МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ГРУПИ ЗІ СКІНЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ ТВІРНИХ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконав: студентка 421 групи

Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)

Морозова Світлана Юріївна

Керівник доц., к. фіз.-мат. н.

Котова Ольга Володимирівна

Рецензент проф. Шерман М. І.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Існує ряд відкритих питань з теорії груп зі скінченною кількістю твірних. Оскільки існують групи зі скінченною кількістю твірних, ізоморфні своїй власній фактор-групі, то проблема Хопфа має негативний розв'язок. Відмітимо, що для вільних груп скінченного рангу, має місце протилежне твердження. Також відомо, що існують нескінченні прості групи зі скінченною кількістю твірних. Відкритою залишається і проблема Бернсайда: чи буде скінченною всяка періодична група зі скінченною кількістю твірних. Ця проблема не має розв'язку навіть при умові, що порядки елементів групи обмежені в сукупності. Розв'язок отримується у випадку, коли порядки всіх відмінних від 1 елементів групи рівні двом, оскільки така група буде абелевою. Бернсайдом було знайдено розв'язок також для випадку, коли порядки елементів рівні трьом, і для груп з двома твірними, порядки всіх елементів які рівні чотирьом і дільнику чотирьох; перший із цих двох випадків розглядався також в роботі Леві і Ван-дер-Вардена. Б. Нейман розв'язав задачу для груп, порядки елементів яких не вище трьох. Іван Санов – для груп з будь-яким числом твірних, порядки всіх елементів яких не вище чотирьох. Однак вже для груп з двома твірними, в яких порядок всіх відмінних від 1 елементів рівний п'яти, проблема залишається відкритою. Зауважимо, що всі такі групи будуть фактор-групами приведеної вільної групи з двома твірними B_5, який отримується накладанням тотожного співвідношення $x^5=1$. Були спроби оцінити зверху порядок скінченних фактор-груп групи B_5, але вони не привели до результату. Санов показав, що для позитивного рішення проблеми Бернсайда у випадку обмежених в сукупності порядків елементів достатньо розв'язати її для груп з двома твірними [21, с. 250].

Для груп зі скінченною кількістю твірних і скінченною кількістю визначальних співвідношень виникли деякі проблеми алгоритмічного характеру. Найважливішою серед них є проблема тотожності: треба знайти алгоритм, який дозволяв би для будь-якої групи, заданою скінченною кількістю твірних і співвідношень, у скінченну кількість кроків відповісти на питання, чи дорівнює одиниці деяке задане слово в цих твірних, або ж довести, що такий алгоритм не існує [21].

Проблему тотожності можна вирішити для деяких більш окремих класів груп, ніж групи зі скінченною кількістю твірних і співвідношень. Так, для вільних груп вирішення проблеми тотожності витікає з того, що всякий елемент володіє однозначним нескоротним записом. Проблема тотожності вирішується для вільного добутку, якщо вона вирішена для кожного із множників. Для груп з одним твірним співвідношенням проблему тотожності вирішив Магнус. Новий більш загальний підхід до проблеми тотожності міститься в роботах Тартаковського [21, с. 265].

Теорема Грушко – в деякому сенсі, відправна точка в теорії Данвуді *доступності*.

Після доведень Грушко (1940) і Неймана (1943), було багато наступних альтернативних доведень, спрощень і узагальнень теореми Грушко. Близька версія оригінального доведення Грушко дана в книзі Куроша 1955 року. Як і оригінальні доведення, доведення Ліндона (1965) спирається на теорію функцій довжини, але зі значними спрощеннями. В газеті 1965 року Столлінгса було опубліковано значне спрощення топологічного доведення теореми Грушко. В газеті 1970 року Zieschang було опубліковано версію еквівалентності Нільсена теореми Грушко і деякі узагальнення теореми. Скотт (1974) і пізніше Imrich (1984) надали інші топологічні доведення теореми. В газеті 1976 року Chiswell було опубліковано відносно пряме доведення теореми Грушко. Це доведення має продовження в теорії графів та подальших доведеннях теореми Грушко [34].

Мета роботи: полягає у вивченні питання про можливість розкладу групи у вільний добуток груп; вивченні властивостей груп із скінченною кількістю твірних та визначальних співвідношень.

Відповідно до мети поставлено *основні завдання роботи:*

- дослідити літературу з теми дослідження;
- вивчити основні поняття теорії груп;
- вивчити властивості та визначальні співвідношення груп із скінченною кількістю твірних;
- розглянути теорему Грушко та наслідки з неї, теорему, що є посиленням теореми Діка.

Об'єкт дослідження: групи та теоретико-групові конструкції.

Предмет дослідження: Твірні групи. Розклад групи у вільний добуток груп.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи 47 сторінок.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Поняття групи. Твірні елементи групи

Поняття групи є одним із основних понять сучасної математики.

Непорожня множина G з однією бінарною алгебраїчною операцією називається *групою,* якщо виконуються наступні умови:

1) операція в G асоціативна;
2) в G виконується обернена операція [21, с. 23].

Якщо група G складається зі скінченної кількості елементів, то вона називається *скінченною групою,* а число елементів в ній – *порядком* групи [21, с. 23].

Підгрупою групи Gназивається підмножина H групи G, що сама є групою щодо операції, визначеної в G.

Підмножина H групи G є підгрупою тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє такі умови:

1. разом з двома довільними елементами з множини H містить їх добуток;
2. разом зі всяким своїм елементом h, містить обернений до нього елемент h^{-1}.

У разі скінченних і періодичних груп перевірка умови (2) є зайвою.

Породжуюча множина групи – це така підмножина S групи G, що кожен елемент групи G може бути представлений як добуток скінченної кількості елементів із S та обернених до них.

Загальніше, якщо S підмножина групи G, тоді <S> – підгрупа породжена S, це найменша підгрупа G яка містить всі елементи S. Еквівалентно, <S> це підгрупа всіх елементів G, які можуть бути представлені як добутки скінченної кількості елементів з S та обернених до них.

Якщо G = <S>, говорять, що S породжує G, а елементи S називаються твірними або породжуючими елементами групи G. Якщо S – порожня, то за визначенням, вважається <S> = {e} [26].

Коли S містить тільки один елемент x, зазвичай пишуть <x> = G. В такому випадку <x> – це циклічна підгрупа степенів x в G.

Якщо група має систему твірних, яка складається зі скінченної кількості елементів, то вона називається *групою зі скінченною кількістю твірних.* Очевидно, такими є всі скінченні і циклічні групи. Однак із скінченності кількості твірних не випливає скінченність самої групи [21, с. 43].

Усяка система твірних групи зі скінченною кількістю твірних має скінченну підмножину, яка є незвідною системою твірних цієї групи [28].

Оскільки скінченна система твірних завжди може бути отримана незвідним шляхом видалення зайвих елементів, то потрібно лише довести, що при наших міркуваннях усяка скінченна система твірних має скінченну підмножину, яка також являється системою твірних для групи, яка розглядається. Нехай G є група з твірними $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,

і нехай M є деяка інша система твірних цієї групи. Усякий елемент a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, що записується у вигляді добутку степенів скінченного числа елементів із M. Обираючи для кожного a_i один з таких записів і збираючи ті елементи із M, які входять в ці записи для $i = 1, 2, \ldots, n$, ми отримаємо скінченну підмножину M' із M, породжена якою підгрупа $\{M'\}$ має всі елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і тому співпадає з G [28].

Теорема 1.1. *Усякий гомоморфний образ групи зі скінченною кількістю твірних сам є групою зі скінченною кількістю твірних.*

Доведення

Якщо $G=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і якщо гомоморфізм φ відображає групу G на групу $\acute{G}$, то елементи

$$a_1\varphi, a_2\varphi, \ldots, a_n\varphi \qquad (1.1)$$

складають для $\acute{G}$систему твірних.

Нагадаємо, що гомоморфізм – це відображення φ алгебраїчної системи A в алгебраїчну систему B того ж типу ($\varphi: A \to B$), що зберігає алгебраїчну операцію $\varphi(f_A(x_1, \ldots, x_n))=f_B(\varphi(x_1), \ldots, (x_n))$ для кожної n–парної операції f і $\forall\ x_i \in A$. [15]

Справді, якщо $\acute{a}$ – довільний елемент із групи $\acute{G}$ і a – один із його прообразів в групі G, то $\acute{a}$ також записується через степені елементів (1.1), як a – через степені елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Деякі із елементів (1.1) можуть, звичайно, співпадати, тобто ми отримаємо для групи $\acute{G}$ *систему твірних з повтореннями* [21, с. 44].

Теорему 1.1 доведено.

Теорема 1.2. *Усяка скінченна група зі скінченною кількістю твірних є зчисленною.*

Доведення

Справді, якщо елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є твірними для групи G, то всякий елемент цієї групи може бути записаний у вигляді добутку

$$a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \ldots a_{i_k}^{\alpha_s}$$

усяке i_k є одне з чисел $1, 2, \ldots, n$, причому можливо, що $i_k = i_l$ при $k \neq l$. Будемо називати *довжиною* цього добутку суму абсолютних величин показників:

$$h=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|a_s|.$$

Легко побачити, що існує лише скінченне число добутків степенів твірних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ даної довжини h. Множина всіх добутків степенів цих елементів буде сумою зчисленної множини скінченних множин, тобто зчисленною, а тому і група G буде не більш, ніж зчисленною [28].

Теорему 1.2 доведено.

1.2. Загальні властивості груп із скінченною кількістю твірних

У загальному випадку вивчення груп зі скінченною кількістю твірних відбувається набагато складніше, ніж, наприклад, вивчення скінченних груп, теорія яких також є нелегкою. Ми вкажемо причини, які лежать в основі цих труднощів.

Множина всіх груп зі скінченною кількістю твірних має потужність континууму – мати більшу потужність вона не може, оскільки всі ці групи зліченні. *Нагадаємо, що континуум – це потужність множини всіх дійсних чисел* [17].

Теорема 1.3. *Множина всіх неізоморфних груп з двома твірними має потужність континууму.*

Доведення.

Доведемо, що *при непарності* n *елементи* $a=(12\dots n)$, $b=(123)$*складають систему твірних для знакозмінної групи n-го степеня. Нагадаємо, що знакозмінна група – підгрупа симетричної групи, що містить тільки парні перестановки* [21].

