МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПЛОЩ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "бакалавр"

Виконав: студент 4 курсу 421 групи

Спеціальності 014 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти Середня освіта (математика)

Човник Антон Віталійович

Керівник: кандидат педагогічних наук, доцент

Кузьмич Л.В._________

Рецензент: старший викладач Черненко І.Є.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

У концепції розвитку шкільної математичної освіти підкреслюється, що в даний час однією з найважливіших цілей навчання математики в школі є інтелектуальний розвиток учнів, що включає в себе здатність людини до засвоєння нових знань. Орієнтація на особистість учня висуває як одну з тенденцій в напрямку розробки ефективної методики викладання математики перенесення акцентів з навчання математичним фактам на навчання методам розв’язування задач, що формує вміння аналізувати, продукувати і використовувати інформацію.

Важлива ця проблема і при навчанні геометрії. Вивчення геометрії, що базується на уяві та інтуїції, з одного боку, і на логіці, з іншого боку, сприяє інтелектуальному розвитку учнів, розвитку їх пізнавальних інтересів. Розвиваючий потенціал геометрії закладено, в тому числі, і в геометричних задачах.

Незважаючи на постійну увагу до цієї проблеми, вміння учнів розв’язувати геометричні задачі залишаються на невисокому рівні. При здійсненні спроб розв'язання задач в учнів відсутня гіпотеза стосовно можливого шляху розв'язання, що багато в чому визначається відсутністю вміння володіти методами розв’язування геометричних задач. Саме тому подолання труднощів, які долають учні при розв’язуванні геометричних задач, залишається актуальною проблемою в наш час.

Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є включення в шкільний курс геометричних методів розв'язання задач. В роботі розглядається необхідність та можливість включення в шкільний курс методу площ, який відіграє особливу і дуже важливу роль в методах геометрії та дозволяє розв’язувати широке коло завдань.

Метод площ, який базується на інтуїтивно зрозумілих міркуваннях, вводиться при вивченні фундаментальних тем «Площі фігур», які в курсі геометрії відіграють концептуальну роль. Вони, по-перше, є джерелами геометричній теорії вимірювання величин, а по-друге, служать дієвим інструментом для розв’язування задач.

Мета даної роботи полягає у розкритті методичних особливостей застосування методу площ при розв’язуванні геометричних задач.

Об’єктом дослідження виступають методи розв’язування геометричних задач, а *предметом* дослідження – безпосередньо метод площ.

Виходячи з мети, визначені основні *завдання* роботи:

1. Проаналізувати навчально-методичну літературу з теми дослідження.

2. Розглянути питання про основні методи розв’язування геометричних задач.

3. Описати метод площ, визначити його характеристики та діапазон застосування.

4. Розкрити питання про методичні особливості навчання методу площ та формування прийомів, які визначають його.

Основні *методи*, що використовувалися в дослідженні – це аналіз наукової та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження; вивчення і узагальнення досвіду застосування різних методів розв’язування геометричних задач.

Робота складається з двох основних розділів.

В першому розділі розглянуто основні методи розв’язування геометричних задач, наведено особливості та специфіку цих методів. Крім того, в розділі розкрито питання про основні функції задач, пов’язаних з поняття площі фігури.

В другому розділі дано опис методу площ, наведено основні властивості фігур, які пов'язані з даним методом. Також в розділі розглянуто питання стосовно методичних особливостей формування в учнів навичок застосування методу площ та визначені напрямки формування прийомів, які визначають метод площ. Крам того, в розділі наведено приклади задач різного типу, які демонструють ефективність застосування методу площ.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТА ФУНКЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПЛОЩУ

1.1. Методи розв’язування геометричних задач

Найважливішими завданнями навчання математики в школі є навчання учнів математичних методів, зокрема методів доведення теорем і методів розв’язування задач. В методиці математики методом розв’язування задач, а також методом доведення теорем, називають сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій та операцій, за допомогою яких може бути розв’язаний великий клас задач [32].

У загальноосвітньому курсі геометрії предметом вивчення є геометричні моделі, геометричні величини та відношення, але не методи геометрії. Безумовно, їх використання простежується в процесі розв’язування задач зі шкільних підручників, але самі методи чітко майже не окреслюються.

По декількох темах курсу геометрії або навіть по декількох роках навчання розподілене вивчення методу, тому найчастіше в уяві учнів метод так і залишається сукупністю розрізнених елементів. Діяльність учнів при подібній організації навчання зводиться до виконання вправ, при цьому вони лише знайомляться з методами, не засвоюючи їх в достатній мірі. Виключенням є лише векторний та координатний методи, які в свою чергу скоріше розглянуті не як окремі методи, а як розділи шкільного курсу геометрії.

Однак навчати методам доведення теорем або розв’язування задач необхідно спеціально. Це сприятиме свідомому засвоєнню знань, дозволить залучити учнів до творчої діяльності, а отже, і виконувати ті цілі та завдання, які ставить перед собою геометрична освіта [29].

Важко чітко визначити межі застосування геометричних методів, через їх різноманітність, взаємозамінність та можливість використовувати нестандартні комбінації. Планіметричні задачі, які за вимогою умовно можна поділити на задачі на доведення, на обчислення, на побудову, на дослідження, розв’язують різними методами [27].

Перш за все варто зазначити, що існує декілька підходів до класифікації загальних методів розв’язування геометричних задач. Зупинимось на деяких з них.

За прийомами мислення методи розв’язування задач можна поділити на синтетичний та аналітичний. Дані методи допомагають знаходити ту сукупність простих задач або окремих дій, розв’язування або виконання яких приведе до розв’язку початкової задачі. Також до цієї групи методів варто включити метод аналогії [29]. Їх використовують у процесі пошуку способу розв’язування багатьох задач на обчислення та доведення. Іноді окремо виділяють ще аналітико-синтетичний метод розв’язування задач [22]. Синтетичний метод при розв’язуванні задач передбачає виведення наслідків з того, що дано, ведення міркувань від умови до шуканого.

Аналітичний метод сприяє свідомому пошуку розв’язку задачі, вчить учнів здійснювати такий пошук самостійно. При використанні зазначеного методу розв’язування задачі починається із запитання задачі, а також запису необхідної формули, за якою обчислюється шукана величина, а після цього проводиться пошук невідомих величин, які до записаної формули входять [22]. Тобто хід міркувань проходить від запитання до її умови. Безумовно, майже неможливо розділити ці два методи, кожен з них включає в себе елементи іншого.

При використанні методу аналогії, розв’язування задачі зводиться до пошуку споріднених задач до заданої, з метою виділення аналогічної, більш простої задачі, яка могла б слугувати в якості моделі [30].

Методам аналізу, синтезу та аналогії присвячений ряд досліджень, що виконувались багатьма математиками та методистами [2, 24, 30, 31, 39]. В цих роботах підкреслюється, що вказані методи мають широке застосування для розв’язування значного класу геометричних задач, а також розглянуті приклади розв’язування деяких із цих задач.

Окремо можна розглядати задачі на побудову та методи їх розв’язування в шкільному курсі геометрії. Вони розв’язуються кількома методами: методом геометричних місць, методом геометричних перетворень, що включає в себе метод центральної та осьової симетрії, повороту, паралельного перенесення, подібності або гомотетії, алгебраїчним методом.

В [27] методи розв’язування геометричних задач поділяють на геометричні та аналітичні. В свою чергу геометричні методи розділяються на:

– використання «ключового» трикутника, рівності та подібності трикутників, властивостей геометричних фігур;

– метод геометричних перетворень (симетрія відносно осі та точки, паралельне перенесення, поворот, подібність фігур).

Що стосується аналітичних методів, то запропоновано поділити їх на:

– введення невідомих відрізків та кутів і використання рівнянь та їх систем чи властивостей функцій;

– метод площ;

– координатний метод;

– векторний метод.

Аналізуючи джерела [6] і [9], можна побачити, що методи розв’язування планіметричних задач діляться на геометричні та алгебраїчні.

До геометричних методів відносять метод додаткових побудов, геометричних перетворень, допоміжної фігури і метод площ.

В свою чергу метод додаткових побудов включає в себе:

– проведення прямої через дві точки;

– продовження відрізка або відрізків на певну відстань або до перетину з певною прямою;

– проведення через задану точку прямої, паралельної або перпендикулярної до даної.

Найчастіше додаткові побудови виконують для того, щоб привести задачу до раніше розв'язаної або простішої, що включатиме в себе нові фігури, які дадуть можливість використовувати більшу кількість формул та теорем.

Метод геометричних перетворень складають рух площини та подібність. Цим методом розв'язуються зазвичай більш складні задачі, в умовах яких не фігурують геометричні перетворення.

Перетворення площини в багатьох випадках дозволяють економно та витончено розв'язувати геометричні задачі. Однак, як показує практика, оволодіти методом геометричних перетворень нелегко, оскільки не будь-яка задача може бути розв'язана цим методом і потрібним є певний досвід, щоб підібрати відповідний вид перетворення. При розв'язуванні різноманітних задач на доведення, побудову, обчислення широко застосовуються рухи: осьова симетрія, паралельний перенос, поворот навколо точки [9].

При застосуванні метода допоміжних фігур в розв'язок задачі включається додатковий об'єкт, який прямо не фігурує в умові, але приводить до нових умовиводів, які допомагають розв'язати задачу. В ролі такої фігури може бути відрізок, пряма, пара паралельних прямих, коло, многокутник, трикутник тощо.

