МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ПІДСУМОВУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття рівня вищої освіти “бакалавр”

Виконала: студентка 4 курсу 421 групи

Спеціальності 014 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійної (наукової) програми

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

за спеціальністю 014 Середня освіта (математика)

Березовська А.В.

Керівник к. ф.-м. н., проф. Кузьмич В.І.

Рецензент ст. викл. Черненко І.Є.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія тригонометричних рядів є, з одного боку, саме тією галуззю метричної теорії функції, при дослідженнях в якій досить часто застосовуються методи метричної теорії функцій. З іншого боку, сила знайдених методів в метричній теорії функцій застосовувалась, як правило, при розв’язуванні тих чи інших проблем теорії тригонометричних рядів. На сьогодні вже досить добре відомо, що методи та ідеї метричної теорії функцій глибоко проникли в різні галузі математики (до теорії функцій комплексної змінної, до теорії ймовірностей, до функціонального аналізу, до диференціальних рівнянь, до метричної теорії чисел тощо). Особливо слід підкреслити, що при дослідженнях в найрізноманітніших галузях математики більшість авторів широко застосовують або результати, або методи, або ідеї з теорії тригонометричних рядів. Саме теорія тригонометричних рядів була джерелом ряду нових ідей для аналізу протягом останніх двох століть, залишиться вона таким джерелом і у майбутньому.

Більшість основних понять та результати теорії функцій були отримані математиками в процесі роботи над тригонометричними рядами. Можливо, що ці відкриття могли бути здійснені іншим шляхом, проте в дійсності вони з'явилися у зв’язку з теорією тригонометричних рядів. Не випадково, що загальноприйняте поняття функції було вперше сформульоване в праці Діріхле (1837 р.), в якій розглядалася проблема збіжності рядів Фур’є; не випадково також, що означення інтегралу Рімана в його загальній формі з’явилося в дисертації Рімана, присвяченій тригонометричним рядам. Пізніше у тісному зв’язку з теорією рядів Фур’є був відкритий інтеграл Лебега, а у зв’язку з інтегралом Фур’є – теорія узагальнених функцій.

Що стосується основних проблем сучасної теорії тригонометричних рядів, то на неї вплинули методи теорії інтегрування

Лебега. Вони допомогли розв'язати проблему подання функцій їх рядами Фур'є. Ця проблема, сформульована в термінах підсумовування рядів Фур'є, на сьогодні, по суті, вирішена. Те саме відноситься до проблеми збіжності рядів Фур'є в індивідуальних точках. Що ж стосується збіжності або розбіжності майже всюди, то тут ще багато доведеться зробити. Наприклад, все ще не вирішена проблема існування неперервної функції з всюди розбіжним рядом Фур'є. Дві інші великі проблеми тригонометричних рядів також очікують свого вирішення. Це – тісно пов'язані між собою проблеми структури множин єдиності та структури функцій з абсолютно збіжними рядами Фур'є. Для їх вирішення поки що немає загальних методів. Серед нерозв'язаних проблем слід також згадати проблему поведінки тригонометричного ряду на множині додатної міри та проблему подальшого розвитку методів теорії функцій комплексної змінної.

Мета даної роботи полягає у розгляді питання підсумовування тригонометричних рядів, зокрема, рядів Фур'є.

Об'єктом дослідження виступають методи підсумовування розбіжних рядів, а ***предметом*** дослідження – безпосередньо методи підсумовування тригонометричних рядів.

Виходячи з мети, визначені основні ***завдання*** роботи:

1. Зробити огляд монографічної, методичної літератури та наукових публікацій з теорії класичних методів підсумовування розбіжних рядів.

2. Визначити особливості поняття збіжності для тригонометричного ряду Фур'є, а також розглянути метод Валле Пуссена, що стосується підсумовування рядів Фур'є.

3. Розкрити питання стосовно єдиності розкладу функції в ряд Фур'є.

4. Визначити властивості абсолютного підсумовування рядів Фур'є.

Основні ***методи***, що використовувалися в дослідженні – це загальні методи класичного та функціонального аналізу, теорії підсумовування розбіжних рядів та функцій, метод обернених матриць та метод порівняння полів підсумовування.

Робота складається з двох основних розділів.

В першому розділі розглянуто поняття матричного методу підсумовування, а також важливі теореми, що стосуються властивостей дискретних та напівнеперервних методів підсумовування. Твердження цього розділу є допоміжними при розв'язуванні основної задачі дослідження.

В другому розділі розкривається питання стосовно підсумовування тригонометричних рядів. Зокрема, розглянуто поняття ряду Фур'є, його коефіцієнтів, розкрито питання єдиності розкладу функції в ряд Фур'є, а також властивості абсолютного підсумовування таких рядів.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ РЯДІВ

1.1. Загальні матричні методи

Для сучасно теорії рядів характерно те, що вона вивчає ряди, що розбігаються. Багато видатних математиків працювало над створенням та впровадженням різних методів підсумовування рядів [11, 16, 26, 32]. Найчастіше ці методи визначаються наступними матричними перетвореннями.

Нехай $a=(a_{\mathrm{nk}})$ – нескінченна матриця (n, $k = 0$, 1, …). Для даної послідовності (U_n) утворюємо нову послідовність $(U^{'n})$:

$$U^{'n}=\sum_k a_{nk}U_k \quad \text{(A)}$$
.

Якщо $U^{'n}$ існують при будь-якому $n = 0$, 1,… та $\lim U^{'n}=U'$, то послідовність (U_n) називається *підсумованою* методом *a* до суми U' .

Перетворення (A) називають *матричним перетворенням* послідовності в послідовність. Однак, поруч з перетворенням (A) використовують й наступні матричні перетворення:

1) перетворення

$$U^{'n}=\sum_k \alpha_{nk}u_k \quad \text{(B)}$$

ряду в послідовність;

2) перетворення

$$u^{'n}=\sum_k \bar{\alpha}_{nk}u_k \quad \text{(C)}$$

ряду в ряд;

3) перетворення

$$U^{'n}=\sum_k \bar{a}_{nk}U_k \quad \text{(D)}$$

послідовності в ряд.

Перетворення (А) називається *трикутним*, якщо $a_{nk}=0$ при $k > n$. Аналогічно визначають трикутні перетворення (B), (C), (D).

Для визначення теорем, які дають необхідні й достатні умови для того, щоб дане матричне перетворення переводило один клас послідовностей в інший, існують три загальні методи.

1. Метод швидко зростаючих послідовностей. Історично – це перший метод для доведення теорем про матричні перетворення, застосований Теплицем у 1911 році [17].

2. Метод, заснований на застосуванні теореми Банаха-Штейнгауза про поточкову збіжність на банаховому просторі послідовностей неперервних лінійних функціоналів [4]. Систематичне застосування даного методу використовувалося для перетворення подвійних послідовностей.

3. Метод Целлера. Він був розроблений у 1953 році німецьким математиком Целлером і базується на використанні теореми Банаха про замкнений графік [32].

Проте методи 2 та 3 незручні для перетворення просторів *c* (послідовностей, що збігаються) та *m* у простір *l* (рядів, що збігаються абсолютно).

Зрозуміло, що найважливіші властивості методу збіжності не можуть мати місце для будь-якого методу підсумовування. Тому накладемо на них деякі обмеження.

Якщо $A' \supset l$, тобто, якщо метод підсумовування *A* підсумовує всі збіжні ряди, то кажуть, що метод *A зберігає збіжність* або консервативний.

Розглянемо деякі теореми, які будуть використовуватися у подальшому вивченні матеріалу.

Теорема 1.1 (*Хана*). Для того, щоб перетворення (В) існувало й переводило усі ряди, що збігаються абсолютно, у послідовності (U'), що збігаються, необхідно й достатньо виконання умов:

1. Існують $\lim \alpha_{nk} = \alpha_k$,
2. $\alpha_{nk} = O(1)$.

При цьому $\lim U'_n = \sum \alpha_k u_k$.

Банаховий простір числових послідовностей називається *ВК-простором*, якщо в ньому із збіжності послідовності по нормі випливає її покоординатна збіжність.

Теорема 1.2 (*Целлера*). Нехай *X* та *У* є *ВК*-просторами та в *X* має місце збіжність за відрізками. Для того, щоб перетворення (В) існувало й переводило *X* в *У*, необхідно й достатньо існування сталої *M* > 0 такої, що умови:

$\alpha)\ A\overset{m}{\boldsymbol{X}} \in Y$,

$\beta)\ \|A\overset{m}{\boldsymbol{X}}\| \le M\ \|\overset{m}{\boldsymbol{X}}\|$,

виконуються для будь-якого відрізку $\overset{m}{\boldsymbol{X}} \in X$ (де відрізок $\overset{m}{\boldsymbol{X}} = \{u_0, u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots\} = \sum_{k=0}^{m} u_k e_k$).

Таким чином, при *X* = *l* за даною теоремою можемо зробити висновок, що *l* є *ВК*-простором і в ньому має місце збіжність за відрізками. Тоді з умов $\alpha)$ та $\beta)$ випливає, що:

а) $Ae_v \in Y$;

б) $\|Ae_v\| = O(1)$.

Обернено, при *X* = *l* з а) та б) випливає виконання умов $\alpha)$ та $\beta)$.

