & -2 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -10 & -2 \\ 11 & -14 & 4 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & -4 & 0 \\ 11 & -14 & 0 \end{vmatrix}=-2\cdot 1\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 11 & -14 \end{vmatrix}=(-$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & 20 \\ 5 & -6 & -12 \end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -10 \\ 5 & -6 & 6 \end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & -10 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(-2)(-6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=12(2\cdot 6-5\cdot 3)=12($$

Тоді:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{72}{36}=2;\; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{108}{36}=3;\; x_3=\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{-36}{36}=-1.$$

II. *Матричний спосіб.* Матриця A з коефіцієнтів при невідомих для заданої системи рівнянь має вид:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Шукаємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}=4\cdot 4-(-6)(-2)=16-12=4.$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=(3\cdot 4-5(-2))=-(12+10)=-22.$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3(-6)-5\cdot 4=-18-20=-38.$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-((-3)4-(-6)1)=-(-12+6)=6.$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-5\cdot 1=3.$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=-(2(-6)-5(-3))=-(-12+15)=-3.$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=(-3)(-2)-4\cdot 1=6-4=2.$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(2(-2)-3\cdot 1)=-(-4-3)=7.$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-3(-3)=8+9=17.$$

Щоб отримати обернену матрицю A^{-1} необхідно алгебраїчні доповнення до елементів рядка записати у відповідний стовпчик, попередньо поділивши їх на визначник матриці А.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{36} & \frac{6}{36} & \frac{2}{36}\\ \frac{-22}{36} & \frac{3}{36} & \frac{7}{36}\\ \frac{-38}{36} & \frac{-3}{36} & \frac{17}{36}\end{pmatrix}.$$

Стовпчик вільних членів $B=\begin{pmatrix}-6\\ 20\\ -12\end{pmatrix}.$

Розв’язок системи шукаємо так:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{4}{36}&\frac{6}{36}&\frac{2}{36}\\\frac{-22}{36}&\frac{3}{36}&\frac{7}{36}\\\frac{-38}{36}&\frac{-3}{36}&\frac{17}{36}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\20\\-12\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{4(-6)+6\cdot20+2(-12)}{36}\\\frac{(-22)(-6)+3\cdot20+7(-12)}{36}\\\frac{(-38)(-6)+(-3)20+7(-12)}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12(-2+10-2)}{36}\\\frac{12(11+5-7)}{36}\\\frac{12(19-5-17)}{36}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{3}\\\frac{9}{3}\\\frac{-3}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=2;x_2=3;x_3=-1.$

III. *Метод Гауса.* Поділимо кожний член першого рівняння на a_{11}, тобто на 2, оскільки $a_{11}\neq0.$

$$\begin{cases}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=-3,\\3x_1+4x_2-2x_3=20,\\5x_1-6x_2+4x_3=-12.\end{cases}$$

Віднімемо з другого рядка перший,помножений на – 3, а з третього рядка перший, помножений на – 5:

¿

$$\begin{cases}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=-3,\\0+\frac{17}{2}x_2-\frac{7}{2}x_3=29,\\0+\frac{3}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3=6.\end{cases}$$

Помножимо друге і третє рівняння на 2.

$$\begin{cases}x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{3}x_3=-3,\\0+17x_2-7x_3=29,\\0+3x_2+3x_3=6.\end{cases}$$

Поділимо останнє рівняння системи на 3 і поміняємо місцями друге та третє рівняння. Розв’язок системи при цьому не зміниться, але коефіцієнт при x_2 у другому рівнянні буде дорівнювати одиниці.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3, \\ 0 + x_2 - x_3 = 1, \\ 0 + 17x_2 - 7x_3 = 29. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на – 17 та додамо його до третього:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3, \\ 0 + x_2 - x_3 = 1, \\ 0 + + -24x_3 = 24. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо

$x_3 = -1.$

З другого рівняння

$x_2 = 2 - x_3 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3.$

З першого рівняння

$x_1 = -3 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -3 + \frac{3}{2}3 - \frac{1}{2}(-1) = -3 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -3 + \frac{10}{2} = -3 + 5 = 2.$

Відповідь: $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = -1.$

Метод Гауса застосовується також і для розв'язання системи лінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь менша кількості невідомих.

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь трьома методами: методом Крамера, матричним способом та методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ -x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$

Практичне заняття № 3
з теми «Векторний простір»

Аудиторні завдання:

Задача 3.1. Довести, що всі квадратні матриці порядку n з дійсними елементами (або елементами з будь-якого поля P) утворюють векторний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

Розв'язання.

Нехай M – множина всіх квадратних матриць порядку n а дійсними елементами. Покажемо спочатку, що M – абелева група відносно операції додавання.

1. Операція додавання матриць замкнена, тобто для будь-яких матриць $A,B\in M\; A+B\in M$. Справді, нехай $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$, де $a_{ij},b_{ij}\in R$, $i,j=1,2,\dots,n$. Тоді за означенням додавання матриць

$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$.

Оскільки $a_{ij}+b_{ij}\in R$, то $A+B\in M$.