Метод площ має багато різновидів, кожен з яких пов'язаний з застосуванням певних властивостей площ для розв'язування задачі. В основі даного методу лежить чисто геометричне міркування, активне використання геометричних особливостей заданої конфігурації елементів.

Отже, геометричні методи використовують апарат самої геометрії, пов'язані з геометричними об'єктами, їх зміною, але не виходять за рамки цих об'єктів.

Алгебраїчні методи включають в себе координатний, векторний, поетапно-обчислювальний методи і метод складання рівнянь. З точки зору алгебри будь-яка геометрична задача – це задача на складання рівняння, але тільки зі специфічним геометричним змістом [6]. Алгебраїчні методи дозволяють, використовуючи геометричні факти, теореми, формули, перевести задачу на мову алгебри, і тоді виникає необхідність розв'язати отримане рівняння або систему рівнянь, провести обчислення.

Про застосування векторного або координатного методу говорять тоді, коли для складання рівняння обирають векторний або координатний шлях.

До методів складання рівнянь віднесемо використання пропорційності елементів в подібних фігурах, методи вираження однієї величини двома способами, метод введення допоміжного параметра [29].

Але найчастіше в геометричних задачах доводиться використовувати декілька різних методів. Частину задачі ми можемо розв'язати з використанням геометричних методів, потім складаємо рівняння, застосовуючи якийсь із алгебраїчних методів. І в цьому випадку ми застосовуємо комбінований метод розв'язування геометричних задач.

Отже, при розв'язуванні геометричних задач зазвичай використовують три основних методи:

– геометричний – коли необхідне твердження виводиться за допомогою логічних міркувань із ряду відомих теорем;

– алгебраїчний – коли шукана геометрична величина обчислюється на основі різноманітних залежностей між елементами геометричних фігур безпосередньо або за допомогою рівнянь;

– комбінований – коли на одних етапах розв’язування ведеться геометричним методом, а на інших – алгебраїчним [30].

При розв’язуванні геометричних задач різноманітними методами застосовується комплекс раніше отриманих знань і в результаті проходить процес систематизації засвоєних учнями знань, умінь і навичок. Але який би шлях розв’язування не був обраний, успіх його використання залежить в першу чергу від знання теорем і уміння їх застосовувати.

2.1. Функції задач, пов’язаних з поняттям площі

Згідно з діючою програмою з математики для загальноосвітніх шкіл з поняттям площі многокутників учні знайомляться у 8 класі. Вивчення теми «Площі многокутників» передбачає розгляд таких підтем:

- многокутник та його елементи;
- опуклі й неопуклі многокутники;
- сума кутів опуклого многокутника;
- вписані й описані многокутники;
- поняття площі многокутника. Основних властивості площ;
- площа прямокутника, паралелограма, трикутника. Площа трапеції [9].

Вимоги до знань і умінь учнів:

- знати означення площі многокутника;
- вміти описувати многокутник, його елементи; опуклі й неопуклі многокутники, основні властивості площ;

- вміти зображувати та знаходити на малюнках многокутник і його елементи, многокутник, вписаний у коло, і многокутник, описаний навколо кола;

- формулювати означення: многокутника, вписаного у коло, многокутника, описаного навколо кола; теореми: про суму кутів опуклого многокутника; про площу прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції;

- доводити теореми про площі паралелограми, трикутника, трапеції;

- вміти знаходити площі многокутників, використовуючи вивчені властивості й формули;

- застосовувати вивчені означення і властивості до розв’язування задач.

Основна мета вивчення розділу «Площі многокутників» у курсі планіметрії – забезпечити засвоєння учнями істотних властивостей і ознак окремих видів правильних многокутників і навчити застосовувати здобуті знання до розв’язування різних видів задач [18]. Засвоєння властивостей різних видів многокутників має велике значення для реалізації зв’язків наступності, також на основі властивостей многокутників можна розв’язувати цікаві задачі на поділ (розбиття) фігур. Розв’язування таких задач сприяє розвитку логічного і конструктивного мислення.

В методиці викладання математики основними функціями задач, що визначаються метою навчання, є наступні: дидактичні (навчальні), розвиваючі та виховні [12]. Розглянемо дидактичні функції задач "на площі" і наведемо ряд рекомендацій щодо їх реалізації на уроках геометрії.

Роль задач у вивченні теорії надзвичайно велика як при роботі з поняттями, так і при роботі з теоремами. Початковим етапом в роботі з формування поняття є мотивація. Сутність цього етапу полягає в підкресленні важливості вивчення поняття, в спонуканні школярів до цілеспрямованої і активної діяльності, в порушенні інтересу до вивчення поняття [19]. Мотивація може здійснюватися як за допомогою залучення засобів нематематичного змісту, так і в ході виконання спеціальних вправ, що пояснюють необхідність розвитку математичної теорії. Наприклад, на першому ж уроці теми "Вимірювання площ" доцільно навести кілька прикладів, пов'язаних з практичною необхідністю вимірювання площ. Крім того, для збудження інтересу учнів до даної теми, вчителю доцільно привести цікаву історичну довідку, що стосується питання вимірювання площ [13]. Пізніше при вивченні учнями теми "площі многокутників", вчитель може також навести історичні відомості про те, яким чином в давнину обчислювалися площі тих чи інших фігур. Важливо привернути увагу учнів на той факт, що до цих пір практичне вимірювання довжин відрізків і величин кутів за допомогою масштабної лінійки і транспортира не викликало труднощів, а для вимірювання площ такого зручного вимірювального приладу немає і в принципі бути не може.

Наступний етап роботи з поняттям – виявлення істотних властивостей поняття, які визначатимуть його означення. Він реалізується за допомогою вправ, основне призначення яких на цьому етапі полягає у виділенні істотних властивостей досліджуваного поняття і акцентуванні на них уваги учнів [23]. Підсумком цього етапу є формулювання визначення поняття, засвоєння якого складе зміст нового етапу. Наприклад, поняття "площа плоскої фігури" вводиться у всіх підручниках аксіоматично, тобто перерахуванням основних властивостей (аксіом) величини, так званою площею. Здійснюючи принцип наочності, доцільно дати геометричне трактування перерахованих властивостей.

Для акцентування уваги учнів на даних властивостях необхідно навести ряд задач і вправ, для розв'язання яких використовуються дані властивості. Наприклад:

Властивість 1. Доведіть, що діагональ паралелограма ділить його на два трикутника, площі яких рівні.

Властивість 2. Намалюйте два рівних прямокутних трикутники. Складіть з них: а)рівнобедрений трикутник; б) прямокутник; в) паралелограм.

На етапі засвоєння визначення поняття кожна істотна властивість, що використовується в визначенні, робиться спеціальним предметом вивчення. Забезпечується ця вимога за допомогою вправ. Одним з типів таких вправ є розпізнавання об'єктів, які належать поняттю [17]. Наприклад, поняття площі можна з успіхом застосовувати при порівнянні звичайних дробів.

Наступний етап: використання поняття в конкретних ситуаціях. На цьому етапі перш за все здійснюється знайомство з властивостями і ознаками поняття; з його визначеннями, еквівалентними прийнятому; використовуються вивчені властивості і ознаки поняття. На даному етапі учні опановують уміннями переходити від поняття до його суттєвих ознак і назад, переосмислювати об'єкти з точки зору інших понять, зокрема вчаться переосмислювати елементи креслення з точки зору іншої фігури і т. д., а також володіють різними їх сукупностями. На цьому етапі важливо використання блоків завдань, об'єднаних будь-якою загальною ідеєю [25]. Упорядкування задач може бути здійснено за допомогою узагальнення і конкретизації, залучення аналогії, взаємно обернених завдань. Блоки завдань можуть конструюватися наступними способами:

а) результати розв'язання попередньої задачі використовуються у розв'язанні наступної;

б) результати розв'язання попередньої задачі використовуються в умові наступної;

в) попередні задачі є елементами наступної;

г) розв'язання сукупності задач здійснюються одним і тим же методом.

І взагалі, надзвичайно важливо показати учням, що поняття площі можна з успіхом використовувати при доведенні різних теорем і розв’язуванні задач, причому навіть в тих формулюваннях, в яких відсутня згадка про площу. Тому можна говорити про метод площ в геометрії. Про цей метод практично не згадується в шкільних підручниках (крім підручника з геометрії І.Ф.Шаригіна [35], та й тут воно чітко не формулюється, а лише на конкретних прикладах показано його застосування). Цікаво, що метод площ виявляється "близьким родичем" методу порівняння, який використовується при розв’язуванні різних геометричних задач. Він зводиться до наступного: одна з величин, що не є шуканою, виражається двома способами через дані в умови величини. Таку величину називають опорною. Принаймні один з двох виразів опорної величини повинно містити шукане. Тоді, прирівнюючи два вирази, отримують рівняння щодо шуканої величини. Сама ж опорна величина при складанні рівняння виключається. Якщо для складання рівняння в якості опорної величини обирається площа, то кажуть, що використовується метод площ. Під методом площ також розуміється використання властивостей площ при розв'язанні задач і доведенні теорем. Не можна сказати, що це єдиний метод розв'язування задач, просто найчастіше саме метод площ дає більш витончене, більш раціональне розв'язання задачі.

