МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

"ВІЛЬНІ ДОБУТКИ ТА ВІЛЬНІ ГРУПИ"

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти "бакалавр"

Виконала: студентка 4 курсу 421 групи

Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійної (наукової) програми

Коваленко А.С.

Керівник к. ф.-м. н., доц. Котова О. В.

Рецензент к. ф.-м. н., доц. Вейцбліт О. Й.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Спочатку алгебра була наукою про розв’язування рівнянь. Із дослідження лінійних рівнянь та їх систем виросла уже відома нам лінійна алгебра – це одна з основ сучасної математики. Дослідження рівнянь вищих степенів привело в першій половині XIX ст. до виникнення поняття групи. Паралельно з цим у XIX ст. відбувається активне розширення поняття числа (комплексні числа, класи лишків, кватерніони тощо) і формування понять поля і кільця. На поч. XX ст. це привело до появи загального поняття алгебричної структури і формування нового обличчя алгебри, коли вона з науки про розв’язування рівнянь перетворилася в науку про властивості операцій на множинах.

Серед усіх типів задач про вільні групи особливе місце посідають задачі побудови конкретних зображень таких груп. Оскільки вільна група рангу два містить вільну підгрупу зліченного рангу, а тому і вільні підгрупи довільних скінченних рангів, то, як правило, розглядають зображення тими чи іншими об’єктами саме вільної групи рангу два. Добре відомі зображення Магнуса цієї групи формальними степеневими рядами над кільцем цілих чисел від змінних, які не комутують, за допомогою якого було охарактеризовано її нижній центральний ряд, або зображення Санова невиродженими цілочисельними матрицями другого порядку, яке дає змогу встановити, що вільні групи апроксимуються скінченними p-групами для довільного простого p. Існування зображення вільної групи рангу 2 підстановками нескінченного степеня гарантується теоремою Келі про зображення груп підстановками.

Мета роботи: полягає у вивченні прямих та вільних добутків груп.

Відповідно до мети поставлено *основні завдання роботи:*

- дослідити літературу з теми дослідження;
- вивчити основні поняття теорії груп;
- вивчити ізоморфізм вільних добутків;
- вивчити теорему Нільсена-Шрейера;
- розглянути теорему про підгрупи вільного добутку, яка доведена в роботі Куроша і є основною в теорії вільних добутків. Інші доведення запропоновано в роботах Бера і Леві і Такахасі.

Об'єкт дослідження: групи та теоретико-групові конструкції.

Предмет дослідження: вільні добутки груп.

Робота складається з вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг роботи 47 сторінок.

Розділ 1
Вільні добутки

1.1. Аналіз літератури з теми дослідження

З математиків, що займалися вивченням теорії груп, можна виділити Леонарда Ейлера, Карла Фрідріха Гауса, Жозефа Луї Лагранжа, Нильса Хенрика Абеля і Евариста Галуа.

Однією з первинних задач, що зумовила появу теорії груп, була задача отримати рівняння степеня m, яке б мало коренями m коренів даного рівняння степеня n $(m<n)$. Цю задачу в простих випадках розглянув Худде у 1659 році.

Артур Келі і Огюстен Луї Коші є одними із перших математиків, хто зазначив важливість теорії груп. Далі цей предмет був популяризований Жозефом Альфредом Серре, Марі Е. К. Жорданом, чия праця “Дія над підстановками” стала класикою, і Ойгеном Нетто у 1882 році.

На початку XX століття теорією груп займались Софус Лі, Давид Гільберт, Еммі Нетер, Еміль Артин, Людвиг Сілов.

Із сучасників можна виділити українських математиків Завало С.Т. [11], [12], [13], [14], що є автором 10 робіт по теорії груп, ряду статей з методики викладання математики, 11 підручників і посібників та Лиман Ф. М.[19], [20], що є автором 70 наукових і науково-методичних праць з теорії груп, математичної логіки і теорії алгоритмів і вищої математики. Також серед сучасних українських математиків свій вклад внесли Волошина Т. В.[8], Костарчук В. М.[17], Назаренко О. М.[22], Пилипів В. М.[26], [27] та Філозоф К. Ф.[30].

1.2. Різні підходи до означення вільного добутку

Означення вільного добутку

Прямі добутки груп грають в теорії груп дуже велику роль. Іншою корисною конструкцією цього типу є вільний добуток груп. Подібно прямому добутку вільний добуток дає деяку можливість із заданих груп побудувати нову групу. Він відрізняється від прямого добутку тим, що в його означенні відсутня умова комутативності елементів, які входять до різних прямих множників.

Означення 1.1 Група G називається *вільним добутком* своїх підгруп A_α, відмінних від E (α — індекс), якщо підгрупи A_α в сукупності породжують всю групу G, тобто

$$\forall g \in G,\ \exists \alpha_i \in A_{(\alpha_i)},\ i=1,\ 2,\ldots,n,\ \ g=a_1 a_2 \ldots a_n\,, \quad (1.1)$$

елемент g *єдиний* запис виду (1.1) при умові, що всі елементи a_i відмінні від одиниці і поруч не можуть стояти два елементи із однієї підгрупи A_α. Хоча, добуток може містити декілька множників, що входять в одну таку підгрупу [3].

Для запису вільного добутку використовується символ

$$G=\prod_\alpha {}^{*} A_\alpha, \quad (1.2)$$

а якщо група G є вільним добутком скінченного числа своїх підгруп $A_1, A_2, \ldots, A_k$, то символ

$$G=A_1 * A_2 * \ldots * A_k\,.$$

Підгрупи A_α називаються *вільними множниками* групи G, що входять у вільний розклад (1.2). Вираз (1.1) (при зроблених щодо нього припущеннях) є *нескоротним записом* елементу g відносно розкладу (1.2), число n — *довжина* елементу g в цьому розкладі (позначення: $n=l(g)$) [13].

Теорема Діка. *Якщо група G задається деякою системою визначальних відношень, а група G' задається відносно тих же символів окрім цих відношень ще деякими іншими, то група G' ізоморфна фактор-групі групи G.*

Якщо представити групи G і G' фактор-групами однієї й тієї ж вільної групи W,

$$G \simeq W/H,\ \ G' \simeq W/H',$$

то нормальний дільник H міститься в нормальному дільнику H'.

З єдиності нескоротного запису елементу випливає, що перетин будь-якого вільного множника A_α із (1.2) з підгрупою, породженою в G всіма іншими множниками цього розкладу, рівний E [5].

Нехай група G розкладна у вільний добуток власних підгруп. Якщо (1.2) є її розклад, то беремо два елементи a_1 і a_2, що належать до різних вільних множників із (1.2) та відмінних від одиниці. З означення 1.1 випливає, що добутки $a_1 a_2$ і $a_2 a_1$ будуть різними елементами групи G, тобто група G обов'язково не комутативна, навіть якщо всі вільні множники A_α із (1.2) абелеві. Далі, всі добутки

$$a_1 a_2,\ a_1 a_2 a_1 a_2,\ \dots,\ (a_1 a_2)^n, \dots$$

також є різними елементами групи G, тобто група G обов'язково містить елементи нескінченного порядку, навіть якщо всі вільні множники A_α періодичні. Таким чином, *як абелеві, так і періодичні (в тому числі й скінченні) групи нерозкладні у вільний добуток* [7].

До числа груп, що розкладаються у вільний добуток, належать вільні групи, а саме *вільна (нециклічна) група є вільним добутком нескінченних циклічних груп*. Нехай насправді у вільній групі W задано систему вільних, що утворюють x_α. Якщо $A_\alpha = \{x_\alpha\}$, то група W породжується, очевидно, підгрупами A_α, а будь-який елемент із W, тобто будь-яке слово відносно символів x_α, однозначно записується у вигляді добутку степенів елементів x_α. Отже, група W є вільним добутком своїх нескінченних циклічних підгруп A_α.

Як і у випадку прямих добутків, ми маємо право говорити *про вільний добуток будь-яких наперед заданих груп* на основі конструкції , що є натуральним узагальненням тієї конструкції [14].

Нехай задано довільну множину груп A_α. Називатимемо *словом* упорядковану систему елементів

$$w = a_1 a_2 \dots a_n, \qquad (1.3)$$

де *довжина* $n \geqslant 1$, довільне a_i є відмінний від одиниці елемент із деякої групи A_{α_i} і два сусідні елементи a_i і a_{i+1} належать до різних груп A_α.

Вважатимемо, що у випадку $n=0$ *порожнє слово*. Якщо дано слова (1.3) і

$$w'=a'_1 a'_2 \ldots a'_m, \qquad (1.4)$$

то визначаємо *добуток* w на w' наступним чином: нехай

$$a'_1=a_n^{-1}, a'_2=a_{n-1}^{-1}, \ldots, a'_i=a_{n-i+1}^{-1}, \qquad 0\leqslant i\leqslant min(n,m),$$

але $a'_{i+1}\neq a_{n-i}^{-1}$. Якщо елементи a_{n-i} і a'_{i+1} належать до різних груп A_α, то

$$ww'=a_1 a_2 \ldots a_{n-i} a'_{i+1} a'_{i+2} \ldots a'_m;$$

якщо ж a_{n-i} і a'_{i+1} лежать в одній групі A_α і $a_{n-i} a'_{i+1}=\overline{a}$, то

$$ww'=a_1 a_2 \ldots a_{n-i-1} \overline{a}\, a'_{i+2} \ldots a'_m.$$

Інакше кажучи, для того, щоб отримати добуток слова w на слово w' потрібно написати ці слова одне за іншим і потім виконати необхідні *скорочення та об'єднання* [23].

Роль одиниці при так означеному множенні слів грає порожнє слово. Оберненим для слова (1.3) є слово

$$w^{-1}=a_n^{-1} \ldots a_2^{-1} a_1^{-1}.$$

Доведення асоціативності множення слів є технічно дуже складним. Обійти ці складності можна наступним чином.

Позначимо через M множину всіх означених вище слів, а через S_M — групу всіх взаємно однозначних відображень множини M на себе. Нехай A_α — одна із заданих груп, a — елемент з A_α, відмінних від 1. Елемент a означає таке відображення множини M в себе: якщо слово w з записом (1.3) закінчується не на елемент із A_α, зокрема, якщо воно порожнє, то відображаєм w в слово

$$wa=a_1 a_2 \ldots a_n a.$$

Якщо ж $a_n\in A_\alpha$, причому в A_α $a_n a=a\neq 1$, то образом слова w вважаємо слово

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a'.$$

Якщо, $a_n\in A_\alpha$, але $a_n a=1$, то образом w буде слово

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1}.$$

З іншого боку, якщо $a=1$, то будемо вважати, що йому відповідає тотожне відображення множини M на себе [5].

Якщо b — будь-який інший елемент з групи A_α, то відображення, що відповідає добутку ab, буде добутком відображень, що відповідають елементам a і b, у сенсі їх послідовного виконання. Зокрема, послідовне виконання відображень, що відповідають елементам a і a^{-1}, дає тотожне відображення, а тому відображення, що відповідає будь-якому елементу a із A_α, буде взаємно однозначним відображенням множини M на себе, тобто буде елементом групи S_M. Різним елементам із групи A_α відповідають різні відображення, оскільки відображення, що відповідає елементу a, відмінному від одиниці, переводить порожнє слово в слово a.

Отримали ізоморфне відображення групи A_α на деяку підгрупу $\hat{A}_\alpha$ групи S_M; образ елемента a при цьому відображенні позначимо через $\hat{a}$. Виконавши це для всіх α, позначимо через $\hat{G}$ підгрупу групи S_M, породжену всіма підгрупами $\hat{A}_\alpha$. Будь-який елемент із $\hat{G}$ записується у вигляді слова відносно елементів із $\hat{A}_\alpha$, при чому однозначно: якщо w — будь-яке слово із M і (1.3) — його запис, то добуток

$$\hat{a}_1 \hat{a}_2 \ldots \hat{a}_n$$

буде підстановкою, що переводить порожнє слово в слово w. Інакше кажучи, група $\hat{G}$ є вільним добутком своїх підгруп $\hat{A}_\alpha$ [28].