2. Операція додавання матриць асоціативна, тобто для будь-яких матриць $A,B,C\in M$

$(A+B)+C=A+(B+C)$.

Справді, нехай $A=(a_{ij}),B=(b_{ij}),C=(c_{ij})$, де $a_{ij},b_{ij},c_{ij}\in R$, $i,j=1,2,\dots,n$. Тоді за означенням додавання матриць

$(A+B)+C=((a_{ij})+(b_{ij}))+(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=([a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij})$,

$A+(B+C)=(a_{ij})+((b_{ij})+(c_{ij}))=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})=(a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}])$.

Оскільки a_{ij},b_{ij},c_{ij} – дійсні числа, то $[a_{ij}+b_{ij}]+c_{ij}=a_{ij}+[b_{ij}+c_{ij}]$, і тому $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. У множині матриць M є матриця N, яка є нейтральним елементом відносно операції додавання матриць (нульовим елементом), тобто для довільної матриці $A \in M$

$A + N = N + A$.

Очевидно, такою матрицею N є нульова матриця $0 = (o_{ij})$

4. У множині матриць M для кожної матриці A існує протилежна матриця $\acute{A}$, тому $A + \acute{A} = \acute{A} + A = 0$.

Очевидно, протилежною для даної матриці $A = (a_{ij})$ є матриця $-A = (-a_{ij})$.

5. Операція додавання матриць комутативна. Тоді для будь-яких матриць $A, B \in M$

$A + B = B + A$.

Нехай $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, де $a_{ij}, b_{ij} \in R, i, j = 1, 2, \ldots, n.$ За означенням додавання матриць

$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$,

$B + A = (b_{ij}) + (a_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij})$

Оскільки для додавання дійсних чисел справедливий комутативний закон, то $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, тому $(a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij})$, тобто

$A + B = B + A$.

Покажемо тепер, що для множини M виконується також решта аксіом векторного простору.

6. Операція множення матриць на число асоціативна в тому розумінні, що для будь-якої матриці $A \in M$ і довільних дійсних чисел k, l

$[kl]A = k[lA]$.

Нехай $A = (a_{ij})$, де $a_{ij} \in R$ і $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тоді за означенням множення матриці на число

$[kl]A = [kl](a_{ij}) = ([kl]a_{ij})$,

$k[lA] = k[l(a_{ij})] = k(l a_{ij})$.

Оскільки $k(l a_{ij}) = k[l(a_{ij})]$, а k, l, a_{ij} – дійсні числа, то $[kl]a_{ij} = k[l a_{ij}]$, тому $[kl]A = k[lA]$.

7. Для будь-якої матриці $A \in M$ і дійсного числа 1 маємо

$1 \cdot A = A$.

Це випливає з означення множення матриці на число.

8. Операція множення матриці на число дистрибутивна відносно додавання матриць, тобто

$\forall\ \forall\ [\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B]$.

Справді якщо $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$, де $a_{ij}, a_{ij} \in R, i, j=1,2,\ldots,n,$ то за означенням множення матриці на число

$\alpha(A+B)=\alpha[(a_{ij})+(b_{ij})]=\alpha(a_{ij}+b_{ij})=(\alpha[a_{ij}+b_{ij}]),$

$\alpha A+\alpha B=\alpha(a_{ij})+\alpha(b_{ij})=(\alpha\, a_{ij})+(\alpha\, b_{ij})=(\alpha\, a_{ij}+\alpha\, b_{ij}).$

Оскільки α, a_{ij}, b_{ij} – дійсні числа, то $\alpha[a_{ij}+b_{ij}]=\alpha\, a_{ij}+\alpha\, b_{ij}$, тому

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

9. Операція множення матриці на число дистрибутивна відносно додавання чисел, тобто

$\forall\ \forall\ [(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A]$.

Справді, якщо $A=(a_{ij})$, де $a_{ij} \in R, i, j=1,2,\ldots,n,$ то за означенням множення матриці на число

$[\alpha+\beta]A=[\alpha+\beta](a_{ij})=([\alpha+\beta]a_{ij}),$

$\alpha A+\beta A=\alpha(a_{ij})+\beta(a_{ij})=(\alpha\, a_{ij})+(\beta a_{ij})=(\alpha\, a_{ij}+\beta a_{ij}).$

Оскільки α, β, a_{ij} – дійсні числа, то $[\alpha+\beta]a_{ij}=\alpha\, a_{ij}+\beta a_{ij}$, тому $[\alpha+\beta]A=\alpha A+\beta A$

Усі аксіоми аксіоми векторного простору виконуються. Отже M – векторний простір над полем дійсних чисел R. Якщо в наших міркуваннях замість поля R взяти довільно вибране поле P то все залишиться без змін.

Задача 3.2. Довести, що всі симетричні матриці порядку n з дійсними елементами (або елементами з будь-якого поля P) утворюють векторний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

Розв'язання.

Нехай N – множина всіх квадратних симетричних матриць порядку n з дійсними елементами. Зрозуміло, що $N \subset M$, де M – множина всіх матриць порядку n з дійсними елементами. Як було показано, що M – векторний простір над полем дійсних чисел. Оскільки довільний підпростір є векторним простором, то нам досить показати що N – лінійний підпростір векторного простору M. Для цього досить довести:

1) замкненість операції додавання симетричних матриць;
2) замкненість операції множення симетричних матриць на дійсні числа.