РОЗДІЛ 2
МЕТОД ПЛОЩ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Суть методу площ

Метод площ рідко згадують в методичній та навчальній літературі, проте з назви випливає, що головним об'єктом даного методу є площа. Для ряду фігур, наприклад для трикутника, площа доволі просто виражається через різноманітні комбінації елементів фігури (трикутника). Тому доволі ефективним є прийом, коли порівнюються різні вирази для площі однієї фігури. В цьому випадку з'являється можливість скласти рівняння, яке містить відомі і шукані елементи фігури, розв'язуючи яке ми визначаємо невідому величину. Тут і виявляється основна особливість методу площ – геометричну задачу він перетворює на алгебраїчну, приводячи весь розв'язок до розв'язування рівняння, а іноді і системи рівнянь [25]. Саме порівняння виразів для площі фігури може бути різноманітним. Іноді площа фігури представляється у вигляді суми площ її частин. В інших випадках прирівнюються вирази, основані на різноманітних формулах площі для однієї і тієї ж фігури, що дозволяє отримувати залежності між її елементами.

При розв'язуванні задач досить зручними іноді виявляються властивості площ. Розглянемо основні з них [27].

Властивість 2.1. Якщо вершину трикутника переміщувати по прямій, паралельній основі, то площа трикутника при цьому не зміниться (рис. 2.1): $S_{ABC}=S_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h$.

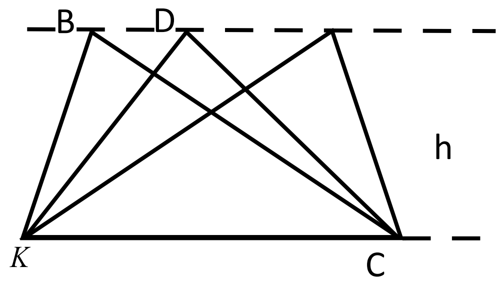

Рис. 2.1

Властивість 2.2. Якщо два трикутники мають однакові висоти, то відношення їх площ дорівнює відношенню довжин основ (сторін, на які опущені ці висоти) (рис 2.2): $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$.

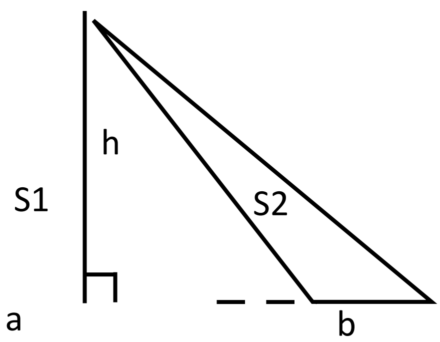

Рис. 2.2

Властивість 2.3. Якщо два трикутники мають спільний (рівний) кут, то їх площі відносяться як добутки сторін, які містять цей кут (рис 2.3): $\frac{S_{ABC}}{S_{AKM}}=\frac{AB\cdot AC}{AK\cdot AM}$.

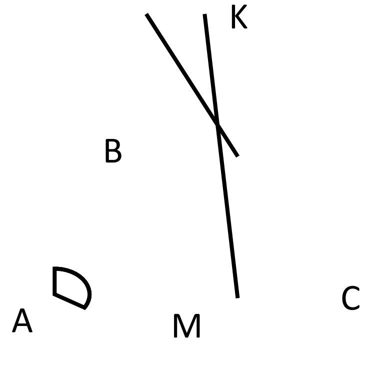

Рис. 2.3

Властивість 2.4. Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності (або відношенню квадратів відповідних лінійних елементів) (рис. 2.4): $\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}}=k^2$ або $\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}}=\frac{MN^2}{AC^2}$.

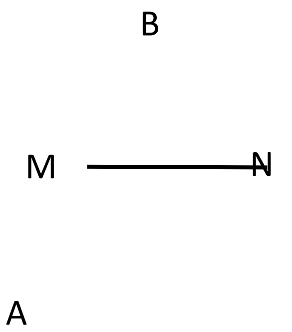

Рис. 2.4

Властивість 2.5. Медіана трикутника ділить його на дві рівновеликі частини (рис. 2.5): $S_{ABM}=S_{MBC}$.

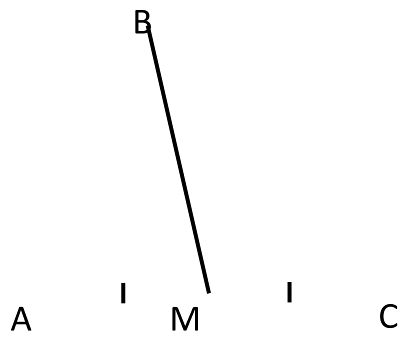

Рис 2.5

Властивість 2.6. Медіани трикутника ділять його на шість рівновеликих трикутників (рис. 2.6): $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6$.

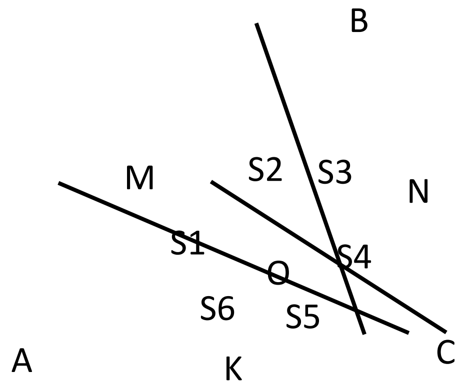

Рис. 2.6

Властивість 2.7. Середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник, площа якого дорівнює одній четвертій площі всього трикутника (рис. 2.7): $S_{BMN}=\frac{1}{4}S_{ABC}$.

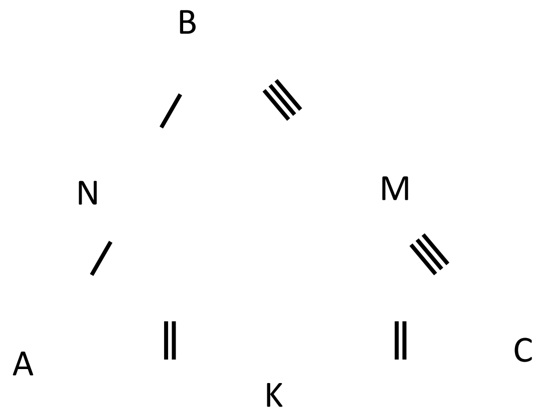

Рис. 2.7

Один з різновидів методу площ зводиться до використання в задачі властивості адитивності площі.

Властивість 2.8 *(властивість адитивності площі).* Якщо фігура розділена на декілька частин, то її площа дорівнює сумі площ цих частин (рис. 2.8): $S=S_1+S_2+S_3$.

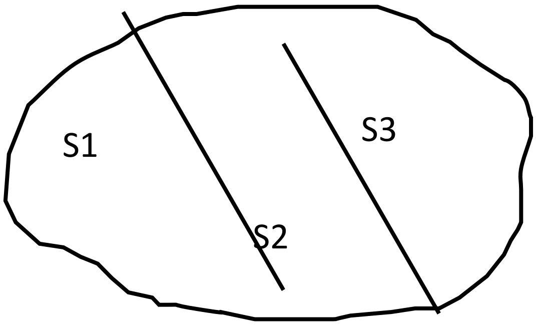

Рис. 2.8

Суть застосування методу площ в цьому випадку полягає в тому, що ми розглядаємо площу фігури як суму площ її частин, кожну з площ частин обчислюємо зручним способом, в результаті чого отримуємо рівняння, яке і дає шукану невідому величину або істотно полегшує її пошук [3].

Розширення відомостей про площі за рахунок введення властивостей відношень площ дозволяє розширити діапазон застосування методу площ.

Виділимо властивості, які пов'язують відношення площ і відношення відповідних відрізків, які корисні для розв'язування задач методом площ.

Властивість 2.9. Нехай в трикутнику ABC точка M лежить на стороні BC, точка P – на стороні AM (рис. 2.9). Тоді

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{BM}{MC}.$$

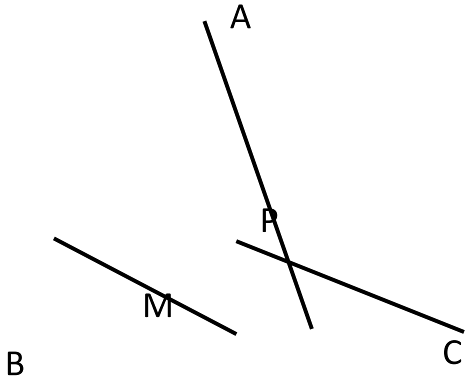

Рис. 2.9

Властивість 2.10. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точка O – точка перетину діагоналей (рис. 2.10). Тоді $\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}=\frac{AO}{OC}$.

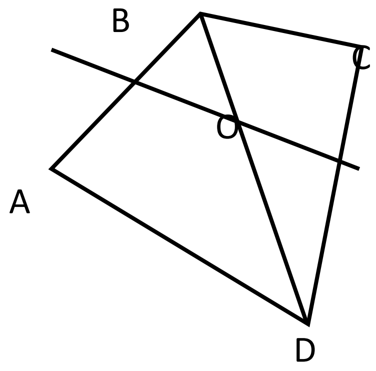

Рис. 2.10

Властивість 2.11. Якщо в двох трикутниках є по куту, сума яких складає 180°, то площі таких трикутників відносяться як добутки сторін, які містять ці кути (рис. 2.11): $\frac{S_{ABC}}{S_{AKM}}=\frac{AB\cdot AC}{AK\cdot AM}$.

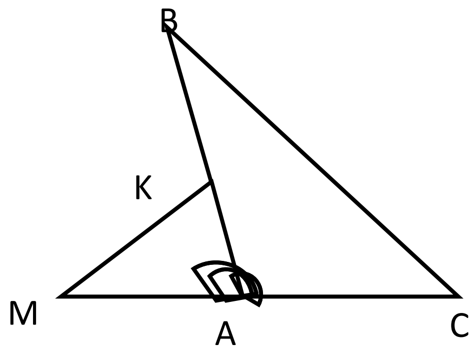

Рис. 2.11

Властивість 2.12. Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло (рис. 2.12). O – точка перетину його діагоналей. Тоді $\frac{BO}{OD}=\frac{AB\cdot BC}{CD\cdot DA}$.