Це очевидно при $n=3$, тому припускаємо $n\geq3$. Помітимо, що парність підстановки aвипливає із непарності числа n. Оскільки при $3\leq i<n$буде

$$b a^{-1}(12i)ab^2=(1,2,i+1),$$

то підгрупа $\{a,b\}$, яка містить підстановку (123), містить всі потрійні цикли виду $(12i)$, $3\leq i\leq n$, а тому і обернені їм цикли $(1i2)$. Якщо $i\neq j$, $i\geq3, j\geq3$, то

$$(12j)(12i)(1j2)=(1ij),$$

тобто підгрупа $\{a,b\}$ містить всі потрійні цикли виду $(1ij)$. І нарешті, якщо символи i,j,k,l відмінні між собою і відмінні від символу 1, то

$$(1li)(1jk)(1il)=(ijk),$$

тобто підгрупа $\{a,b\}$ містить всі потрійні цикли n-го степеня і тому співпадає зі всією знакозмінною групою.

Нехай тепер

$U=\{U_i\}$

є зростаюча послідовність непарних чисел, де $u_1 \geq 5$, і нехай $G_U^{'}$ є прямий добуток скінченних знакозмінних груп, степені яких входять в *U,*

$G_U^{'}=A_{u_1}\times A_{u_2}\times\ldots\times A_{u_n}\times\ldots$

Нагадаємо що, прямий добуток двох множин – це множина, елементами якої є всі можливі впорядковані пари елементів висхідних множин [13].

Усяка група A_{u_n} є групою парних підстановок, які створюються над символами $\sigma_{n1},\sigma_{n2},\ldots\sigma_{n,u_n,}$, причому цикли $a_n=(\sigma_{n1},\sigma_{n2},\ldots,\sigma_{n,u_n})$ і $b_n=(\sigma_{n1},\sigma_{n2},\sigma_{n3})$ будуть, як показано вище, твірними елементами для цієї групи. Якщо Σ є множина всіх символів σ_{nk}, $k=1,2,\ldots,u_n$, $n=1,2,\ldots,$ то група $G_U^{'}$ буде підгрупою в групі всіх взаємно однозначних відображень множини Σ на себе. Візьмемо, з іншої сторони, в цій останній групі підгрупу G_U, породжену елементами

$a=(\sigma_{11},\sigma_{12},\ldots,\sigma_{1,u_1})(\sigma_{21},\sigma_{22},\ldots,\sigma_{2,u_2})\ldots(\sigma_{n1},\sigma_{n2},\ldots,\sigma_{n,u_n})\ldots,$

$b=(\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{13})(\sigma_{21},\sigma_{22},\sigma_{23})\ldots(\sigma_{n1},\sigma_{n2},\sigma_{n3})\ldots,$

і доведемо, що $G_U\supset G_U^{'}$.

Дійсно, безпосередня перевірка показує, що елементи $a_n^{-(u_m^{-2})}b\,a_n^{u_m^{-2}}$ і b комутативні при $m<n$, але некомутативні при $m=n$. Оскільки в будь-якому добутку степенів елементів a і b цикли, які містять символи $\sigma_¿$ з одним і тим же першим індексом n, перемножуються між собою так само як і в групі A_{u_n}, то ми отримуємо, що комутатор k_m елементів $a_n^{-(u_m^{-2})}b\,a_n^{u_m^{-2}}$ і b залишає всі символи $\sigma_¿$ при $n>m$ нерухомими, але переставляє символи σ_{mi} і, можливо, деякі з меншим, ніж m, першим індексом. Іншими словами, елемент k_m міститься в прямому добутку підгрупи A_{u_m} і деяких із підгруп A_{u_s}, $s<m$. Це ж вірно для будь-якого

елемента, спряженого в групі G_U з елементом k_m – трансформування елемента x із A_{u_n} будь-яким елементом із G_U переводить x в елемент, який належить до тієї ж підгрупи A_{u_n}, - а тому весь нормальний дільник, породжений в групі G_U елементом k_m, міститься в прямому добутку

$$A_{u_1} \times A_{u_2} \times \ldots \times A_{u_m}.$$

Компонента цього нормального дільника у прямому множнику A_{u_m} є відмінною від E нормальним дільником в A_{u_m}, тобто співпадає з A_{u_m}. Якщо ми будемо вважати доведеним, що групи $A_{u_1}, \ldots, A_{u_{m-1}}$ містяться в G_U (при $m=1$ це очевидно), то ми отримаємо, що і A_{u_m} входить до G_U. Звідси випливає, що всі підгрупи A_{u_n} містяться в групі G_U, причому будуть в G_U нормальними дільниками.

Нехай, з іншої сторони, в групі G_U взято довільний скінченний нормальний дільник H. Усякому елементу h із H відповідає елемент із A_{u_n} , який виконує таку ж перестановку символів $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \ldots, \sigma_{n,u_n}$, як і h. Ці «компоненти» елементів із H складають в підгрупі A_{u_n} нормальний дільник, який, зважаючи на простоту цієї підгрупи дорівнює або A_{u_n}, або E. Зважаючи на скінченність підгрупи H буде, починаючи з деякого з деякого номера $n+1$, постійно мати місце друга із цих двох можливостей. Іншими словами, нормальний дільник H залишає всі символи σ_{ki} при $k>n$ нерухомими і тому міститься в прямому добутку

$$A_{u_1} \times A_{u_2} \times \ldots \times A_{u_n},$$

причому компонента підгрупи H в A_{u_n} співпадає з самим цим прямим множником [21, с. 246].

Нехай тепер нормальний дільник H ізоморфний деякій знакозмінній групі $A_k, k \geq 5$. Будучи простою, підгрупа H буде ізоморфною своїй компоненті в A_{u_n}, тобто ізоморфна самій підгрупі A_{u_n}, звідки $k=u_n$. Ми отримуємо, зважаючи на доведене вище, що група G_U володіє скінченними нормальними дільниками, які є ізоморфними знакозмінній групі A_k, тоді і тільки тоді, коли k дорівнює деякому u_n із U.

Множина різних послідовностей типу U має потужність континууму. Якщо U_1 і U_2 – дві із цих послідовностей, то із сказаного вище випливає, що групи G_{U1} і G_{U2} не можуть бути ізоморфними. Ми отримали континуальну множину неізоморфних груп із двома твірними, що й треба було довести [21].

Теорему 1.3 доведено.

Із цієї теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 1.1. *Не існує такої «універсальної» зліченної групи, деякій підгрупі якої була б ізоморфна будь-яка зліченна група* – усяка зліченна група може містити, зрозуміло, лише зліченну множину підгруп із двома твірними. Питання про існування такої групи потужності континуум, деякій підгрупі якої ізоморфна будь-яка група цієї потужності, поки що є відкритим [21, с. 247].

Розглянемо наступні леми.

Лема 1.1. *Нехай в групі G дано ізоморфні між собою підгрупи A і B і нехай φ – ізоморфне відображення A на B. Тоді групу G можна так вкласти в деяку групу H, що в H знайдеться елемент h, трансформування яким підгрупи A породжує відображення φ,*

$$h^{-1}ah=a\varphi$$

для всіх a із A.

Доведення.

Розглянемо вільні добутки

$K=G*\{u\}, L=G*\{v\},$

де $\{u\}$ і $\{v\}$ – нескінченні циклічні групи.

Нагадаємо, що вільним добутком множини груп $G_i, i\in I$, називається групаG, породжена елементами груп G_i [26].

Для підгрупи $U=\{G, u^{-1}Au\}$ групи K має місце вільний розклад

$U=G*u^{-1}Au,$

а для підгрупи $V=\{G, vBv^{-1}\}$ групи L - вільний розклад

$V=G*vBv^{-1}.$

Ми отримаємо ізоморфне відображення ψ групи U на групу V, якщо покладемо:

$g\psi = g$ для всіх g із G,

$(u^{-1}au)\psi = v(a\varphi)v^{-1}$ для всіх a із A.

Із вище сказаного випливає, що можна побудувати вільний добуток H груп K і L з об'єднаною підгрупою, з'єднуючи підгрупи U і V у відповідності з ізоморфізмом ψ. Група H містить групу G в якості підгрупи. З іншого боку, оскільки в H

$u^{-1}au = v(a\varphi)v^{-1}$ для всіх a із A,

то

$(uv)^{-1}a(uv) = a\varphi$,

тобто елемент uv є шуканим елементом h [21, с. 246].

Лему 1.1 доведено.

Лема 1.2. *Нехай в групі G дано підгрупи A_α (α пробігає деяку множину індексів M) і для кожного α дано ізоморфне відображення φ_α підгрупи A_α на деяку підгрупу B_α. Тоді групу G можна так вкласти в деяку групу H, що для кожного α в H знайдеться елемент h_α, трансформування яким підгрупи A_α породжує відображення φ_α. Можна вважати при цьому, що елементи $h_\alpha, \alpha \in M$, породжують в H вільну підгрупу і являються її вільними твірними.*

Доведення.

Групу H ми означимо наступним чином: її твірними будуть твірні групи G і символи h_α, $\alpha \in M$, а її визначальними співвідношеннями – визначальні співвідношення групи G і всі рівності

$$h_\alpha^{-1} a_\alpha h_\alpha = a_\alpha \varphi_\alpha, \text{де } a_\alpha \in A_\alpha, \alpha \in M \qquad (1.2)$$

(елементи a_α і $a_\alpha\varphi_\alpha$ задаються, зрозуміло, записаними через твірні групи G). Елементи h_α дійсно будуть вільними твірними підгрупи, яка породжується ними в H: вважаючи всі твірні групи G рівними одиниці, ми перетворюємо співвідношення (1.2) в тотожності, а тому із них і із співвідношень групи G не може витікати нетривіальне співвідношення, яке пов'язує лише елементи h_α.

Якби, з іншого боку, твірні елементи групи G були зв'язані в групі H співвідношенням, яке не витікає із визначальних співвідношень групи G, то це співвідношення було б отримано уже після приєднання деякого скінченного числа елементів h_α. Або якби ці елементи h_α приєднувалися до групи G послідовно на основі леми 1.1, що, однак, не має місця. Таким чином, група H містить в якості підгрупи групу G і, отже, задовольняє всім вимогам леми 1.2 [21, с. 248].