Наслідок 1.1. Для того, щоб перетворення (A) існувало й переводило простір *l* в *ВК*-простір *У*, необхідно й достатньо виконання умов а) та б).

Наслідок 1.2. Для того, щоб перетворення (A) переводило усі ряди, що збігаються абсолютно, у послідовності (U'^n), що збігаються, і виконувалася рівність $\lim U'_n = \sum u_k$ необхідно й достатньо виконання умов 1) та 2) теореми 1.1 з $\alpha_k = 1$.

Слід відмітити, що матричне перетворення називається таким, що *зберігає абсолютну збіжність*, якщо воно перетворює усі ряди (послідовності), що збігаються абсолютно, знов на такі, що абсолютно збігаються. Якщо при цьому сума ряду, що абсолютно збігається, не змінюється, тобто $\sum u'_n = \sum u_n$, то перетворення часто називають *абсолютно регулярним*.

Теорема 1.3. Для того, щоб перетворення (A) існувало й переводило усі ряди, що збігаються абсолютно, у послідовності (U'^n), що збігаються абсолютно, необхідно й достатньо виконання умови

$$\sum_n |\bar{\Delta}\alpha_{nk}| = O(1).$$

При цьому

$$\sum u'_n = \sum (\lim \alpha_{nk}) u_k.$$

Дана теорема вперше була доведена Суноуті [11].

Теорема 1.4. Для того, щоб перетворення (A) існувало й переводило усі послідовності (U_n), що збігаються абсолютно, у послідовності (U'^n), що абсолютно збігаються, необхідно й достатньо виконання умов:

1) збігаються ряди $\sum_{v} \alpha_{nv}$ (якщо $A = (a_{nk})$ – трикутна, то дана умова виконана);

2) $\sum_{n} |\overline{\Delta} \sum_{v=k}^{\infty} \alpha_{nv}| = 0(1)$.

При цьому має місце формула:

$$\lim U'_n = aU + \sum a_k (U_k - U) = (a - \sum a_k) U + \sum a_k U_k .$$

Вперше цю теорему довів Марс [26].

Нехай A – деякий матричний метод підсумовування. Ряд називається *абсолютно сумовним* методом A, якщо перетворений ряд абсолютно збігається, тобто $\sum |u'| < \infty$

При цьому, якщо метод заданий перетворенням (A) або (B), то вважаємо:

$$u' = \Delta \overline{U'_n}$$

Множину всіх рядів (послідовностей), які метод A абсолютно підсумовує, називаються *полем абсолютного підсумовування* методу A й позначається одним із символів $|A|'$, lA або aA.

Якщо будь-яка обмежена послідовність є $|A|$-сумовною, то кажуть, що метод A породжує абсолютну збіжність.

Відмітимо, що регулярний метод, що зберігає абсолютну збіжність, абсолютно регулярний [17].

Множина усіх послідовностей (рядів), які метод A обмежує, називається *полем обмеженості* методу A й позначається одним із символів A'_0, mA або bA. З вищезазначеного зрозуміло, що:

$$|A|' \subset A' \subset A'_0 .$$

Якщо $A' \supset c$, тобто якщо метод підсумовування A підсумовує всі збіжні ряди (послідовності), то кажуть, що метод A зберігає збіжність або *консервативний*. Для методів, які зберігають збіжність, можуть бути дві можливості.

1. Метод A зберігає суму будь-якого збіжного ряду. Тоді метод A називають *регулярним*. Таким чином, метод називається регулярним, якщо він підсумовує всі збіжні ряди до їх звичайної суми.

Якщо регулярний метод A підсумовує до ∞ будь-який ряд $\sum u_n = \infty$, то метод A називається *повністю регулярним*.

2. Метод A не зберігає суми деякого збіжного ряду. Тоді метод A називається *нерегулярним*.

Відмітимо, що нерегулярний методи підсумовування також мають практичне значення. Наприклад, в застосуванні до наближених методів обчислення важливі також методи підсумовування, які можуть змінювати значення величини, яка розглядається, в межах заданої точності [5].

Припустимо тепер, що функції $\phi_n(x)$ задовольняють наступним трьом вимогам:

1) при будь-якій постійній *n*

$$\lim_{x \to \omega} \phi_n(x) = 0;$$

2) при значеннях *x*, достатньо близьких до ω,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\phi_n(x)| \le K \quad (K = const);$$

3) остання

$$\lim_{x \to \omega} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) = 1.$$

Тоді метод підсумовування виявляється регулярним.

Всі вищезазначені ідеї належать Тьопліцу [32], у якого матриця повинна була бути трикутною.

Матричне перетворення називається таким, що *зберігає збіжність*, якщо воно переводить всі збіжні послідовності або ряди в збіжні послідовності, тобто якщо із збіжності послідовності (u_k) або ряд $\sum u_n$ завжди випливає збіжність послідовності (u'_n). Якщо при цьому

$$\lim u'_n = \lim u_k ,$$

то матричне перетворення називається *регулярним*.

Теорема 1. 5. Для того, щоб перетворення (А) існувало і зберігало збіжність, необхідно і достатньо виконання умов

1° існує $\lim\limits_{n} \alpha_{nk} = \alpha_k$,

2° $\sum\limits_{k} |\Delta\alpha_{nk}| = 0(1)$.

При цьому, якщо $\sum u_k = u$, то

$$\lim u'_n = \alpha_0 u + \sum (\Delta\alpha_k)(u_k - u) = (\alpha_0 - \sum \Delta\alpha_k) u + \sum (\Delta\alpha_k) u_k .$$

1.2. Дискретні методи підсумовування розбіжних рядів

Послідовність називається сумовною *методом арифметичних середніх* до числа U' , якщо послідовність

$$H_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U_k , \tag{1.1}$$

збігається до U' . Метод арифметичних середніх позначається через *H*, або H^1 , або (*H*, 1).

До методу знаходження суми Чезаро підходимо наступним чином. Створюємо чезаровські суми порядку α ряду (1.1), поклавши

$$S_n^0 = U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k ,$$

і при $\alpha \geq 1$

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1} .$$

Разом із чезарівськими сумами S_n^α у визначенні методу Чезаро важливі і біноміальні коефіцієнти – числа Чезаро – $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$, що є коефіцієнтами біноміального ряду [17]

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum A_n^\alpha x^n . \qquad (1.2)$$

Чезарівське середнє, скорочено C^α– середнє , визначаємо відношенням

$$\sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha} . \qquad (1.3)$$

Якщо існує скінченна границя $\lim_{\square} \sigma_n^\alpha = U^{'}$, то кажуть, що ряд (1.1) *підсумовується методом Чезаро* порядкуα до числа $U^{'}$.

Метод Чезаро порядку αпозначається через C^α або (C,α). Отже,

$$C^\alpha \left\{ \sum u_n \right\} = \lim_n \sigma_n^\alpha .$$

Відмітимо, що $(C,0)$ – це метод збіжності , так як $A_n^0 = 1$ і

$$\sigma_n^0 = \frac{S_n^0}{A_n^0} = U_n ;$$

метод ¿) – це метод арифметичних середніх, так як $A_n^1 = (n+1)$ і з цього випливає,

$$\sigma_n^1 = \frac{S_n^1}{A_n^1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U_k . \qquad (1.4)$$

Тепер покажемо, що середнє (1.3) можна привести до вигляду (А), тобто до вигляду

$$\sigma_n^0 = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} U_k .$$

Для цього утворюємо формальний добуток рядів

$$\frac{1}{1-x} \sum U_n x^n = \sum x^n \cdot \sum U_n x^n = \sum_n \square \left(\sum_{k=0}^{n} U_k \right) x^n = \sum S_n^1 x^n .$$

Далі, припустивши, що

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}} \sum U_n x^n = \sum \square S_n^{\alpha-1} x^n ,$$

для будь-якого $\alpha = 1,2,\ldots.$ отримаємо

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} \sum U_n x^n = ¿ \frac{1}{1-x} \sum S_n^{\alpha-1} x^n = \sum x^n \cdot \sum S_n^{\alpha-1} x^n = \sum_n ¿¿¿¿¿¿$$

Отже, методом математичної індукції [6] нами доведена формула

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum U_n x^n=\sum S_n^{\alpha} x^n. \tag{1.5}$$

Звідси і з (1.2) виводимо

$\sum_n$ ¿¿

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x, знаходимо

$$S_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} U_k, \tag{1.6}$$

і після ділення на A_n^{α} для (1.4) отримаємо

$$\sigma_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} U_{k.} \tag{1.7}$$

До цих пір передбачалось, що $\alpha=1,2,\ldots$. Проте, за допомогою співвідношення (1.7) можемо середнє σ_n^{α} визначити і для нецілого α, навіть для уявного α. Для цього необхідно визначити значення величини S_n^{α} так, щоб вони мали сенс для комплексного α. Тому для визначення величин S_n^{α} будемо вважати формулу (2.6). Тоді із (1.7) робимо висновок, що метод Чезаро C^{α} визначається для будь-якого комплексного $\alpha Re\alpha>-1$ у вигляді трикутного матричного перетворення (A) послідовності в послідовність [23] з матрицею

$$a_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}. \tag{1.8}$$

Якщо в доведенні співвідношення (1.5) величини U_n замінити на u_n, то замість (1.5) і (1.6) отримаємо відповідно

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\sum u_n x^n=\sum S_n^{\alpha} x^n, \tag{1.9}$$

$$S_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} u_k. \tag{1.10}$$

Отже, метод Чезаро C^{α} у вигляді перетворення (B) ряду в послідовність визначається матрицею

$$\alpha_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}. \tag{1.11}$$

Визначення методу C^{α} при $\alpha=1,2,\ldots$ наведено Чезаро [34], а для будь-яких $\alpha>-1$ дано незалежно один від одного Кноппом [11] та Чепменом [16]. Практично більше розглядають метод C^{α} при $\alpha>-1$, так як тоді $\alpha_{nk}>0$. Означення методів C^{α} і $C_0^{\alpha\square}$ при $\alpha=-1,-2,\ldots.$ і детальне дослідження їх властивостей наведено в статті Люрі [15].