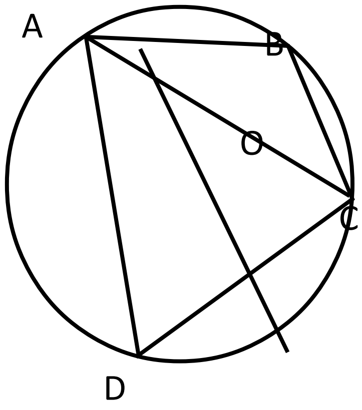

Рис. 2.12

Властивість 2.13. Діагональ паралелограма ділить його на два рівновеликі трикутники (рис. 2.13): $S_{ABD}=S_{BCD}$.

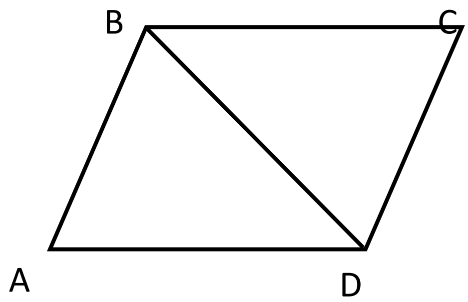

Рис. 2.13

Використання методу площ для обчислення відношень площ або відношень довжин відрізків, які ми також замінюємо відношенням відповідних площ, дозволяє порівнювати площі без відомих числових даних, які можуть певним чином відноситись до площ розглянутих фігур. Тому методично виправдано вивчення більшої кількості властивостей відношень площ, ніж в шкільних підручниках геометрії. Їх використання дає можливість більше уваги приділяти самому методу розв'язування задачі, а не доведенню тверджень, які потрібні під час цього процесу. А це в свою чергу дає можливість розширити коло задач, які розв'язуються за допомогою методу площ.

2.2. Методика навчання методу площ та формування прийомів, що визначають його

Розглянемо детально організацію роботи з вивчення учнями методу площ і навчання їх розв'язання задач цим методом. Сформулюємо вимоги, яких слід дотримуватися стосовно підбору завдань:

1) запропоновані завдання не повинні виходити за рамки чинної програми;

2) кожна задача повинні бути "яскравим представником" одного з класів задач;

3) всі завдання повинні бути розділені на блоки, всередині блоків завдання потрібно розподілити за принципом від простих завдань до більш складних;

4) завдання в сукупності повинні відображати характеристики і діапазон застосування методу площ;

5) серія завдань повинна бути спрямована на ті вміння і навички, які реально застосовуються в практиці розв’язування планіметричних задач методом площ [16].

На початку навчання розв’язуванню планіметричних задач методом площ рекомендується включати до проведених уроків завдання, в яких очевидно використання методу площ і обсягів. У цей період важливо акцентувати увагу учнів саме на методі розв’язування задачі, на усвідомленні дій з пошуку розв'язку задачі. Як відомо, засвоєння способу розв'язання задачі відбувається успішно, якщо метою дій учнів буде структура способу розв'язання завдання, а не сам розв'язок окремого завдання [24]. Така постановка навчання методу має на меті не тільки оволодіння методом, а й є засобом розвитку мислення учня.

По мірі оволодіння методом можна змішувати завдання на метод площ із завданнями на інші методи, а потім і просто додавати окремі завдання при вивченні інших тем, щоб метод залишався в активному запасі учнів і руйнувалися стереотипи розв'язання, які формуються.

Перейдемо до опису методики навчання методу площ.

Основними цілями вивчення теми на першому етапі є: дати уявлення про метод площ; познайомити з можливістю застосування адитивності площі і властивостей відношень площ на прикладах використання методу площ при розв'язуванні різних видів завдань.

Знайомство з методом площ починається з блоку завдань, що включає прості або підготовчі завдання на цей метод, які допомагають сформувати уміння і навички, необхідні для розв'язування складніших завдань методом площ. Учні повинні бачити вживання методу в динаміці від зовсім простих завдань до досить складних, складність завдань, які розв'язуються, повинна збільшуватися по мірі опанування матеріалу [37]. Доцільно доповнити серію завдань досить простими, в яких потрібне мінімальне залучення теоретичного матеріалу, зате добре демонструється застосування методу площ.

Доцільно вивчати окремо можливість вживання властивості адитивності площі і властивостей відношень площ при розв'язуванні завдань методом площ, зупиняючись на їх характерних особливостях і видах завдань, які розв'язуються з їх допомогою.

Знайомство із застосуванням адитивності площі при розв'язуванні задачі методом площ можна починати відразу після вивчення формули площі трикутника через сторону і основу. Прості завдання на метод площ зводяться до обчислення площі трикутника двома способами.

Задача 2.1. Сторони AB і BC трикутника ABC дорівнюють 8 і 11, а висота, проведена до сторони BC, дорівнює 4. Знайдіть висоту, проведену до сторони AB.

Задача 2.2. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 6 і 8. Знайдіть довжину висоти, проведеної до гіпотенузи.

Задача 2.3. У рівнобедреному трикутнику сторона основи дорівнює 8, а бічні сторони – 10. Знайдіть довжину висоти, проведеної до бічної сторони.

Задача 2.4. У рівнобедреному трикутнику бічні сторони дорівнюють 12, а основа 16. Знайдіть відстань від середини основи трикутника до бічної сторони.

Відзначимо, що для розв'язування деяких з перерахованих завдань, потрібне знання теореми Піфагора. Якщо учні ще не знайомі з нею, то можна змінити дані сторони і задати для знаходження гіпотенузи кут в трикутнику в 30°. Після вивчення формул площі паралелограма, ромба доцільно розв'язати подібні завдання для того, щоб учні зрозуміли спільність принципу знаходження висоти через вираження площі двома способами. Такими завданнями можуть бути наступні.

Задача 2.5. Знайдіть висоту паралелограма, якщо дві його сторони дорівнюють 8см і 15см, а інша висота – 5см.

Задача 2.6. Знайдіть відстань між двома паралельними сторонами ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 6 і 8.

Вибір завдань залежить від розсуду вчителя. Оскільки вчитель обмежений в часі, тому рекомендувати йому жорстку сукупність завдань, які необхідно розв'язати з учнями для оволодіння цим методом, у будь-якому випадку не виправдано. Адже вчитель в своїй роботі враховує особливості просування за матеріалом всього класу, та і свої власні вподобання.

Розглянемо методичні особливості формування прийомів, які визначають метод площ.

Можна виділити наступні дії, що виконуються в процесі розв'язання задач методом площ:

1) аналіз заданої в умові задачі конфігурації в цілому і окремо її елементів з точки зору включення площі для розв'язування завдання;

2) відбір елементів заданої конфігурації, які будуть необхідні для визначення обраних властивостей площі;

3) вибір конкретних властивостей і формул площі, пов'язаних із заданою конфігурацією;

4) знаходження площі обраних фігур, їх відношень;

5) підстановка знайдених значень або відношень у вибрані властивості для отримання результату [33].

Спираючись на дії, що застосовуються при розв’язуванні завдань з використанням методу площ, можна виділити частинні прийоми, які складають метод площ та складові його дії. Під прийомом діяльності розуміють найбільш раціональну сукупність дій і операцій, що виконуються у певному порядку для розв’язування завдання [20]. Тоді прийом розв'язання задачі можна визначити як найбільш раціональну сукупність дій, що виконуються в визначеному порядку і сприяють виконанню її умови.

Прийоми, які визначають метод площ, поставимо у відповідність тим типам завдань, які були вказані вище. Таким чином, можна виділити прийом, заснований на знаходженні площі фігури двома способами, прийом, заснований на використанні властивостей адитивності площ і прийом, заснований на використанні властивостей відношень площ і відповідних відрізків.

Проілюструємо застосування методу площ на прикладах розв'язання задач, в умові яких йдеться про трикутник. Відзначимо, що виділені дії будуть справедливі і для розв'язання зазначених вище типів завдань, у змісті яких фігурують не тільки трикутники, а й інші геометричні фігури.

Отже, прийом, заснований на знаходженні площі фігури двома способами, становить сукупність наступних дій:

1) складання виразу для площі фігури за умовою завдання;

2) складання виразу для площі фігури з використанням невідомого елемента;

3) складання рівності отриманих виразів для площі фігури;

4) розв'язання отриманого рівняння і знаходження невідомої в задачі величини.

Наведемо приклади задач 2.7-2.9 для формування перерахованих дій.

Задача 2.7. В трикутнику зі сторонами a і b висота, проведена до першої сторони, дорівнює h. Позначте висоту, проведену до другої сторони трикутника - x і знайдіть площу трикутника двома способами.

Задача 2.8. В трикутнику зі сторонами 9 і 6 висота, проведена до першої сторони, дорівнює 4. Використовуючи формулу площі трикутника, складіть рівняння.

Задача 2.9. В трикутника ABC до сторони $AB = 9$ проведена висота $CH = 4$. До сторони AC проведена висота $BM = 6$. Знайдіть сторону AC.

Задача 2.7 спрямована на формування дій (1) і (2). Розв'язання задачі 2.8 включає виконання дій (1) (3).