1) Нехай $A,B\in N$. Доведемо, що $A+B\in N$. Припустимо, що $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Оскільки A,B – симетричні матриці, то $a_{ij}=a_{ij}, b_{ij}=b_{ij}$. Тоді $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(c_{ij})$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ Зрозуміло, що $c_{ij}=c_{ij}$, оскільки $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, а $a_{ij}=a_{ij}, b_{ij}=b_{ij}$. Отже $A+B\in N$.

2) Нехай $A\in N, \alpha\in R$. Доведемо, що $\alpha A\in N$. Нехай $A=(a_{ij})$, де $a_{ij}\in R$. Оскільки A – симетрична матриця, то $a_{ij}=a_{ij}$. Тоді $\alpha A=\alpha(a_{ij})=(c_{ij})$, де $c_{ij}=\alpha\, a_{ij}$. Зрозуміло, що $c_{ij}=c_{ij}$, оскільки $c_{ij}=\alpha\, a_{ij}$, а $a_{ij}=a_{ij}$. Отже, $\alpha A\in N$.

Таким чином, N – підпростір векторного простору M, тому N – векторний простір над полем R. Якщо в наведених міркуваннях замість поля R взяти довільно вибране поле P, то все залишається без змін.

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Довести справедливість наступних тверджень, застосовуючи аксіоми векторного простору L (при доведенні властивостей можна користуватися вже доведеними властивостями):

1) сума довільних n векторів простору l не залежить від того, як її доданки розбито за допомогою дужок на групи;

2) у просторі L виконується дія віднімання, тобто для довільних векторів $\vec{a}\, i\, \vec{b}$ простору L рівняння $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ має в L єдиний розв'язок $\vec{x}=\vec{b}+(-\vec{a})$, який називається різницю векторів $\vec{b}\, i\, \vec{a}$ і позначається $\vec{b}-\vec{a}$;

3) $\forall\ [\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}]$;

4) $\forall\ [0\cdot\vec{x}=\vec{0}]$;

5) $\forall\ \forall\ [\alpha\cdot\vec{x}=\vec{0}\quad \alpha=0\vee\vec{x}=\vec{0}]$;

6) $\forall\ \forall\ [\alpha(-\vec{x})=-\alpha\,\vec{x}]$;

7) $\forall\ \forall\ [(-\alpha)\vec{x}=-\alpha\vec{x}]$;

8) $\forall\ \forall\ [\alpha(\vec{x}-\vec{y})=-\alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}]$;

9) $\forall\ \forall\ [(\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{x}]$.

2. Довести, що розв'язки довільної системи лінійних однорідних рівнянь на деяким полем P утворюють векторний простір над полем P відносно операції додавання розв'язків і множення розв'язків на елементи з поля P.

3. Довести, що кососиметричні матриці утворюють лінійний підпростір простору всіх квадратних матриць порядку n (нагадаємо, що матриця $A=(a_{ij})$ називається кососиметричною, якщо $a_{ji}=-a_{ij}$).

4. З'ясувати, чи утворює векторний простір над полем дійсних чисел R сукупність векторів площини, початок кожного з яких збігається з початком координат, а кінець міститься в першій або четвертій координатних чвертях.

5. Перевірити, чи утворюють лінійні підпростори в арифметичному векторному просторі V_n такі системи векторів:

1) усі вектори, в яких перша і остання координати рівні між собою;

2) усі вектори, сума координат кожного з яких дорівнює 0;

3) усі вектори, в кожного з яких координати з парними (непарними) номерами дорівнюють нулю;

4) усі вектори, в кожного з яких координати з парними номерами рівні між собою;

5) усі вектори, сума координат кожного з яких дорівнює 1;

6) усі вектори, координати яких – цілі числа;

7) усі вектори, в кожного з яких усі координати рівні між собою;

8) усі вектори, в кожного з яких кожна координата, починаючи з другої, дорівнює попередній, взятій з протилежним знаком;

9) усі вектори, в кожного з яких кожна координата, починаючи з другої, відрізняється від попередньої на множник $k, k\in R$;

10) усі вектори, в кожного з яких кожна координата, починаючи з другої, дорівнює квадрату попередньої.

Практичне заняття № 4
з теми «Координати вектора в базисі»

Аудиторні завдання:

Задача 4.1. Довести, що кожна з двох заданих систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між базисами (матриці переходу від одного базису до іншого):

$B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3), де\, \vec{e}_1=(1,0,1), \vec{e}_2=(0,-1,0), \vec{e}_3=(0,0,-1)$

$B(\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3), де\, \vec{e}'_1=(0,-1,1), \vec{e}'_2=(-1,0,1), \vec{e}'_3=(0,1,0)$

Розв'язання.