Лему 1.2 доведено.

Для подальшого ще раз відмітимо, що *твірні* h_α *групи* H *входять лише в співвідношення* (1.2).

Застосовуючи лему 1.2 у випадку, коли $A_\alpha = G$ для всіх α, а φ_α – всі автоморфізми групи G, ми отримаємо групу H, яка виконує ту ж саму роль, що і голоморф групи G.

Нашою метою є наступна теорема.

Теорема 1.4. *Усяка злічення група* G *може бути ізоморфно вкладена в групу з двома твірними.*

Доведення.

Обираємо в групі G систему твірних $g_1, g_2, \cdots$, скінченну або зліченну. Нехай, далі,

$$K = G * \{u\}, \tag{1.3}$$

де $\{u\}$ – нескінченна циклічна група. У якості системи твірних групи K можна взяти елементи u і

$$u_i = ug_i, i = 1, 2, \ldots, (1.4)$$

оскільки $g_i = u^{-1} u_i, i = 1, 2, \ldots$ Порядок всіх елементів u_i нескінченний, тобто породжувані ними циклічні підгрупи ізоморфні. Тому, з леми 1.2 випливає, що групу K можна вкласти в таку групу L, в якій елементи h_i, $i = 1, 2, \ldots$, задовольняють умовам

$$h_i^{-1} u h_i = u_i, i = 1, 2, \ldots; (1.5)$$

окрім того, елементи h_i є вільними твірними породжуваної ними підгрупи H, входять лише у визначальні співвідношення (1.5) групи L і породжують разом з K всю групу L. Системою твірних групи L можна вважати, маючи на увазі (1.5), елементи u і $i=1,2,\ldots$

Нехай тепер W буде вільна група з двома твірними x,y. Як відомо у комутанті групи W знайдеться підгрупа S з таким (скінченним або зчисленним) числом вільних твірних $s_1,s_2,\ldots$, скільки у нас елементів

$$h_i, i=1,2,\ldots$$

Отже, можна взяти вільний добуток Q груп L і W з об'єднаною підгрупою, склеюючи ізоморфні підгрупи H і S цих груп за допомогою рівностей

$$h_i=s_i, i=1,2,\ldots(1.6)$$

Група породжується на основі (1.6) елементами u,x і y.

Покажемо, що елементи u і x не пов'язані в групі Q ніяким співвідношенням. Дійсно, існує на основі (1.3) гомоморфне відображення групи K на нескінченну циклічну групу $\{\acute{u}\}$, при якому u переходить в $\acute{u}$, а всі елементи із G – в одиницю, і тому з рівності (1.4) всі елементи $u_i, i=1,2,\ldots,$ - в $\acute{u}$. Цей гомоморфізм можна розширити до гомоморфного відображення групи L на групу $\{\acute{u}\}$, при якому елементи $h_i, i=1,2,\ldots$, переходять в одиницю – дійсно, вони входять лише в співвідношення (1.5), які при такому відображенні не порушуються. З іншого боку, існує гомоморфне відображення вільної групи W на нескінченну циклічну групу $\{\acute{x}\}$, при якому x переходить в $\acute{x}$, а y – в одиницю; всі елементи комутанта, зокрема всі елементи $s_i, i=1,2,\ldots,$, при цьому відображенні також переходять в одиницю. Тепер можна визначити гомоморфне відображення φ групи Q на вільну групу $\{\acute{u}\}*\{\acute{x}\}$, відображуючи L на $\{\acute{u}\}$ і W на $\{\acute{x}\}$ так, як вказано вище. Дійсно, на склеюваних підгрупах H і S ці відображення узгоджені, оскільки обидві підгрупи відображаються в одиницю. Відображення φ переводить елементи u, x відповідно у вільні твірні $\acute{u}, \acute{x}$ вільної групи, а тому u і x дійсно не можуть бути зв'язані в групі Q ніяким співвідношенням.

Таким чином, ми маємо в групі Q дві вільні підгрупи рангу 2, а саме $\{x, y\}$ і $\{u, x\}$. За лемою 1.1 групу Q можна вкласти в групу R, що породжується приєднанням до Q такого елемента z, що

$$z^{-1}xz=u, z^{-1}yz=x,$$

звідки $zxz^{-1}=y$. Звідси випливає, що група R, що породжується елементами u, x, y, z, насправді є групою з двома твірними – x і z [21, с. 248].

Теорему 1.4 доведено.

Теорема 1.5. *Група зі скінченною кількістю твірних може мати лише скінченне число підгруп даного скінченного індекса* j.

Доведення.

Нехай дана група G з твірними $a_1, a_2, \dots, a_n$ і в ній підгрупа U індекса j. Позначимо через

$$K_1=U, K_2, \dots, K_j (1.7)$$

всі правосторонні суміжні класи групи G за підгрупою U. Якщо g – довільний елемент із G, то перехід від системи класів (1.7) до системи

$$K_1 g, K_2 g, \dots, K_j g$$

буде підстановкою в системі (1.7), яку ми позначимо через $P(g)$. Таким чином, ми отримаємо відображення φ,

$$g\varphi=P(g), g\in G, (1.8)$$

групи G в симетричну групу j-го степеня S_j, гомоморфне через рівність

$$P(g_1 g_2)=P(g_1)P(g_2).$$

Гомоморфізм φ цілком визначається заданням образів елементів $a_1, a_2, \dots, a_n;$ існує тому лише скінченне число різних гомоморфізмів групи G в групу S_j, а саме не більше $(j!)^n$. Однак введений в (1.8) гомоморфізм φ однозначно визначає підгрупу U, оскільки елемент g тоді і тільки тоді міститься в U, якщо підстановка $P(g)$ залишає клас K_1 на місці. Група G з n твірними містить не більше $(j!)^n$ підгруп індекса j [21, с. 250].

Теорему 1.5 доведено.

РОЗДІЛ 2
РОЗКЛАД ВІЛЬНИХ ГРУП ЗІ СКІНЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ ТВІРНИХ

2.1. Теорема Грушко

Переходимо до розкладу вільних груп зі скінченною кількістю твірних; ці розклади представляють особливий інтерес через зв'язки з деякими проблемами комбінаторної топології.

Нехай група G володіє системою твірних

$\acute{g}_1, \acute{g}_2, \ldots, \acute{g}_n, (2.1)$

які не є неодмінно різними або відмінними від одиниці. Якщо елемент h групи G має такий запис через твірні (2.1), в який не входить елемент $\acute{g}_i$, то, замінюючи в (2.1) елемент $\acute{g}_i$ елементом $h\acute{g}_i$ чи елементом $\acute{g}_i h$, ми знову отримаємо систему твірних групи G. З іншого боку, заміна елемента $\acute{g}_i$ в системі (2.1) елементом $\acute{g}_j^{-1}$ також приводить до системи твірних. Усяка система твірних групи G, яка отримується із системи (2.1) скінченною кількістю перетворень указаного виду, буде називатися *допущеною* (відносно системи (2.1)) [21, с. 251].

Нехай група G розкладається у вільний добуток

$G = A_1 * A_2 * \ldots * A_k . (2.2)$

Допущену систему твірних назвемо *мінімальною,* якщо сума довжин елементів цієї системи, тобто її довжина, не більша довжини будь-якої іншої допущеної (відносно вихідної системи (2.1)) системи твірних групи G.

Лема 2.1. *Якщо*

$$g_1, g_2, \ldots, g_n (2.3)$$

є мінімальна допущена система твірних групи G і якщо серед елементів цієї системи є такі, довжина яких більше одиниці, то припустимо, що в (2.3) є незвідні особливі елементи.

Доведення

Система (2.3) по припущенню є мінімальною допущеною системою твірних групи G, причому довжина деяких елементів із (2.3) більша за одиницю. Із мінімальності системи (2.3) випливає, що ніякий її елемент, відмінний від 1, не може бути виражений через інші елементи системи: якщо $l(g_i)\geq 1$ і $g_i=\prod_{\nu} g_{j_\nu}^{\alpha_\nu}, j_\nu \neq i$, то заміна g_i через $g'_i=g_i^{-1}\cdot\prod_{\nu} g_{j_\nu}^{\alpha_\nu}$ приведе до нової допущеної системи твірних групи G з меншою довжиною, ніж у системи (2.3), оскільки $g_i^{'}=1$.

Усякий елемент будь-якого із вільних множників $A_1, A_2, \ldots, A_k$ може бути записаний через твірні із системи (2.3), причому знайдеться такий елемент α, що лежить в деякій підгрупі A_m, що в будь-якому його записі через ці твірні беруть участь елементи, довжина яких більша за одиницю – у протилежному випадку через елементи довжини із (2.3) записувалися б всі елементи групи G, у тому числі і елементи із (2.3), довжина яких більша за одиницю, а це є неможливим. Серед різних записів елемента a через твірні із системи (2.3) обираємо ті, у яких максимальна довжина елементів із (2.3) найменша, серед цих – ті, в яких елементи з цією максимальною довжиною зустрічаються найменшу кількість разів, серед них – ті записи, в яких найменша кількість разів зустрічаються елементи, довжина яких на одиницю менша за максимальну довжину, і так далі, завершуючи елементами довжини 1.

Нехай

$a=g_{j_1}^{\varepsilon_1} g_{j_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{j_\omega}^{\varepsilon_\omega}, \varepsilon_i=\pm 1, i=1,2,\ldots,\omega, (2.4)$

буде одна з таких записів; $\omega\geq 2$, оскільки в записі використовуються елементи, довжина яких більше за 1. Позначимо $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} g_{j_{\mu+1}}^{\varepsilon_{\mu+1}} \ldots g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$:

$[\mu,\nu]=g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} g_{j_{\mu+1}}^{\varepsilon_{\mu+1}} \ldots g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}, 1\leq\mu<\nu\leq\omega.$

$l[\mu,\nu]$є довжина елемента $[\mu,\nu]$ відносно вільного розкладу (2.2) [21, с. 255].

Лему 2.1 доведено.