Так як метод Чезаро трикутний [17], то він абсолютно сумовний (коротко $\left|C^{\alpha}\right|$, або $\left|C,\alpha\right|$). Можна сказати, що ряд (1.1) називається C^{α}-сумовний, якщо збігається ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tau_n^{\alpha}$

Ряд (0.1) називається $\left|C^{\alpha}\right|$-сумовним , якщо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\tau_n^{\alpha}\right|<\infty$.При цьому

$C^{\alpha}\left\{\sum u_n\right\}=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tau_n^{\alpha}.$

Означення методу $\left|C^{\alpha}\right|$ при $\alpha=-1,-2\ldots$ і детальне дослідження його властивостей дані в статті Люрі [21].

Метод Вороного-Ньорлунда можна розглядати як узагальнений метод Чезаро. Вперше цей метод розглянув Вороний [6] в 1902 році. Стаття Вороного являла собою коротку замітку в рідкісному виданні. Тому вона не розповсюджувалась серед математиків і залишилась забутою. Метод став відомим завдяки Ньорлунду, який ввів його незалежно від Вороного, і опублікував свою роботу в 1919 році. Робота Вороного стала відомою завдяки її англійському перекладу у 1932 році Тамаркіним з примітками перекладача.

Методом Вороного-Ньорлунда називають трикутний матричний метод, визначений послідовністю комплексних чисел ρ_n, у вигляді перетворення (A) матрицею із чисел

$$a_{nk}=\frac{p_{n-k}}{P_n}, \tag{1.12}$$

де

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k, P_n\neq 0$$

Метод Вороного-Ньорлунда позначається через (WN, p_n). Зокрема, метод C^{α} є методом (WN, p_n) з $p_n = A_n^{\alpha-1}$. Метод $(WN, \frac{1}{n+1})$, за Ріссом [14] називають *методом гармонійних середніх.*

Метод (WN, p_n) з $p_n = 1$ при $n \le \beta$і $p_n = 0$ при $n \ge \beta$називають *методом* Z_p *Сільвермана-Саса*. Зрозуміло, що $Z_1 = E_0$.

В силу (2.20) виводимо

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{P_n} \sum_{v=k}^{n} p_{n-v} = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n-k} p_{n-k-v} = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n-k} p_v$$

а отже, у вигляді перетворення (B) метод (WN, p_n) визначається матрицею чисел (ними визначає цей метод Вороний)

$$\alpha_{nk} = \frac{p_{n-k}}{p_n}. \qquad (1.13)$$

Тому замість (WN, p_n) іноді пишуть (WN, P_n)або просто P.

Подивимося, при яких умова метод (WN, p_n) зберігає збіжність. Застосовуючи теорему 1.1 Кожима-Шура, отримаємо умови

$1^0 \lim_n a_{nk} = \lim_n \frac{p_{n-k}}{P_n} = a_k.$

$2^0 \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} = \frac{1}{P_n} \cdot P_n = 1.$

$3^0 \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| = \frac{1}{|P_n|} \sum_{k=0}^{n} |p_{n-k}| = \varphi(1).$

Виявляється, що умову 1^0можна спростити, а саме, умова 1^0 випливає з існування границі $a_0 = \lim \frac{p_n}{P_n}$. Дійсно, із представлення

$$\frac{p_{n-k}}{P_n} = \frac{p_{n-k}}{P_{n-k}} \frac{p_{n-k}}{P_{n-k+1}} \cdots \frac{p_{n-2}}{P_{n-1}} \frac{p_{n-1}}{P_n}$$

робимо висновок, що існує a_k і

$a_k = a_0 (1 - a_0)^k$

$$\lim_n \frac{p_{n-k}}{P_{n-k}} ¿ a_0 \lim_n \frac{p_{n-k}}{P_{n-k+1}} = \lim_n \left(1 - ¿ \frac{p_{n-k+1}}{P_{n-k+1}}\right) = 1 - a_0 ¿.$$

Отже, доведена

Теорема 1.6. Метод (WN, p_n) зберігає збіжність тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$1^0 \lim\limits_n \frac{p_n}{P_n} = a_0.$

$2^0 \sum\limits_{k=0}^{n} |p_k| = \varphi(P_n).$

Зрозуміло, що умова 2^0 теореми 2.5 відпадає, якщо $p_k \ge 0$. Відмітимо, що з умови 2^0 теореми 2.5 випливає необхідна умова

$$P_m = \varphi(P_n) \text{при всіх } 0 \le m \le n$$

Із теореми 1.6 і теореми Тьопліца випливає

Наслідок 1.3. Метод (WN, p_n), що зберігає збіжність, буде регулярним тоді і тільки тоді, якщо $a_0 = 0$.

Ньорлунд [34] розглянув випадок, коли $a_0 = 0$. У Вороного [8] величини $P_n > 0$ такі, що ряд

$$\sum P_n = \infty \, i \, P_0 + \ldots + P_n = \varphi(n^\lambda)$$

при деякому λ.

Із наслідку 3.1 при $p_k = A_k^{\alpha-1}$випливає теорема 2.1, а при $p_k = \frac{1}{k+1}$ отримаємо, що метод гармонійних середніх регулярний. Метод Z_β також регулярний при $n \ge \beta$,для нього $P_n = \beta$ і $p_n = 0$.

Подивимося, що буде у випадку $a_0 \ne 0$. Для цього обчислимо характеристику методу [17]. Маємо

$\rho(P) = 1 - \sum a_k = 1 - \sum a_0 (1 - a_0)^k = 1 - a_0 : [1 - (1 - a_0)] = 0$

Звідси, враховуючи наслідок 3.1, робимо висновок

Наслідок 1.4. Метод (WN, p_n), що зберігає збіжність, є регулярним або конульовим.

Метод (WN, p_n) нормальний тоді і тільки тоді, коли $p_0 \ne 0$ або $a_{nn} = \frac{1}{P_n} p_0$. Тому метод (WN, p_n) обернений тоді і тільки тоді, якщо $p_0 \ne 0$.

Знайдемо обернену матрицю $(WN, p_n)^{-1} = (\xi_{nk})$. В нашому випадку формула має вигляд:

$$\sum_{\nu=k}^{n} p_{n-\nu}\xi_{nk}=\sigma_{nk}P_n, \tag{1.14}$$

де ліва частина нагадує член добутку Коші [12] двох рядів. Тому застосовуємо наступний штучний прийом. В силу (1.11) маємо

$$\sum p_n x^n \cdot \sum_n \xi_{nk} x^n = \sum_n ¿¿$$

Звідки, позначивши

$$\frac{1}{\sum p_n x^n}=\sum c_n x^n \tag{1.15}$$

(частка існує, якщо $p_0 \neq 0$¿, виводимо

$$\sum_n \xi_{nk} x^n = P_k x^k \cdot \sum c_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} P_k c_{n-k} x^n$$

і після того, як прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, знаходимо

$$\xi_{nk}=P_k c_{n-k} \tag{1.16}$$

Якщо (1.14) замінити через

$$\frac{1}{\sum P_n x^n}=\sum d_n x^n \tag{1.17}$$

і аналогічно отримуємо

$$\eta_{nk}=P_k d_{n-k} \tag{1.18}$$

Формули (1.16) і (1.18) можна також отримати одну з одної , якщо враховувати, що

$$\sum P_n x^n = \sum x^n \cdot \sum p_n x^n$$

звідси

$$\sum d_n x^n = (1-x)\sum c_n x^n$$

і, отже,

$$d_n=\acute{\Delta} c_n, \quad c_n=\sum_{k=0}^{n} d_k.$$

Величини (1.16) суть визначники системи лінійних рівнянь (1.13). Зокрема, при $P_n=A_n^{\alpha}$із (1.17) і (1.12) отримаємо

$$\sum d_n x^n=(1-x)^{\alpha+1}=\sum A_n^{-\alpha-2} x^n$$

в наслідок чого із (1.16) і (1.18) заново виводимо формули (1.6) і (1.9).

Далі, поклавши в (1.11) числа $p_n=\frac{1}{n+1}$, для методу гармонічних середніх, враховуючи (1.12) знаходимо

$\sum c_n x^n = ¿$

звідки

$$c_n=\int_0^1 A_n^{-z-1}dz \tag{1.19}$$

і, отже, для методу гармонійних середніх

$$\xi_{nk}=H_k\int_0^1 A_{n-k}^{-z-1}dz$$

$$\eta_{nk}=H_k\int_0^1 A_{n-k}^{-z-2}dz$$

де $H_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\ \ln(n+1)$.