Виконуючи розв'язок задачі 2.9, використовуючи формулу площі трикутника $S = 0{,}5ah$, знаходять площу трикутника ABC одним способом, потім знаходять площу цього ж трикутника іншим способом, а далі прирівнюють знайдені вирази. Таким чином, розв'язання задачі 2.9 сприяє формуванню всього комплексу дій, які складають перший прийом. Причому наведена послідовність завдань характеризується тим, що кожній із задач 2.7 і 2.8 є допоміжними для розв'язання задачі 2.9. Такий ланцюжок задач корисний не тільки для поетапного формування окремих дій прийому, їх сукупності, а й сприяє відкриттю учнями способу розв'язання завдань.

Укрупнивши розглянутий прийом, ми отримаємо прийом, заснований на використанні властивості адитивності площ. Перерахуємо дії, адекватні цьому прийому:

1) розбиття фігури на частини з використанням умови (вимоги) завдання;

2) складання виразу для площ фігур, що вийшли при розбитті (для цього використовуємо дані і шукані елементи завдання);

3) складання виразу для площі фігури як суми площ складових її фігур;

4) знаходження площі вихідної фігури, використовуючи дані завдання;

5) складання рівності отриманих виразів для площі фігури;

6) розв'язання отриманого рівняння і знаходження невідомої в задачі величини.

Названі дії можна виконувати в зазначеній послідовності. Однак деякі з них, наприклад, дії (2), (3) і (4), можна виконувати в будь-якому порядку. Також можна помітити, що дії (3)-(6) названого прийому аналогічні діям, що складають перший прийом.

Наведемо приклади задач 2.10-2.12, спрямованих на формування дій, виділених в другому прийомі.

Задача 2.10. На стороні *AC* трикутника *ABC* відзначена точка *M*. Використовуючи цю точку, розбийте даний трикутник на два трикутника, які не мають загальних внутрішніх частин, і виразіть площі трикутника *ABC* через площі отриманих трикутників.

Задача 2.11. В рівносторонньому трикутнику *ABC* точка *M* – середина сторони *AC*. З точки *M* до сторін *AB* і *BC* проведені відповідно перпендикуляри *MH* і *MK*. Доведіть, що *BM* = *MH* + *MK*.

Задача 2.12. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки, обраної на стороні рівностороннього трикутника, до його бічних сторін є величина постійна.

Задача 2.10 спрямована на формування дій (1) (3). При розв’язанні задачі 2.11 учні будуть виконувати дії (1)-(6), складаючи другий з наведених прийомів. Відзначимо, що задачі 2.10 і 2.11 є допоміжними для задачі 2.12.

В основу третього прийому покладемо дії, які виконуються при використанні властивостей відношень відрізків і площ [23].

Властивість 2.13. Якщо два трикутника мають однакові висоти, то відношення їх площ дорівнює відношенню довжин основ (сторін, на які проведені ці висоти).

Властивість 2.14. Якщо трикутники мають загальну сторону, то їх площі пропорційні довжинам відрізків, які відтинаються продовженням їх загальної сторони на прямій, що з'єднує їх вершини.

Відповідно до цієї властивості $S_1 : S_2 = m : n$ (рис. 2.14).

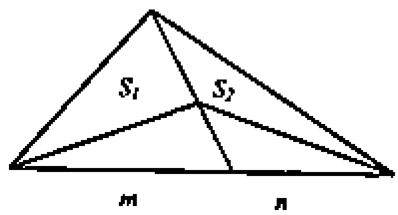

Рис. 2.14

Властивість 2.15. Якщо два трикутника мають спільний кут, то їх площі відносяться як добуток сторін, які містять цей кут.

Застосування зазначених властивостей при розв’язуванні завдань дозволило нам виділити склад прийому, заснованого на відношенні площ і відповідних відрізків. Перерахуємо дії, які в нього входять:

1) співвіднесення шуканих відрізків з площею фігур, елементами яких вони є (або співвіднесення площ шуканих фігур з відповідними відрізками), і застосування властивостей 1-3;

2) знаходження відношення площ цих фігур (довжин відрізків).

Наведемо приклади задач 2.13-2.15, що сприяють формуванню даного прийому.

Задача 2.13. Доведіть, що кожна медіана трикутника розбиває його на дві рівновеликі частини.

Задача 2.14. Доведіть, що медіани трикутника розбивають його на шість рівновеликих частин.

Задача 2.15. В трикутнику ABC на стороні AB обрана точка D так, що $AD : DB = 1 : 2$. На стороні BC – точка E, така, що $BE : EC = 1 : 2$. Яку частину площі трикутника ABC становить площа трикутника DBE?

У задачі 2.13 застосовується властивість 1. Задачу 2.14 можна розв’язати, застосовуючи або властивість 1, або властивість 2. При розв'язанні задачі 2.14 відношення площ трикутників ABC і DBE співвідносять з відношенням відрізків AD і DB, BE і EC, заданих в умові задачі. Потім застосовують властивість 3, так як трикутники мають спільний кут, і після невеликих перетворень, отримують

$$S_{DBE}{:}S_{ABC} = 1:3.$$

Таким чином, виконуються всі дії названого прийому.

2.3. Застосування методу площ при розв’язуванні задач

Розглянемо приклади застосування методу площ при розв’язуванні геометричних задач різного типу.

Задача 2.16. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Обчисліть висоту, проведену до сторони, яка має довжину 14 см.

Розв’язання.

Для зручності введемо наступні позначення: нехай a, b, c – сторони деякого трикутника ABC, причому $a=13$ см, $b=14$ см, $c=15$ см.

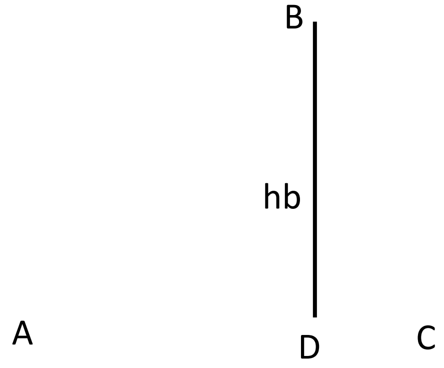

Рис. 2.15

Оскільки $a<b$ і $b<c$, то через h_b позначимо шукану висоту, проведену до середньої сторони $b=14$ см.

Маючи три сторони a, b, c, можна знайти його площу за формулою Герона [7]: $S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

З іншого боку, площу трикутника можна знайти за формулою: $S_\Delta=\frac{1}{2}b\cdot h_b$.

Отже, використовуючи наведені формули, знайдемо площу заданого трикутника двома способами:

$$p=\frac{1}{2}(13+14+15)=21 \text{ см;}$$

$$S_\Delta=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=$$

$$=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2\cdot 4\cdot 7\cdot 2\cdot 3}=\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 4^2}=3\cdot 7\cdot 4=84 \text{ (см}^2\text{).}$$

За другою формулою маємо: $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot h_b=7\cdot h_b$.

Оскільки площа трикутника дорівнює 84 см^2, то маємо рівняння:

$$7\cdot h_b=84;\quad h_b=12 \text{ (см).}$$

Відповідь: 12 см.

Задача 2.17. Знайти сторони трикутника ABC, якщо $h_a=6$, $r=2$, $R=5$.

Розв'язання.

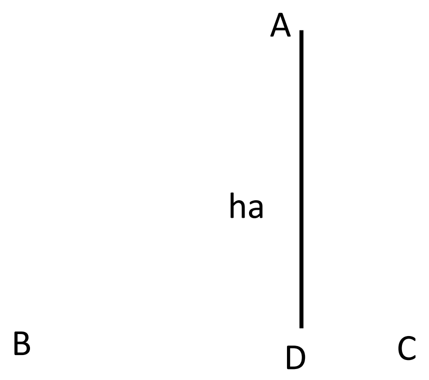

Рис. 2.16

Нехай a, b, c – сторони деякого трикутника ABC. Запишемо формули для знаходження його площі з урахуванням даних в умові задачі:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a\ ;\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ,$$

де $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$;

$$S=\frac{abc}{4R}\ ;\quad S=pr\ , \text{ де } p=\frac{1}{2}(a+b+c)\ .$$

Підставляючи дані, які зазначені в умові, отримуємо систему рівнянь відносно невідомих сторін a, b, c:

$$\begin{cases} S=3a, \\ S=\dfrac{abc}{20}, \\ S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}, \end{cases}$$

Розглянемо перше і четверте рівняння системи. Прирівнюючи їх праві частини, отримуємо:

$$2a=b+c\ .$$

Прирівнюючи праві частини першого і другого рівняння, отримуємо: $bc=60$.

Тепер розглянемо перше і третє рівняння та прирівняємо праві частини цих рівнянь. Маємо:

$$3a=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}\ .$$

Або після піднесення до квадрату:

$$144a^2=(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\ .$$

Виконаємо перетворення в правій частині отриманої рівності з урахуванням отриманих вище співвідношень $2a=b+c$ і $bc=60$.

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=$$
$$=\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)=\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b+c)^2+4bc\right)=$$
$$=\left(4a^2-a^2\right)\left(a^2-4a^2+240\right)=3a^2\left(240-3a^2\right)\ .$$

Отже, для обчислення значення a, маємо рівняння:

$$144a^2=3a^2\left(240-3a^2\right)\ .$$

Виконавши нескладні перетворення, знаходимо $a=8$.

Із системи рівнянь

$$\{b+c=16, ¿¿¿¿$$

легко знаходимо дві пари значень b і c (дві відповіді):

$a=8$, $b=6$, $c=10$ або $a=8$, $b=10$, $c=6$.