Теорема (Грушко) 2.1. *Усякий елемент будь-якої із мінімальних допущених систем твірних міститься в одному із вільних множників розкладу (2.2).*

Доведення

Нехай

$g_1, g_2, \ldots, g_n (2.3)$

буде мінімальним припущення (відносно системи (2.1)) система твірних групи, яка володіє вільним розкладом (2.2). Елемент g_i із цієї системи, який має довжину $l, l>1$ називається *особливим,* якщо в (2.3) можна знайти такі елементи g_j і $g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_s}$і для них такі показники ε і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ рівні ± 1, що виконуються наступні умови: $l(g)$ є довжина елемента g відносно вільного розкладу (2.2)):

1) $j \neq i,$
2) $l(g_j) = l,$
3) $l(g_{i_1}) < l, \ldots, l(g_{i_s}) < l,$
4) $l\left(g_i \cdot \prod_{v} g_{i_v}^{\alpha_v} \cdot g_j^{\varepsilon}\right) \leq l,$
5) $l\left(\prod_{v} g_{i_v}^{\alpha_v} \cdot g_j^{\varepsilon}\right) = l,$
6) $l\left(\prod_{v} g_{i_v}^{\alpha_v}\right) < l.$

Де $l(g)$ є довжина елемента g відносно вільного розкладу (2.2).

Нехай, далі, g є елемент із G довжини l і нехай його ліва половина, середина і права половина (відносно розкладу (2.2)) скорочено позначені через P, Q і R, $g = PQR$; при парному $l Q = 1$. Елемент g називається *звідним* (відносно системи (2.3)), якщо в (2.3) можна знайти такі елементи $g_{i_1}, g_{i_2}, \cdots, g_{i_s}$і для них такі показники $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, що $l(g_{i_v}) < l$, $v = 1, 2, \ldots, s$, і

$$g \cdot \prod_{v} g_{i_v}^{\alpha_v} = PQP^{-1},$$

тобто при парному $l, g \cdot \prod_{v} g_{i_v}^{\alpha_v} = 1$. В протилежному випадку елемент називається *незвідним.*

Нехай g_i є один із тих, що мають найменшу довжину серед незвідних особливих елементів мінімальної допущеної системи (2.3) і нехай $g_i = PQR$. Якщо елементи g_j і $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_s}$ і показники для них обрані у відношенні з визначенням особливого елемента, то зважаючи на 4) і 5) буде

$$\acute{g} = \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon} = R^{-1} Q' T \, ;$$

де Q' міститься у тому ж вільному множнику, що і Q. Ми змінимо тепер систему (2.3), замінюючи елемент g_j елементом g_j', що визначається наступним чином:

$$g_j' = g_i \acute{g} = P(QQ')T \, , (2.5)$$

якщо елемент $\acute{g}$ незвідний; якщо ж він звідний і якщо, у відношенні з означенням звідного елемента,

$$\acute{g} \prod_{\mu} g_{j_\mu}^{\beta_\mu} = R^{-1} Q' R \, , l(g_{j_\mu}) < l \, , \mu = 1, 2, \dots, t \, ,$$

то

$$g_j' = g_i \acute{g} \prod_{\nu} g_{j_\mu}^{\beta_\mu} \cdot g_i^{-1} = P(QQ'Q^{-1}) P^{-1} . (2.6)$$

У обох випадках елемент g_j може бути виражений через g_j' і інші елементи системи (2.3), тобто ми отримаємо нову систему твірних для групи G; легко побачити, що вона залишається допущеною і мінімальною.

Покажемо, що якщо цим способом будуть замінені всі елементи системи (2.3), які можуть грати у відповідності з означенням особливого елементу роль елементу g_j для розглядуваного нами елементу g_i, то *елемент g_i перестане бути особливим.* Дійсно, якщо б новий елемент g_j' з показником δ і добуток $\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu}$ задовольняли вимогам, що входять в означення особливого елемента, то було б

$$\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} \cdot g_j'^{\delta} = ¿ R^{-1} Q'' U \, , (2.7) ¿$$

де Q'' лежить в одному вільному множнику з Q. Оскільки ліва половина елемента $g_j^{'\delta}$ рівна P, якщо елемент $\acute{g}$ незвідний і $\delta=+1$, а також якщо g звідний і $\delta=\pm 1$, і із отриманої в цьому випадку рівності

$$\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} \cdot P = ¿ R^{-1} ¿$$

слідувало б $R \cdot \prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} = ¿ P^{-1} ¿$, що суперечить незвідності елемента g_i. Залишається можливим лише випадок незвідного $\acute{g}$ і $\delta=-1$. У цьому випадку із (2.5) і (2.7) слідувала б рівність $\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu} \cdot T^{-1} = R^{-1}$, тобто

$$R = T \left(\prod_{\mu} g_{i_\mu}^{\gamma_\mu}\right)^{-1}.$$

Елемент $\acute{g}$ виявляється звідним, що суперечить припущенню.

При наших перетвореннях системи (2.3) в цій системі *не можуть з'явитися нові незвідні особливі елементи довжини* l. Дійсно, елемент довжини l, який був звідним в системі (2.3), залишається звідним і після заміни g_j через $g_j^{'}$, оскільки довжини елементів g_{i_ν}, які фігурують в означенні звідного елемента, меншого за l. Нехай, далі, після заміни g_j через $g_j^{'}$ робиться особливим деякий елемент $g_m, m \neq i, m \neq j$; $l(g_m)=l$. Це означає, що можна підібрати такий показник ε' для g_j і такий добуток $\prod_{\sigma} g_{k_\sigma}^{\delta_\sigma}$, що для елемента g_m і цих елементів будуть виконуватися всі вимоги, які входять в означення особливого елемента. Легко бачити, що елемент g_m був у цьому випадку особливим і до зміни системи (2.3) – роль елемента g_j для нього грав елемент g_i, якщо $\varepsilon^{'}=+1$ і $\acute{g}$ незвідний, а також якщо і звідний (у цих випадках ліва половина елемента $g_j^{'\varepsilon^{'}}$ співпадає з лівою половиною елемента g_i), і старий елемент g_j, якщо $\varepsilon^{'}=-1$ і $\acute{g}$ незвідний.

Нехай $g_j^{'}$є особливим елементом. Якщо елемент $\acute{g} = \prod_{\nu} g_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \cdot g_j^{\varepsilon}$ був незвідний, тобто елемент $g_j^{'}$ визначається рівністю (2.6), то при $\varepsilon=-1$ із

$$l\left(g'^{-1}_j\right)=l\left[g_j(\prod_\nu g_{i_\nu}^{\alpha_\nu})^{-1}g_i^{-1}\right]=l$$

випливає, що був особливим сам елемент g_j; лише умова 5) із означення особливого елемента вимагає деякої досить простої перевірки. Якщо ж $\varepsilon=+1$, то із того, що елемент g'_j особливий, випливає, що елемент g_j також був особливим, оскільки ці два елемента в цьому випадку володіють однаковим правими половинами, а їх середини містяться в одному і тому ж вільному множнику. У випадку ж звідного елемента $\acute{g}$, тобто у випадку, коли g'_j визначається за формулою (6), має місце рівність

$$l\left(g'_j\right)=l\left(g_i\cdot\prod_\nu g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\cdot g_j^\varepsilon\cdot\prod_\mu g_{j_\mu}^{\beta_\mu}\cdot g_i^{-1}\right)=l,$$

із якої слідують нерівності

$$l\left(g_i\cdot\prod_\nu g_{i_\nu}^{\alpha_\nu}\cdot g_j^\varepsilon\right)\le l,$$

$$l\left(g_j^\varepsilon\cdot\prod_\mu g_{j_\mu}^{\beta_\mu}\cdot g_i^{-1}\right)\le l.$$

Ці дві нерівності показують, що елемент g_j сам був особливим: перша нерівність у випадку $\varepsilon=-1$, друга у випадку $\varepsilon=+1$. Умови 5) і 6) із означення особливого елемента виконуються, очевидно, у обох випадках.

Розглянуті вище перетворення системи (2.3) зменшують число незвідних особливих елементів довжини l в цій системі, а тому після скінченного числа кроків ми приходимо до такої системи, в якій незвідних особливих елементів довжини l зовсім немає. Число l було мінімальною довжиною незвідних особливих елементів в системі (2.3). Ми збільшили цю мінімальну довжину, а оскільки наші перетворення не змінюють ні довжин елементів заданої системи твірних, ні тим більше кількість цих елементів, то після скінченної кількості таких збільшень ми отримаємо нову мінімальну дозволену систему твірних групи G, деякі із елементів якої мають як і раніше довжини, більші за одиницю, у цій системі вже немає незвідних особливих елементів [21, с. 252].

Теорему 2.1 доведено.

2.2. Наслідки з теореми Грушко

Із теореми Грушко випливають наступні наслідки.

Наслідок 2.1. *Мінімальне число твірних групи зі скінченною кількістю твірних дорівнює сумі відповідних чисел для всіх множників будь-якого із вільних розкладів цієї групи.*

Доведення

Якщо (2.1) – система твірних групи G з найменшою можливою кількістю елементів, (2.2) – даний вільний розклад цієї групи і

$g_1, g_2, \ldots, g_n (2.3)$

мінімальна допущена відносно (2.1) система твірних, то ті із елементів системи (2.3), які лежать у вільному множнику $A_i, i=1,2,\ldots,k$, складають, відповідно до теореми Грушко, його систему твірних; систем твірних з меншим числом елементів множник A_i мати не може.

Звідси випливає, що *вільні розклади групи з* n *твірними складаються не більше ніж з* n *множників,* а тому *всяка група зі скінченною кількістю твірних може бути розкладена у вільний добуток скінченного числа нерозкладних груп* [21, с. 252].

Наслідок 2.1 доведено.

Із теореми Грушко виводяться також наслідки іншого роду. Усякому вибору в групі G системи із n твірних відповідає, зрозуміло, гомоморфне відображення на групу G вільної групи з n вільними твірними. Розглянуті вище перетворення системи твірних у випадку вільної групи дають перехід від однієї системи вільних твірних до другої вільної системи твірних [20].

Наслідок 2.2. *Якщо вільна група* S *зі скінченною кількістю твірних гомоморфно відображена на групу* G*, розкладену у вільний добуток підгруп* $A_1, A_2, \ldots, A_k$*, то в* S *можна обрати таку систему* *вільних твірних, що при розглядуваному гомоморфізмі кожен із цих твірних відображається всередину одного із вільних множників A_i.*

Звідси випливає: *Вільна група рангу n не може володіти системою твірних, які складаються із меншої, ніж n, кількості елементів.* Цей результат можна було б отримати і безпосередньо, застосовуючи перехід до фактор-групи по комутанту.