1.3. Напівнеперервні методи підсумовування розбіжних рядів

Нехай ряд $\sum a_n x^{n+1}$ збігається для малих x до $f(x)$, $q>0$ і

$$x=\frac{y}{1-qy}\ ,\quad y=\frac{x}{1+qx}, \tag{1.20}$$

так що $y=\frac{1}{1+q}$ при $x=1$. Тоді для малих x і y

$$f(x)=\sum_0^\infty a_n\left(\frac{y}{1-qy}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^\infty a_n\sum_{m=n}^\infty \binom{m}{n} q^{m-n}y^{m+1}=¿¿$$
$$¿\sum_{m=0}^\infty y^{m+1}\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^{m-n}a_n=\sum_0^\infty a_m^{(q)}\{(q+1)y\}^{m+1}, \tag{1.21}$$

де

$$a_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\sum_{n=0}^\infty \binom{m}{n} q^{m-n}a_n. \tag{1.22}$$

Якщо

$$\sum a_m^{(q)}=A, \tag{1.23}$$

то будемо говорити, що ряд $\sum a_n$ *сумовний* (*E, q*) до суми A. При $q=1$ це означення зводиться до означення Ейлера [16], а при $q=0$ – до означення звичайної збіжності.

Якщо $a_n=z^n$, то

$$a_m^{(q)}=\frac{(q+z)^m}{(q+1)^{m+1}}$$

і

$$\sum a_m^{(q)}=\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{q+z}{q+1}}=\frac{1}{1-z}$$

тоді і тільки тоді, коли $|q+z|<q+1$. Таким чином, ряд $\sum z^n$ сумовний (*E, q*) в колі с центром – q і радіусом $q+1$. При зростанні q це коло збільшується і при $q\to\infty$ прямує до півплощини $z<1$. Це є область B- або B'- сумовності даного ряду [24].

Рівняння (1.22) можна записати у формі

$$(q+1)^{m+1}a_m^{(q)}=(q+\grave{E})^m a_0.$$

Далі,

$$\frac{1}{q+1}+\frac{q+x}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{(q+x)^m}{(q+1)^{m+1}}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\frac{(q+1)^{m+1}-(q+x)^{m+1}}{1-x}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\sum_{n=1}^{m+1}\binom{m+1}{n}q^{m+1-n}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\right).$$

Тому, замінюючи x на *E* і помічаючи, що

$$\left(1+E+\cdots+E^{n-1}\right)a_0=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}=A_{n-1},$$

одержуємо

$$A_m^{(q)}=\sum_{n=0}^{m}a_n^{(q)}=\left\{\frac{1}{q+1}+\frac{q+E}{(q+1)^2}+\cdots+\frac{(q+E)^m}{(q+1)^{m+1}}\right\}a_0=\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1}q^m A_0+\binom{m+1}{2}q^{m-1}A_1+\cdots+A_m\right\}.$$

Ми будемо називати ряд $A^{(q)}=\sum a_n^{(q)}$ q-*й ейлеровою трансформацією* ряду $A=\sum a_n$. Формальний зв‘язок між обома рядами встановлюється формулами

$$\sum a_n x^{n+1}=\sum a_n^{(q)}\{(q+q)\,y\}^{n+1}=\sum a_n^{(q)}z^{n+1},$$

$$x=\frac{z}{1+q-qz}.$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1.7. (Е*, q*) -метод регулярний.

Дійсно,

$$c_{m,n}=\begin{cases}\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\binom{m+1}{n+1}q^{m-n}>0\, при\, n\le m,\\ 0\, при\, n>m,\end{cases}$$

$$c_{m,n}\to 0\, u\sum c_{m,n}=1-\frac{q^{m+1}}{(q+1)^{m+1}}\to 1\, при\, m\to\infty .$$

Теорема 1.7 міститься як частинний випадок $q^{'}=0$ в наступній теоремі.

Теорема 1.8. Якщо ряд сумовний $(E,q^{'})$, то він сумовний *(E, q)* до цієї ж суми для кожного $q¿q^{'}$.

Теорема 1.9. *(E, q)*-метод володіє наступними властивостями:

$\sum a_n^{(q)}=A$

і

$\sum b_n^{(q)}=A-a_0,$

де $b_n=a_{n+1}$.

Дійсно, ми можемо вважати $a_0=0$, так що $B_n=A_{n+1}$. Тоді одержуємо, що

$$B_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1}q^m A_1+\binom{m+1}{2}q^{m-1}A_2+\cdots+A_{m+1}\right\},$$

звідки

$$B_m^{(q)}-A_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1}q^m a_1+\cdots+a_{m+1}\right\}=(q+1)\,a_{m+1}^{(q)}. \quad (1.24)$$

(I) Якщо справедливо (3.7), то $a_{m+1}^{(q)}\to 0$, і попередня рівність випливає з (1.24).

(II) Рівняння (1.24) можна записати в формі

$B_m^{(q)}=(q+1)\,A_{m+1}^{(q)}-q\,A_m^{(q)},$

звідки, беручи до уваги, що $A_0^{(q)}=0$, випливає, що

$$(q+1)\,A_{m+1}^{(q)}=B_m^{(q)}+\frac{q}{q+1}B_{m-1}^{(q)}+\cdots+\left(\frac{q}{q+1}\right)^m B_0^{(q)}.$$

Це – перетворення

$A_{m+1}^{(q)}=\sum c_{m,n}B_n^{(q)}$

з

$$c_{m,n}=\begin{cases}q^{m-n}(q+1)^{-m+n-1}\, при\, n\le m,\\ 0\, при\, n>m,\end{cases}$$

і виконання умов теореми тут одразу перевіряється [7]. Тому з (1.24) випливає $A_{m+1}^{(q)} \to A$, тобто (1.16).

З теореми 1.9 випливає, що співвідношення $A_n \to A$ *(E, q)* рівносильне співвідношенню $A_{n+1} \to A$ *(E, q)* і тим самим співвідношенню

$$\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{q^{m+1}A_0+\binom{m+1}{1}q^m A_1+\cdots+A_{m+1}\right\} \to A.$$

Тому підставляючи тут m замість $m+1$, ми можемо замінити $A_m^{(q)} \to A$ на

$$A_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^m}\left\{q^m A_0+\binom{m}{1}q^{m-1}A_1+\cdots+A_m\right\} \to A.$$

Зазвичай зручніше всього і визначати «ейлерове середнє» для A_n таким способом, тобто ми можемо говорити, що $A_n \to A$ (E, q), якщо

$$A_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^m}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}q^{m-n}A_n=\text{¿}\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^m A_0 \to A.\text{¿}$$

Підставляючи тоді s_n і t_n замість A_n і $A_n^{(q)}$, одержуємо

$$\Delta^m t_0=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}t_n=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^n s_0=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}\left(1-\frac{q+E}{q+1}\right)^m s_0=\left(\frac{1-E}{q+1}\right)^m s_0=\frac{1}{(q+1)^m}\Delta^m s_0.$$

Теорема 1.10. Якщо ряд $\sum a_n$ сумовний *(E, q*), то $a_n=0\{(2q+1)^n\}$.

З (1.13) випливає, що

$$(q+1)\,a_m^{(q)}=0(1);$$

таким чином, в силу (1.16)

$(q+E)^m a_0=0\{(q+1)^m\}$.

Але

$$a_n=E^n a_0=(E+q-q)^n a_0.$$

Отже,

$$a_n=0\left\{(q+1)^n+\binom{n}{1}q(q+1)^{n-1}+\cdots+q^n\right\}=0\{(c)^n\}.$$

Приклад ряду $\sum z^n[6]$, сумовного (E, q) для $-2q-1<z<1$, показує, що $2q+1$ не можна замінити ніяким меншим числом.

Область (*E, q*)-сумовності ряду $\sum z^n$ при $q \to \infty$ прямує до області його сумовності за Борелем. Це наштовхує на думку, що метод Бореля можна розглядать як граничний випадок методів Ейлера [21].

Дійсно, підставляючи в (1.19) $\frac{m}{x}$ замість q, отримуємо

$$A_m^{(q)} = \frac{1}{\left(1+\frac{m}{x}\right)^m}\left\{\left(\frac{m}{x}\right)^m A_0 + \binom{m}{1}\left(\frac{m}{x}\right)^{m-1} A_1 + \binom{m}{2}\left(\frac{m}{x}\right)^{m-2} A_2 + \dots + A_m\right\} = \text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{m}\right)^m}\left\{A_0 + x A_1 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2!} A_2 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!} A_3 + \dots + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}\right.$$

Звідси

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{x\to\infty}\varphi(m,x) = \text{¿}\lim_{m\to\infty} A_{m,}\text{¿}$$

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{m\to\infty}\varphi(m,x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum\frac{x^n}{n!}A_n.$$

Перший спосіб переходу до границі призводить до звичайної збіжності [5], і другий – до експоненціальному методу підсумовування Бореля [3]. Різні методи Ейлера відповідають граничному переходу $m = qx \to \infty$.

Якщо інтеграл Бореля абсолютно збігається, то кажуть, що ряд $\sum a_n$ *абсолютно сумовний*. Якщо ряд $a_p + a_{p+1} + \dots$ абсолютно сумовний для кожного *p*, тобто якщо

$$\int e^{-x}\left|a^{(p)}(x)\right| dx < \infty$$

для кожного *p*, то кажуть, що ряд $\sum a_n$ *регулярно сумовний*. Таким чином, Борель називав абсолютним підсумовуванням те, що називають регулярним [2].