Оскільки розглядуваний простір має розмірність 3 (це ми визначили з кількості координат у заданих векторах), то досить довести, що системи векторів B і B' лінійно незалежні. Для цього слід впевнитися, що матриці складені з координат векторів систем B і B', мають ранг 3. Виконаємо це, користуючись елементарними перетвореннями матриць, від яких ранг не змінюються. Для системи B маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тут легко побачити, що ранг цієї матриці дорівнює 3.

Для системи B' маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} III_{p.}+I \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} I_{p.}\cdot(-1)+II \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що ранг останньої матриці дорівнює 3. Отже, B і B', – базиси. Знайдемо зв'язок між ними. Кожен вектор $\vec{e}'_i(i=1,2,3)$, як і будь-який вектор простору, однозначно лінійно виражається через вектори базису B. Нехай

$$\vec{e}'_1=\tau_{11}\vec{e}_1+\tau_{12}\vec{e}_2+\tau_{13}\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}'_2=\tau_{21}\vec{e}_1+\tau_{22}\vec{e}_2+\tau_{23}\vec{e}_3,(4.1)$$
$$\vec{e}'_3=\tau_{31}\vec{e}_1+\tau_{32}\vec{e}_2+\tau_{33}\vec{e}_3,$$

Матриця

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}\end{pmatrix}$$

рядками якої є координатні рядки векторів базису B' в базисі B, і є матрицею переходу переходу від базису B до базису B'. Знайдемо її. Для цього в рівностях (4.1) замість і підставимо їх значення, а потім використаємо умову рівності векторів

$$(0,-1,1)=(\tau_{11},-\tau_{12},\tau_{11}-\tau_{13})$$
$$(-1,0,1)=(\tau_{21},-\tau_{22},\tau_{21}-\tau_{23})$$
$$(0,1,0)=(\tau_{31},-\tau_{32},\tau_{31}-\tau_{33})$$

Звідси

$$\left.\begin{matrix}\tau_{11}=0,\\ -\tau_{11}=-1\\ \tau_{11}-\tau_{13}=1\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\tau_{21}=-1\\ \tau_{22}=0\\ \tau_{21}-\tau_{23}=1\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\tau_{31}=0\\ -\tau_{32}=1\\ \tau_{31}-\tau_{33}=0\end{matrix}\right\}$$

Розв'язуючи ці системи лінійних рівнянь, дістанемо:

$$\tau_{11}=0,\ \tau_{21}=-1\ \ \tau_{31}=0$$
$$\tau_{12}=1\ \ \tau_{22}=0\ \ \tau_{32}=-1$$
$$\tau_{13}=-1\,\tau_{23}=-2\ \ \tau_{33}=0$$

Отже, матриця має вигляд

$$T=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Для знаходження матриці T' переходу від базису B' до базису B можна було б скористатися тільки що викладеним прийом. Відомо про те, що $T'=T^{-1}$. Оскільки

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

то

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 4.2. У базисі $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ вектор $\vec{x}$ має координатний рядок $[2,-1,1]$. Знайти координати вектора $\vec{x}$ у базисі $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, якщо $\vec{e}_1=(-1,0,0),\vec{e}_2=(0,0,1),\vec{e}_3=(0,-1,0),\vec{e}'_1=(1,0,1),\vec{e}'_2=(0,-1,1),\vec{e}'_3=(0,1,0)$.

Розв'язання.

Відомо, що коли вектор $\vec{x}$ у базисі B має координатний рядок $[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$, а в базисі B' – координатний рядок $[\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_n]$ то

$$[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]=[\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_n]T,(4.2)$$

$$[\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]T^{-1},(4.3)$$

Де T – матриця переходу від базису B до базису B'. Скористаємося рівністю (4.3). Для цього знайдемо матрицю T^{-1}. Оскільки і вектор $\vec{x}$, і вектори обох базисів записано в деякому базисі E з одиничних векторів, то

$$B=ME,B'=M'E,(4.4)$$

де – M матриця переходу від базису E до базису B, а $M'-¿$ матриця переходу від базису E до базису B'. Через те що $E=(\vec{e}_1^{\,0},\vec{e}_2^{\,0},\vec{e}_3^{\,0})$, де $\vec{e}_1^{\,0}=(1,0,0),\vec{e}_2^{\,0}=(0,1,0),\vec{e}_3^{\,0}=(0,0,1)$, то матриці M і M' легко записати користуючись лише координатами рядками векторів $\vec{e}_i$ і $\vec{e}'_i$ в базисі $E,i=1,2,3$

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

З рівностей (4.3) $E-(M')^{-1}B',B=ME=M\left((M')^{-1}B'\right)=\left(M(M')^{-1}\right)B'$. Звідки $T^{-1}=M(M')^{-1}$ – матриця переходу від базису B' до базису B. Потім знаходимо

$$(M')^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$T^{-1}=\left(M^{'}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Тоді з формули (4.3)

$$\left[\alpha_1^{'},\alpha_2^{'},\alpha_2^{'}\right]=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2\right]T^{-1}=[2,-1,1]\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=[-2,1,0].$$

Для перевірки спробуємо повернутися до старих координат. Знайдемо T як обернену матрицю до матриці T^{-1}:

$$\left(T^{-1}\right)^{-1}=T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Тоді з формули (4.3)

$$\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2\right]=\left[\alpha_1^{'},\alpha_2^{'},\alpha_2^{'}\right]T=[-2,1,0]\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=[2,-1,1].$$

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Довести, що кожний вектор $\vec{a}$ векторного простору L_n, над полем P у довільному базисі $B\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ цього простору має єдине лінійне зображення $\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n$, де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in P$.

2. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ і $\vec{x}$задано своїми координатами в деякому базисі. Довести, що вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x}$ у цьому базисі, якщо

1) $\vec{a}_1=(1,1,-1),\vec{a}_2=(1,2,1),\vec{a}_3=(3,2,1),\vec{x}=(1,7,-1)$

2) $\vec{a}_1=(1,1,-1),\vec{a}_2=(1,-1,0),\vec{a}_3=(-1,0,0),\vec{x}=(2,-1,3)$

3) $\vec{a}_1=(1,-1,0,0),\vec{a}_2=(0,1,1,0),\vec{a}_3=(0,0,-1,0),\vec{a}_4=(0,0,0,1)\vec{x}=(2,1,-1,0)$

3. Знайти координати матриці

$$A=\begin{pmatrix}13 & 12\\ -1 & -5\end{pmatrix}$$

в базисі

1) $B\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\};$

2) $B^{'}\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}.$

Практичне заняття № 5
з теми «Евклідовий простір»

Аудиторні завдання:

Задача 5.1. Чи стане арифметичне простір R^2 евклідовим, якщо скалярний добуток ввести за формулою $x\cdot\acute{y}=|\acute{x}_1||\acute{y}_1|+|\acute{x}_2||\acute{y}_2|$, де $\acute{x}=(\acute{x}_1,\acute{x});\acute{y}=(\acute{y}_1,\acute{y}_2)$.

Розв'язання.

Ні, тому що не виконується дистрибутивний закон скалярного множення щодо додавання векторів. Наприклад: $\acute{x}=(1,1),\acute{y}=(-2,-2);$

$$p=(3;3),(\acute{x}+\acute{y})p=|1-2|3+|1-2|3=6,\acute{x}\cdot p=1\cdot3+1\cdot3=6,$$

$$\acute{y}\cdot p=|-2|3+|-2|3=12,\text{ тобто } \acute{x}\cdot p+\acute{y}\cdot p=18\neq(x+\acute{y})\cdot p=¿6.$$

Задача 5.2. Нехай $\acute{x}=2e_1+3e_2-3e_3$ і $\acute{y}=e_5-2e_3$, базис e ортонормований. Обчислити $\acute{x}\cdot\acute{y}$ і довжини векторів $|\acute{x}|$ і $|\acute{y}|$.

Розв'язання.

Так як базис e ортонормований, то $e_k\cdot e_k=1, e_k\cdot e_n=0$ при $k\neq n$. Тому

$$\acute{x}\cdot\acute{y}=2e_1\cdot e_5-4e_1\cdot e_3+3e_2\cdot e_5-6e_2\cdot e_3-3e_3\cdot e_5+¿$$

$$+6e_2\cdot e_3=6,$$

бо всі складові, крім останнього, дорівнюють нулю. Далі, $|\acute{x}|=\sqrt{\acute{x}\cdot\acute{x}}$, тобто

$$|\acute{x}|=\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{22},\quad |\acute{y}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

Задача 5.3. Знайти нормований вектор, ортогональний векторам

$\acute{a}_1=(1,1,1),\acute{a}_2=(1,-1,-1),\acute{a}_3=(2,1,1),$

з арифметичного тривимірного простору.

Розв'язання.

Шуканий вектор $\acute{x}$ задовольняє рівнянням: $|\acute{x}|=1,\acute{x}\cdot\acute{a}_1=0,.$ $\acute{x}\cdot\acute{a}_2=0,\acute{x}\cdot\acute{a}_3=0.$ Розпишемо по координатам, вважаючи, що $\acute{x}=(x_1,x_2,x_3)$ і що базис складають вектори $(1,\acute{0},0),(0,\acute{1},0),(0,\acute{0},1)$ тобто, що базис ортонормованій і скалярний добуток вираховується по простій формулі. Отримаємо

$$\left.\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3=0; \\ x_1-x_2-x_3=0; \\ 2x_1+x_2+x_2=0; \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1. \end{array}\right\}$$

Перші три рівняння розв'яжемо методом Гаусса і підставимо отриманий розв'язок останнім. Тоді

$$\left.\begin{array}{c} x_1=0; \\ x_2=-x_3, \end{array}\right\}$$

і після підстановки знайдемо $2x_2^2=1$.

Відповідь: $x=(,1\sqrt{2},-1\sqrt{2})$.

Задача 5.4. Знайти ортонормований базис лінійної оболонки векторів:

$\acute{a}_1=(2,1,3),\acute{a}_2=(7,4,3,-3),\acute{a}_3=(1,1,-6.0),\acute{a}_4=(5,7,7,8)$.

Розв'язання.