Дані значення геометрично визначають один трикутник (з точністю до позначення сторін b і c).

Відповідь: 8, 6 і 10 або 8, 10 і 6.

Задача 2.18. На стороні CD паралелограма $ABCD$ взято довільну точку E. Знаючи, що $S_{ABE}=S$, знайти площу паралелограма $ABCD$.

Розв'язання.

Виконаємо додаткову побудову. Через точку E проведемо пряму KE паралельну AD.

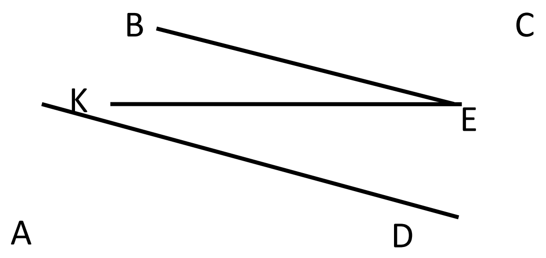

Рис. 2.17

Оскільки відрізки KE, AD і BC паралельні, то паралелограм $ABCD$ розбивається на два паралелограми $AKED$ і $BCEK$. В кожному з отриманих паралелограмів проведемо діагональ AE і BE, відповідно.

Тоді за властивістю 2.13 маємо:

$$S_{KBE}=S_{CBE} \text{ і } S_{AKE}=S_{ADE}.$$

Площу паралелограма можемо з використанням властивості адитивності представити у вигляді:

$$S_{ABCD}=S_{KBE}+S_{CBE}+S_{AKE}+S_{ADE}=2S_{KBE}+2S_{AKE}=$$
$$=2\left(S_{KBE}+S_{AKE}\right)=2S_{ABE}=2S.$$

Відповідь: $2S$.

Задача 2.19. На папері з клітинками розміром 1x1 см зображена трапеція. Знайдіть її площу в квадратних сантиметрах.

Розв'язання.

Виконаємо додаткові побудови: добудуємо трапецію $ABCD$ до прямокутника $KDCF$ (рис. 2.18).

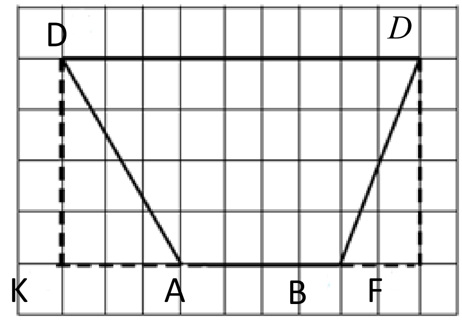

Рис. 2.18

Використовуючи властивість адитивності площі, запишемо формулу для знаходження площі шуканої фігури:

$$S_{ABCD}=S_{KDCF}-S_{KDA}-S_{BCF}\ .$$

З рисунку знайдемо довжини сторін прямокутника і трикутників, зазначених у формулі, необхідні для обчислення площ. Підставивши знайдені значення в формулу, маємо:

$$S_{KDCF}=9\cdot 6=54 \text{ см}^2;$$

$$S_{KDA}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=9 \text{ см}^2;$$

$$S_{BCF}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2=6 \text{ см}^2.$$

Площу трапеції знаходимо із формули

$$S_{ABCD}=S_{KDCF}-S_{KDA}-S_{BCF}\ :$$

$$S_{ABCD}=54-9-6=39 \text{ см}^2.$$

Відповідь: 39 см^2.

Задача 2.20. На продовженні сторони AB трикутника ABC взято точку K так, що $AB=BK$. Точка L – середина BC. Знаючи, що $S_{BKL}=S$, знайти S_{ABC}.

Розв'язання.

Виконаємо додаткову побудову (рис. 2.19): проведемо відрізок AL. Зображена на рисунку фігура розбита на три трикутники.

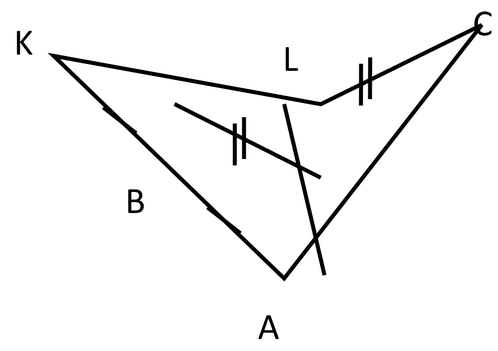

Рис. 2.19

Враховуючи властивість 2.5 маємо:

$$S_{BKL}=S_{ABL}=S,$$

тоді з іншої сторони $S_{ABL}=S_{ACL}=S$.

Площу шуканого трикутника знайдемо як суму площ трикутників ABL і ACL. Звідки $S_{ABC}=2S$.

Відповідь: $2S$.

Задача 2.21. Знайти бісектрису AD трикутника ABC, якщо $AB=c$, $AC=b$, а кут A дорівнює α. [3]

Розв'язання.

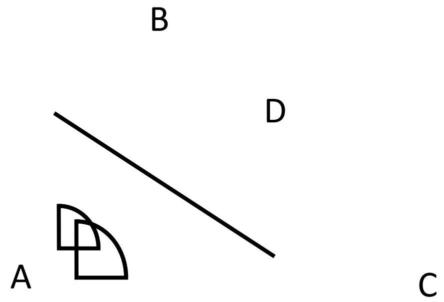

Рис. 2.20

Представимо площу трикутника ABC наступним чином з використанням властивості адитивності площі:

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}.$$

Знайдемо площі, які входять до отриманої рівності:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A,\quad S_{ABC}=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha;$$

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD,\quad S_{ABD}=\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD,\quad S_{ACD}=\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Тоді, підставивши знайдені вирази до рівності

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD},$$

маємо рівняння:

$$\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Звідки виражаємо шукану бісектрису AD:

$$c\cdot b\cdot\sin\alpha=c\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+b\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$c\cdot b\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}(b+c); \quad AD=\frac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

Відповідь: $\dfrac{2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

Задача 2.22. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C=90°$) CD – висота (рис. 2.21). Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і DCB, відповідно дорівнюють r_1 і r_2. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

Розв'язання.

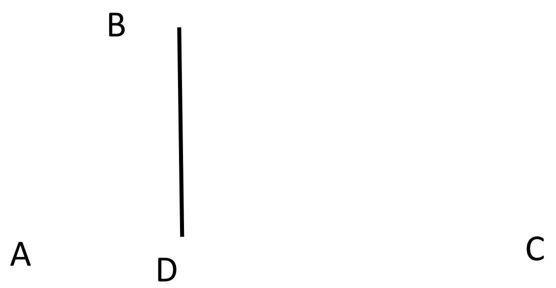

Рис. 2.21

Нехай площі трикутників ACD, DCB, ABC відповідно, дорівнюють S_1, S_2, S. Зрозуміло, що

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \text{ і } \Delta CBD \sim \Delta ABC.$$

Площі подібних трикутників відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів (властивість 2.4). Маємо:

$\frac{S_1}{S} = \frac{r_1^2}{r^2}$, $\frac{S_2}{S} = \frac{r_2^2}{r^2}$, де r – радіус кола, вписаного в трикутник ABC .

Звідси, використовуючи властивість адитивності і властивість 1.4:

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} \; ; \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2 \; ;$$

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \; .$$

Відповідь: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Задача 2.23. В трапеції $ABCD$ відрізки AB і CD – основи. Діагоналі перетинаються в точці E . Знайти площу трикутника BCE , якщо $AB = 30$, $CD = 24$, $AD = 3$, кут BAD дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

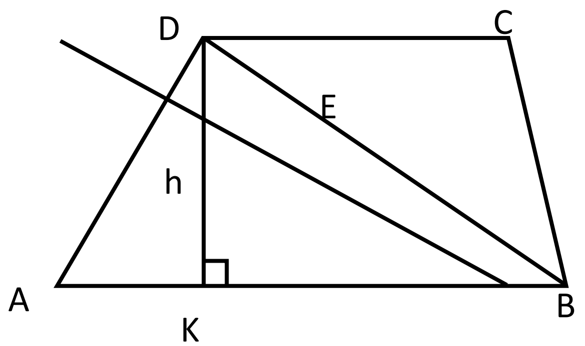

Рис. 2.22

Розглянемо трикутник BCD і знайдемо його площу:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} DK \cdot CD \; .$$

З трикутника ADK знаходимо DK : $\sin\angle BAD = \frac{DK}{AD}$, тоді $DK = AD \sin\angle BAD$, $DK = 3 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Підставивши отримане значення до формули площі, маємо:

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 24=18\sqrt{3}$$ (кв. од.).

Розглянемо трикутники DCE і BAE. Вони подібні за двома кутами, отже, $\frac{DE}{BE}=\frac{24}{30}$, $\frac{DE}{BE}=\frac{4}{5}$.

Застосуємо метод площ. Знайдемо відношення площ трикутників BCE і BCD з використанням властивості 2.3 площ:

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BCD}}=\frac{BC\cdot BE}{BC\cdot BD}=\frac{BE}{BD}=\frac{5}{9}.$$

З отриманої рівності маємо: $\frac{S_{BCE}}{S_{BCD}}=\frac{5}{9}$;

$$S_{BCE}=\frac{5}{9}S_{BCD},\quad S_{BCE}=\frac{5}{9}\cdot 18\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$ (кв. од.).

Відповідь: $10\sqrt{3}$ квадратних одиниць.

Задача 2.24. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято відповідно точки M і N, так що $AM:MB=5:3$ і $BN:NC=2:7$. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо площа трикутника MBN дорівнює 11.