Експоненціальний та інтегральний методи Бореля визначені в [18]. Якщо

$$e^{-x}\sum A_n\frac{x^n}{n!} \to A,$$

то ми пишемо $A_n \to A(B)$, якщо

$$\int_0^\infty e^{-x}\sum_0^\infty a_n\frac{x^n}{n!}dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-x}\sum_0^\infty a_n\frac{x^n}{n!}dx = A,$$

то ми пишемо $A_n \to A(B')$. Ці методи належать до абсолютно різних типів: перший є *J*-метод з

$$J(x)=e^x,$$

а другий – «моментний метод» [5] з

$$\mu_n=n!,\ \chi(x)=1-e^{-x}.$$

Проте спеціальні властивості показникової функції роблять їх майже рівносильними. Зазначимо, спершу, що має місце

Теорема 1.11. B- і B'- методи регулярні.

Теорема 1.12. B- і B'- методи рівносильні тоді і тільки тоді, коли $e^{-x}a(x)\to 0$.

Проте можна піти далі. Із рівняння (1.16), вважаючи

$$\int_0^x e^{-t}a(t)dt=\varphi(x),$$

маємо

$$e^{-x}A(x)=\varphi(x)+\varphi'(x).$$

Але якщо $\varphi+\varphi'\to A$,то, за теоремою 2.2, $\varphi'\to 0$ і $\varphi\to A$. Звідси випливає

Теорема 1.13. Ряд сумовний (B), сумовний (B') до тієї ж суми.

Протилежне твердження не вірне. Якщо

$$a_n=\sum\frac{(-1)^p(2p+2)^n}{(2p+1)!},$$

то

$$a(x)=\sum\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}e^{(2p+2)x}=e^x\sin e^x,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}a(x)dx=\int_0^\infty \sin e^x dx=\int_1^\infty\frac{\sin u}{u}du,$$

але $e^{-x}a(x)$ не прямує до нуля, так що ряд $\sum a_n$ не сумовний (B). Таким чином, має місце

Теорема 1.14. Існують ряди, сумовні (B'), але не сумовні (B).

Відмітимо наступні твердження.

Теорема 1.15. Твердження

$$a_0+a_1+a_2+\cdots=A(B),$$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=A-a_0 \, (B')$$

рівносильні.

Теорема 1.16. Якщо ряд $\sum a_n$ сумовний *(E, q)*, то він сумовний (B) і (B') до тієї ж суми.

Дійсно,

$$e^{qx}\sum A_n\frac{x^n}{n!}=\sum\frac{(qx)^n}{n!}\sum A_n\frac{x^n}{n!}=\sum c_n\frac{x^n}{n!},$$

де

$$\frac{c_n}{n!}=\frac{A_n}{n!}+\frac{qA_{n-1}}{(n-1)!1!}+\frac{q^2A_{n-2}}{(n-2)!2!}+\cdots+\frac{q^nA_0}{n!}.$$

1.4. Метод підсумовування Бернштейна-Рогозинського

Нехай

$$B_n(x)=\frac{1}{2}\left[S_n(x+a_n)+S_n(x-a_n)\right],$$

де – $S_n(x)$ частинна сума тригонометричного ряду, а $\{a_n\}$ – послідовність додатних чисел, що наближаються до нуля.

Домовимося говорити, що тригонометричний ряд *підсумовується методом Бернштейна-Рогозинського* до числа S в точці x_0,якщо $B_n(x_0)\to S$ при $n\to\infty$.

В. Рогозинський [28] вивчав випадок, коли $a_n=p\frac{\pi}{2\pi}$, де p – непарне число; С. Н. Бернштейн [8] розглядав випадок $a_n=\frac{\pi}{2\pi+1}$; згодом обидва вони переносили деякі зі своїх результатів на випадок

$$a_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ми не маємо на увазі викладати тут всі результати, що стосуються цього методу; вони дуже різні в залежності від того, як вибираються числа a_n. Детальний виклад питань, з методом підсумовування Бернштейна-Рогозинського є у [16, 19]. Ми тут обмежимося доведенням того, що для розглянутого Рогозинським випадку $a_n = p\frac{\pi}{2\pi}$ (p – непарне) цей метод підсумовування дає гарний результат в застосуванні до рядів Фур'є, точніше, має місце

Теорема 1.17. Якщо $f(x)$ - будь-яка сумовна, то ряд $\sigma(f)$ підсумовується до $f(x)$майже всюди методом Бернштейна-Рогозінського при $a_n = p\frac{\pi}{2\pi}$, де p – непарне, тобто

$$\frac{1}{2}\left[S_n\left(x + p\frac{\pi}{2\pi}\right) + S_n\left(x - p\frac{\pi}{2\pi}\right)\right] \to f(x)$$

майже всюди.

Якщо на деякому відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ неперервна, то підсумовування має місце рівномірно на будь-якому відрізку $[a_1, b_1]$, який цілком міститься всередині (a, b).

Щоб переконатися в цьому, нагадаємо тотожність Рогозинського:

$$B_m^{(q)} - A_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1}q^m a_1 + \cdots + a_{m+1}\right\} = (q+1)\, a_{m+1}^{(q)}. \qquad (1.25)$$

$$\frac{1}{2}\left[S_n(x+a) + S_n(x-a)\right] - S(x) = \left[S_n(x) - S(x)\right]\cos n a + R_n(x, a), \qquad (1.26)$$

де $R_n(x, a) \to 0$ рівномірно відносно a при $0 \le a \le \frac{A}{n}$, якщо $\sigma_n(x) \to S(x)$-> S (x), і при цьому $R_n(x, a) \to 0$ рівномірно відносно x на деякому відрізку, якщо $\sigma_n(x) \to S(x)$ рівномірно на цьому відрізку (тут $\sigma_n(x)$ – фейєровська сума порядку n [16]).

Якщо покласти $a_n = p\frac{\pi}{2\pi}$, де p – непарне, то$\cos n a_n = 0$, і звідси відразу випливає

$$\frac{1}{2}\left[S_n\left(x + p\frac{\pi}{2\pi}\right) + S_n\left(x - p\frac{\pi}{2\pi}\right)\right] \to S(x)$$

у кожній точці, де $\sigma_n(x) \to S(x)$, і на будь-якому відрізку, де $\sigma_n(x) \to S(x)$ рівномірно.

Теорему доведено. З її доведення видно, що при $a_n = p\frac{\pi}{2\pi}$, де p – непарне, метод Бернштейна-Рогозинського не слабше, ніж $(C, 1)$; можна було довести, що фактично вони еквівалентні [36]. Якщо взяти $a_n = \frac{\pi}{2\pi + 1}$,то цей метод сильніший, ніж $(C, 1)$ (це було доведено С. Н. Бернштейном).

РОЗДІЛ 2
ПІДСУМОВУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

2.1. Ряди Фур'є

Тригонометричним рядом називають вираз виду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{2.1}$$

де a_n, b_n – постійні числа $(n=0,1,2,\ldots)$, що носять назву *коефіцієнтів ряду*

Якщо такий ряд збігається для всіх x на $-\infty<x<+\infty$, то він зображує функцію, що має період 2π. Тому, бажаючи подати функцію тригонометричним рядом, розглядають або періодичні функції з періодом 2π, або беруть функцію, задану на відрізку довжини 2π, а далі продовжують її періодично [11], тобто вимагають, щоб

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

при будь-якому x.

Тригонометричні ряди відіграють визначну роль не тільки в самій математиці, але і в численних її додатках. Відзначимо зв'язок між тригонометричними і степеневими рядами. Якщо ми розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{2.2}$$

де $c_n=a_n-i\,b_n$, $c_0=\frac{a_0}{2}$ і покладемо $z=\Re^{ix}$, то ряд (2.1) є не що інше, як дійсна частина ряду (2.2) на одиничному колі; чисто уявна частина ряду (2.2) при $z=e^{ix}$ є ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} -¿\, b_n \cos nx + a_n \sin nx, ¿ \tag{2.3}$$

який зазвичай називають *рядом, спряженим до ряду* (2.1).

Часто буває більш зручно надати тригонометричному ряду (2.1)

іншу форму. Саме тому, помічаючи, що з відомої тотожності Ейлера [6]

$e^{ix}=\cos x - i \sin x$

випливає

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2};\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},$$

ми можемо записати ряд (2.1) у вигляді

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+ib_n\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{2},$$

звідки, вважаючи

$$c_0=\frac{a_0}{2},c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}, \tag{2.4}$$

бачимо, що ряд (2.1) приймає вигляд

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}. \tag{2.5}$$

Це так звана *комплексна форма тригонометричного ряду*.

Частинна сума ряду (2.1), тобто

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

приймає тепер вигляд

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{k=+n} c_k e^{ikx}, \tag{2.5}$$

тобто збіжність ряду (2.5) треба розуміти як наближення до границі сум виду (2.6)

Якщо ряд, що зображує $f(x)$, заданий в комплексній формі, тобто якщо ми припускаємо, що

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \tag{2.6}$$

то коефіцієнти c_n, визначаються формулами

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\int ¿\,dt}(n=0,\pm 1,\ldots),¿ \tag{2.7}$$

які можна отримати або відштовхуючись від рівностей (2.2) і підставляючи значення a_n, і b_n, з формул Фур'є, або аналогічно тому, як виводяться самі формули Фур'є [23]. Тому, припускаючи, що

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{2.8}$$

де збіжність рівномірна, помноживши обидві частини рівності (2.8) на e^{-inx}і інтегруючи почленно, знаходимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \text{¿} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx \, \text{¿}$$

Але

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = \begin{cases} 0, \textit{якщо} \, k \neq n, \\ 2\pi, \textit{якщо} \, k = n \end{cases}$$

звідки

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \text{¿} \, 2\pi c_n, \text{¿}$$

що і доводить справедливість формули (2.7). Числа c_n називають *комплексними коефіцієнтами Фур'є функції* $f(x)$.