Знайдемо базис лінійної оболонки:

$$\begin{pmatrix} 213-1 \\ 743-3 \\ 11-60 \\ 5778 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 213-1 \\ 11-60 \\ 11-60 \\ 2115310 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 213-1 \\ 11-60 \\ 0000 \\ 0-61570 \end{pmatrix}$$

Ранг дорівнює 3 базис $\acute{a}_1,\acute{a}_2,\acute{a}_4$. Застосуємо до базису процес ортогоналізації: $b_1=\acute{a}_1;\ b_2=\acute{a}_2+k_{21}b_1$. Обчислимо тепер $b_1\cdot b_2$ і прирівняємо до нуля: $b_1\cdot a_2+k_{21}b_1\cdot b_1=0$. Потім знайдемо коефіцієнт k_{21}:

$$k_{21}=\frac{-b_1\cdot a_2}{b_1\cdot b_1}=\frac{-14+4+9+3}{4+1+9+1}=-2.$$

Тому $b_2=(7,4,3,-3)-2(2,1,3,-1)=(3,2,-3,-1)$, $b_3=a_4++k_{31}b_1+k_{32}b_2$. Помножимо по черзі b_3 на b_1 і b_2. і прирівняємо результати до нуля. При цьому враховуємо, що $b_1\cdot b_2=0$.

Отримаємо $a_4\cdot b_1+k_{31}b_1\cdot b_1=0$, тобто

$$k_{31}=\frac{-a_4\cdot b_1}{b_1\cdot b_1}=\frac{-10+7+21-8}{4+1+9+1}=¿-2.$$

Далі $a_4\cdot b_2+k_{32}b_2\cdot b_2=0$, тобто

$$k_{32}=\frac{-a_4\cdot b_2}{b_2\cdot b_2}=\frac{-15+14-21-8}{9+4+9+1}=0.$$

Отже,

$b_3=(5,7,7,8)-2(2,1,3,-1)=(1,5,1,10).$

Нормуємо кожен вектор цього базису:

$\acute{c}_1=(2\sqrt{15},1\sqrt{15},3\sqrt{15},-1\sqrt{15});$

$\acute{c}_2=(3\sqrt{23},2\sqrt{23},-3\sqrt{23},-1\sqrt{23});$

$\acute{c}_3=(1\sqrt{127},5\sqrt{127},1\sqrt{127},10\sqrt{127}).$

Вектори $\acute{c}_1,\acute{c}_2,\acute{c}_3$ утворюють ортонормований базис.

Для самостійного розв'язання:

1. Нехай $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ є довільними векторами арифметичного простору R^2, задані своїми координатами в деякому довільному базисі. Цей простір буде евклідовим, якщо скалярний добуток ввести за наступними формулами (вкажіть правильні та неправильні твердження):

1. $\acute{x}\cdot\acute{y}=\acute{x}_1\acute{y}_1+2\acute{x}_2\acute{y}_2;$

2. $\acute{x}\cdot\acute{y}=2\acute{x}_1\acute{y}_1+\acute{x}_2\acute{y}_2;$

3. $\acute{x}\cdot\acute{y}=\acute{x}_1\acute{y}_1-\acute{x}_2\acute{y}_2;$

4. $\acute{x}\cdot\acute{y}=\acute{x}_1+\acute{x}_2+\acute{y}_1+\acute{y}_2;$

5. $\acute{x}\cdot\acute{y}=$¿

2. Встановіть, який з наступних базисів арифметичного двовимірного векторного простору R^2 є ортонормованим.

1. $\acute{a}_1=(-1,0),\acute{a}_2=(0,-1);$

2. $\acute{a}_1=(0,1),\acute{a}_2=(-1,0);$

3. $\acute{a}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\acute{a}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right).$

Практичне заняття № 6
з теми «Ортогональне доповнення простору»

Аудиторні завдання:

Задача 6.1. Знайти базис ортогонального доповнення до лінійної оболонки системи векторів $\acute{a}_1=(-2,1,0,0)$, $\acute{a}_2=(-1,0,-1,1)$, $\acute{a}_3=(-3,1,-1,1)$.

Розв’язання.

Нехай $A=\langle \acute{a}_1,\acute{a}_2,\acute{a}_3\rangle$ і A є ортогональне доповнення до підпростору A . Тоді для будь-якого $x \epsilon A$ і будь-якого $a \epsilon A$ вірно $\acute{a}\cdot x=0$. Зокрема,

$$\left.\begin{array}{l}\acute{a}_1\cdot x=0;\\ \acute{a}_2\cdot x=0;\\ \acute{a}_3\cdot x=0.\end{array}\right\}$$

Покладемо $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ і розпишемо докладніше останні систему рівностей:

$$\left.\begin{array}{r}-2x_1+x_2=0;\\ -x_1-x_2+x_4=0;\\ -3x_1+x_2-x_3+x_4=0.\end{array}\right\}$$

Ортогональним доповненням A є простір розв’язків цієї системи лінійних однорідних рівнянь, тобто буде натягнуто на фундаментальний набір розв'язків як на базис. Обчислимо фундаментальний набір розв'язків:

$$\begin{pmatrix}-2100\\-10-11\\-31-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2100\\-10-11\\-10-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2100\\-10-11\\0000\end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок наступний $x=(x_1,2x_1,-x_1+x_4,x_4)$. Фундаментальний набір складається з двох розв'язків:

$$b_1=(1,2,-1,0),\quad b_2=(0,0,1,1).\quad A=\langle b_1,b_2\rangle.$$

Задача 6.2. Знайти базис ортогонального доповнення до підпростору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$\left.\begin{array}{c}2x_1+3x_2-x_3+x_4=0;\\ x_1+x_2-x_3+x_4=0;\\ x_1+2x_2+x_4=0.\end{array}\right\}(6.1)$$

Розв’язання.