Розв'язання.

Ввівши позначення для одиничних відрізків через x і y, введемо позначення для відрізків, які складають трикутник ABC (рис. 2.23).

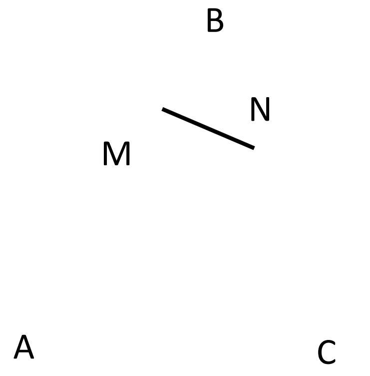

Рис. 2.23

Тоді

$$MB=3x,\quad AM=5x,\quad BN=2y,\quad NC=7y,$$

а

$$AB=AM+MB=8x,\quad BC=BN+NC=9y.$$

Розглянемо трикутники ABC і MBN, які мають спільний кут B. Запишемо площі цих трикутників:

$$S_{MBN}=\frac{1}{2}MB\cdot BN\cdot\sin\angle B;$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle B.$$

Оскільки розглянуті трикутники мають спільний кут, то можемо, використовуючи властивість 2.3, скласти відношення:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBN}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle B}{\frac{1}{2}MB\cdot BN\cdot\sin\angle B};\quad \frac{S_{ABC}}{S_{MBN}}=\frac{AB\cdot BC}{MB\cdot BN}.$$

Підставивши введені вище позначення та дані, наведені за умовою задачі, маємо:

$$\frac{S_{ABC}}{11}=\frac{8x\cdot 9y}{3x\cdot 2y};\quad S_{ABC}=\frac{8\cdot 9}{3\cdot 2}\cdot 11=132$$ (кв. од.).

Відповідь: 132 кв. од.

Задача 2.25. У трикутнику ABC, площа якого дорівнює S, провели бісектрису CE і медіану BD, які перетинаються в точці F. Знайдіть площу чотирикутника $ADFE$, якщо $BC=a$, $AC=b$.

Розв'язання.

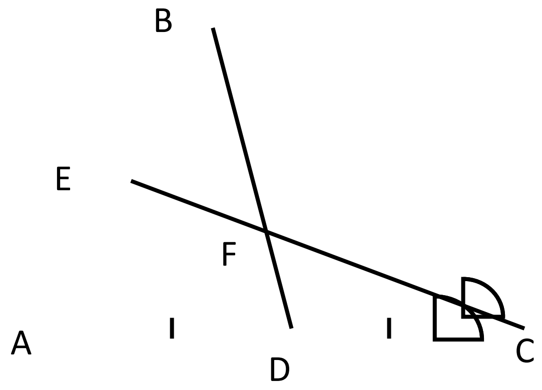

Рис. 2.24

Позначимо через S_x шукану площу чотирикутника $ADFE$. Тоді

$$S_x = S_{ACE} - S_{DCF}.$$

Знайдемо S_{ACE}:

Оскільки CE – бісектриса, то: $\frac{AE}{BE} = \frac{b}{a}$, звідки $BE = \frac{a}{b} AE$. За властивістю площ 2.2 маємо:

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB},$$

тоді

$$S_{ACE} = \frac{AE}{AE + BE} S_{ABC}.$$

Підставивши відомі значення, маємо:

$$S_{ACE} = \frac{AE}{AE + \frac{a}{b} AE} S = \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} S = \frac{b}{a+b} S.$$

Для знаходження S_{DCF} розглянемо трикутник BCD. Оскільки BD – медіана, то

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABC}, \quad S_{BCD} = \frac{S}{2}.$$

Оскільки CF – бісектриса, то: $\frac{DF}{BF}=\frac{\frac{b}{2}}{a}$, звідки $BF=\frac{2a}{b}DF$.

За властивістю площ 2.2 маємо:

$$\frac{S_{DCF}}{S_{BCD}}=\frac{DF}{BD},$$

тоді

$$S_{DCF}=\frac{DF}{DF+BF}S_{BCD}.$$

Підставивши відомі значення, маємо:

$$S_{DCF}=\frac{DF}{DF+\frac{2a}{b}DF}\cdot\frac{S}{2}=\frac{1}{1+\frac{2a}{b}}\cdot\frac{S}{2}=\frac{b}{2a+b}\cdot\frac{S}{2}.$$

Остаточно, підставивши отримані значення площ до формули $S_x=S_{ACE}-S_{DCF}$, маємо:

$$S_x=\frac{b}{a+b}\cdot S-\frac{b}{2a+b}\cdot\frac{S}{2}=\frac{S}{2}\cdot\frac{2b(2a+b)-b(a+b)}{(a+b)(2a+b)}=$$

$$=\frac{S}{2}\cdot\frac{b(4a+2b-a-b)}{(a+b)(2a+b)}=\frac{b(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}S$$ (кв. од.).

Відповідь: $\frac{b(3a+b)}{2(a+b)(2a+b)}S$ квадратних одиниць.

Задача 2.26. Нехай O – точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Довести, що виконується рівність $\frac{AO}{CO}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CBD}}$.

Доведення.

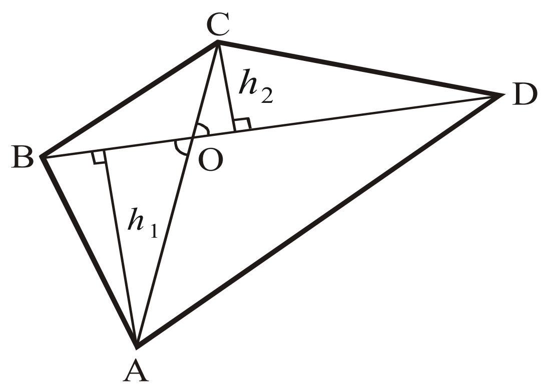

Рис. 13

Рис. 2.25

Нехай h_1 и h_2 – висоти трикутників *ABD* и *CBD*, проведені до сторони *BD*. З подібності утворених прямокутних трикутників маємо, що $\frac{AO}{CO}=\frac{h_1}{h_2}$. Отримаємо:

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{\frac{1}{2}h_1 BD}{\frac{1}{2}h_2 BD}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{AO}{CO}.$$

Розглянемо приклади задач, у яких площа є допоміжним елементом при їх розв’язанні.

Задача 2.27. В трикутнику *ABC* на сторонах *AB, BC* і *CA* взято відповідно точки *K, M* и *P* так, що *AK:KB=2:3, BM:MC=3:4, CP:AP=4:5*. В якому відношенні відрізок *BP* ділиться відрізком *KM*?

Розв'язання.

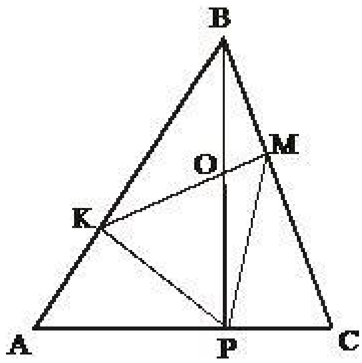

Рис. 2.26

Нехай *BP* и *KM* перетинаються в точці *O* та $S_{ABC}=S$. Для пар трикутників *ABC* та *BKM*, *ABC* та *MCP*, *ABC* та *AKP*, що мають спільні кути, використаємо властивість 2.3.

Так як $BK:AB=3:5$, $BM:BC=3:7$, то $S_{\Delta BKM}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}S=\frac{9}{35}S$.

Так як $CM:CB=4:7$, $CP:CA=4:9$, то $S_{\Delta MCP}=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot S=\frac{16}{63}S$.

Так як $AK:AB=2:5$, $AP:AC=5:9$, то $S_{\Delta AKP}=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{9}S=\frac{2}{9}S$.

Відповідно, $S_{\Delta KPM}=S\left(1-\frac{9}{35}-\frac{16}{63}-\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{15}S$.

Використавши результати задачі 2.26, отримаємо:

$$\frac{BO}{OP}=\frac{S_{\Delta BKM}}{S_{\Delta KPM}}=\frac{27}{28}.$$

Відповідь: 27 / 28.

Задача 2.28. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC взято точки E, F, G так, що $AE:AB=x$, $BF:BC=y$, $CG:CA=z$. Площа трикутника $ABC=S$. Обчисліть площу трикутника EFG.

Розв'язання.

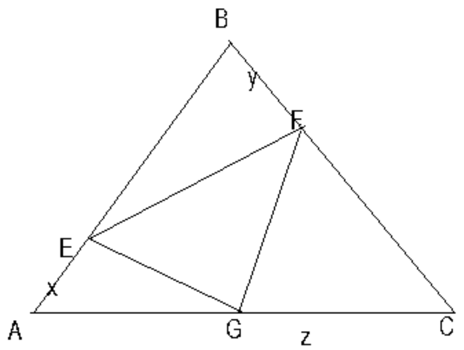

Рис. 2.27

Напрям пошуку розв'язання полягає в тому,щоб знайти площі трикутників AEG, BEF, CFG і відняти їх від S.

Оскільки кут A є спільним для трикутників AEG, ABC, а відношення $\frac{AE}{AB}=x, \frac{AG}{AC}=1-z$, то за властивістю 2.3 отримаємо, що $S\Delta AEG=Sx(1-z)$

Аналогічно знаходимо, що

$$S\Delta BEF = Sy(1-x), \quad S\Delta CGF = Sz(1-y).$$

Звідси легко отримаємо відповідь:

$$S\Delta EFG = S(1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y)).$$

Відповідь: $S\Delta EFG = S(1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y))$

ВИСНОВКИ

Підсумовуючи основні результати виконаного дослідження, можна відмітити наступне.