Якщо $f(x)$ парна, тобто $f(-x)=f(x)$, а $g(x)$ – непарна, тобто $g(-x)=-g(x)$, то $f(x)g(x)$, очевидно, непарна; навпаки, якщо $f(x)$ і $g(x)$ обидві парні або обидві непарні, то $f(x)g(x)$ – парна [7].

Це просте зауваження дозволяє відразу зробити висновок, що у будь-якої парної функції ряд Фур'є містить одні косинуси, а у непарної – одні синуси .

Дійсно, для будь-якої непарної функції $\varphi(x)$ і для будь-якого $a>0$ маємо

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x) dx = 0,$$

а тому для парних $f(x)$ маємо

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \, (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

а для непарних $f(x)$ маємо

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \, (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Крім того, для будь-якої парної $\varphi(x)$ і для будь-якого $a>0$маємо

$$\int_{-a}^{a} \varphi(x) dx = 2 \int_{0}^{a} \varphi(x) dx$$

Тому остаточно: якщо $f(x)$ парна, то

$$\sigma(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

якщо $f(x)$ – непарна, то

$$\sigma(f)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

де

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

2.2. Метод Валле Пуссена

Нехай

$$\chi(t)=\frac{1}{t}\int_0^{t} \varphi_x(u)du,\ \chi(0)=0$$

і $\chi(t)\to 0$ при $t\to 0$.Якщо $\chi(t)$є функція з обмеженою зміною на деякому відрізку $0\le t\le\delta$ то $\sigma(f)$ збігається до $f(x)$ в точці x.

Маємо за означенням

$$t\chi(t)=\int_0^{t} \varphi_x(u)\,du,$$

а тому $\varphi_x(t)=[t\chi(t)]'$ майже скрізь.

Отже,

$$\int_0^{\delta} \varphi_x(u)\frac{\sin nu}{u}du=\int_0^{\delta}[u\chi(u)]'\frac{\sin nu}{u}du=¿¿$$

$$¿\int_0^{\delta} u\,\chi'(u)\frac{\sin nu}{u}du=\int_0^{\delta}\chi(u)\frac{\sin nu}{u}du=¿¿ \qquad (2.9)$$

$$¿\int_0^{\delta}\chi'(u)\sin nu\,du+\int_0^{\delta}\chi(u)\frac{\sin nu}{u}du.$$

Перший з інтегралів правої частини (2.9) наближається до нуля при $n\to\infty$тому що $\chi(u)$ з обмеженою зміною, а отже $\chi'(u)$ сумовна на $(0,\delta)$[32]. Покажемо, що і другий інтеграл прямує до нуля. Для цього зауважимо, що $\chi(u)$ неперервна в точці 0 і має в її околі обмежену зміну. Тому $\sigma(\chi)$збігається до 0 при $u=0$. Але тоді

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} ¿¿¿$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}[\chi(u)+\chi(-u)]\frac{\sin nu}{u}du=0$$

а так як $\varphi_x(u)$ парна, то $\chi(u)$ парна, отже, звідси випливає

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\chi(u)\frac{\sin nu}{u}du=0.$$

Ми бачимо, що

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\varphi_x(u)\frac{\sin nu}{u}du=0,$$

а тому $\sigma(f)$ збігається до $f(x)$, і твердження доведено.

2.3. Єдиність розкладу функції в ряд Фур'є

Розглянемо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \qquad (2.10)$$

коефіцієнти якого прямують до нуля (або хоча б тільки обмежені). Тоді, інтегруючи його почленно [17] два рази, отримаємо

$$\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx+¿b_n\sin nx}{n^2}¿$$

Зрозуміло, що цей ряд збігається абсолютно і рівномірно (в силу обмеженості a_n і b_n); позначимо через $F(x)$ його суму. Це неперервна функція, яку будемо називати *функцією Рімана* для тригонометричного ряду (2.10).

Отже,

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx+¿b_n\sin nx}{n^2}¿ \qquad (2.11)$$

Припустимо, що в деякій точці x_0, функція $F(x)$ має Шварцеву похідну $D^2F(x_0)$[5]. Тоді ми домовимося говорити, що *ряд* (2.10) *сумовний у точці* x_0*, методом Рімана* і його ріманівська сума дорівнює $D^2F(x_0)$.

Теорема 2.1. Ряд Фур'є від будь-якої сумовної функції $f(x)$ підсумовується методом Рімана майже усюди до цієї функції.

Дійсно, нехай

$$f(x)\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx\,. \tag{2.12}$$

Маємо $a_n\to 0$ та $b_n\to 0$, так як це коефіцієнти Фур'є. З теореми [12] ряд Фур'є можна почлено інтегрувати; інакше кажучи , якщо

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\,,$$

то

$$F(x)=C+\frac{a_0}{2}x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\cos nx-a_n\sin nx}{n}\,, \tag{2.13}$$

причому у силу абсолютної неперервності $F(x)$ ряд (2.13) усюди збіжний до неї і навіть рівномірно на відрізку $[-\pi,\pi]$. Далі, якщо $\Phi(x)$ – невизначений інтеграл від $F(x)$, то

$$\Phi(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}\,,$$

і, отже, функція Рімана $\Phi(x)$ для ряду (2.11) є результатом дворазового інтегрування $f(x)$. Але так як $F(x)$ неперервна, то $\Phi'(x)=F(x)$ у кожній точці; далі $F'(x)=f(x)$ майже усюди, таким чином, $\Phi''(x)=f(x)$ майже усюди, але так як $D^2\Phi(x)=\Phi''(x)$ там, де $\Phi''(x)$ існує [19], то $D^2\Phi(x)=f(x)$ майже всюди , а тому ряд (2.13) сумується майже усюди до $f(x)$ методом Рімана.

Теорему доведено.

Користуючись методом підсумовування Рімана, ми можемо вирішити наступне питання: чи можуть існувати два різні тригонометричні ряди, збіжні у кожній точці до однієї і тієї ж самої функції $f(x)$? Відповідь на це питання є негативною. Щоб пересвідчитись у цьому, доведемо наступну важливу теорему:

Теорема Кантора. Якщо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (2.14)$$

збігається до нуля у кожній точці x на проміжку $[0,2\pi]$, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

За теоремою Кантора коефіцієнти ряду (2.13) прямують до нуля (тут можна спиратися навіть на теорему Кантора-Лебега [26]). Будуємо функцію Рімана $F(x)$ для ряду (2.14), вона неперервна на всій неперервній прямій. Ряд (2.14) повинен підсумовуватися до нуля у кожній точці, тобто

$$D^2F(x)=0-\pi\le x\le\pi.$$

Тоді маємо

$$F(x)=Ax+B. \qquad (2.15)$$

Але, з іншого боку, якщо$F(x)$ є функцією Рімана для ряду (2.14), то

$$F(x)=\frac{a_0}{4}x^2+Cx+D-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}, \qquad (2.16)$$

З (2.15) та (2.16) маємо

$$\frac{a_0}{4}x^2+A_1x+B_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}, \qquad (2.17)$$

де A_1 та B_1 – нові константи. Але перша частина (2.17) має період 2π, отже і ліва теж, а це можливо лише при

$$a_0=0\,ma\,A_1=0. \qquad (2.18)$$

Тепер маємо

$$B_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}, \qquad (2.19)$$

Ряд (2.19) збігається рівномірно; тому його коефіцієнти є коефіцієнтами Фур’є від його сум [34], але вони є постійним числом B_1, тому

$$\frac{a_n}{n^2}=\frac{b_n}{n^2}=0(n=1,2,\ldots),$$

звідси

$$a_n=b_n=0(n=1,2,\ldots). \qquad (2.20)$$

З (2.18) та (2.19) випливає, що ряд (2.19) має усі коефіцієнти рівні нулю, таким чином теорему Кантора доведено. Він відразу узагальнив цю теорему, довівши наступні твердження:

Якщо тригонометричний ряд збігається до нуля усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Дійсно, міркуючи, як при доведені теореми Кантора, ми бачимо, що ряд, який розглядаємо, має коефіцієнти, які прямують до нуля, та його функція Рімана $F(x)$ повинна бути лінійною на кожному інтервалі, де ряд збігається до нуля, так як там $D^2F(x)=0$. Але $F(x)$ повинна бути гладкою [9]. Тому вона не може мати кутових точок. Тож, вона не може складатися з різноманітних прямолінійних відрізків, а повинна бути просто лінійною. А якщо так, то доведення закінчується, як у минулій теремі, тобто доводимо, що усі коефіцієнти ряду дорівнюють нулю.

Зауваження. Теорему Кантора можна сформулювати у наступній більш загальній формі: якщо тригонометричний ряд з коефіцієнтами, що прямують до нуля, сумовний до нуля методом Рімана усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Дійсно, при доведені теореми ми спиралися лише на те, що коефіцієнти ряду прямують до нуля та $D^2F(x)=0$ усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок.