Вектори

$$\acute{a}_1=(2,3,-1,2);$$

$$\acute{a}_2=(1,1,-1,1);$$

$$\acute{a}_3=(1,2,0,1),$$

координати яких є коефіцієнтами системи (6.1) ортогональні до будь-якого розв'язку системи (6.1). Очевидно, що їх лінійна оболонка

$A=\langle \acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3 \rangle$ буде цілком складатися з векторів, ортогональних до будь-якого розв'язку (6.1).

Нехай B — підпростір розв'язків (6.1) і нехай r – ранг системи векторів $\acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3$ тобто ранг системи рівнянь (6.1). Тоді розмірність підпростору B є число розв'язків в фундаментальному наборі розв'язків системи (6.1), тобто $4-r$. Тому ортогональне доповнення до B в арифметичному чотиривимірному просторі має розмірність r. Крім того $B \supset A$ і A теж має розмірність r. Тому $B = A$. Залишилося знайти деякі базис оболонки системи векторів $\acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 3 -1 2 \\ 1 1 -1 1 \\ 1 2 0 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 2 0 1 \\ 1 1 -1 1 \\ 1 2 0 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 2 0 0 \\ 0 -1 -1 0 \\ 0 0 0 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, шуканий базис (1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 0) (можна взяти $\acute{a}_1, \acute{a}_2$).

Задача 6.3. Уявімо вектор $\acute{b}=(4,-1,-34)$ у вигляді суми векторів, які є елементами підпростору *A* і його ортогонального доповнення, якщо *A* є лінійна оболонка векторів $\acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3$ (знайти проекції вектора на ортогональне доповнення підпростору):

Розв'язання.

Нехай $\acute{b}=b_1+b_2$, де $b_1 \in A, b_2 \in A$. Тоді для $a_i \in A, a_i b = a_i(b_1+b_2) = a_i b_1 + a_i b_2 = a_i b_i$, або $a_i b_2 = 0$. Але $b_1 \in \langle \acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3 \rangle$, тому $b_1 = x\acute{a}_1, + y\acute{a}_2 + z\acute{a}_3$. Знайдемо коефіцієнти x, y, z із системи лінійних рівнянь, яка виникає при множенні останньої рівності по черзі на $\acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3$:

$$\left.\begin{array}{l} \acute{a}_1\acute{a}_1 x + \acute{a}_1\acute{a}_2 y + \acute{a}_1\acute{a}_3 z = \acute{a}_1 b; \\ \acute{a}_2\acute{a}_1 x + \acute{a}_2\acute{a}_2 y + \acute{a}_2\acute{a}_3 z = \acute{a}_2 b; \\ \acute{a}_3\acute{a}_1 x + \acute{a}_3\acute{a}_2 y + \acute{a}_3\acute{a}_3 z = \acute{a}_3 b; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} 4x+4y+4z=4; \\ 4x+10y-2z=-8; \\ 4x-2y+10z=16; \end{array}\right\} \left[\begin{array}{c|c} 1 1 1 & 1 \\ 0 1 -1 & -2 \\ 0 -1 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 0 2 & 3 \\ 0 1 -1 & -2 \end{array}\right].$$

Нам достатньо взяти будь-яке рішення системи. Наприклад, $z=0, x=3, y=-2$. Тоді

$$b_1 = 3\acute{a}_1 - 2\acute{a}_2 = (1,-1,-1,5),\ b_2 = b - b_1 = (3,0,-2,-1).$$

Перевірка дає $b_1 b_2 = 3+2-5=0.$ Отже маємо

$$b=(1,-1,-1,5)\in A, b=(3,0-2,-1)\in A\ .$$

Задачі для самостійного розв'язання:

1. Знайдіть базис A і систему рівнянь, що задає A (як множину розв`язків), якщо A задано:

1) як множина розв`язків системи рівнянь

$$\left.\begin{array}{c} 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=0; \\ x_1+x_2-x_3+x_4=0; \\ x_1+2x_2+x_4=0. \end{array}\right\}$$

2) як лінійна оболонка системи векторів

$$\acute{a}_1=(2,1,3,2); \acute{a}_2=(1,2,1,2); \acute{a}_3=(1,-1,0,1).$$

2. Розкладіть вектор $b=(5,2,0,1)$ на суму його проекцій на A та A , де A є лінійною оболонкою з попереднього завдання.