Усяка система твірних вільної групи рангу n, яка складається з n елементів, є системою вільних твірних.

Доведення

Якщо $a_1, a_2, \ldots,\ a_n$ є система вільних твірних вільної групи S, а $b_1, b_2, \ldots,\ b_n$ – деяка система твірних цієї групи, яка складається із n елементів, то, за теоремою Грушко, існує система твірних $b_1^{'}, b_2^{'}, \ldots, b_n^{'}$, допущена по відношенню до системи $b_1, b_2, \ldots,\ b_n$ і така, що всяке $b_i^{'}$ лежить в одній із підгруп $\{a_j\}$. Оскільки в кожну із підгруп $\{a_j\}$ повинен потрапити хоча б один з елементів $b_i^{'}$, то можна вважати, що використовуючи рівність кількості елементів в обох системах, що $b_i^{'} \in \{a_i\}$. Тепер, як легко бачити, $b_i^{'} = a_i^{\pm 1}$, тобто система $b_1^{'}, b_2^{'}, \ldots, b_n^{'}$ є системою вільних твірних групи S. Твірні $b_1, b_2, \ldots,\ b_n$ будуть також вільними.

Тобто, іншими словами, *всяке гомоморфне відображення вільної групи скінченного рангу самої на себе є ізоморфним, вільна група скінченного рангу не може бути ізоморфною зі своєю істинною фактор-групою* [21, с. 252] .

Наслідок 2.2 доведено.

Лема 2.2.

I. *Існують такі μ і ν, $1 \le \mu < \nu \le \omega$, що*

1) $l(g¿¿ j_\mu) = l[\mu, \mu+1] = \ldots = l[\mu, \nu-1] > l[\mu, \nu], ¿$

2) $l(g¿¿ j_\mu) \ge l(g¿¿ j_\lambda), \mu < \lambda \le \nu, ¿¿$

3) $l(g¿¿ j_\mu) \ge 2. ¿$

Доведення

Існує таке μ, що $l[1,\mu-1]<l[1,\mu]$, але $l[1,\lambda]\geq l[1,\lambda+1]$ при всіх $\lambda\geq\mu$. Покажемо, що $\mu<\omega$. Оскільки $l[1,\omega]=l(a)=1$, то при $\mu=\omega$ було б $l[1,\omega-1]=0$, тобто $[1,\omega-1]=1$. Звідси випливає $a=g_{j_\omega}^{\varepsilon_\omega}$, що суперечить умові $l(a)=1$.

Знайдемо таке ν, $\mu<\nu\leq\omega$, що

$l[1,\mu]=l[1,\mu+1]=\ldots=l[1,\nu-1]>l[1,\nu]$.

Таке ν існує, якщо $l[1,\mu]\geq 2$, оскільки $l[1,\omega]=l(a)=1$. Якщо ж $l[1,\mu]=1$, то $l[1,\mu-1]=0$, тобто $[1,\mu-1]=1$, а тому $\mu=1$. Іншими словами, для всіх λ, $1\leq\lambda\leq\omega$, $l[1,\lambda]=1$. Нехай $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$ є першим серед множників добутку (2.4), довжина якого більша за 1. Тоді із $l[1,\sigma]=1$ випливає, що заміна в системі (2.3) елемента g_{j_σ} через

$g'_{j_\sigma}=[1,\sigma]=[1,\sigma-1]\cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$

приводить до нової системи твірних групи G з меншою, ніж у системі (2.3) довжиною. Цим протиріччям з мінімальністю (2.3) доводиться існування ν.

Позначимо $l(g¿¿j_\mu)=l¿$ і доведемо твердження 1) і 2) леми 2.2. Із $l[1,\mu-1]<l[1,\mu]$ випливає, що в добутку $l[1,\mu-1]\cdot g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}=[1,\mu]$,середина елемента $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$ не змінюється, або, при парному l, ліва половина цього елемента скорочується не повністю. Припустимо, що твердження виконується для деякого λ, $\mu<\lambda<\nu$, $l(g_{j_\sigma})\leq l$ для $\mu<\sigma\leq\nu$ і в добутку $[1,\mu-1][\mu,\lambda]$ середина елемента $[\mu,\lambda]$ не змінюється або, при парному l, його ліва половина не повністю скорочується. Якщо $l(g_{j_{\lambda+1}})>l$, то із $l[1,\lambda]\geq l[1,\lambda+1]$ випливає, що в добутку

$[1,\lambda+1]=[1,\mu-1][\mu,\lambda]\cdot g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$

при виконанні скорочень між $[\mu,\lambda]$ і $g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$ скорочується вся права половина і середина елемента $[\mu,\lambda]$, а при парному l скорочується його ліва половина. Тоді $l[\mu,\lambda+1]<l(g_{j_{\lambda+1}})$, але оскільки в добутку $[\mu,\lambda+1]$ елемент $g_{j_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$ є єдиним множником, довжина якого більше l, можна зменшити довжину системи (2.3), замінюючи елемент $g_{j_{\lambda+1}}$ елементом $g'_{j_{\lambda+1}}=[\mu,\lambda+1]$. Це дає допущену систему твірних. Тому $l(g_{j_{\lambda+1}})\leq l$. Якщо

тепер $\lambda+1<\nu$, то $l[1,\lambda]=l[1,\lambda+1]$ і тому $l[\mu,\lambda+1]=l[\mu,\lambda]=l$, причому ліві половини елементів $[\mu,\lambda+1]$ і $[\mu,\lambda]$ співпадають. Цим для випадку $\lambda+1<\nu$ доведені всі індуктивні припущення. Якщо ж $\lambda+1=\nu$, то із $l[1,\lambda]>l[1,\nu]$ випливає, що скорочення в добутку $[\mu,\lambda]\cdot g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ знищують всю ліву половину і середину елемента $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$, а тому $l[\mu,\lambda]<l$.

Із $l=1$ слідує $l[\mu,\nu]=0$, тобто $[\mu,\nu]=1$. Це дозволило б замінити добуток (2.4) коротшим , що суперечить припущенням, зробленим про цей добуток. Тому $l\geq 2$ [21, с. 256].

Лему 2.2 доведено.

Ми будемо тепер припускати, що добуток $[\mu,\nu]$ обрано у відповідності з лемою 2.2. Будемо вважати, що цей добуток володіє найменшою кількістю множників серед тих добутків виду $[\sigma,\tau]$ і $[\sigma,\tau]^{-1}, 1\leq\sigma<\tau\leq\omega$, які задовольняють всім вимогам леми 2.2. Можна навіть вважати, що цей добуток $[\mu,\nu]=g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu} g_{j_{\mu+1}}^{\varepsilon_{\mu+1}} \cdots g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ взагалі є добутком з найменшою кількістю множників, який можна побудувати із елементів системи (2.3) з дотриманням всі вимог леми 2.2. Довжина елемента g_{j_μ} буде позначатися, як вище, через l.

Лема 2.3. *Довільний елемент g_i добутку $[\mu,\nu]$, що має довжину l, зустрічається в цьому випадку щонайменше двічі.*

Доведення. Якщо елемент $g_i, l(g_i)=l$, лише один раз входить в $[\mu,\nu]$, то зважаючи на $l[\mu,\nu]<l$ заміна в системі (2.3) елемента g_i через $g'_i=[\mu,\nu]$ приводить до нової допущеної системи твірних, які мають довжину меншу, ніж (2.3) [21, с. 256].

Лему 2.3 доведено.

Лема 2.4. *Якщо $\mu\leq\sigma\leq\tau\leq\nu$ і добуток $[\sigma,\tau]$ не містить множників довжини l, то $l[\sigma,\tau]<l$. Якщо в цей добуток множники довжини l входять і $\tau<\nu$, то $l[\sigma,\tau]=l$.*

Доведення

Нехай твердження леми уже доведені для всіх частин добутку $[\mu, \nu]$, які складаються з меншого числа множників, ніж $[\sigma, \tau ¿$ – при $\sigma = \tau$ вони, очевидно, виконуються. Розглянемо можливі випадки:

1) $l[\sigma, \tau-1] < l, l(g_{j_\tau}) < l, \tau \leq \nu$. У цьому випадку із $l[\mu, \sigma-1] = l[\mu, \tau-1] = l$ випливає, що в добутку

$$[\mu, \tau-1] = [\mu, \sigma-1] \cdot [\sigma, \tau-1] \qquad (2.8)$$

перша половина другого множника залишається незмінною. Тепер із

$$[\mu, \tau] = [\mu, \sigma-1] \cdot [\sigma, \tau-1] \cdot g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau} \qquad (2.9)$$

і $l[\mu, \tau] \leq l, l(g ¿¿ i_\tau) < l ¿$випливає, що в добутку $[\sigma, \tau-1] \cdot g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$ скорочення повинні піти так далеко, щоб знищувалася або права половина першого множника, або ж ліва половина другого, а середина відповідного множника принаймні піддавалася об'єднанню. Тому

$$l[\sigma, \tau] \leq max\left(l[\sigma, \tau-1], l\left(g_{i_\tau}\right)\right) < l.$$

2) $l[\sigma, \tau-1] = l, l(g_{j_\tau}) < l, \tau < \nu$. У цьому випадку в добутку (2.8) права половина другого множника знову залишається незмінною, а тому із $l[\mu, \tau] = l, l(g_{j_\tau}) < l$ і (2.9) випливає, що в добутку $[\sigma, \tau-1] \cdot g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$ скорочення знищують ліву половину $g_{j_\tau}^{\varepsilon_\tau}$елемента, а його середина об'єднується. Тому $l[\sigma, \tau] = l$.

3$¿ l[\sigma, \tau-1] < l, l(g_{j_\tau}) = l, \tau < \nu$. Із (2.9) і

$$l[\mu, \sigma-1] = l[\mu, \tau-1] = l[\mu, \tau] = l \qquad (2.10)$$

випливає, як вище, що $l[\sigma, \tau] \leq l$. Якби насправді мав місце знак нерівності, то можна було б зменшити довжину системи (2.3), оскільки елемент g_{j_τ} є тепер єдиним елементом довжини l в добутку $[\sigma, \tau]$. Тому $l[\sigma, \tau] = l$.