Наслідок. Нехай $f(x)$ – функція з періодом 2π, скінченна у кожній точці$[0.2\pi]$. Тоді не існує двох різних тригонометричних рядів, кожен з яких збігається з $f(x)$ на $[0,2\pi]$, окрім, можливо, скінченної кількості точок.

Дійсно, припустимо, що існують два таких тригонометричних ряди; тоді їх різницею є ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (2.21)$$

у якого не усі коефіцієнти дорівнюють нулю, та, однак, він збігається до нуля, окрім, можливо, скінченного числа точок. Але ми вже довели, що це неможливо.

2.4. Локальна властивість абсолютного підсумовування рядів Фур'є

Множину E назвемо *множиною типу* $A.C.$, якщо з абсолютної збіжності тригонометричного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos ¿¿¿ \tag{2.22}$$

на E випливає $\sum \varrho_n < +\infty$. Якщо множина E не є $A.C$ – множиною, то назвемо її N – множиною. Відомий факт [16], що N-множина завжди міри нуль і першої категорії.

З означення N-множини випливає, що існує ряд (2.22), що збігається абсолютно на ній, та такий, що $\sum \varrho_n < +\infty$. Можемо вважати, що такий ряд складається з одних синусів.

Нехай ряд (2.22) задовольняє умові:

$$\varrho_n = 0(\varepsilon_n)(n = 1, 2, \ldots).$$

Якщо з абсолютної збіжності такого ряду на E випливає $\sum \varrho_n < +\infty$, то будемо E називати $A.C.$-множиною відносно послідовності $\{\varepsilon_n\}$.

Фату [41] перший звернув увагу на те, що наявність хоча б однієї точки абсолютної збіжності тригонометричного ряду дозволяє зробити деякі висновки про множинЬ його точок збіжності, а також і збіжності спряженого ряду.

Саме має місце

Теорема Фату. Будь-яка точка абсолютної збіжності ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2.23}$$

є точка симетрії для множини його точок збіжності, для множини точок збіжності спряженого ряду, а також для множини точок абсолютної збіжності даного ряду та спряженого з ним.

Вважаючи для стислості

$$\begin{cases} A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx \\ B_n(x)=b_n\cos nx-a_n\sin nx \end{cases}, A_0=\frac{a_0}{2} \tag{2.24}$$

за допомогою елементарних викладок упевнюємося у тому, що

$$A_n(x+h)+A_n(x-h)=2A_n(x)\cos nh$$

$$B_n(x+h)-B_n(x-h)=-2A_n(x)\sin nh.$$

Припустимо що ряд (2.23) збігається абсолютно при $x=x_0$, тобто

$$\sum\left|A_n(x_0)\right|<+\infty.$$

Тоді зрозуміло, що збіжність $\sum A_n(x_0+h)$тягне за собою збіжність $\sum A_n(x_0-h)$ та аналогічно для $B_n(x)$, це також справедливо і для точок абсолютної збіжності. Використовуючи це просте зауваження, Лузін [24] довів наступні дві теореми:

Теорема Лузіна. 1) Якщо тригонометричний ряд має нескінченну кількість точок абсолютної збіжності, то він або майже усюди збігається, або майже усюди розбігається.

2) Якщо тригонометричний ряд збігається абсолютно у двох точках, відстань між якими не порівняна з π, то він або майже усюди збігається, або майже усюди розбігається.

Послідовність додатних чисел ϱ_n назвемо *майже монотонно спадною*, якщо існує така константа C, що

$$\varrho_{n+1}<C\varrho_n(n=1,2,\ldots)$$

(аналогічно можна означити майже *монотонне зростання*:

$$\varrho_{n+1}>C\varrho_n(n=1,2,\ldots)$$

де $C>0$).

Прийнявши цю термінологію, можемо сформулювати теорему Саса [12].

Теорема Саса. Якщо для ряду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (2.25)$$

послідовність $\{|a_n|\}$ майже монотонно спадає та ряд (2.25) збігається абсолютно хоча б в одній точці, то

$$\sum |a_n|<+\infty$$

Покладемо $|a_n|=\varrho_n$. Маємо за умовою

$$\varrho_{n+1} \geq \frac{1}{C} \varrho_n n \geq 2.$$

Не порушуючи загальності, тут можемо вважати $C \geq 1$; тоді

$$\varrho_{n+1} |\cos(n-1)x| + \varrho_n |\cos nx| \geq$$

$$\geq \frac{\varrho_n}{C}\left[|\cos(n-1)x|+|\cos nx|\right] \geq \frac{\varrho_n}{C}\left[\cos^2(n-1)x+\cos^2 nx\right]=¿$$

$$¿\frac{1}{C}\varrho_n\left[1+\cos x \cos(2n-1)x\right] \geq \frac{1}{C}\varrho_n ¿$$

Якщо ряд (2.25) збігається абсолютно у точці x_0, то при $x_0=0(mod\,\pi)$ теорема тривіальна; якщо ж $x_0 \neq 0(mod\,\pi)$, то з нерівності маємо

$$\varrho_{n-1}|\cos(n-1)x_0|+\varrho_n|\cos n x_0| \geq \frac{1}{C}\varrho_n ¿$$

де $\gamma \neq 0$, робимо висновок, що

$$\sum_{n=1}^{N} \varrho_n \leq \varrho_1+\frac{1}{\gamma}\sum_{n=2}^{N}\left[\varrho_{n-1}|\cos(n-1)x_0|+\varrho_n|\cos n x_0|\right] \leq \varrho_1+\frac{2A}{\gamma},$$

де $A=\sum_{n=2}^{\infty} \varrho_n |\cos n x_0|<+\infty..$

Отже, $\sum_{n=1}^{N} \varrho_n<+\infty.$

Аналогічно доводиться

Теорема 2.2. Якщо $\{|b_n|\}$майже монотонно спадає та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ збігається абсолютно хоча б у одній точці $x_0, x_0 \neq 0(mod\,\pi)$, то $\sum |b_n|<+\infty.$

Дійсно, зауваживши тільки, що

$$s¿^2(n-1)x+¿s¿^2 nx=1-¿\cos x \cos(2n-1)>1-¿|\cos x|,¿¿¿$$

ми бачимо, що наведені вище доведення повторюються слово у слово.

Лема 2.1. Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n \cos(k_n x - a_n) \qquad (2.26)$$

збігається абсолютно у двох точках x_1і x_2 $x_1 - x_2 = \delta \neq 0 (mod \pi)$.

Нехай

$$\lim_{m \to \infty} ¿ \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m}{}' \cos 2 k_n \delta < 1. ¿ \qquad (2.27)$$

Тоді: а) якщо ϱ_n монотонно спадає або б) якщо при будь-якому цілому p та будь-якому n

$$\frac{\varrho_{n-p}}{\varrho_n} < C,$$

то $\sum \varrho_n < +\infty$.

У якості наслідків цієї леми отримаємо наступну теорему Салема [35].

Теорема 2.3. Нехай ряд

$$\sum \varrho_n \cos(nx - ¿¿ a_n) ¿¿$$

збігається абсолютно у двох точках x_1 та $x_2, x_1 - x_2 \neq 0 (mod\, \pi)$. Тоді якщо виконуються одна з умов: а)ϱ_nмонотонно спадна або б)

$\frac{\varrho_{n-p}}{\varrho_n} < C (n = 1, 2, \ldots; p = 1, 2, \ldots)$,то $\sum \varrho_n < +\infty$.

Дійсно, якщо $x_1 - x_2 = \delta \neq 0 (mod\, \pi)$, то

$$\sum_{n=1}^{m} \cos 2 n\delta = D_m (2\delta) - \frac{1}{2},$$

де $D_m(x)$ – ядро Діріхле [8], тому

$$\left| \sum_{n=1}^{m} \cos 2 n\delta \right| = \left| \frac{\sin(2m+1)\delta}{2 \sin \delta} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \delta}, \qquad (2.28)$$

тож,

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \cos 2 n\delta}{m} = 0,$$

і ми знаходимося в умовах леми 2.1.