Додаток Б

Блок-схеми до тем з навчального модуля

«Лінійна алгебра»

МАТРИЦІ
Матрицею розміром m×n називається прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців: $$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\|a_{ij}\right\|,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$$ $a_{ij-¿¿}$елементи матриці; i – номер рядка; j – номер стовпця.

m≠n
A – прямокутна матриця

m=n
A – квадратна матриця

A = B ↔

Види матриці

Матриця – рядок
A =

Нульова матриця
0 =

Діагональна матриця

Одинична матриця
E =

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Додавання матриць

$$\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\| = \underset{m\times n}{C}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \mathrm{i} = \overline{1,m};\ \mathrm{j} = \overline{1,n}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

Властивості

1. A + B = B + A 2. (A + B) + C = A + (B + C) 3. A + 0 = A

Множення матриці на число

$$\alpha\mathrm{A} = \alpha\|a_{ij}\| = \|\alpha\, a_{ij}\|,\ \mathrm{i} = \overline{1,m};\ \mathrm{j} = \overline{1,n}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, a_{11} & \alpha\, a_{12} \\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} \end{pmatrix}$$

Властивості

1. α(A + B) = αA + αB 2. (A + B) · α = αA + αB
3. αβA = (αA)β 4. A · 0 = 0

Транспонування матриць

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{21} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Властивості

1. $(A^T)^T$ = A 2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Множення матриць

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C}$$

(“ширина» матриці A = «висоті» матриці B)

C = $\|c_{ij}\|$, де

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i¿} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{¿} b_{nj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Властивості

1. (A · B) · C = A · (B · C) 4. α(A · B) = (αA) · B = A · (αB)
2. (A + B) · C = A · C + B · C 5. A · B ≠ B · A
3. A · (B + C) = A · B + A · C 6. A · E = E · A = A 7. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Піднесення до степеня

A – квадратна матриця $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m-раз}$ *Властивості* 1. A^0 = E 2. A^1 = A 3. $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$ 4. $(A^m)^k = A^{mk}$
Обернена матриця
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{21} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$ де Δ - визначник матриці A ($\Delta \neq 0$) A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A. A · A^{-1} = A^{-1} · A = E
Ранг матриці
$$\underset{m \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ → Ранг матриці A (rang A) – найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rk} \end{pmatrix}$$ → rang B = r. B – ступінчаста матриця, $b_{ij} \neq 0$? i = $\overline{1,r}$, r < k

ВИЗНАЧНИКИ
Визначники другого порядку
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \det A = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ – число $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ побічна діагональ   головна діагональ
Визначники третього порядку
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ – число

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
Властивості визначників
1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями і навпаки (тобто транспонувати). $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$ 2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$ 3. Спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника. $$\begin{vmatrix} ka_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ 4. Визначник, який має два однакових рядка (стовпця), рівгний нулю. 4.1. Якщо всі елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник рівний нулю. 5. Якщо всі елементи рядка (стовпця) рівні нулю, то визначник рівний нулю. 6. Якщо у визначника елементи якого-небудь рядка (стовпця) складаються з двох доданків, то такий визначник рівний сумі двох визначників, у першого з яких відповідними елементами є перші доданки, у другого – другі: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b \\ a_{21} & a_{22}+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & c \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до його елементів якого-небудь рядка (стовпця) додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне й те ж число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{\times k} \; + = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Мінор елемента a_{ij} *визначника* Δ - це визначник, отриманий з даного методом викреслювання і–го рядка – j–го стовпця.

Позначається M_{ij}.

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} *визначника* Δ - це мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$.

Позначається A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

Властивості визначників

8. *(Розклад визначника за елементами рядка (стовпця))*

Визначник рівний сумі добутків елементів рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

9. Сума добутків елементів якого-небудь рядка(стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення другого рядка (стовпця) рівна нулю

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

Визначники n-го порядку

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Системи лінійних рівнянь

Система m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – невідомі;

a_{ij} (i = $\overline{1,m}$, j = $\overline{1,n}$) – коефіцієнти при невідомих;

b_i - вільні члени.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – розв’язок системи, тобто набір чисел, при підстановці яких в систему кожне рівняння системи перетворюється в тотожність.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$ - однорідна система

Система рівнянь

Спільна – має хоча б один розв’язок.

Неспільна – не має розв’язків.

Визначена – має єдиний розв’язок.

Невизначена – має більше одного розв’язку.

Способи розв’язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

1. Формули Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

2. Матричний спосіб

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(матриця системи)

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B} \to \mathrm{X} = A^{-1} \cdot \mathrm{B}$$

3. Метод Гаусса

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$ - розширена матриця системи

Привести розширену матрицю до ступінчастого виду, використовуючи наступні перетворення:

1. Викреслювання нульового рядка.
2. Перестановка рядків (розширення матриці), стовпців (матриці системи).
3. Множення рядка розширеної матриці на число, відмінне від нуля.
4. Додавання до одного рядка розширеної матриці другого рядка, помноженого на число, відмінне від нуля.

**КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Я, Редько Леся Володимирівна,
учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:
– дотримуватися:
- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:
- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;
– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;
– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;
– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;
– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;
– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;
– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;
– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;
– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;
– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;
– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;
– не підробляти документи;
– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;
– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;
– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;
– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;
– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;
– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;
– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

15.04.2020		Леся Редько
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)