Множення в групі $\hat{G}$ виконується точно по тим законам, які вказані вище в означенні множення слів. Таким чином, множина M всіх слів є тепер групою, яку ми позначимо через $\overline{G}$. Слова довжини 1, що відповідають всім елементам однієї з груп A_α, складають разом з порожнім словом підгрупу $\overline{A}_\alpha$ групи $\overline{G}$, ізоморфну групі A_α. Отриманий вище ізоморфізм між групами $\overline{G}$ і $\hat{G}$ показує, що *група $\overline{G}$ є вільним добутком своїх підгруп $\overline{A}_\alpha$, ізоморфних заданим групам A_α* [4].

Тепер покажемо, що означення вільного добутку можна було б дати і в іншій формі, що використовує твірні і відношення, а саме наступним чином.

Нехай

$$G=\prod_{\alpha}{}^{*} A_{\alpha}$$

і група A_α задається системою твірних $\mathfrak{M}_\alpha$ і системою визначальних відношень Φ_α в цих твірних. Тоді об'єднання $\mathfrak{M}$ всіх множин $\mathfrak{M}_\alpha$ буде системою твірних групи G, а об'єднання Φ всіх множин Φ_α — її системою визначальних відношень. І навпаки, якщо група G задається такою системою твірних $\mathfrak{M}$ і такою системою визначальних відношень Φ, що $\mathfrak{M}$ розкладається на власні підсистеми $\mathfrak{M}_\alpha$, що перерізуються, а Φ — на підсистеми Φ_α, що перерізуються, причому в кожне відношення з Φ_α входять лише твірні з $\mathfrak{M}_\alpha$, то група G ізоморфна вільному добутку груп A_α, де A_α — група із системою твірних $\mathfrak{M}_\alpha$ і системою визначальних відношень Φ_α [6].

Обидва твердження теореми випливають з наступних міркувань. Нехай дано систему множин $\mathfrak{M}_\alpha$, що не перетинаються, і для кожного α деяка множина відношень Φ_α, що написані за допомогою символів з $\mathfrak{M}_\alpha$. Позначимо об'єднання всіх $\mathfrak{M}_\alpha$ через $\mathfrak{M}$, об'єднання всіх Φ_α через Φ. Тоді існує група G, що має $\mathfrak{M}$ системою твірних і Φ системою визначальних відношень. Позначимо, з іншого боку, через $\overline{A}_\alpha$ групу з системою твірних $\mathfrak{M}$ і системою визначальних відношень Φ_α і через $\overline{G}$ вільний добуток всіх груп $\overline{A}_\alpha$,

$$\overline{G}=\prod_{\alpha}{}^{*}\overline{A}_{\alpha},$$

що існує з огляду на викладену вище конструкцію. Тоді системою твірних для групи $\overline{G}$ буде $\mathfrak{M}$, але для отримання системи визначальних відношень необхідно систему Φ доповнити ще деяким числом відношень. Тому, за теоремою Діка, група $\overline{G}$ ізоморфна фактор-групі групи G. Якщо A_α є підгрупа групи G, породжена множиною $\mathfrak{M}_\alpha$, то при природному гомоморфному відображенні групи G на групу $\overline{G}$ підгрупа A_α буде гомоморфно відображатися на підгрупу $\overline{A}_\alpha$. Оскільки всі відношення із системи Φ_α, що є системою визначальних відношень для $\overline{A}_\alpha$, виконуються і в A_α, то це відображення буде просто ізоморфним. Довільний елемент з G може бути записаний не одним способом — у вигляді слова за допомогою елементів з підгруп A_α. Цей елемент при гомоморфному відображенні G в $\overline{G}$ переходить у відповідне слово відносно елементів із $\overline{A}_\alpha$. Однак, оскільки, в $\overline{G}$ різні слова, складені з елементів із $\overline{A}_\alpha$, є різними елементами групи, то це буде мати місце і в G для слів, що складаються з елементів підгруп A_α. Цим доведений ізоморфізм груп G і $\overline{G}$ [10].

Можливий інший підхід до поняття вільного добутку, а саме:

Якщо група G породжується підгрупами A_α (α — індекс), то G тоді і тільки тоді буде вільним добутком цих підгруп, якщо, при будь-якій групі H і будь-яких гомоморфних відображеннях ϕ_α кожної з груп A_α в групу H, існує гомоморфне відображення ϕ групи G в групу H, що збігається з ϕ_α на кожній підгрупі A_α.

Дійсно, якщо

$$G=\prod_\alpha {}^* A_\alpha$$

і якщо група H і гомоморфізми ϕ_α задані, то шуканий гомоморфізм ϕ визначається так: якщо $w=a_1 a_2 \ldots a_n$ — слово з G, причому $a_i \in A_{\alpha_i}$, $i=1,\ 2,\ldots,n$, то

$$w\phi=a_1\phi_{\alpha_1}\cdot a_2\phi_{\alpha_2}\ldots a_n\phi_{\alpha_n}.$$

Для доведення оберненого твердження потрібно в якості H взяти вільний добуток груп A_α в сенсі даної вище конструкції, а в якості гомоморфізмів ϕ_α — тотожні відображення груп A_α на себе. Гомоморфізм ϕ, існування якого тепер припускається, перетворюється насправді в ізоморфне відображення G на H [12].

Властивості вільних добутків. Модулярна група

Користуючись кожного разу найбільш відповідної з поданих вище форм визначення вільного добутку, можна довести наступні найпростіші властивості вільних добутків:

I. *Якщо $G=\prod_\alpha {}^* A_\alpha$ і якщо всяка підгрупа A_α сама розкладена у вільний добуток, $A_\alpha=\prod_\beta {}^* B_{\alpha\beta}$, то група G буде вільним добутком всіх*

$B_{\alpha\beta}$. Це новий вільний розклад групи G називається *продовженням* вихідного вільного розкладу.

II. *Якщо задано вільний розклад групи* G*, то ми отримаємо її новий вільний розклад, розбиваючи множину вільних множників даного розкладу на підсистеми, що перетинаються, і беручи добуток всіх множників всередині кожної з підсистем.* Зокрема, всяка група, що розкладається у вільний добуток, може бути представлена як вільний добуток двох груп.

III. *Якщо* $G = \prod_{\alpha}{}^{*} A_{\alpha}$ *і якщо в кожному з множників* A_{α} *вибрана підгрупа* A'_{α}, $E \subseteq A'_{\alpha} \subseteq A_{\alpha}$, *то підгрупа, утворена в* G *всіма підгрупами* A'_{α}, *буде вільним добутком цих груп.*

IV. *Якщо* $G = A * B$ *і якщо* N *є нормальним дільником, утворений в* G *підгрупою* B, *то* $A \simeq G/N$.

Дійсно, перехід до фактор-групи по N рівносильний з накладанням відношень, що прирівнюють одиниці всі твірні елементи групи B. Після цього зберігаються тільки твірні і визначальні відношення групи A [13].

Цікавим прикладом групи, що розкладається у вільний добуток, є *модулярна група*, тобто група дробово-лінійних перетворень комплексної площини:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad (1.5)$$

де a, b, c, d — цілі раціональні числа і визначник $ad - bc = 1$. Це ж перетворення (1.5) може бути записане також у вигляді

$$z' = \frac{-az-b}{-cz-d}$$

Послідовне виконання дробово-лінійних перетворень (1.5) і

$$z'' = \frac{\bar{a}\,z' + \bar{b}}{\bar{c}\,z' + \bar{d}} \qquad (1.6)$$

призводить до перетворення

$$z'' = \frac{(\bar{a}\,a + \bar{b}\,c)\,z + (\bar{a}\,b + \bar{b}\,d)}{(\bar{c}\,a + \bar{b}\,d)\,z + (\bar{c}\,b + \bar{d}\,d)}; \qquad (1.7)$$

його коефіцієнти отримані із коефіцієнтів перетворень (1.6) і (1.5) за правилом множення матриць, а тому його визначник рівний 1. Якщо ми домовимось називати перетворення (1.7) добутком перетворення (1.6) на перетворення (1.5), то враховуючи асоціативність множення матриць це множення перетворень буде також асоціативним. Легко побачити, що зміна знаків у всіх коефіцієнтів одного з перетворень (1.5), (1.6) приводить лише до такої ж зміни знаків у перетворені (1.7), тобто що ми насправді маємо право говорити про множення дробово-лінійних перетворень комплексної площини [27].

$$z=\frac{dz'-b}{-cz'+a}.$$

Отже, розглянуті нами дробово-лінійні перетворення, утворюють групу. Дана група M називається *модулярною групою* і грає вагому роль в теорії автоморфних функцій. Із всього сказаного вище випливає, що група M ізоморфна фактор-групі групи цілочислових матриць другого порядку з рівним одиниці визначником по її нормальному дільнику, що складається з одиничної матриці і матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

ці дві матриці і тільки вони відповідають тотожному дробово-лінійному перетворенню [8].

Позначимо через s перетворення

$$z'=-\frac{1}{z},$$

через t перетворення

$$z'=z+1.$$

Тоді $s^2=1$, а t^n є перетворення $z'=z+n$. Доведемо, що *елементи s і t складають систему твірних для групи M*. Якщо v є довільний елемент групи M і якщо (1.5) є його запис, то покладемо спершу, що $d=0$ [5]. Тоді $bc=-1$, а тому, використовуючи можливість змінювати знаки у всіх коефіцієнтів перетворення, ми отримуємо $b=-1$, $c=1$, тобто v є перетворенням

$$z' = \frac{az-1}{z}.$$

Тепер легко перевірити, що

$$v = t^a s.$$

Якщо $d \neq 0$, то нехай спершу $|b| \geqslant |d| > 0$. Оскільки елементу $t^n v$ відповідає перетворення

$$z' = \frac{(a+nc)z + (b+nd)}{cz+d}$$

і можливо підібрати таке n, що $|b+nd| < |d|$, то ми отримуємо можливість перейти до випадку, коли $0 \leqslant |b| < |d|$. Якщо елемент v задовольняє цим новим умовам, то елемент sv має вигляд

$$z' = \frac{-cz-d}{az+d},$$

тобто повертає нас до першого випадку, але вже з меншою абсолютною величиною вільного члена знаменника. Застосовуючи ці множення елемента v зліва на відповідні степені елемента t і на елемент s декілька разів, ми прийдемо до вже розглянутого випадку $d=0$. Це показує, що сам елемент v має вигляд

$$v = s^{\alpha} t^{n_1} s t^{n_2} s \ldots s t^{n_k} s^{\beta},$$

де α і β можуть бути рівними 0 або 1, тобто елементи s і t є твірними для групи M [14].

Якщо ми покладемо $u = ts$, то елементи s і u також складуть систему твірних для M. Елементу u відповідає перетворення

$$z' = \frac{z-1}{z};$$

легко перевірити, що $u^3 = 1$. Доведемо тепер, що група M є вільним добутком циклічних підгруп $\{s\}$ і $\{u\}$, $M = \{s\} * \{u\}$ [18].