4) $l[\sigma, \tau-1] = l, l(g_{j_\tau}) = l, \tau < \nu$. З рівності (2.1) випливає $l[\sigma, \tau] \leq l$. Нехай $l[\sigma, \tau] < l$. Оскільки, за індуктивним припущенням, $l[\sigma, \tau] = l, \sigma < \lambda < \tau$, то ми отримали б в цьому випадку, що добуток $[\sigma, \tau]^{-1}$ задовольняє всі вимогам леми I, хоча складається із

меншої кількості множників, ніж добуток $[\mu,\nu]$, що суперечить вибору останнього. Тому $l[\sigma,\tau]=l$ [21, с. 258].

Лему 2.4 доведено.

Лема 2.5. $l(g_{j_\nu})=l$.

Доведення

Якщо $l(g_{j_\nu})<l$, то нехай $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$ буде останній множник в $[\mu,\nu]$, довжина якого рівна l. Оскільки

$$l[\mu,\lambda]=l[\mu,\lambda-1]=l(g_{j_\lambda})=l,$$

то елементи $[\mu,\lambda]$ і $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$ мають однакові праві половини. Далі, із леми III при наших припущеннях випливає, що при $\lambda<\sigma\leq\nu$ буде

$l[\lambda+1,\sigma]<l$. Тому при $\sigma<\nu$ із $l[\mu,\sigma]=l$ випливає $l[\lambda,\sigma]=l$, а із $l[\mu,\nu]<l$ випливає $l[\lambda,\nu]<l$. Іншими словами, добуток $[\lambda,\nu]$ задовольняє всім вимогам леми I, хоча містить лише один елемент довжини l, що суперечить лемі 2.2 [21, с. 259].

Лему 2.5 доведено.

Лема 2.6. *Добуток $[\mu,\nu]$ містить хоча б один множник $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}, \mu<\lambda<\nu$, довжина якого рівна l.*

Доведення

Справді, якщо $l(g_{j_\lambda})<l$ для всіх λ, $\mu<\lambda<\nu$, то по 2.3 $g_{j_\mu}=g_{j_\nu}$ і по 2.4 $l[\mu+1,\nu-1]<l$. Тому, якщо $g_{j_\mu}^{j_\mu}=PQR$, де P – ліва половина елемента $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$, Q – його середина, R– його права половина, то

$[\mu,\nu-1]=PQR'$. Якщо тепер $\varepsilon_\nu=-\varepsilon_\mu$, тобто $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}=R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$, то із

$$l[\mu,\nu]=l([\mu,\nu-1]\cdot g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu})<l$$

випливає $R^{'R^{-1}}=1$, звідки $[\mu,\nu]=1$, що неможливо через умови, які накладено на добуток (2.4). Якщо ж $\varepsilon_\nu=\varepsilon_\mu$, тобто $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}=PQR$, то

$R'P=1,\ Q^2=1$ і $[\mu,\nu]=PR$. Оскільки, однак,

$$R'=R\cdot[\mu+1,\nu-1],$$

то із $P=R'^{-1}$ випливає

$$[\mu,\nu]=[\mu+1,\nu-1]^{-1}R^{-1}\cdot R=[\mu+1,\nu-1]^{-1},$$

що дозволяє замінити цей добуток більш коротким, що суперечить умовам які накладено на добуток (2.4) [21, с. 259].

Лему 2.6 доведено.

Лема 2.7. *Серед елементів g_{j_λ}, що входять в добуток $[\mu,\nu]$, які задовольняють умові $\mu<\lambda<\nu$ і мають довжину l, знайдеться хоча б один незвідний.*

Доведення

Зробимо перш за все наступні зауваження. Із означення звідного елемента безпосередньо випливає, що якщо елемент g звідний і якщо елемент $g_i^{\varepsilon_i}$ такий, що $l\left(g_i^{\varepsilon_i}\right)<l(g)$ і $l\left(¿_i^{\varepsilon_i}\right)=l(g)$, то добуток $¿_i^{\varepsilon_i}$ також звідний; звідним буде також добуток $g_i^{\varepsilon_i}g$ при умові $l\left(g_i^{\varepsilon_i}g\right)=l(g)$. Якщо елементи g_1 і g_2 звідні і $l(g_1)=l(g_2)=l(g_1g_2)$, то добуток g_1g_2 також звідний. Справді, нехай $g_1=PQR$; тоді $g_2=R^{-1}Q'S$ і $g_1g_2=P(QQ')S$, де Q і Q' лежать в одному вільному множнику і при непарній довжині $QQ'\neq 1$. Якщо за означенням звідного елемента,

$$g_1\cdot\prod_k g_{i_k}^{\varepsilon_k}=PQP^{-1},g_2=\prod_l g_{j_l}^{\sigma_l}=R^{-1}Q'R,$$

то

$$g_1g_2\cdot\prod_l g_{j_l}^{\sigma_l}\cdot\prod_k g_{i_k}^{\varepsilon_k}=P\left(QQ'\right)P^{-1},$$

тобто елемент g_1g_2 також звідний. Легко бачити, що із звідності елемента g випливає звідність елемента g^{-1} і навпаки.

Лема справедлива при парному l, оскільки якщо б елемент парної довжини із системи (2.3) був звідним, то ця система не була б мінімальною. Нехай l непарне. Із леми 2.6 випливає існування в добутку $[\mu,\nu]$ множників $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda},\mu<\lambda<\nu$, які мають довжину l. Якщо б всі ці елементи були звідними, то, враховуючи зауваження і лему 2.4, звідним був би і добуток $[\mu+1,\nu-1]$. Крім того, також за лемою 2.4, $l[\mu+1,\nu-1]=l$. Нехай

$$[\mu+1,\nu-1]=PQR$$

і

$[\mu+1,\nu-1]\cdot\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}=PQR^{-1}.$

Тоді $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}=SQ_1P^{-1}, g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}=R^{-1}Q_2T$, причому, зважаючи на $l[\mu,\nu]<l$, повинно бути $Q_1QQ_2=1$ і $[\mu,\nu]=ST$. Якщо елементи $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}$ і $g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ також звідні, то нехай

$g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}\cdot\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}=SQ_1S^{-1}, g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}\cdot\prod_n g_{y_n}^{\gamma_n}=R^{-1}Q_2R.$

Тоді

$R\cdot\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}=P^{-1}, P^{-1}\cdot\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}=S^{-1}, T\cdot\prod_n g_{y_n}^{\gamma_n}=R.$

Звідси

$[\mu,\nu]=S\cdot T=\left(\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}\right)^{-1}\cdot PR\left(\prod_n g_{y_n}^{\gamma_n}\right)^{-1}=¿\left(\prod_m g_{x_m}^{\beta_m}\right)^{-1}\left(\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}\right)^{-1}\left(\prod_n g_{y_n}^{\gamma_n}\right)^{-1},$

тобто добуток $[\mu,\nu]$ може бути записано через елементи із системи (2.3), які мають меншу довжину, ніж l. Це суперечить умовам, які накладено на добуток (2.4).

Якщо хоча б один із елементів $g_{j_\mu}^{\varepsilon_\mu}, g_{j_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ незвідний, то з леми 2.3, $g_{j_\mu}=g_{j_\nu}$. Якщо $\varepsilon_\mu=\varepsilon_\nu$, то $S=R^{-1}$, $P^{-1}=T$, звідки

$[\mu,\nu]=ST=R^{-1}P^{-1}=\prod_k g_{i_k}^{\alpha_k}.$

Якщо $\varepsilon_\mu=-\varepsilon_\nu$, то $S=T^{-1}$, звідки $[\mu,\nu]=S\cdot T=1$. У обох випадках ми знову приходимо до суперечності з вибором добутку (2.4) [21, с. 260].

Лему 2.7 доведено.

Лема 2.8. *Усякий незвідний елемент g_{j_λ} довжини l, $\mu<\lambda<\nu$, є особливим.*

Доведення

Якщо $\varepsilon_\lambda=+1$, то беремо елемент $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$, найближчий справа від g_{j_λ}, в добутку $[\mu,\nu]$, що мають довжину $l;\sigma\le\nu$. Тоді, додавши добуток $[\lambda,\sigma]$, ми переконуємося, що елемент g_{j_λ} задовольняє всім вимогам, які входять в означення особливого елемента. Дійсно, умови 2) і 3) випливають із вибору елемента $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma}$, умови 4), 5) і 6) випливають із леми 2.4 при $\sigma<\nu$. Ці умови виконуються також і при $\sigma=\nu$.

Залишається довести справедливість умови 1). Нехай $j_\sigma = j_\lambda$. Якщо $\varepsilon_\sigma = +1$ і якщо $g_{j_\lambda} = PQR$, то буде також $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} = PQR$, звідки

$$g_{j_\lambda} \cdot \prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} \cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} = PQR \cdot \prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} \cdot PQR.$$

Оскільки $l[\lambda,\sigma] \le l$ і $l[\lambda,\sigma-1] = l$, то звідси випливає,

$$R \cdot \prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} = P^{-1},$$

що суперечить незвідності елемента g_{j_λ}. Якщо ж $\varepsilon_\sigma = -1$, тобто $g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} = R^{-1} Q^{-1} P^{-1}$, то

$$g_{j_\lambda} \cdot \prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} \cdot g_{j_\sigma}^{\varepsilon_\sigma} = PQR \cdot \prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} \cdot R^{-1} Q^{-1} P^{-1}.$$

Звідси випливає, зважаючи на $l[\lambda,\sigma] \le l$ і $l[\lambda,\sigma-1] = l$, рівність $\prod_{\alpha=\lambda+1}^{\sigma-1} g_{j_\alpha}^{\varepsilon_\alpha} = 1$,звідки $[\lambda,\sigma] = 1$, що суперечить умовам, накладеним на добуток (2.4). Доведено, що елемент g_{j_λ} є особливим.

Якби було $\varepsilon_\lambda = -1$, то ми взяли б в добутку $[\mu, v]$ елемент довжини l, найближчий зліва від $g_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}$, і провели б аналогічні міркування [21, с. 261].

Лему 2.8 доведено.