При розв’язуванні геометричних задач зазвичай використовують три основних методи:

– геометричний – коли необхідне твердження виводиться за допомогою логічних міркувань із ряду відомих теорем;

– алгебраїчний – коли шукана геометрична величина обчислюється на основі різноманітних залежностей між елементами геометричних фігур безпосередньо або за допомогою рівнянь;

– комбінований – коли на одних етапах розв’язування ведеться геометричним методом, а на інших – алгебраїчним.

Систематичне вивчення в шкільному курсі геометрії основних методів розв’язування задач дає можливість вчителю в більш повній мірі реалізувати ідею диференційованого навчання, так як із появою методу виникає і величезний масив задач, які можна запропонувати учням для розв’язування. Знайомство з певним набором методів геометрії допомагає також враховувати в навчанні й індивідуальні особливості учнів. Обираючи метод, учень може віддавати перевагу тому, який в більшій мірі відповідає його типу мислення.

Метод площ полягає в застосуванні різноманітних властивостей площ для складання співвідношень, які пов’язують величини, що задані за умовою задачі і невідомі. Зазвичай використовують властивості адитивності площі та відношення площ, які допомагають звести задачу або до розв’язування рівняння, або до прямих обчислень. Метод площ використовується при розв’язуванні задач, в умовах яких йдеться мова про площі, і особливу роль відіграє в тих задачах, де такої згадки немає. В останніх площа вводиться в задачу в якості допоміжного елемента. А іноді буває корисним розглянути відношення площ фігур, одна з яких (або обидві) містять в собі шукані елементи.

В якості основних характеристик методу площ можна відмітити універсальність (він сполучає в собі властивості, характерні, як для методів алгебраїчних, так і геометричних), продуктивність (метод є потужним інструментом для розв’язування великої кількості задач різного рівня складності), варіативність (він допускає різні рівні засвоєння і є доступним для учнів як з геометричним, так і з аналітичним типом мислення), доступність (метод базується на інтуїтивно зрозумілих міркуваннях, опорі на невелику кількість властивостей і використанні простого обчислювального апарату.

Застосування методу площ при розв’язуванні геометричних задач сприяє розвитку творчого, евристичного мислення учнів, оскільки використання площі як допоміжного елементу – це нестандартний, евристичний спосіб розв'язання задач. Формування послідовності дій, які визначають прийоми, що визначають метод площ, сприятиме ефективному і осмисленому застосуванню методу площ в різних ситуаціях. Засобом навчання учнів цьому методу є геометричні завдання на знаходження площі фігури двома способами, на використання властивостей адитивності площ і на використання властивостей відношень площ і відповідних відрізків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч.1. Планиметрия [Текст] / Ж. Адамар. – М.: Учпедгиз, 1957. – 608 с.

2. Алиев С. Дж. Применение метода площадей в геометрических задачах [Электронный ресурс] / С. Дж. Алиев, С.Н. Эфенди // Режим доступу http://oaji.net/articles/2016/743-1467704101.pdf

3. Апостолова Г.В. Геометрія : 9 [Текст] : дворівн. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Апостолова. – К.: Генеза, 2009. – 304 с. : іл.

4. Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры [Текст] / В.Г. Болтянский. – М.: Гостехиздат, 1956. – 64 с.

5. Василевский А.Б. Методы решения геометрических задач [Текст] / А.Б. Василевский. – Минск: Вышэйшая школа, 1969. – 323 с.

6. Войтишек В.В. Вычисление площадей [Текст] : лекции по математике. Для учащихся летней математической школы при НГУ. Под ред. Л.Я. Савельева. Новосибирск, 1974. – С. 3–29.

7. Готман Э.Г. Задача одна – решение разные : Геометрические задачи [Текст] : кн. для учащихся // Э.Г. Готман, З.А. Скопец. – М. : Просвещение, 2000. – 224 с.

8. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения [Текст] : пособие для учащихся / Э.Г. Готман : М. : Просвещение : АО «Учеб. лит.», 1996. – 240 с. : ил.

9. Гусев В.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.А. Гусев. – М. : Дрофа, 2010. – 473 с.

10. Дорофеев Г.В. Отношение отрезков, площадей и объемов [Текст] / Г.В. Дорофеев // Квант. – 1975. – №1. – С. 55–59, 77

11. Кантор П.Р. Площади многоугольников [Текст] / П.Р. Кантор, Ж.М. Раббот // Квант. – 1972. – №2. – С. 36–41.

12. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики : 9 кл. [Текст] / А.Г. Мерзляк та ін.; за ред. М.І. Бурди. – К.: Центр навч.-метод. л-ри, 2014. – 256 с.

13. Капкаева Л.С. Алгебраический и геометрический методы в школьном курсе математики как способы познавательной деятельности учащихся [Текст] / Л.С. Капкаева // Гуманитарные науки и образование. – 2012. – №1(9). – С. 18–22.

14. Кузнецова Л.И. Элементарная математика: геометрические фигуры и их свойства в задачах на доказательство и вычисление [Текст] : учебно-методическое пособие для студентов факультета математики, информатики и физики / Л.И. Кузнецова, С.В. Кириллова, О.К. Огурцова: Н. Новгород: НГПУ, 2011. – 72 с.

15. Кушнир И.А. Метод вспомогательного элемента [Текст] / И.А. Кушнир // Квант. – 1974. – №2. – С. 46–51.

16. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії [Текст] : кн. для вчителя / І.А. Кушнір. – К. : Абрис, 1994. – 464 с.: іл.

17. Мерзляк А.Г. Геометрія [Текст] : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 208 с.: іл.

18. Метельский Н.В. Дидактика математики: Общая методика и её проблемы [Текст] / Н.В. Метельский. – Минск : Изд. БГУ, 1982. – 256 с.

19. Метод площадей при решении геометрических задач [Электронный ресурс] // Режим доступа https://pedportal.net/attachments/429419.pdf

20. Нелін Є.П. Геометрія [Текст] : дворів. підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. і профільн. рівні / Є.П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 240 с. : іл.

21. Новиков И.Д. Метод площадей [Текст] / И.Д. Новиков // Квант. – 1971. – №12. – С. 41–46.

22. Овчинникова Е.Е. Использование метода площадей и объемов при решении школьных геометрических задач [Текст] : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Обчинникова Елена Евгеньевна ; Москва, 2002. – 133 с.

23. Пойа Д. Как решать задачу [Текст] / Д. Пойа. – М.: Учпедгиз. – 1961. – 207 с.

24. Полонський В.Б. Вчимося розв’язувати задачі з геометрії [Текст] : навч.-метод. посібник / В.Б. Полонський, Ю.М. Рабінович, М.С. Якір. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2002. – 240 с.

25. Прасолов В.В. Используя площадь [Текст] / В.В. Прасолов // Квант. – 1986. – №5. – С. 16–19, 43.

26. Рабинович Е.М. Равновеликие треугольники в задачах [Текст] / Е.М. Рабинович // Математика в школе. – 1993. – №6. – С. 63–65.

27. Рахымбек Д. Методика обучения решению геометрических задач на доказательство различными способами [Текст] / Д. Рахымбек, А.А. Юнусов, А.А. Юнусова, Н.Ж. Айтбаева // Международный журнал экспериментального образования, № 4. – 2013. – С. 48–53.

28. Родионов М.А. Формирование поисковой мотивации в процессе обучения математике: учебное пособие для студентов и учителей [Текст] / М.А. Родионов. – Пенза: ПГПУ. – 2001. – 202 с.

29. Саранцев Г.И. Методика обучения геометрии [Текст] : учеб. пособие / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

30. Сарванова Ж.А. Совокупность задач для обучения учащихся основной школы применению метода площадей при решении геометрических задач [Текст] / Ж.А. Сарванова // Учебный эксперимент в образовании. – 2015. – №4(76). – С. 34–39.

31. Сарванова Ж.А. Формирование приемов, составляющих метод площадей, при обучении школьников решению геометрических задач

[Текст] / Ж.А. Сарванова // Modern high technologies. – №2. – 2016. – С. 380–384.

32. Слєпкань З.І. Методика навчання математики [Текст] : підручник / З.І. Слєпкань. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К. : Вища шк., 2006. – 582 с.: іл.

33. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике [Текст] / Л.М. Фридман. – М. : Московский психолого-социальный институт : Флинта, 1998. – 224 с.

34. Шарыгин И.Ф. 2002 задачи по геометрии [Текст] / И.Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 1999. – 210 с.

35. Шарыгин И.Ф. Решение задач [Текст] : учеб. пособия для 10 кл. общеобразоват. Учереждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 1994. – 252 с.

36. Шарыгин И.Ф. Учимся решать задачи по геометрии [Текст] / И.Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1989. – №2. – С. 87–101.

37. Шарыгин, И.Ф. Учимся решать задачи по геометрии [Текст] / И.Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1989. – №4. – С. 73–81.

38. Якуш С.И. Методы решения задач с использованием свойств площадей [Электронный ресурс] // Режим доступа www.n-asveta.by/dadatki/2016/yakush.pdf.

**КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Я, Човник Антон Віталійович, учасник освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:
– дотримуватися:
- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:
- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;
– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;
– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;
– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;
– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;
– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;
– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;
– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;
– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;
– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;
– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;
– не підроблювати документи;
– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;
– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;
– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;
– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;
– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;
– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;
– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

22.04.2020		Човник Антон
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)