Всякий елемент з M, відмінний від степенів елементів s і u, може бути записаний з огляду на відношення $s^2 = u^3 = 1$ у вигляді добутку, в якому чергуються елемент s і елементи u або u^2. Якщо для деякого елемента із M такий запис не був однозначним, то ми отримали б, що елементи s і u пов’язані відношенням виду

$$s^{\varepsilon} u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} \ldots s u^{\alpha_k} s^{\eta} = 1,$$

де ε і η рівні 0 або 1, а кожне $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ рівне 1 або 2. Ліву частину цього відношення шляхом трансформації можна переробити так, що вона буде починатись елементом s і закінчуватись степенем елемента u. Можна обмежитись розглядом відношень виду

$$s u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} \ldots s u^{\alpha_k} = 1, \tag{1.8}$$

де всі α приймають значення 1 або 2. Доведемо, проте, що ліва частина відношення (1.8) не може в дійсності дорівнювати одиниці. Доведення проводиться індукцією по k, причому одночасно ми будемо доводити, що матриця із коефіцієнтів дробово-лінійного перетворення, що відповідає лівій частині рівності (1.8), має вигляд

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

де числа a, b, c і d мають однаковий знак; при цьому припускається, що нулю можна приписувати як знак плюс, так і знак мінус [15]. Дійсно, елементу su відповідає матриця

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

елементу su^2 — матриця

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

тобто для випадку $k=1$ твердження доведене. Нехай воно вже доведене для k, і нехай елементу

$$s u^{\alpha_1} s u^{\alpha_2} \ldots s u^{\alpha_k} \tag{1.10}$$

відповідає матриця (1.9). Якщо цей елемент множиться справа на елемент su, то ми отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ c+d & -d \end{pmatrix},$$

що задовольняє нашу умову; елемент $c+d$ відмінний від нуля, оскільки числа c і d одного знаку і хоча б одне з них не дорівнює нулю. Цей результат ми отримаємо і при множенні елемента (1.10) на su^2. Цим доведене наступне твердження [9].

Модулярна група розкладається у вільний добуток двох скінченних циклічних груп, одної другого і другої третього порядку.

1.3. Теорема про підгрупи вільного добутку

Наступна теорема про підгрупи вільного добутку, доведена в роботі Куроша і передоведена в роботах Бера і Леві і Такахасі, є основною в теорії вільних добутків.

Якщо

$$G=\prod_{\alpha}{}^{*}A_{\alpha} \tag{1.11}$$

і H довільна група групи G, то існує вільний розклад підгрупи H,

$$H=F*\prod_{\beta}{}^{*}B_{\beta}\,,$$

де F — вільна група, а всяке B_{β} спряжене в G деякою підгрупою одного із множників A_{α} [24].

Доведення. Домовимося надалі вважати *довжину* даного елемента, його *нескоротний запис* і т.д. взятими *відносно вільного розкладу* (1.11) групи G.

Означення 1.2 Якщо елемент g із G має парну довжину, $l(g)=2k$, тобто

$$g=a_{-k}\dots a_{-1}a_{1}\dots a_{k},$$

то слово $a_{-k}\dots a_{-1}$ будемо називати *лівою половиною* елемента g, а слово $a_{1}\dots a_{k}$ — його *правою половиною*. Якщо ж $l(g)=2k+1$, тобто

$$g=a_{-k}\dots a_{-1}a_{0}a_{1}\dots a_{k},$$

то $a_{-k}\dots a_{-1}$ є *лівою половиною* елемента g, слово $a_{1}\dots a_{k}$ — його *права половина*, a_{0} — його *середина.* Якщо при цьому ліва і права половини обернені одна одній, тобто $a_{-i}=a_{i}^{-1}$, $i=1,\,2,\,\dots,k$, то елемент g будемо називати *трансформою.* Трансформа спряжена зі своєю серединою і має тому такий же порядок. Порядок всякого елемента із G, що не є трансформою, нескінченний [11].

Визначимо тепер наступним чином підгрупи Φ_{μ} групи H (μ — індекс). Нехай $\Phi_{0}=E$. Якщо підгрупи Φ_{μ} вже визначені для всіх μ, менших, ніж деяке ν, і якщо K_{ν} є підгрупа, що породжена всіма цими

Φ_{μ}, то нехай l_{ν} є найменша довжина елементів із H, що лежать поза K_{ν}. Якщо серед цих елементів є трансформи, то обираємо одну з них, $g_{\nu}^{-1} a\, g_{\nu}$, де $a \in A_{\alpha_{\nu}}$ і перший елемент нескоротного запису елемента g_{ν} належить не до $A_{\alpha_{\nu}}$, і позначаємо

$$\overline{A}_{\nu} = H \cap \mathrm{g}_{\nu}^{-1} A_{\alpha_{\nu}} g_{\nu}.$$

Зокрема, при $l_{\nu}=1$ обрана нами трансформа буде просто елементом a із деякого $A_{\alpha_{\nu}}$ і тому

$$\overline{A}_{\nu} = H \cap A_{\alpha_{\nu}}.$$

Якщо серед елементів із H, що лежать поза K_{ν}, немає трансформ довжини l_{ν}, зокрема, при парному l_{ν}, то покладаємо $\overline{A}_{\nu} = E$ [17].

Ми обираємо, в H, поза підгрупи $\{K_{\nu}, \overline{A}_{\nu}\}$, елемент $f_{\nu 1}$, права половина якого є g_{ν}, а середина належить до $A_{\alpha_{\nu}}$, якщо такі елементи існують. Якщо $\overline{A}_{\nu} = E$, то $f_{\nu 1}$ є довільний елемент довжини l_{ν}, що лежить в H, поза K_{ν}; його праву половину позначаємо черезg_{ν}, а вільний множник A_{α}, в якому лежить його середина (при непарному l_{ν}), через $A_{\alpha_{\nu}}$. Якщо вже вибрані елементи $f_{\nu\delta}$ для всіх порядкових чисел δ, $\delta < \sigma$, і в H, поза підгрупи, породженої підгрупами K_{ν}, $\overline{A}_{\nu}$ і всіма елементами $f_{\nu\delta}$, $\delta < \sigma$, ще залишаються елементи довжини l_{ν}, що мають g_{ν} своєю правою половиною і деякий елемент із $A_{\alpha_{\nu}}$ своєю серединою, то один з цих елементів позначаємо через $f_{\nu\sigma}$. Цей процес зупиниться на деякому порядковому числі σ_{ν}. Позначимо через Φ_{ν} підгрупу групи H, породжену підгрупою $\overline{A}_{\nu}$ і всіма елементами $f_{\nu\delta}$, $\delta < \sigma_{\nu}$. Тоді $K_{\nu+1} = \{K_{\nu}, \Phi_{\nu}\}$, а при граничному порядковому числі λ підгрупа K_{λ} буде об’єднанням зростаючої послідовності підгруп K_{ν}, $\nu < \lambda$. Процес побудови підгруп Φ_{μ} і K_{ν} зупиниться на такому порядковому числі τ, що $K_{\tau} = H$ [3].

Означення 1.3 Називатимемо *твірними* підгрупи Φ_{μ} елементи $f_{\mu\delta}$, $\delta < \sigma_{\mu}$, елементи $f_{\mu\delta}^{-1}$, а також всі елементи із $\overline{A}_{\mu}$, окрім 1. Твірними підгрупи K_{ν} будемо вважати твірні всіх підгруп Φ_{μ}, $\mu < \nu$. Тільки в цьому спеціальному сенсі буде йти далі про твірні підгруп Φ_{μ} і K_{ν}.

Нехай U є або деяка підгрупа Φ_μ, або ж деяка підгрупа K_ν. Її твірні будемо позначати через $u_1, u_2, \ldots$ Добуток $u_1 u_2 \ldots u_k$ будемо називати *словом* в U, якщо ніякі з двох сусідніх множників u_i, u_{i+1} не є оберненими один одному і не належать до однієї і тієї ж підгрупи $\overline{A}_\mu$. *Довжиною* слова будемо вважати довжину його нескоротного запису відносно вільного розкладу (1.11) групи G. Зокрема, слово $u_1 u_2 \ldots u_k$ буде називатись *простим,* якщо його довжина рівна найбільшій з довжин множників u_i). Прості слова в U будуть позначатись через $u', u'', \ldots$ Домовимось, нарешті, говорити, що в добутку $u'u''$ двох простих слів u' і u'' між цими словами має місце *сусідство першого, другого або третього роду* в залежності від того, чи буде довжина добутку $u'u''$ більше, рівна чи менше найбільшої з довжин слів u', u'' [1].

Твердження 1.1 *Підгрупа* Φ_μ *є вільний добуток підгрупи* $\overline{A}_\mu$ *і нескінченно циклічних підгруп, породжених елементами* $f_{\mu\sigma}$, $\sigma < \sigma_\mu$.

Це твердження рівносильне, очевидно, тому, що всяке непорожнє слово Φ_μ відмінне від одиниці групи G, тобто володіє непорожнім нескоротним записом відносно розкладу (1.11). Доведемо спершу лему:

Лема 1.1 *Два будь-яких елемента* $f_{\mu\sigma_1}$ *і* $f_{\mu\sigma_2}$, $\sigma_1 < \sigma_2$, *володіють різними лівими половинами.*

Це очевидно при парному l_μ, оскільки праві половини заданих елементів рівні g_μ, тобто збігаються. Якщо ж l_μ непарне, то при збiганні лівих половин елементів $f_{\mu\sigma_1}$ і $f_{\mu\sigma_2}$ елемент $f_{\mu\sigma_1}^{-1} f_{\mu\sigma_2}$ належав би до підгрупи $\overline{A}_\mu$, тобто елемент $f_{\mu\sigma_2}$ лежав би в підгрупі, що породжена підгрупою $\overline{A}_\mu$ і елементом $f_{\mu\sigma_1}$, що суперечить вибору елементів $f_{\mu\sigma}$ [16].

Домовимось позначати твірні підгрупи Φ_μ через $v_1, v_2, \ldots$, прості слова через $v', v'', \ldots$ До числа простих слів підгрупи Φ_μ належать наступні:

1) Довільне слово, що складається з одного множника v_1.

2) Довільне слово виду $v_1 v_2$, якщо права половина елемента v_1 є g_μ, ліва половина елемента v_2 є g_μ^{-1}. Дійсно, якщо б було $l(v_1 v_2) < l_\mu$, то $v_1 v_2 \in K_\mu$, тобто кожен з елементів v_1, v_2 лежав би в підгрупі, що породжена другим елементом і підгрупою K_μ, а це, для одного з цих двох елементів не може мати місця.
3) Довільне слово виду $v_1 v_2 v_3$, де $v_2 \in \overline{A}_\mu$, v_1 є деякий елемент $f_{\mu\sigma_1}$, v_3 — деякий елемент $f_{\mu\sigma_2}^{-1}$, при чому індекси σ_1 і σ_2 можуть бути як різними, так і збіжними.

Випадками 1)-3) вичерпуються всі прості слова підгрупи Φ_μ, як показує наступний результат:

Якщо $v_1 v_2 \dots v_n$ є слово із Φ_μ, то його множники можна так об'єднати,

$$v_1 v_2 \dots v_n = (v_1 \dots v_{i_1})(v_{i_1+1} \dots v_{i_2}) \dots (v_{i_{k-1}+1} \dots v_n),$$

що всяке слово $v_{i+1} \dots v_{i+1}$ є просте слово одного з видів 1)-3)*,*

$$v_1 v_2 \dots v_n = v' v'' \dots v^{(k)},$$

при чому між всякими двома сусідніми простими словами $v^{(s)}$, $v^{(s+1)}$ має місце сусідство першого роду [9].

Ця теорема вірна при $n=1$. Припустимо, що і для $n-1$, вона є вірною

$$v_1 v_2 \dots v_{n-1} = v' v'' \dots v^{(s)}.$$

Слово $v^{(s)}$ просте слово одного з видів 1)-3), а тому його права половина збігається з правою половиною елемента v_{n-1}. Якщо ця права половина рівна g_μ, а ліва половина елемента v_n є g_μ^{-1}, то добуток $v^{(s)} v_n$ буде простим словом виду 2) або 3). Враховуючи лему 1.1 і означення слова у всіх інших випадках між $v^{(s)}$ і v_n буде сусідство першого роду, тобто елемент v_n можна взяти в якості простого слова.