РОЗДІЛ 3
ГРУПИ ЗІ СКІНЧЕННОЮ КІЛЬКІСТЮ ВИЗНАЧАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

Якщо група G задана в деякій системі твірних скінченною системою визначальних співвідношень, то в ці співвідношення входить лише скінченне число твірних і група G є вільним добутком групи, яка задається скінченною кількістю твірних, скінченною кількістю визначальних співвідношень та деякою вільною групою. Тому ми можемо обмежитися вивченням лише груп зі скінченною кількістю твірних.

Групи зі скінченною кількістю твірних і співвідношень складають більш вузький клас груп, ніж всі групи зі скінченною кількістю твірних – останні, як ми знаємо, утворюють множину потужності континуум, у той час як множина груп зі скінченною кількістю твірних і співвідношень буде, як показують прості теоретико-множинні міркування, лише зліченною.

До числа груп зі скінченною кількістю твірних і скінченною кількістю співвідношень належать всі скінченні групи, як витікає із їх завдання таблицями Келі [21, с. 263].

Нехай група G *задається системою твірних* M*, яка складається із символів* $a_\alpha, a_\beta, \ldots$*, і деякої системи визначальних співвідношень, які зв'язують ці твірні. Тоді цю ж групу можна задати системою твірних* $\acute{M}$*, які складаються з із множини* M *і нового символу* b*, якщо до числа твірних визначальних співвідношень буде приєднано деяке співвідношення виду*

$$b\omega(a)=1,$$

де $\omega(a)$ *є деяке слово відносно символів* $a_\alpha, a_\beta, \cdots$ [21, с. 264].

Доведемо спочатку наступну лему.

Лема 3.1. *Нехай дано вільну групу W із системою вільних твірних M. Якщо b є елемент із M, M' – множина всіх елементів із M, крім b, а B – нормальний дільник групи W, породжений елементом b, то фактор-група W/B ізоморфна вільній групі з M' в якості системи вільних твірних.*

Доведення

Підгрупа W' групи W, породжена множиною M', є вільною групою з M' в якості системи вільних твірних. З іншої сторони, всяке слово, яке входить в B, володіє тією властивістю, що якщо із нього будуть викреслені всі степені символу b і потім виконані всі необхідні скорочення, то отримується порожнє слово. Це твердження очевидне для слів, спряжених з b. Його справедливість для будь-яких елементів із B випливає із зауваження, що якщо слова ω_1 і ω_2 на W такі, що вони перетворюються в порожнє слово після викреслення степенів елемента b і наступних скорочень, то цією ж властивістю володіє і їх добуток $\omega_1\omega_2$. Звідси випливає, що перетин

$$B \cap W' = E,$$

а тому,

$$W/B \cong W'/E \cong W'.$$

Переходимо до доведення теореми. Якщо W є вільна група з M в якості системи вільних твірних, то $G \cong W/H$, де нормальний дільник H породжується лівими частинами заданих визначальних співвідношень. Нехай $\acute{W}$ є вільна група з системою вільних твірних $\acute{M}$ – звідси випливає включення $\acute{W} \supset W$ – і нехай $\acute{H}$ є нормальний дільник групи $\acute{W}$, породжений елементами, які входять в H, і елементом $c = b\omega(a)$. Доведемо, що

$$\acute{W}/\acute{H} \cong W/H.$$

Припустимо спочатку, що $\omega(a)$ є пусте слово, тобто $c = b$. Якщо B є нормальний дільник групи $\acute{W}$, породжений елементом b, то зважаючи на лему,

$\acute{W}/B \cong W.$

За теоремою про відповідність між підгрупами групи і фактор-групи нормальному дільнику H відповідає в $\acute{W}$ нормальний дільник $\acute{H}'$ і

$\acute{W}/\acute{H}' \cong W/H.$

Але нормальний дільник $\acute{H}'$ співпадає в дійсності з $\acute{H}$: він містить як H, так і елемент b, тобто $\acute{H}' \supseteq \acute{H}$. З іншого боку, усякий елемент із $\acute{H}'$ має вид hb', де $h \in H$, $b' \in B$, тобто $\acute{H}' \subseteq \acute{H}$.

Випадок довільного слова $\omega(a)$ буде зведений на уже розглянутий випадок, якщо ми покажемо, що множина $\mathfrak{M}$ і елемент $c = b \cdot \omega(a)$ складають разом нову систему вільних твірних для групи $\acute{W}$. Для цього достатньо показати, що елементи $a_\alpha, a_\beta, \cdots$ і елемент c не зв'язані ніякими співвідношеннями, оскільки ці елементи породжують разом всю групу $\acute{W}$. Нехай в групі $\acute{W}$має місце рівність

$\omega_1(a) c^{\delta_1} \omega_2(a) c^{\delta_2} \ldots \omega_k(a) c^{\delta_k} = 1,$

де $\omega_1(a), \ldots, \omega_k(a)$ є непустими словами відносно елементів $a_\alpha, a_\beta, \cdots$, а $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ – цілі числа, відмінні від нуля. Після заміни в цій рівності елемента c через $b\omega(a)$ і виконання всіх скорочень ліва частина повинна стати пустим словом, оскільки інакше ми отримаємо співвідношення, яке зв'язує в групі $\acute{W}$символи із $\acute{M}$. В дійсності ж всі множники b і b^{-1} залишаться нескороченими, оскільки при $i = 2, 3, \ldots, k$

$c^{-1} \omega_i(a) c = \omega^{-1}(a) b^{-1} \omega_i(a) b \omega(a),$

$c \omega_i(a) c^{-1} = b \omega(a) \omega_i(a) \omega^{-1}(a) b^{-1},$

тобто в обох випадках елементи b і b^{-1} розділяються непустим словом [21, с. 262].

Лему 3.1 доведено.

Означення 3.1. *Перетворенням типу* A *називається* перетворення системи твірних і системи визначальних співвідношень, яке описано в доведеній вище теоремі, а також усяке перетворення, йому обернене, тобто, яке складається з видалення з системи твірних одного елемента b, якщо цей елемент входить лише в одне визначальне співвідношення, яке має вид $b\omega(a)=1$, де $\omega(a)$ є слово відносно твірних, які залишились; саме це співвідношення також видаляється із системи визначальних співвідношень [21, с. 263].

Означення 3.2. З іншої сторони, якщо група задана деякими твірними і деякими визначальними співвідношеннями, то всяке інше співвідношення між тими ж твірними буде *наслідком* заданих визначальних співвідношень, - тобто його ліва частина міститься в нормальному дільнику вільної групи, породженим лівими частинами визначальних співвідношень. Такі перетворення ми будемо називати *перетвореннями типу* B [21, с. 263].

Теорема 3.1 (посилення теореми Діка). *Якщо групи G і G' задані відносно одних і тих же твірних деякими системами визначальних співвідношень, причому всяке визначальне співвідношення групи G є наслідком визначальних співвідношень групи G', то група G' ізоморфна фактор-групі групи G.*

Доведення

Групу G' можна визначити в цьому випадку сукупністю заданих визначальних співвідношень груп G і G', а тоді залишається лише застосувати теорему Діка.

Ми відмітимо, нарешті, *перетворення типу* B'. Нехай група G задана твірними елементами $a_\alpha, a_\beta, \dots$ і b і деякою системою визначальних співвідношень, одне з яких має вид

$b\omega(a)=1,$

причому елемент b може входити і в інші визначальні співвідношення. Беремо одне з цих співвідношень

$$\acute{\omega}(a;b)=1 \qquad (3.1)$$

(його ліва частина є слово відносно $a_\alpha, a_\beta, \dots$ і b), замінюємо один із вхідних в нього множників b через $\omega^{-1}(a)$ (або b^{-1} – через $\omega(a)$) і виконуємо необхідні скорочення. Отримуємо нове співвідношення

$$\acute{\omega}'(a;b)=1 \qquad (3.2)$$

яким замінюємо співвідношення (1) в нашій системі визначальних співвідношень.

Перетворення типу B' отримуються простим застосуванням перетворень типу B. Дійсно, якщо, наприклад,

$\acute{\omega}(a;b)=\acute{\omega}_1(a;b)\,b\,\acute{\omega}_2(a;b)$,

причому виділений підлягаючий заміні множник b, то

$\acute{\omega}'(a;b)=\acute{\omega}_1(a;b)(b\omega(a))^{-1}\acute{\omega}_1^{-1}(a;b)\acute{\omega}(a;b)$,

тобто співвідношення (3.2) є наслідком заданих визначальних співвідношень і тому, по B, його можна приєднати до системи визначальних співвідношень. Але тепер, розв'язуючи останню рівність відносно $\acute{\omega}(a;b)$, ми переконуємось, що співвідношення (3.1) є наслідком останніх співвідношень і тому його можна видалити [21, с. 264].

Теорему 3.1 доведено.

Указані типи перетворень визначальних співвідношень дозволяють легко довести декілька важливих теорем про групи зі скінченною кількістю твірних і співвідношень.

Теорема 3.2. *Якщо група G задана скінченною системою твірних, зв'язаних скінченним числом визначальних співвідношень, то при всякій іншій скінченній системі твірних ця група також може бути задана деякою скінченною системою визначальних співвідношень.*

Доведення

Нехай група G задана твірними $a_1,\dots,a_k$ і визначальними співвідношеннями $\omega_1(a)=1,\dots,\omega_a(a)=1$. $b_1,\dots,b_l$ деяка інша скінченна система твірних для G. Усяке b_l може бути записано у вигляді добутку степенів елементів першої системи. Обираємо для кожного i один запис:

$b_i=f_i(a), i=1,2,\dots,l$.

Група G може бути тепер задана (перетворення типу A) твірними $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_l$ і визначальними співвідношеннями

$$\left.\begin{aligned}\omega_1(a)=1,\dots,\omega_s(a)=1,\\ b_1=f_1(a),\dots,b_l=f_l(a).\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Записуємо, далі, усяке a_j через $b_1,\dots,b_j$,

$a_j=\varphi_j(b),\, j=1,2,\dots,k,$

і приєднуємо до визначальних співвідношень (3.3) співвідношення

$$a_1=\varphi_1(b),\dots,a_k=\varphi_k(b), \qquad (3.4)$$

які повинні бути наслідками із співвідношень (3.3) (перетворення типу B'). Замінюємо тепер за допомогою співвідношень (3.4) елементи $a_1,\dots,a_k$ в (3.3) їх виразами через $b_1,\dots,b_l$ (перетворення типу B'). Ми отримуємо $s+l$ співвідношень, які зв'язують елементи $b_1,\dots,b_l$. Ці співвідношення разом з (3.4) дають систему визначальних співвідношень для групи G відносно твірних $a_1,\dots,a_k$ і $b_1,\dots,b_l$. Застосовуючи перетворення типу A, ми видаляємо твірні $a_1,\dots,a_k$ разом із співвідношеннями (3.4).