Теорема 2.4. Якщо числа $\left(k_n \frac{o}{2\pi}\right)$ рівномірно розподілені на відрізку (0,1) і ряд

$$\sum \varrho_n \cos(¿¿k_n x - a_n)¿¿$$

збігається абсолютно у двох точках x_1 та x_2 де $x_1 - x_2 = \delta$, то при виконанні однієї з умов а) чи б) леми 2.1 маємо

$$\sum \varrho_n < +\infty.$$

Наслідок. Якщо ϱ_n задовольняють одному з двох умов леми 2.1, і ряд

$$\sum \varrho_n \cos(¿¿n^p x - a_n)p¿¿$$

збігається абсолютно у двох точках x_1 та x_2 де $x_1 - x_2 \neq 0 (mod \pi)$, то $\sum \varrho_n < +\infty$.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було зроблено огляд монографічної, методичної літератури та наукових публікацій з теорії класичних методів підсумовування розбіжних рядів; визначено особливості поняття збіжності для тригонометричного ряду Фур'є, а також розглянуто метод Валле Пуссена, що стосується підсумовування рядів Фур'є; розкрито питання стосовно єдиності розкладу функції в ряд Фур'є, а також визначено властивості абсолютного підсумовування рядів Фур'є. Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступні твердження:

1) якщо тригонометричний ряд збігається для всіх x на $-\infty<x<+\infty$, то він зображує функцію, що має період 2π. Тому, бажаючи подати функцію тригонометричним рядом, розглядають або періодичні функції з періодом 2π, або беруть функцію, задану на відрізку довжини 2π, а далі продовжують її періодично, тобто вимагають, щоб

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

при будь-якому x;

2) для ряду Фур'є можна застосувати метод підсумовування Валле Пуссена, який полягає у наступному: нехай

$$\chi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \varphi_x(u)du\, , \chi(0)=0$$

і $\chi(t)\to 0$ при $t\to 0$.Якщо $\chi(t)$є функція з обмеженою зміною на деякому відрізку $0\le t\le\delta$ то $\sigma(f)$ збігається до $f(x)$ в точці x.;

3) якщо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

збігається до нуля у кожній точці x на проміжку $[0,2\pi]$, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю. Це твердження можна сформулювати у наступній більш загальній формі: якщо тригонометричний ряд з коефіцієнтами, що прямують до нуля, підсумовується до нуля методом

Рімана усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок, то усі його коефіцієнти дорівнюють нулю;

4) нехай $f(x)$ – функція з періодом 2π, скінченна у кожній точці $[0.2\pi]$. Тоді не існує двох різних тригонометричних рядів, кожен з яких збігається з $f(x)$ на $[0,2\pi]$, окрім, можливо, скінченної кількості точок;

5) якщо тригонометричний ряд має нескінченну кількість точок абсолютної збіжності, то він або майже усюди збігається, або майже усюди розбігається. Якщо тригонометричний ряд збігається абсолютно у двох точках, відстань між якими не порівняна з π, то він або майже усюди збігається, або майже усюди розбігається

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андриенко В. А. О скорости приближения функций (C,1)-средними их ортогональных разложений / В. А. Андриенко // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1967. – № 8. – С. 3-15.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : Наука, 1961. – 326 с.
3. Барон С. Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости / С. Барон // Изв. АН ЭстССр. Сер. техн. и физ.-матем. наук. – 1960. – № 1. – С. 47-68.
4. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов / С. Барон. – М. : Учпедгиз, 1965. – 128 с.
5. Барон С. Теория о множествах суммируемости для методов A^{α} . // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1970. – С. 165-178.
6. Барон С. О множителях суммируемости для метода Чезаро отрицательного порядка / С. Барон, Т. Таммай // Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем и техн. н. – 1962. – 11, № 1. – С. 33-36.
7. Вихманн Ф. О консервативности матриц относительно сходимости по мере / Ф. О. Вихманн // Изв. АН ЭстССР. физ., матем. – 1971, 20. – № 3. – С. 275-278.
8. Волков И. И. Некоторые вопросы линейных матричных преобразований / И. И. Волков // Матем. сб. – 1958, 11. – № 1. – С. 85-112.
9. Волков И. И. К вопросу суммирования расходящихся рядов методом (C, α). / И. И. Волков / Тр. Моск. ин-та механиз. и электрифик. с. х. – 1959, 4. – № 1. – С. 137-146.
10. Давыдов Н. А. Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах

последовательностей / Н. А. Давывов // Украинский математический журнал. – 1978, 30. – № 6. – С. 723-730.

11. Давыдов Н. А. Неэффективные регулярные линейные интегральные преобразования / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1968. – № 3. – С. 189-200.
12. Давыдов Н. А. О включении и разности методов Кожима суммируемости рядов / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1967, 19. – № 4. – С. 29-47.
13. Давыдов Н. А. Об одном свойстве включения методов суммирования, определяемых нормальными матрицами / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1969. – № 2. – С. 685-690.
14. Давыдов Н. А. О включении и разности методов Теплица суммируемости рядов / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1968. – № 4. – С. 460-471.
15. Давыдов Н. А. Равносильность (C, α) и (A) / Н. А. Давыдов // Украинский математический журнал. – 1972. – № 5. – С. 221-222.
16. Давидов М. А. Включення методів Чезаро методу в нижню трикутну матрицю Тьопліца. Нормальні методи Тьопліца, рівносильні методам Чезаро / М. А. Давидов // Украинский математический журнал. – 1973. – № 8. – С. 464-468.
17. Евграфов М. А. Об обращении теоремы Абеля для рядов, имеющих пропуски / М. А. Евграфов // Изв. АН СССР. – Т. 16. – 1952. – С. 521-524.
18. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М. : Наука, 1965. – 312 с.
19. Кангро Г. О. суммировании бесконечных рядов при помощи матричних методов / Г. О. Кангро // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1955. – № 37. – С. 150-190.

20. Кангро Г. О. некоторых исследованиях по теории суммируемости / Г. О. Кангро // Изв. АН ЭстССР. физ., матем. – 1967, 16. – № 3. – С. 255-266.
21. Кангро Г. О. Теория суммируемости последовательностей и рядов / Г. О. Кангро // Итоги науки и техн. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С. 5-70.
22. Кангро Г. О. Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса / Г. О. Кангро, М. Тыннов // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1961. – № 102. – С. 249-262.
23. Кауфман Б. Л. Сравнение по силе некоторых методов суммирования расходящихся рядов с методами чезаровских средних / Б. Л. Кауфман // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1959. – № 5. – С. 131-145.
24. Коханівський О. П. Умова рівносильності логарифмічних методів підсумовування / О. П. Коханівський // Украинский математический журнал. – 1974. – № 6. – С. 229-234.
25. Кузьмич В. И. О включении и равносильности методов Чезаро абсолютного суммирования рядов / В. И. Кузьмич. – [В кн: Приближенные методы математического анализа]. – К. : Изд-во Киев. пед. ин-та, 1979. – С. 18-26.
26. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. – М. : Мир, 1960. – 358 с.
27. Кулль И. Г. Умножение суммируемых двойных рядов / И. Г. Кулль // Уч. зап. Тартукс. ун-та. – 1958. – № 62. – С. 3-59.
28. Ламп Ю. Матричне преобразования обобщенных последовательностей / Ю. Ламп / Тр. Таллинск. политехн. ин-та. – 1971. – В. А313. – С. 73-80.
29. Огиевецкий И. И. О включениях между регулярними методами / И. И. Огиевский // Уч. зап. Казанск. ун-та. – 1964, 124. – № 6. – С. 241-265.

30. Папласкаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега / А. Б. Папласкаускас. – М. : Наука, 1966. – 214 с.
31. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сеге. – М.- Л. : Гостехиздат. – 1950. – 234 с.
32. Реймерс Э. Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов / Э. Реймерс // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1961. – № 102. – С. 29-42.
33. Реймерс Э. Новые общие методы суммирования / Э. Реймерс // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 119-154.
34. Реймерс Э. Континуальные методы суммирования / Э. Реймерс // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1967. – № 206. – С. 50-89.
35. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Наука, 1975. – 416 с.
36. Слепенчук К. М. Абсолютная суммируемость рядов методами Чезаро отрицательного порядка / К. М. Слепенчук // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1965. – № 12. – С. 29-36.
37. Сырмус Т. Об абсолютной суммируемости простых и двойных последовательностей методами Хаусдорфа / Т. Сырмус // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1967. – № 93. – С. 13-22.
38. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера / И. Таммерайд // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1971. – № 277. – С. 161-170.
39. Тюрнпу Х. Некоторые типы множителей суммируемости для метода Рисса второго порядка / Х. Тюрнпу // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 253-263.
40. Тяхт Т. Мультипликаторы базисов суммирования и множители суммируемости / Т. Тяхт // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1975. – № 355. – С. 157-164.
41. Харди Г. Х. Расходящиеся ряды / Г. Х. Харди. – М. : Просвещение, 1951. – 386 с.

42. Харшиладзе Ф. И. Множители равномерной сходи мости / Ф. И. Харшиладзе // Тр. Тбилисск. матем. ин-та. – 1960. – № 27. – С. 195-208.
43. Эспенберг Х. О множителях суммируемости для метода Эйлера-Кноппа / Х. Эспенберг // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 241-249.
44. Эспенберг Х. О множителях суммируемости в последовательности для метода Эйлера-Кноппа / Х. Эспенберг // Сб. науч. тр. Эст. с.-х. акад. – 1963. – № 131. – С. 73-81.
45. Юримяэ Э. Заметки о корегулярных обобщенных матричних методах суммирования / Э. Юримяэ // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1965. – № 177. – С. 62-66.
46. Юримяэ Э. Множество совершенства для методов, сохраняющих сходимость / Э. Юримяэ // Уч. зап. Тартуск. ун-та. – 1971. – № 277. – С. 115-124.
47. Lorentz G.G. Direct theorems on methods of summability II. – Canad. J. Math. – 1951, 3. – №2. – P. 236-256.
48. Wood B. On l-l summability. –Proc. Amer. Math. Soc. – 1970, 25. – P. 433-436.

ДОДАТКИ

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, ______________________Березовська Аліса Валеріївна____,
учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:
– дотримуватися:
- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:
- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;
– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;
– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;
– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;
– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;
– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;
– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;
– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;
– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;
– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;
– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;
– не підроблювати документи;
– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;
– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;
– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;
– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;
– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;
– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;
– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

20. 04. 2020		Березовська А.В.
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)