З цієї теореми випливає, що всяке непорожнє слово із Φ_μ володіє непорожнім нескоротнім записом відносно розкладу (1.11), тобто випливає висловлене вище твердження про підгрупу Φ_μ [4].

Перейдемо до розгляду підгрупи K_ν і ставимо собі за ціль доведення наступного твердження.

Теорема 1.1 *Підгрупа K_ν є вільний добуток всіх підгруп $\overline{A}_\mu$, $\mu<\nu$, відмінних від E, і всіх нескінченних циклічних підгруп, що породжені елементами $f_{\mu\sigma}$, $\sigma<\sigma_\mu$, $\mu<\nu$.*

Це твердження безпосередньо випливає з наступної теореми (тут $u_1, u_2, \ldots$ є твірними підгрупи K_ν, $u', u'', \ldots$ її прості слова).

Теорема 1.2 *Якщо дано довільне слово $u_1 u_2 \ldots u_n$ із K_ν, то його множники можна так об'єднати:*

$$u_1 u_2 \ldots u_n = (u_1 \ldots u_{i_1})(u_{i_1+1} \ldots u_{i_2}) \ldots (u_{i_{k-1}+1} \ldots u_n),$$

що всяке слово $u_{i_s+1} \ldots u_{i_{s+1}}$ є просте слово, тобто

$$u_1 u_2 \ldots u_n = u' u'' \ldots u^{(k)},$$

при чому між всякими двома сусідніми простими словами $u^{(s)}$, $u^{(s+1)}$ має місце сусідство першого роду [14].

Дійсно, із теореми 1.2 легко випливає, що *довжина всякого слова із K_ν, що не є простим, більше довжини кожного із його множників,* тобто всяке непорожнє слово із K_ν володіє непорожнім нескоротнім записом.

Доведення теореми 1.2 буде доводитись індукцією по ν, при чому для $K_1 = E$ вона очевидна, а для $K_2 = \Phi_1$ доведена вище. Справедливість цієї теореми для випадку, коли ν є граничне порядкове число, випливає із припущення, що в цьому випадку всяке слово із K_ν буде словом уже в деякій підгрупі K_μ при $\mu<\nu$. Нам залишається, припускаючи теорему 1.2 справедливою для підгрупи K_ν при деякому ν, довести її для $K_{\nu+1}$ [20].

Лема 1.2 *Якщо $u_1 u_2 \ldots u_k$ є простим словом із K_ν, то всякий його відрізок $u_1 u_2 \ldots u_s$, $s \leqslant k$ (і всякий відрізок $u_t \ldots u_k$, $t \geqslant 1$) також буде простим словом.*

Доведення. Якщо деякі відрізки даного простого слова (наприклад від початку) не є простими, то існує таке s, $s<k$ що слово $u_1 \ldots u_s$ не просте, але $u_1 \ldots u_s u_{s+1}$ уже просте. За теоремою 1.2

$$u_1 \dots u_s = u' \dots u^{(r)}, \ \ r > 1.$$

Довжина слова $u_1 \dots u_s$ буде в цьому випадку більше довжини кожного із множників, тобто більше довжини кожного з простих слів $u', \dots, u^{(r)}$. Якщо між простими словами $u^{(r)}$ і u_{s+1} — сусідство першого або другого роду, то довжина слова $u_1 \dots u_s u_{s+1}$ також буде більше довжини кожного з його множників, що суперечить його простоті. Якщо ж між $u^{(r)}$ і u_{s+1} — сусідство третього роду, то добуток $u^{(r)} u_{s+1}$, що є словом, буде мати меншу довжину, ніж один з його множників, що суперечить теоремі 1.2 [7].

Лема 1.3 *В нескоротному запису простого слова $u_1 \dots u_k$ із K_ν ліва половина елемента u_1 і права половина елемента u_k залишаються без будь-яких змін, а середини цих елементів (у випадку непарних довжин) можуть замінитись тільки іншими відмінними від одиниці елементами із тих же вільних множників.*

Доведення. Дійсно, оскільки слово $u_1 \dots u_{k-1}$, за лемою 1.2, просте, тобто його довжина рівна максимальній довжині його множників, і оскільки слово $u_1 \dots u_k$ має володіти тією ж властивістю, то між простими словами $u_1 \dots u_{k-1}$ і u_k має мати місце сусідство другого роду. Звідси випливає, що скорочення не стосуватимуться правої половини елемента u_k, а його середина може зазнати лише об'єднання. Міркування для випадку елемента u_1 проходять симетричним чином.

Лема 1.4 *Всяке слово w із K_ν, що мають своїм нескоротним записом трансформу, має вигляд*

$$w = u_n^{-1} \dots u_1^{-1} u_0 u_1 \dots u_n,$$

де u_0 є трансформою, тобто належить до однієї з підгруп $\overline{A}_\mu$, $\mu < \nu$.

Доведення. Нехай $w = u_1 u_2 \dots u_k$. Якщо $u_1 = u_k^{-1}$, то можна перейти до розгляду слова

$$u_1^{-1} w u_1 = u_2 \dots u_{k-1},$$

нескоротний запис якого також є трансформою. Якщо u_1 і u_k належать до однієї підгрупи $\overline{A}_\mu$, $\mu < \nu$, то можна розглядати слово

$$u_1^{-1} w u_1 = u_2 \ldots u_{k-1}(u_k u_1).$$

Тому припустимо, що елементи u_1 і u_k не є взаємно оборотними і не належать до однієї підгрупи $\overline{A}_\mu$. Лема буде доведена, якщо ми покажемо, що в цьому випадку $k=1$.

Нехай $k>1$. Якщо слово w не є простим, то, за теоремою 1.2, воно розкладається в добуток простих слів, між якими має місце сусідство першого роду,

$$w = u' u'' \ldots u^{(r)}, \ \ r>1.$$

Оскільки нескоротний запис слова w є трансформою, тобто його ліва половина обернена правій, то в добутку $u^{(r)} u'$, що є словом, скорочення підуть так далеко, що між множниками буде сусідство третього роду. Довжина слова $u^{(r)} u'$ буде менше довжини одного із множників, що суперечить теоремі 1.2 [13].

Нехай тепер слово w просте. Отже, існує такий множник u_i, що $l(w)=l(u_i)$, при чому $l(u_i) \geqslant l(u_j)$ при всіх $j \neq i$. Припустимо, що u_i не є одним з елементів $f_{\mu\sigma}^{-1}$, $\mu<\nu$, оскільки інакше ми могли б розглядати слово w^{-1}. Оскільки при $i<k$ ми могли б розглядати слово

$$u_{i+1} \ldots u_k w u_k^{-1} \ldots u_{i+1}^{-1} = u_{i+1} \ldots u_k u_1 \ldots u_i \,,$$

нескоротний запис якого знову є трансформою; внаслідок вище проведених розглядів це нове слово можна вважати простим, то розглянемо випадок, коли $i=k$.

Якщо $u_k \in \Phi_\mu$, тобто права половина елемента u_k є g_μ, а середина належить до A_{α_μ}, то з огляду на лему 1.3 права половина елемента w також рівна g_μ, а середина також міститься в A_{α_μ}. Оскільки нескоротний запис елемента w є трансформа, то його ліва половина рівна g_μ^{-1}. Якщо підгрупа $\overline{A}_\mu \neq E$, то $w \in \overline{A}_\mu$ [18]. Оскільки

$$u_1 \ldots u_k w^{-1} = 1$$

і оскільки в лівій частині при $u_k \notin \overline{A}_\mu$ стоїть слово, а при $u_k \in \overline{A}_\mu$ слово отримується після об’єднання множників u_k і w^{-1}, отримали протиріччя з теоремою 1.2. Якщо ж $\overline{A}_\mu = E$, то слово w буде міститись вже в деякій підгрупі K_λ при $\lambda<\mu$, тобто може бути записане через твірні цієї підгрупи

$$w=u'_1 u'_2 \ldots u'_m.$$

Ми отримуємо в цьому випадку рівність

$$u_1 \ldots u_k u'^{-1}_m \ldots u'^{-1}_1=1 ,$$

яка знову неможлива, оскільки в лівій частині рівності стоїть слово із підгрупи K_ν.

Лема 1.5 $K_\nu \cap \overline{A}_\nu = E$.

Доведення. Дійсно, із означення підгрупи $\overline{A}_\nu$ випливає існування в $\overline{A}_\nu$ такого відмінного від одиниці елемента w, який не належить до K_ν. Нехай існує відмінний від 1 елемент w, що належить як до $\overline{A}_\nu$, так і до K_ν. Із $w' \in K_\nu$ і леми 1.4 випливає

$w'=u_n^{-1} \ldots u_1^{-1} u_0 u_1 \ldots u_n$,

де $U_0 \in \overline{A}_\mu$, $\mu<\nu$. Нескоротні записи елементів w і w' відрізняються одне від одного тільки тим, що їх середини є різними елементами із однієї і тієї ж підгрупи A_α. Звідси випливає, що елемент $u_1 \ldots u_n w u_n^{-1} \ldots u_1^{-1}$ повинен належати до підгрупи $\overline{A}_\mu$, але тоді $w \in K_\nu$, оскільки всі елементи u_i, $i=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$, явно належить до K_ν [26].

Ми переходимо тепер до підготовки доведення теореми 1.2 для підгрупи $K_{\nu+1}$. Далі через $u_1,\ u_2, \ldots$ будемо позначати твірні підгрупи K_ν, через $u',\ u'', \ldots$ — прості слова з цієї підгрупи, а через $v_1,\ v_2, \ldots$ і $v', v'', \ldots$ — відповідно твірні і прості слова підгрупи Φ_ν. Зауважимо, що із побудови підгрупи Φ_ν та із означення простого слова випливає нерівність $l(u') \leqslant l(v')$ при будь-яких u і v, тобто нерівність $l(u') \leqslant l_\nu$.

Лема 1.6 *Якщо* $l(u')<l(v')$, *то між простими словами* u' *і* v' *неможливе сусідство третього роду.*

Доведення. Дійсно, якщо, наприклад, в добутку $u'v'$ між множниками має місце сусідство третього роду і якщо $v'=v_1 \ldots v_k$), то вже добуток $u'v_1$ буде мати меншу довжину, ніж l_ν, тобто $u'v_1 \in K_\nu$, звідки $v_1 \in K_\nu$. Останнє неможливе, проте, враховуючи лему 1.5, якщо

$v_1 \in \overline{A}_\nu$, або враховуючи означення елементів $f_{\nu\sigma}$, якщо v_1 є один із цих елементів або один із обернених до них [15].

Лема 1.7 *Якщо* $\mu < \nu$ *і якщо ліва половина елемента* h *із підгрупи* H *збігається з лівою половиною одного із елементів* $f_{\mu\sigma}$, *а середина елемента* h *(при непарному* l_μ*) належить до* A_{α_μ}, *то* h *міститься в підгрупі* $K_{\mu+1}$ *і тому в підгрупі* K_ν.

Дійсно, $l(h^{-1} f_{\mu\sigma}) \leqslant l_\mu$. Якщо має місце строга нерівність, то $h^{-1} f_{\mu\sigma} \in K_\mu$ і тому $h \in K_{\mu+1}$.Якщо $l(h^{-1} f_{\mu\sigma}) = l_\mu$, то права половина елемента $h^{-1} f_{\mu\sigma}$ рівна g_μ, а його середина міститься в A_{α_μ}. Всі елементи такого роду належать до $K_{\mu+1}$, тому $h^{-1} f_{\mu\sigma} \in K_{\mu+1}$, тобто знову $h \in K_{\mu+1}$ [16].