Якщо група G при деякій скінченній системі твірних задається скінченною кількістю визначальних співвідношень, то при будь-якій іншій скінченній системі твірних цієї групи із всякої системи визначальних співвідношень, які зв'язують ці твірні, можна вибрати скінченну підсистему уже достатню для задання групи [21, с. 264].

Теорему 3.2 доведено.

Доведена вище теорема дозволяє обмежитися наступним випадком: група G задається відносно твірних $a_1,a_2,\dots,a_n$ як скінченною системою визначальних співвідношень

$\omega_1(a)=1,\dots,\omega_s(a)=1,$

так і нескінченною системою визначальних співвідношень

$\acute{\omega}_1(a)=1,\acute{\omega}_2(a)=1,\dots$

У відповідній вільній групі слова $\omega_1(a),\dots,\omega_s(a)$ породжують той же нормальний дільник H, що і слова

$$\acute{\omega}_1(a),\acute{\omega}_2(a),\dots \qquad (3.5)$$

Усякий елемент $\omega_i(a), i=1,2,\dots,k$ може бути записаний у вигляді добутку скінченного числа елементів, спряжених з деякими елементами із послідовності (3.5). Таким чином, уже скінченне число елементів із (3.5) породжує весь нормальний дільник H.

Теорема 3.3. *Якщо група G задана двома способами скінченними системами твірних і скінченними системами визначальних співвідношень, то від одного із цих завдань можна перейти до другого скінченним числом перетворень типу A і типу B.*

Доведення

Нехай, справді, група G задається системою твірних $a_1,\dots,a_k$ зв'язаних визначальними співвідношеннями

$$\omega_1(a)=1,\dots,\omega_s(a)=1, \tag{3.6}$$

і системою твірних $b_1,\dots,b_l$ з співвідношеннями

$$\omega'_1(b)=1,\dots,\omega'_l(b)=1. \tag{3.7}$$

Оскільки, далі, усяке b_i повинно виражатися через першу систему твірних, то нехай $b_i=f_i(a), i=1,2,\dots,l$. Аналогічно $a_j=\varphi_j(b), j=1,2,\dots,k$. Ми можемо тепер, застосовуючи перетворенняA, задати групу G твірними $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_l$ і визначальними співвідношеннями (3.6) і $b_1=f_1(a),\dots,b_l=f_l(a)$, а потім, зробивши перетворення типу B, приєднати співвідношення (3.7) і співвідношення $a_1=\varphi_1(b),\dots,a_k=\varphi_k(b)$. Цілком симетричним образом до цієї ж системи твірних і співвідношень можна було б привести і другий спосіб задання групи G. Доведення теореми завершується тепер зауваженням, що перетворення, обернені до перетворень типу A і типу B, самі належать цим же типам [21, с. 265].

Теорему 3.3 доведено.

Ще складніша проблема спряженості, тобто проблема пошуку алгоритму для відповіді на питання, чи будуть спряжені в групі зі скінченною кількістю твірних і співвідношень два даних слова в цих твірних. Для вільних груп ця проблема вирішується: якщо у вільній групі W дано слово ω у вільних твірних, то, «звертаючи це слово в цикл», тобто приписуючи його кінець до початку, і виконуючи всі скорочення, ми отримаємо циклічне слово, яке відповідає слову ω; у циклічному слові всі елементи рівноправні, немає першого або останнього. Два слова у вільній групі W будуть, очевидно, тоді і тільки тоді спряжені, якщо їм відповідає одне і те ж циклічне слово.

Нарешті, стоїть проблема ізоморфізму, тобто проблема пошуку алгоритму для відповіді на питання, чи ізоморфні дві групи, які задані скінченним числом твірних і співвідношень. Ця проблема не має поки вирішення навіть в тому випадку, коли одна із заданих груп являється одиничною, а також в тому випадку, коли кожна із двох груп задається одним визначальним співвідношенням. Помітимо, що задання скінченних груп таблицями Келі приводить до аналогічної проблеми ізоморфізму.

Групи з одним визначальним співвідношенням складають клас груп, в деякому сенсі найближчий до вільних груп. Їх вивчення просунулося трохи далі, ніж у випадку груп з будь-якою скінченною кількістю співвідношень, але, наприклад, питання про підгрупи групи з одним співвідношенням ще не вирішено. Основним результатом являється тут наступна теорема про свободу.

Якщо група G задана твірними $a_1, a_2, \dots, a_n$ і одним співвідношенням $f(a_1, \dots, a_n) = 1$, якщо, далі, елемент a_n, міститься в цьому співвідношенні і не може бути видалений із нього трансформуванням, то підгрупа $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ буде вільною, а елементи $a_1, \dots, a_{n-1}$ – її вільними твірними [21, с. 265].

ВИСНОВКИ

Теорема Грушко дає єдиний розклад скінченно породженої групи у вільний добуток груп. Теорема була доведена Ігорем Олександровичем Грушко у 1940 році і незалежно Бернардом Нойманом у 1943 році. Ця теорема є теоретико-груповим аналогом теореми Кнесера про розклад для 3-мірних многовидів, яка стверджує, що будь-який замкнений 3-мірний многовид можна подати як зв'язну суму незвідних 3-мірних многовидів.

В роботі було вивчено питання про можливість розкладу групи у вільний добуток груп; вивчено властивості груп із скінченною кількістю твірних та визначальних співвідношень.

Доведено, що:

- множина всіх неізоморфних груп з двома твірними має потужність континууму;
- усякий елемент будь-якої із мінімальних допущених систем твірних міститься в одному із вільних множників розкладу $G=A_1*A_2*\ldots*A_k$ *(теорема Грушко)*;
- якщо групи G і G' задані відносно одних і тих же твірних деякими системами визначальних співвідношень, причому всяке визначальне співвідношення групи G є наслідком визначальних співвідношень групи G', то група G' ізоморфна фактор-групі групи G *(посилення теореми Діка)*;
- якщо група G задана скінченною системою твірних, зв’язаних скінченним числом визначальних співвідношень, то при всякій іншій скінченній системі твірних ця група також може бути задана деякою скінченною системою визначальних співвідношень;

- якщо група G задана двома способами скінченними системами твірних і скінченними системами визначальних співвідношень, то від одного із цих завдань можна перейти до другого скінченним числом перетворень типу A і типу B.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970.– 276 с.
2. Бухштаб А.А. Теорія чисел. –М.: Высшая школа.– 1967.–384 с.
3. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — 3-е изд. — Москва : Факториал Пресс, 2002. — 544 с. — ISBN 5-88688-060-7
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. –М.: Наука,–1965.–168 с.
5. Голод П. І., Клімик А. У. Математичні основи теорії симетрій. — К. : Наукова думка, 1992. — 368 с.
6. Грибанов В.У., Титов П.И. Сборник упражнений по теории чисел. – М.: Просвещение, – 1964.– 164 с.
7. Д.К. Фадеев, И.С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. М.: "Наука", 1972, 303 с.
8. Завало С.Т. Курс алгебри.– К.: Вища школа, 1985.– 504 с.
9. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел. Практикум.Ч.2.– К. Вища школа,– 1986.– 264с.
10. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел. Практикум.Ч.І.–К.:Вища школа,– 1983.– 232с.
11. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, ч. 2, 1974.– 408 с.
12. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.- М.: Наука, 1983.
13. Кантор Г. Труды по теории множеств. — Москва : Наука, 1985..
14. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. — Москва : Наука, 1973. — 144 с.(рос.)
15. Кон П. Универсальная алгебра. — Москва : Мир, 1968. — 351 с. (рос.)
16. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, – 1979.–560с.

17. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — Москва : Мир[ru], 1970. — 416 с. (рос.)

18. Курош А. Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967.

19. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: ― Наука. — 1963.

20. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука. – 1971.– 432 с.

21. Курош, А. Г. (1967). Теория групп (изд. 3-е дополненное). Москва: "Наука".

22. Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д. Елементи теорії груп, кілець та полів. –Суми: Вид-во Макден, 2013.–208 с.

23. Лиман Ф.М. Елементи теорії груп, кілець та полів. – Суми: Вид-воСумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2005.– 112 с.

24. Ляпин, Е. С., А. Е. Евсеев, Алгебра и теория чисел. — М.: ―Просвещение‖. — 1978.

25. М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова . Вища математика у 3-х кн. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. - К : "Либідь", 1994. - 280 с.

26. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., Москва, 1974.

27. Методичні матеріали щодо організації навчального процесу з курсу „Алгебра і теорія чисел” за кредитно-модульною системою для студентів ІІ курсу спеціальності 6.040201 –Математика*/ Уклад.: Лукашова Т.Д., Друшляк М.Г. –Вид. центр СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2010. –64 с.

28. Образующие элементы в различных группах [Електронний ресурс]. – 2009. – Режим доступу до ресурсу: https://www.turboreferat.ru/information/obrazujushhie-jelementy-v-razlichnyh-gruppah/8962-48043-page3.html.

29. Окунев Л. Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 1966.

30. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение. – 1966.– 335 с.

31. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение. –184с.
32. Сборник задач по математике для вузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под. Ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.- М.: Наука, 1986.
33. Сушкевич А.К. Теория чисел. Элементарный курс. — Харьков, ХГУ, — 1954.
34. Теорема Грушко [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://ru.knowledgr.com/06637236/ТеоремаГрушко.
35. Требенко Д.Я., Требенко О.О. Алгебра і теорія чисел.–К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – Ч.І. – 400 с.
36. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977.– 416 с.
37. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. – М.: Мир, 1979
38. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — Москва ; Ленинград : ОНТИ, 1937. — 304 с. — ISBN 978-5-382-00127-2.(рос.)
39. Холл М. Теория групп. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

ДОДАТКИ