Лема 1.8 *Якщо* $l(u') = l(v')$, *то між простими словами* u' *і* v' *можливе лише сусідство першого роду.*

Нехай $u' = u_1 u_2 \dots u_s$, $v' = v_1 \dots v_k$ і нехай в добутку $u' v'$ між множниками має місце сусідство другого або третього роду. Тоді між u' і v' також буде сусідство другого або навіть третього роду. Якщо $l(u_j) = l(u') = l_\nu$, але, при $j < s$, $l(u_i) < l_\nu$ для $j < i \leqslant s$, то між словом $u_{j+1} \dots u_s$ і словом v_1 буде сусідство другого роду, тобто $l(u_{j+1} \dots u_s v_1) = l_\nu$. Дійсно, сусідство третього роду виключене лемою 1.6, оскільки слово $u_{j+1} \dots u_s$ є, за лемою 1.2, простим і тому $l(u_{j+1} \dots u_s) < l_\nu$; сусідство ж першого роду тягло б за собою сусідство першого роду між словами u' і v_1.

Права половина простого слова $u_1 \dots u_j$ збігається, за лемою 1.3, з правою половиною елемента u_j, а середина цього слова належить до того ж вільного множника A_α, що і середина елемента u_j. Оскільки між словами $u_1 \dots u_j$ і $u_{j+1} \dots u_s v_1$ повинне мати місце сусідство другого чи третього роду і оскільки їх довжини збігаються, то ліва половина слова $u_{j+1} \dots u_s v_1$ буде оберненою правій половині елемента u_j, а їх середини належать до одного ж вільного множника. Звідси випливає за означенням підгруп Φ_μ, якщо u_j входить в $\overline{A}_\mu$ або рівне деякому елементу $f_{\mu\sigma}$, $\mu<\nu$, або за лемою 7, якщо u_j рівне деякому $f_{\mu\sigma}^{-1}$, що

$$u_{j+1}\dots u_s v_1 \in K_\nu ,$$

звідки $v_1 \in K_\nu$, що неможливо.

Випадок добутку $v'u'$ розглядається аналогічним способом [13].

Лема 1.9 *Якщо* $l(u')<l_\nu$ *і в добутках* $v'u'$ *і* $u'v''$ *між множниками має місце сусідство другого роду, то між* $v'u'$ *і* v'' *можливе лише сусідство першого роду.*

Доведення. Якщо $v'=v_{11}\dots v_{1s}$, $v''=v_{21}\dots v_{2t}$ і якщо між $v'u'$ і v'' має місце сусідство другого чи третього роду, то між $v_{1s}u'$ і v_{21} (і між v_{1s} і $u'v_{21}$) також буде сусідство другого чи третього роду. Це неможливо, якщо права половина елемента v_{1s} рівна g_ν, а ліва половина елемента v_{21} рівна g_ν^{-1}, оскільки тоді скорочення не знищать повністю слова u'.

Нехай тепер ліва половина елемента v_{21} рівна g_ν^{-1}, але права половина елемента v_{1s} відмінна від g_ν; тоді ліва половина елемента v_{1s} обов'язково рівна g_ν^{-1}. Оскільки між $v_{1s}u'$ і v_{21} має місце, за припущенням, сусідство другого або третього роду, то права половина елемента $v_{1s}u'$ буде рівна g_ν, тобто $v_{1s}u' \in \overline{A}_\nu$. Звідси випливає, що $v_{1s} \in \{K_\nu, \overline{A}_\nu\}$, що суперечить означенню елементів $f_{\nu\sigma}$ [28].

Випадок, коли права половина елемента v_{1s} рівна g_ν, але ліва половина елемента v_{21} відмінна від g_ν^{-1}, розглядається аналогічним чином.

Нехай права половина елемента v_{1s} відмінна від g_ν, а ліва половина елемента v_{21} відмінна від g_ν^{-1}. При наших припущеннях про сусідство між $v_{1s}u'$ і v_{21} тепер отримуємо, що добуток $v_{1s}u'v_{21}$ або є трансформою, що входить в $\overline{A}_\nu$, або ж рівний одиниці. В обох випадках один з елементів v_{1s}, v_{21} буде лежати в підгрупі, що породжена підгрупами K_ν, $\overline{A}_\nu$ та іншим елементом. Оскільки, проте, елемент v_{1s} відмінний як від v_{21}, так і від v_{21}^{-1} — скорочення в добутку $v_{1s}u'v_{21}$

повинні знищити слово u' цілком, — то ми приходимо до протиріччя з означенням елементів $f_{\nu\sigma}$. Лема 1.9 доведена [17].

Доведення теореми 1.2 для підгрупи $K_{\nu+1}$ проходить тепер без ускладнення. Ми також доведемо, *що всяке слово із $K_{\nu+1}$ є добутком простих слів одного із видів 1) u', 2) v', 3) $u'v'$, 4) $v'u'$ і 5) $u'v'u''$, між якими має місце сусідство першого роду.*

Дійсно, якщо дано деяке слово w із $K_{\nu+1}$ то, об'єднуючи елементи, що стоять у ньому поруч, із K_ν і елементи із Φ_ν, ми представимо це слово як добуток слів із K_ν та із Φ_ν, що чергуються. Кожне із цих слів можна представити, по індуктивному припущенню для випадку слів із K_ν і по доведеному раніше для випадку слів із Φ_ν, у вигляді добутку простих слів, між якими має місце сусідство першого роду. Леми 1.6, 1.8 і 1.9 показують, коли прості слова, що стоять поруч, із K_ν і одне із Φ_ν, дають, об'єднуючись, просте слово; у випадку, який розглядався в лемі 1.9, слово u' можна довільно об'єднати або з v', або з v''. Ми отримуємо, що слово w дійсно записується у вигляді добутку простих слів виду 1)-5), між якими має місце сусідство першого роду [14].

Теорема 1.2 справедлива, отже, для всіх підгруп K_ν, а тому і для підгрупи H, що рівна K_τ. Інакше кажучи підгрупа H є вільним добутком всіх підгруп $\overline{A}_\nu$, $\nu<\tau$, відмінних від E, — ці підгрупи за їх означенням спряжені з підгрупами вільних множників A_α — і всіх нескінченних циклічних підгруп $\{f_{\nu\sigma}\}$, $\sigma<\sigma_\nu$, $\nu<\tau$.

Доведення теореми про підгрупи вільного добутку завершено [7].

Зауважимо, що отриманий нами вільний розклад для H володіє наступною властивістю: якщо g є довільний елемент із G, A_α — довільний вільний множник вихідного розкладу групи G і якщо перетин $D=H\cap g^{-1}A_\alpha g$ відмінний від E, то *в нашому розкладі для H знайдеться вільний множник, спряжений з D всередині H*. Дійсно, якщо d є відмінний від 1 елемент із D, то $d=g^{-1}a_\alpha g$, $a_\alpha\in A_\alpha$. Застосування леми 1.4 цього пункту показує, що елемент d спряжений всередині H з елементом однієї з підгруп $\overline{A}_{\mu}$, тобто

$$d = g^{-1} a_{\alpha} g \in h^{-1} \overline{A}_{\mu} h, \text{ де } h \in H.$$

Але з $\overline{A}_{\mu} \subseteq g_{\mu}^{-1} A_{\alpha_{\mu}} g_{\mu}$ випливає, що

$$d \in (g_{\mu} h)^{-1} A_{\alpha_{\mu}} (g_{\mu} h),$$

звідки

$$a_{\alpha} \in (g_{\mu} h g^{-1})^{-1} A_{\alpha_{\mu}} (g_{\mu} h g^{-1}).$$

Звідси випливає, що $\alpha = \alpha_{\mu}$ і $g_{\mu} h g^{-1} = a'_{\alpha_{\mu}} \in A_{\alpha_{\mu}}$, тобто $g = a'^{-1}_{\alpha_{\mu}} g_{\mu} h$. Тепер

$$D = H \cap g^{-1} A_{\alpha} g = H \cap (a'^{-1}_{\alpha_{\mu}} g_{\mu} h)^{-1} A_{\alpha_{\mu}} (a'^{-1}_{\alpha_{\mu}} g_{\mu} h) =$$
$$= h^{-1} (H \cap g_{\mu}^{-1} A_{\alpha_{\mu}} g_{\mu}) h = h^{-1} \overline{A}_{\mu} h \ ,$$

Що доводить наше твердження [20].

Розділ 2
Вільні групи

2.1. Ізоморфізм вільних розкладів та вільні добутки з об’єднаною підгрупою

Означення 2.1 Група G називається вільною групою, якщо існує підмножина A в G, така що кожен елемент G записується єдиним чином як добуток скінченного числа елементів A і їх обернених елементів.

Означення 2.2 Вільною абелевою групою називається пряма сума нескінченних циклічних груп, узятих в скінченному або нескінченному числі [9].

Два вільних розклади групи G,

$$G = F_1 * \prod_{\alpha}{}^{*} A_\alpha = F_2 * \prod_{\beta}{}^{*} B_\beta,$$

називають *ізоморфними*, якщо F_1 і F_2 є ізоморфними вільними групами, а між множниками A_α і B_β можна встановити таке взаємно однозначне відображення, що відповідні множники спряжені в групі G. Тоді, використовуючи поняття продовження вільного розкладу групи, можна довести наступну теорему:

Теорема 2.1 *Два будь яких вільних розклади довільної групи володіють ізоморфними продовженнями.*

Доведення. Нехай

$$G = \prod_{\alpha}{}^{*} A_\alpha = \prod_{\beta}{}^{*} B_\beta. \tag{2.1}$$

Якщо

$$A_\alpha = F_\alpha * \prod_{\gamma}{}^{*} A_{\alpha\gamma} \tag{2.2}$$

є вільний розклад підгрупи A_α, отримане застосуванням вказаною в попередньому пункті конструкції до другого з розкладів (2.1), і якщо

$$B_\beta = F'_\beta * \prod_{\delta}{}^{*} B_{\beta\delta} \tag{2.3}$$

є таким же розкладом для B_β відносно першого з розкладів (2.1), то підгрупа

$$B_{\beta\delta} = B_\beta \cap g^{-1} A_\alpha g$$

спряжена з перетином $g B_\beta g^{-1} \cap A_\alpha$. Цей перетин спряжений, проте, у відповідності з зауваженням, що було зроблено в кінці попереднього пункту, з однієї з підгруп $A_{\alpha\gamma}$. Для всякої підгрупи $B_{\beta\delta}$ знайдеться спряжена з нею в G підгрупа $A_{\alpha\gamma}$ [3].

Встановимо тепер продовження розкладів (2.1), заміняючи всі A_α і B_β їх розкладами (2.2) і (2.3):

$$G = \prod_{\alpha}{}^{*} F_\alpha * \prod_{\alpha,\gamma}{}^{*} A_{\alpha\gamma} = \prod_{\beta}{}^{*} F'_\beta * \prod_{\beta,\delta}{}^{*} B_{\beta\delta}. \qquad (2.4)$$

Зауважимо, що дві різні підгрупи $A_{\alpha\gamma}$ і $A_{\alpha'\gamma'}$ не можуть бути спряженими в G, оскільки вони входять в якості вільних множників в один вільний розклад групи G. Тому всяка підгрупа $B_{\beta\delta}$ спряжена з однією і тільки однією підгрупою $A_{\alpha\gamma}$; з іншого боку, всяка підгрупа $A_{\alpha\gamma}$ спряжена з однією з підгруп $B_{\beta\delta}$. Між всіма підгрупами $A_{\alpha\gamma}$ і всіма підгрупами $B_{\beta\delta}$ можна встановити таку взаємно однозначну відповідність, що відповідні підгрупи спряжені в G. Тоді підгрупи $\prod_{\alpha,\gamma}{}^{*} A_{\alpha\gamma}$ і $\prod_{\beta,\delta}{}^{*} B_{\beta\delta}$ породжують в групі G один і той же нормальний дільник, а тому з враховуючи властивіості Розділу 1, вільні групи $\prod_{\alpha}{}^{*} F_\alpha$ і $\prod_{\beta}{}^{*} F'_\beta$ ізоморфні. Ізоморфізм вільних розкладів (2.4) доведений [1].

Нерозкладною називають таку групу, яка не може бути розкладена у вільний добуток своїх власних підгруп.

Наслідок. *Якщо група G володіє вільними розкладами з нерозкладними множниками, то всякі два таких розклади цієї групи ізоморфні, а її довільний вільний розклад можна продовжити до розкладу з нерозкладними множниками.*

Зауважимо, що в той час як теорема про існування ізоморфних продовженнях була доведена для довільних груп, останнє твердження відноситься уже до деякого спеціального класу груп — *існують групи, які хоча і розкладні у вільний добуток, але не можуть бути розкладені у вільний добуток нерозкладних груп*.

В означенні ізоморфізму двох вільних розкладів міститься висловлення про ізоморфізм деяких двох вільних груп. Виникає питання про умови, при яких дві вільні групи ізоморфні. Оскільки вільна група цілком означується завданням її рангу, тобто числа (потужності) її вільних твірних, то питання зводиться до того, чи можуть бути ізоморфними дві вільні групи різних рангів [29].

Теорема 2.2 *Ранг вільної групи є її інваріантом, тобто не залежить від вибору системи вільних твірних.*

Ця теорема показує, що якщо дві вільні групи ізоморфні, то їх ранги різні, тобто при ізоморфному відображенні однієї з цих груп на іншу зображення даних вільних твірних першої групи складають систему вільних твірних для другої групи.

Доведення. Оберемо фактор-групу вільної групи W по її комутанту K. Оскільки перехід до фактор-групи по комутанту рівносильний припущенню, що всі твірні елементи переставні між собою, то фактор-група W/K буде вільною абелевою групою, а суміжні класи по K, що містять елементи даної системи вільних твірних групи W, — базою цієї вільної абелевої групи. Інваріантність рангу групи W випливає тепер із інваріантності рангу абелевої групи [7].

Наслідками є наступні теореми.

Теорема 2.3 (Нільсена-Шрейера). *Всяка підгрупа вільної групи, відмінна від E, сама є вільною групою.*

Дійсно, всяка підгрупа, спряжена всередині деякої групи з підгрупою нескінченної циклічної групи, сама буде нескінченною циклічною групою [13].

Теорема 2.4 *Ніяка група не може бути одночасно розкладною у вільний і в прямий добуток.*

Нехай

$$G = A * B = C \times D,$$

де підгрупи A, B, C і D відмінні від одиничної підгрупи. Оскільки відмінний від одиниці елемент із вільного множника групи не може бути переставним з елементом групи, що лежить поза цього вільного множника, то із $A \cap C \neq E$ і із переставності елементів із C і D випливало б $A \supset D$, а тоді і $A \supset C$, тобто $A = G$, що неможливо. Тому $A \cap C = A \cap D = E$. Відповідно буде $B \cap C = B \cap D = E$. Оскільки C є нормальний дільник групи G, то перетин C з будь-якою підгрупою, спряженою з A або з B, також рівний E. Застосовуючи тепер до C теорему про підгрупи вільного добутку, ми отримуємо, що C є вільна група. Це виконується і для D. Із $A \cap D = E$ випливає, далі, що компонента підгрупи A в множнику C із прямого розкладу $G = C \times D$ ізоморфна самій підгрупі A. Ця компонента буде, як підгрупа вільної групи, за теоремою Нільсена-Шрейера сама вільною. Цим доведено, що A, а також і B, є вільними групами, а тоді вільною групою буде і їх вільний добуток G. Це приводить нас до протиріччя, якщо вільна група може бути розкладена в прямий добуток, то у вільній групі можна було б знайти підгрупу, що є прямим добутком двох нескінченних циклічних груп, що суперечить теоремі Нільсена-Шрейера. Тому цей випадок неможливий[4].

Розглянемо питання про групи автоморфізмів. Твірні і визначальні відношення групи автоморфізмів вільної групи будь-якого скінченного рангу встановлені Нільсеном. Питання про умови, при яких одна з двох даних систем елементів вільної групи переводиться в іншу при деякому автоморфізмі цієї групи, розглянутий в роботі Уайтхеда. Групи автоморфізмів вільних добутків скінченного числа будь-яких нерозкладних груп розглядались в одному частинному випадку Головіним і Садовським, а в загальному випадку знайдені Фукс-Рабіновичем. Всі отримані результати формулюються дуже громіздко, тому обмежимось розглядом частинного випадку [1].

Нехай група G є вільним добутком двох груп, $G = A * B$, при чому множники A і B нерозкладні, відмінні від нескінченної циклічної групи і не ізоморфні між собою. Елементи груп G, A і B позначатимемо буквами g, a, b. В групі автоморфізмів Γ групи G можна вказати наступні підгрупи: підгрупи Φ_A, що складається з тих автоморфізмів групи G, які отримуються, коли в множнику A виконується деякий автоморфізм, а множник B зображається на себе тотожно; підгрупу Φ_B, що означується аналогічним чином; підгрупу Ψ_A, що складається з внутрішніх автоморфізмів групи G, що породжені трансформуванням елементами із A; підгрупу Ψ_B, що складається із внутрішніх автоморфізмів, що породжені елементами із B.

Очевидно, що підгрупи Φ_A і Φ_B ізоморфні відповідно групам автоморфізмів груп A і B. Елементи цих груп будемо позначати буквами $\alpha \in \Phi_A$ і $\beta \in \Phi_B$. З іншого боку, завдяки відсутності центру в групі G підгрупи Ψ_A і Ψ_B ізоморфні відповідно множникам A і B. Елемент підгрупи Ψ_A (підгрупи Ψ_B), що отримується трансформуванням групи G елементом a із A (елементом b із B), буде позначатися через $\psi(a)$ [через $\psi(b)$] [27].

Теорема 2.5 *Підгрупи* Φ_A, Φ_B, Ψ_A *і* Ψ_B *породжують всю групу автоморфізмів* Γ.

Нехай θ є довільний елемент із Γ. Автоморфізм θ переводить вільний розклад $G = A * B$ в деякий вільний розклад $G = A' * B'$, з теореми про ізоморфізм вільних розкладів з нерозкладними множниками та припущень щодо групи G, підгрупи A' і B' спряжені відповідно з підгрупами A і B:

$$A' = x^{-1} A x, \quad B' = y^{-1} B y, \quad x, y \in G .$$

Автоморфізм χ, що отримується послідовним виконанням автоморфізму θ і трансформування $\psi^{-1}(x)$ групи G елементом x^{-1}, відображає підгрупу A на себе, а підгрупу B переводить в деяку підгрупу $z^{-1} B z$, при чому елемент z можна вважати словом, що починається елементом із A. Якщо б довжина елемента z була більше 1, то елементи із B не можна було б отримати перемножуванням елементів із A і $z^{-1}Bz$, тоді як насправді $G = A*(z^{-1}Bz)$. Тому $z \in A$.Звідси випливає, що автоморфізм $\chi \cdot \psi^{-1}(z)$ здійснює тільки автоморфізми всередині підгруп A і B, тобто належить до $\{\Phi_A, \Phi_B\}$, а тоді

$$\theta = [\chi \psi^{-1}(z)]\psi(z)\psi(x) \in \{\Phi_A, \Phi_B, \Psi_A, \Psi_B\},$$

оскільки

$$\psi(z) \in \Psi_A, \quad \psi(x) \in \{\Psi_A, \Psi_B\}.$$

При будь-яких $a \in A,\ b \in B,\ \alpha \in \Phi_A,\ \beta \in \Phi_B$ справедливі відношення:

1) $\alpha\beta = \beta\alpha$,

2) $\psi(a)\cdot\beta = \beta\cdot\psi(a),\ \psi(b)\cdot\alpha = \alpha\cdot\psi(b)$,

3) $\psi(a)\cdot\alpha = \alpha\cdot\psi(a^{\alpha}),\ \psi(b)\cdot\beta = \beta\cdot\psi(b^{\beta})$,

де a^{α} є образ елемента a при автоморфізмі α, b^{β} — образ елемента b при автоморфізмі β. Доведемо, що *всі відношення виду* 1)-3) *складають для* Γ *систему визначальних відношень* [18].

Дійсно, всяке відношення між нашими твірними може бути за допомогою відношень 1)-3) приведене до виду

$$\alpha\beta\psi(x) = 1,$$

де $\psi(x)$ є трансформування групи G елементом x. Звідси випливає $\alpha\beta = 1$ і $\psi(x) = 1$, оскільки автоморфізм $\alpha\beta$ не змінює довжин елементів групи G, тоді як внутрішній автоморфізм $\psi(x)$, якщо він відмінний від тотожного, довжини деяких елементів змінює. Оскільки, далі, автоморфізм α діє тільки на елементи із A, β — тільки на елементи із B, то із $\alpha\beta = 1$ слідує $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Нарешті, група внутрішніх автоморфізмів групи G є вільний добуток підгруп Ψ_A і Ψ_B, тому рівність $\psi(x) = 1$ означає, що елемент $\psi(x)$ є порожнє слово цього вільного добутку. Цим доведено, що всяке відношення в групі Γ є наслідком відношень 1)-3).

У деяких випадках виявляється корисною більш загальна конструкція, ніж вільний добуток. Нехай дано групи A_{α}, де α пробігає деяку множину індексів, і в кожній із груп A_α вибрана власна підгрупа B_α так, що всі ці підгрупи ізоморфні одній і тій же групі B. Через ϕ_α позначимо означене відображення B_α на B; $\psi_{\alpha\beta}=\phi_\alpha\phi_\beta^{-1}$ буде тому ізоморфним відображенням B_α на B_β [13].

Вільним добутком груп A_α з об'єднаною підгрупою B називається фактор-група G вільного добутку груп A_α по нормальному дільнику, що породжений всіма елементами виду $b_\alpha b_\beta^{-1}$, де $b_\beta=b_\alpha\psi_{\alpha\beta}$, b_α пробігає всю підгрупу B_α, а α і β — різноманітні пари індексів. Інакше кажучи, якщо всяка група A_α задана системою твірних $\mathfrak{M}_\alpha$ і системою визначальних відношень Φ_α в цих твірних, то група G має системою твірних об'єднання множин $\mathfrak{M}_\alpha$, а системою твірних відношень об'єднання множин Φ_α з приєднанням всіх відношень, які утворюються прирівнюванням один одному таких елементів із різних підгруп B_α і B_β які відображаються при ізоморфізмах ϕ_α і ϕ_β в один і той же елемент групи B. Відбувається "склеювання" підгруп B_α у відповідності з ізоморфізмами $\psi_{\alpha\beta}$ [8].

Дане означення не дає можливості безпосередньо вияснити побудову групи G — можна остерігатись, що накладання додаткових визначальних відношень викликає склеювання між групами A_α, не передбачені ізоморфізмами $\psi_{\alpha\beta}$, або замінює яку-небудь із груп A_α її фактор-групою, і т.д. Проведемо тому деякі додаткові міркування.

У кожній із груп A_α у всіх правосторонніх суміжних класах по підгрупі B_α обираємо по представнику, припускаючи лише, що представником у самій підгрупі B_α взята одиниця. Представник класу, у якому лежить даний елемент a_α, позначимо через $\overline{a}_\alpha$, тобто

$$a_\alpha=b_\alpha\overline{a}_\alpha,\ b_\alpha\in B_\alpha. \qquad (2.5)$$

Словом називають вираз

$$b\overline{a}_1\overline{a}_2...\overline{a}_n, \qquad (2.6)$$

де $n\geqslant 0$, b — будь-який елемент групи B, можливо і одиниця, всяке $\overline{a}_i$ — відмінний від одиниці представник одного із правосторонніх суміжних класів однієї з груп A_α по підгрупі B_α і, нарешті, сусідні представники $\overline{a}_i, \overline{a}_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ лежать в різних групах A_α.

Всякий елемент групи G — вільного добутку груп A_α з об'єднаною підгрупою B — може бути записаний у вигляді (2.6)*, до того ж єдиним способом* [1].

Доведення. Нехай $a_1 a_2 \ldots a_n$ — елемент вільного добутку груп A_α, взятий у нескоротному записі, $a_i \in A_{\alpha_i}$. Якщо $n=1$, то необхідний запис вказаний в (2.5). Припустимо тому уже доведеним, що

$$a_2 a_3 \ldots a_n = b \overline{a}'_2 \overline{a}'_3 \ldots \overline{a}'_s,$$

де справа стоїть слово. Нехай

$$b \phi_{\alpha_1}^{-1} = b_1, \; a_1 b_1 = a'_1, \; a'_1 = b'_1 \overline{a}'_1, \; b_1 \phi_{\alpha_1} = b'.$$

Якщо $\overline{a}'_1 = 1$, то

$$a_1 a_2 \ldots a_n = b' \overline{a}'_2 \ldots \overline{a}'_s,$$

де справа стоїть слово. Якщо ж $\overline{a}'_1 \neq 1$, то у тому випадку, коли $\overline{a}'_1$ і $\overline{a}'_2$ лежать в різних групах A_α, шуканим записом буде

$$a_1 a_2 \ldots a_n = b' \overline{a}'_1 \overline{a}'_2 \ldots \overline{a}'_s.$$

Якщо, нарешті, $\overline{a}'_1$ і $\overline{a}'_2$ лежать в одній і тій же групі A_α, то нехай

$$\overline{a}'_1 \overline{a}'_2 = b_\alpha \overline{a}''_1, \; b_\alpha \phi_\alpha = b'';$$

тоді при $\overline{a}''_1 \neq 1$ буде

$$a_1 a_2 \ldots a_n = (b' b'') \overline{a}''_1 \overline{a}'_3 \ldots \overline{a}'_s,$$

а при $\overline{a}''_1 = 1$

$$a_1 a_2 \ldots a_n = (b' b'') \overline{a}'_3 \ldots \overline{a}'_s.$$

Зауважимо, що описаний вище процес, якщо він насправді буде застосований до добутку $a_1 a_2 \ldots a_n$, починаючи з його кінця, призведе до цілком певного слова виду (2.6). Назвемо цей процес *редукцією* добутку $a_1 a_2 \ldots a_n$ [17].

Для доведення єдиності позначимо через M множину всіх слів виду (2.6), а через S_M — групу всіх взаємно однозначних відображень множини M на себе. Якщо a — елемент із групи A_α, то поставимо йому у відповідність наступне відображення $\hat{a}$ множини M у себе. Нехай

(2.6)— будь-яке слово. Помножимо його, як елемент вільного добутку групи A_α, справа на елемент a, перейдемо до нескоротного запису, а потім застосуємо редукцію. Отримане нове слово вважаємо поставленим у відповідність слову (2.6) при відображені $\hat{a}$ [24].

Якщо елемент a — одиниця групи A_α, то йому відповідає тотожне відображення множини M на себе. Легка, хоча і пов'язана з розглядом різних частинних випадків, перевірка показує, що відображення, що відповідає добутку двох елементів a і a' групи A_α, збігається з результатом послідовного виконання відображень $\hat{a}$ і $\hat{a}'$. Зокрема, елементу a^{-1} буде відповідати відображення, обернене відображенню $\hat{a}$, а тому $\hat{a}$ взаємно однозначно і є відображенням на усе M [6].

Зауважимо, що при $a \neq 1$, $a = b\bar{a}$, слово 1 переводиться в слово $b\bar{a}$, відмінне від 1, тобто відображення $\hat{a}$ не буде тотожним. Ми отримуємо, відтак, ізоморфне відображення групи A_α на підгрупу $\hat{A}_\alpha$ групи S_M. Нехай $\hat{G}$ буде підгрупа групи S_M, що породжена всіма $\hat{A}_\alpha$. У групі $\hat{G}$ виконуються, очевидно, всі відношення, які були визначальними для групи G, і разом з тим запис елементів із $\hat{G}$ у вигляді (2.6) однозначна. Дійсно, якщо $b_\alpha \psi_{\alpha\beta} = b_\beta$, то відображення $\hat{b}_\alpha$ і $\hat{b}_\beta$ будуть, очевидно, збігатись і це надає однозначний сенс символу $\hat{b}$. Відображення

$$\hat{b}\hat{\bar{a}}_1\hat{\bar{a}}_2 \ldots \hat{\bar{a}}_n \qquad (2.7)$$

переводить, проте, слово 1 як раз в слово (2.6), тобто різні добутки (2.7) є різними елементами групи $\hat{G}$. Звідси випливає однозначність запису елементів групи G у вигляді слів.

Тепер уже без труднощів встановлюється ряд властивостей вільного добутку G груп A_α з об'єднаною підгрупою B.

Групи A_α лежать в групі G в якості підгруп, породжують разом цю групу і попарно перетинаються тільки по об'єднаній підгрупі B.

Дійсно, слово, що стоїть в правій частині рівності (2.5), відмінне від слова 1 при $a_\alpha \neq 1$. Якщо ж $a_\alpha \notin B_\alpha$, то при будь-якому елементі a_β із A_β,

$\beta \neq \alpha$, редукція добутку $a_{\beta}^{-1} a_{\alpha}$ приводить до слова, що закінчується на $\bar{a}_{\alpha}$, тобто відмінному від 1.

Всякий елемент групи G, що має скінченний порядок, спряжений в групі G з елементом однієї з підгруп A_{α} [14].

Нехай елемент g із G скінченного порядку k,

$$g^{k} = 1,$$

записаний у вигляді (2.6). Якщо $n \leqslant 1$, то все очевидно. Якщо ж $n > 1$ і якщо елементи $\bar{a}_{1}$ і $\bar{a}_{n}$ із цього запису належать до однієї підгрупи A_{α}, то після трансформування елементом $\bar{a}_{n}^{-1}$ і подальшої редукції ми перейдемо до слова меншої довжини. Тому будемо вважати, що $n > 1$, але елементи $\bar{a}_{1}$ і $\bar{a}_{n}$ лежать в різних підгрупах A_{α}, і покажемо, що цей випадок взагалі неможливий. Дійсно, запишемо k разів підряд слово (2.6) і об’єднаємо кожного разу сусідні множники b і a_{1}. Ми отримаємо завдяки зробленим припущенням нескоротний запис добутку декількох елементів із груп A_{α}, причому ці елементи лежать поза відповідних підгруп B_{α}. При виконанні редукції ніколи не зустрінеться представник, рівний одиниці — добуток елемента із A_{α}, що лежить поза B_{α}, зліва на елемент із B_{α} лежить поза B_{α}, — а тому редукція не може привести до слова 1 [11].

Якщо C_{α} — перетин підгрупи B_{α} з центром групи A_{α}, то центром групи G буде перетин всіх підгруп $C_{\alpha} \phi_{\alpha}$ групи B.

Перетин всіх підгруп $C_{\alpha} \phi_{\alpha}$ лежить в центрі групи G. Нехай, з іншого боку, елемент

$$g = b \bar{a}_{1} \bar{a}_{2} \ldots \bar{a}_{n}$$

лежить в центрі групи G. Якщо $n \geqslant 1$ і $\bar{a}_{n} \in A_{\alpha}$, то візьмемо в будь-якій групі A_{β}, $\beta \neq \alpha$, будь-який елемент a', що лежить поза B_{β}. Тоді редукції добутків ga' і $a'g$ приводять до різних слів. Якщо ж $n = 0$, тобто $g = b$, але b лежить поза однієї з підгруп C_{α}, то знову приходимо до протиріччя, беручи в якості a' такий елемент із групи A_{α}, який не переставний з елементом $b \phi_{\alpha}^{-1}$ [26].

Питання про підгрупи вільних добутків з об'єднаною підгрупою вимагав вивчення ще більш загальної конструкції: замість склеювання всіх груп A_α за однією і тією ж підгрупою B припускається, що кожна пара груп A_α, A_β склеюється по деякій підгрупі $B_{\alpha\beta}$, причому вибір цих підгруп $B_{\alpha\beta}$ в групах A_α належним чином узгоджений. Ця конструкція вивчається в роботах Х. Нейман.

2.2. Підгрупи вільних груп

Теорема Нільсена-Шрейера, виведена в попередньому пункті із теореми про підгрупи вільного добутку, була доведена Нільсеном для випадку вільних груп скінченного рангу і поширена Шрейером на довільні вільні групи. Метод Шрейера був суттєво спрощений Гуревичем. Інше доведення теореми Нільсена-Шрейера дав Леві. Існує також декілька топологічних доведень — Рейдемейстер, Лохер. Нове доведення опублікували також Федерер і Йонсон.

Властивості вільних груп:

I. *Комутант вільної групи скінченного рангу* n, $n>1$, *є вільною групою парного рангу.*

II. (Шрейер). *Якщо у вільній групі* G *скінченного рангу* n *дано підгрупу* U *скінченного індексу* j, *то ранг* k *цієї підгрупи також скінченний і задовольняє рівність* $k=1+j(n-1)$.

III. (М. Холл). *Нехай у вільній групі* G *дано спадну послідовність підгруп* $G=A_0\supset A_1\supset A_2\supset \ldots \supset A_k\supset \ldots$, *що володіє наступною властивістю: для всякого* k, $k\geqslant 0$, *і всякого вибору системи вільних твірних в групі* A_k *будь-який елемент із підгрупи* A_{k+1}, *відмінний від 1, має в цих твірних довжину, більшу або рівну трьом. Тоді перетин даної послідовності підгруп рівний* E [9].

Теорема Магнуса. *Якщо* G *— довільна вільна група, то* ω*-й член її нижнього центрального ланцюга рівний* E.

Ця теорема доведена в роботі Магнуса і передоведена Віттом, Фукс-Рабіновичем, М. Холлом. Вона міститься також в багато більш загальних результатах Мальцева, що відносяться до питання про умови, при яких ω-й член нижнього центрального ланцюга вільного добутку деяких груп буде рівним E.

Відмітимо без доведення теорему із роботи Вітта про те, що *всі фактори* F_n / F_{n+1}, $n=0, 1, 2, \ldots$, *нижнього центрального ланцюга* (2.10) *вільної групи* F *є вільними абелевими групами.*

Одну теорему такого ж типу, як теореми М. Холла і Магнуса, можна знайти в роботі Леві. Всі ці теореми представляють собою частинні вклади в загальний і не дуже визначене питання про огляд всіх підгруп вільної групи. В будь-якому випадку вільна група вельми насичена підгрупами і навіть нормальними дільниками. Це можна побачити із різних міркувань, зокрема із наступної теореми.

Теорема 2.6 *Якщо* G *— вільна група, а* g *— її елемент, відмінний від 1, то в* G *існує нормальний дільник скінченного індексу, що не містить елемента* g.

Цілком характеристичні підгрупи вільних груп. Тотожні відношення

Цілком характеристичні підгрупи вільних груп представляють особливий інтерес. Це викликано в першу чергу їх зв'язком з так званими тотожними відношеннями в групах [10].

В будь-якій абелевій групі рівність

$$x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = 1 \text{ або } [x_1, x_2] = 1$$

виконується при підстановці замість "невідомих" x_1 і x_2 будь-яких елементів групи. Аналогічно в будь-якій метабелевій групі має місце рівність

$$[[x_1, x_2], x_3] = 1,$$

знову при будь-яких x_1, x_2, x_3 із групи. В скінченній групі порядку n порядок всякого елемента ділить n, а тому "тотожно" виконується рівність

$$x_1^n = 1.$$

Означення 2.3 *Всяка група* G *ізоморфна фактор-групі деякої наведеної вільної групи, що володіє тими ж тотожними відношеннями, що і група* G.

Всяка цілком характеристична підгрупа H *вільної групи* W *парного рангу буде грати роль групи* V_G *для деякої групи* G — фактор-група W/H буде мати лівими частинами своїх тотожних відношень саме елементи із H [5].

Теорема 2.7 *Всяка цілком характеристична підгрупа* H *вільної групи* F, *що не міститься повністю в комутанті* F', *є добутком свого перетину* K *з цим комутантом,* $K = H \cap F'$, *і деякого степеня* F^n *групи* F, $n \geqslant 1$.

Теорема 2.8. *Якщо* F *— вільна група,* H *— її істина цілком характеристична підгрупа, то фактор-група наведеної вільної групи* F/H *по її комутанту є прямим добутком циклічних груп порядку* $n(H)$ *; число цих циклічних прямих множників рівне рангу групи* F.

Теорема 2.9. *Існує взаємно однозначне відображення множини* L_F *всіх цілком характеристичних підгруп вільної групи* F *довільного рангу в множину* L_W *всіх цілком характеристичних підгруп вільної групи* W *парного рангу, що в обидві сторони зберігає включення.*

Якщо ранг групи F *нескінченний, то це буде відображення множини* L_F *на всю множину* L_W [23].

Локально вільні групи

Почнемо тепер розгляд одного класу груп, що є натуральним узагальненням класу вільних груп, але вже достатньо широкого. Вивчення цього класу груп поки далеко від закінчення.

Означення 2.4 Група G називається *локально-вільною*, якщо всяка її підгрупа, що породжена скінченним числом елементів, є вільною.

До локально вільних груп належать, з огляду на теорему Нільсена-Шрейера, всі вільні групи. Означенню локально вільної групи задовольняють також адитивна група раціональних чисел і всі її підгрупи; дійсно, в цих групах всяка скінченна підмножина породжує нескінченну циклічну підгрупу [7].

Всяка підгрупа локально вільної групи буде сама локально вільною; зокрема, всякий відмінний від одиниці елемент локально вільної групи має нескінченний порядок. Об'єднання зростаючої послідовності локально вільних груп саме локально вільне. Для випадку парних груп має місце наступне обернення цього останнього результату.

Означення 2.5 *Всяка парна локально вільна група є об'єднанням зростаючої послідовності вільних груп скінченного рангу.*

Означення 2.6 *Вільний добуток будь-якої множини локально вільних груп сам локально вільний.*

Варто зауважити, що локально вільна група не може бути простою, хоча, на відміну від вільних груп, локально вільна група може збігатися зі своїм комутантом [15].

Локально вільна група G називається *групою скінченного рангу*, а саме *рангу* n, якщо n є найменше число з тією властивістю, що всяка скінченна підмножина із G міститься у вільній підгрупі з n вільними твірними (якщо тільки такі числа взагалі існують). З іншого боку, якщо локально вільна група рангу n парна, але не вільна, то вона є об'єднанням зростаючої послідовності вільних груп рангу n. Групи рангу 1 є, очевидно, абелевими, тобто збігаються з абелевими групами без скруту, що мають ранги 1; всяка локально вільна група, ранг якої більше 1, буде уже некомутативною.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.10. *Об'єднання зростаючої послідовності непарних вільних груп не може бути групою скінченного рангу.*

Властивості локально вільних груп багато в чому нагадують властивості абелевих груп без скруту. У дійсності між цими класами груп існує тісний зв'язок, що виражається наступними теоремами:

Теорема 2.11 *Фактор-група* G/K *локально вільної групи* G *по її комутанту* K *є абелевою групою без скруту. Якщо ранг групи* G *скінченний і рівний* n, *то ранг групи* G/K *не більше* n.

Теорема 2.12. *Всяка абелева група без скруту* A *ізоморфна фактор-групі деякої локально вільної групи* G *по її комутанту. Якщо ранг групи* A *скінченний і рівний* n, *то серед локально вільних груп, для яких* A *слугує фактор-групою по комутанту, існують групи рангу* n [8].

Зв'язок локально вільних груп з абелевими групами без скруту може бути використана для доведення *існування нерозкладних у вільний добуток локально вільних груп будь-якого скінченного рангу*.

Потужність множини всіх груп потужності $\mathfrak{m}$

Означення 2.7 *Множина всіх неізоморфних груп нескінченної потужності* $\mathfrak{m}$ *має потужність* $2^{\mathfrak{m}}$, *тобто потужність множини всіх частин множини потужності* $\mathfrak{m}$ [14].

Всяка група потужності $\mathfrak{m}$ є фактор-групою вільної групи $W_{\mathfrak{m}}$ цієї ж потужності. Потужність множини всіх неізоморфних груп потужності $\mathfrak{m}$ буде, отже, не більше потужності множини всіх нормальних дільників групи $W_{\mathfrak{m}}$, яка, в свою чергу, не більше потужності множини всіх підмножин із $W_{\mathfrak{m}}$, тобто не більше ніж $2^{\mathfrak{m}}$.

ВИСНОВКИ

Прямі добутки груп відіграють в теорії груп дуже велику роль. Іншою конструкцією цього типу є вільний добуток груп. Вільний добуток дає, подібно прямому добутку, деяку можливість із заданих груп побудувати нову групу. Він відрізняється від прямого добутку тим, що в його означенні відсутня умова комутативності елементів, що міститься в означенні прямого добутку і входять до різних прямих множників.

В роботі було вивчено прямі та вільні добутки груп.

Доведено, що:

- Підгрупа K_ν є вільним добутком всіх підгруп $\overline{A}_\mu$, $\mu<\nu$, відмінних від E, і всіх нескінченних циклічних підгруп, що породжені елементами $f_{\mu\sigma}$, $\sigma<\sigma_\mu$, $\mu<\nu$.

  Де K_ν — підгрупа, що породжена всіма підгрупами Φ_μ групи H; ν, μ — індекси, $\overline{A}_\mu$ — підгрупа групи G; E —одинична підгрупа групи G.
- Довжина всякого слова із K_ν, що не є простим, більше довжини кожного із його множників.
- Ранг вільної групи є її інваріантом, тобто не залежить від вибору системи вільних твірних.
- Ніяка група не може бути одночасно розкладною у вільний і в прямий добуток.
- Всякий елемент групи G — вільного добутку груп A_α з об'єднаною підгрупою B — може бути записаний у вигляді $b\overline{a}_1\overline{a}_2...\overline{a}_n$, до того ж єдиним способом.

  Де A_α — групи, де α пробігає деяку множину індексів, і в кожній із груп A_α вибрана власна підгрупа B_α так, що всі ці підгрупи ізоморфні одній і тій же групі B.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авдєєва Т. В. Загальна алгебра і теорія чисел. Навчально-методичний посібник. / Т. В. Авдєєва, В. М. Горбачук. – Київ: Політехніка, 2001. – 84 с.
2. Безущак О. О. Елементи теорії чисел. Навчальний посібник. / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський Університет», 2003. – 202 с.
3. Безущак О. О. Теорія груп / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2005.
4. Бородін О. І. Теорія чисел / О. І. Бородін. – Київ: Вища школа, 1970. – 276 с.
5. Бухштаб А. А. Теорія чисел / Бухштаб А. А. — М.: Просвещение, 1966. — 385 с.
6. Валєєв К. Г. Вища математика. ч.2 / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ: КНЕУ, 2002. – 451 с.
7. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден. – М.: Наука, 1979.
8. Волошина Т. В. Основні алгебраїчні структури: курс лекцій / Волошина Т. В. — Луцьк : Вежа-Друк, 2015. — 60 с.
9. Гаврилків В. М. Елементи теорії груп та теорії кілець: навчальний посібник / В. М. Гаврилків. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 148 с.
10. Дрозд Ю. А. Скінченномірні алгебри / Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко. – Київ: Вища школа, 1980.

11. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел. Практикум / С. Т. Завало, С. С. Левіщенко, В. В. Пилаєв, В. В. Рокицький. – Київ: Вища школа, 1986. – 264 с.

12. Завало С. Т. Курс алгебри / С. Т. Завало. – Київ: Вища школа, 1985. – 504 с.

13. Завало С. Т. та ін. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.1. / С. Т. Завало. – Київ: Вища школа, 1983. – 232 с.

14. Завало С. Т. та ін. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.2. / С. Т. Завало. – Київ: Вища школа, 1986. – 264 с.

15. Колеснік С. Г. Алгебра і теорія чисел, ч.2 / С. Г. Колеснік, В. В. Цибуленко. – Херсон, 1998. – 325 с.

16. Колеснік С. Г. Вища алгебра, метод. посібник / С. Г. Колеснік. – Херсон: Атлант, 2003. – 96 с.

17. Костарчук В. М. Курс вищої алгебри / В. М. Костарчук, Б. І. Хацет – Київ: Вища школа, 1969. – 536 с. – (3-є вид. перероблене і доповнене).

18. Кулініч Г. Л. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. Кн.2 / Г. Л. Кулініч. – Київ: Либідь, 2003. – 368 с.

19. Лиман Ф. М. Елементи теорії груп, кілець та полів / Ф. М. Лиман, Т. Д. Лукашова. – Суми: Макден, 2013. – 208 с.

20. Лиман Ф. М. Елементи теорії груп, кілець та полів / Ф. М. Лиман. – Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2005. – 112 с.

21. Михейович Ш. Х. Теорія чисел / Ш. Х. Михейович. – М.: Вища школа, 1962. – 260 с.

22. Назаренко О. М. Елементи теорії чисел: навч. Посібник / О. М. Назаренко, Т. І. Панченко. — Суми: СумДУ, 2003. — 204 с.

23. Никифорчин О. Р. Елементи загальної топології / О. Р. Никифорчин. – Івано-Франківськ: Голіней, 2015. – 240 с.

24. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

25. Пастушенко С. М. Вища математика: Довідник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – Київ: Діал, 2003. – 461 с.

26. Пилипів В. М. Класичні основи теорії чисел: навчально-методичний посібник / В. М. Пилипів, Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський. – Івано-Франківськ: Плай, 2014. – 68 с.

27. Пилипів В. М. Кільце поліномів: навчально-методичний посібник / В. М. Пилипів, Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський. – ІваноФранківськ: Плай, 2014. – 100 с.

28. Требенко Д. Я. Алгебра і теорія чисел, ч.1 / Д. Я. Требенко, О. О. Требенко. – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006. – 400 с.

29. Уткіна С. В. Алгебра і числові системи / С. В. Уткіна, Л. С. Наришкіна. – Київ: Вища школа, 1995. – 304 с.

30. Філозоф К. Ф. Основи теорії чисел (курс лекцій) / Філозоф К. Ф. — Луцьк: РВВ «Вежа», Волин. держ. ун-ту ім. Лесі Українки, 2010. — 132 с.

31. Dummit D. S. Abstract Algebra / David S. Dummit, Richard M. Foote. –Wiley Intern. Ed., Chichester: Wiley, 2004. – 932 p.

32. Judson T. W. Abstract Algebra: Theory and Applications / Thomas W. Judson. – An open-source textbook available at http://abstract.ups.edu, 2012. – 428 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Коваленко Аліна Сергіївна,

учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки ;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

24.04.2020		Аліна Коваленко
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)