МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

"ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ У ПРОСТОРІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ"

Кваліфікаційна робота (проєкт) на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконала: студентка 4 курсу, група 421
Спеціальності 014.“Середня освіта (математика)”
Освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти Середня освіта (математика)
Ткаченко Людмила Вікторівна

Керівник: доцент ,кандидат педагогічних наук Таточенко В.І.

Рецензент: доцент, кандидат технічних наук Шишко Л.С.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність дослідження. Вимоги економіки, нове розуміння ролі людського фактора в постіндустріальному суспільстві диктують реформування систем сучасного освітнього простору України, перехід від знаннєво орієнтованої парадигми освіти, яка довгий час домінувала у вітчизняній системі освіти , до компетентності. Результативність цього процесу неможлива без акцентуації уваги на результату навчання, в якості яких розглядається здатність здобувача середньої освіти діяти в різноманітних проблемних ситуаціях. В проекті концепції математичної освіти 12-річної школи, яка розроблена Бурдою, Н. Тарасенковою, Д. Васильєвою, О. Вашуленко відповідно до Закон України “ Про освіту”, зазначається, що добір змісту навчання математики є найактуальнішою проблемою вітчизняної школи. Традиційний зміст навчання забеспечує належність математичну підготовку здобувача середньої освіти. Проте зміни в різних сферах суспільства вимагають переосмислення традиційного змісту навчання математики, подальшого його трансформації з дотриманням принципу наступності. Зміст геометричного матеріалу має передбачати ретельне вивчення геометричних фігур , їх властивостей, розпізнавання, зображення і побудову, створення з геометричних фігур різних конструкцій, беспосереднє маніпулювання з їх моделями, орієнтація на застосування геометричних фігур у галузях техніки, виробнийтва, побуту. Однією з головних змістових ліній стереометрії є — геометричні фігури у просторі та їх властивості. У ній закладається фундамент для вивчення геометрії простору

Проте питання змістової лінії “ Геометричні фігури у просторі не отримало належного висвітлення в психолого-педагогічній та методичній літератури та залишається актуальним.

Актуальність, недостатній рівень теоретико-методичної розробленості даної змістової лінії курсу стереометрії зумовили вибір кваліфікованої роботи “ Геометричні фігури у просторі та їх властивості”

Об'єкт дослідження — зміст навчального матеріалу стереометрії.

Предмет дослідження — особливості змістової лінії “ Геометричні фігури у просторі та їх властивості”

Мета дослідження — теоретичне обґрунтування та вивчення геометричних фігур у просторі та їх властивості.

Виходячи із предмета, об'єкта і поставленої мети було визначено наступні завдання дослідження:

1. Проаналізувати нормативно-правових документів, психолого-педагогічної і методичної літератури, шкільної практики з проблеми дослідження.
2. Уточнити категоріального апарату дослідження.
3. Охарактеризувати структуру змістової лінії.

Методи дослідження

Для реалізації мети та завдань дослідження використано комплекс методів дослідження:

- теоретичні: аналіз нормативної документації, філософської, психолого-педагогічної, навчально-методичної літератури з проблеми методів навчання математики, що дозволило чітко окреслити об'єкт , предмет, завдання дослідження, виокремити теоретичні засоби проблеми дослідження,її категоріальний апарат;
- емпіричні : опитування(анкетування) вчителів і здобувачів освіти з метою виявлення особливостей змістової лінії на сучасному етапі розвитку загально-освітніх закладів України.

Структура кваліфікованої роботи

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, списку використаних джерел із 12 найменувань. Основний зміст викладено на 54 сторінки. Представлено 25 рисунки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження

Для системи шкільної освіти важливе значення має вплив математики. Математика- це розвиток раціонального мислення, просторових уявлены думки, алгоритмічних і культурних знань, уваги, пам'яті.

У підручнику «Геометрія 7–11» О.В. Погорєлова , навчають геометрії в більшості шкіл , розділи «Планіметрія» та «Стереометрія» представлені окремо, а перша частина елементів «Планіметрії» не містить стереометрії.

Зокрема, пропонується, що курс початкової геометрії початкової школи будується таким чином об'єкти стереометрії тісно пов'язані з планіметричними об'єктами, значно полегшує розробку вичерпної та всебічної інформації при розробці вичерпної та цілеспрямованої інформації, що перешкоджає збереженню в пам'яті, полегшує розвиток просторових уявлень та уяви учнів.

Шкільний підручник 9 клас Бевз закінчується розділом "Елементи стереометрії". У даному розділі ознайомляться з лініями та площинами у просторі, введуть багатошарові поняття, вивчають види многограників, обертові фігури та запропонують формули для визначення поверхні та об'єму геометричних тіл. Вивчення цього розділу передбачає виконання практичних завдань з виготовлення багатошарових моделей, виготовлення обертальних чисел та обчислення їх площі поверхні та об'єму.

Концептуальні та методологічні аспекти здатності учнів створювати стереометричні математичні образи та їх поєднання відображені в наукових та архітектурних роботах М. Ф. Четверухіна, М. М. Бескіна, М. М. Зенгіна, Л. М. Лоповки, В. М. Савченко. , Г. М. Литвиненко, Я. Е. Голдберг та ін. Професор М. Ф. Четверухін - винахідник і розробник моделей вільного відгадування як методу створення просторових зображень. Його погляд - не виправляючи напряму змісту, фактичного розміру чи положення його щодо площини здогаду - дозволив використовувати так звані вільні образи процесу.

Бачення, створене М. Ф. Четверухіним, відкриває шлях до поширення
Три вимоги до зображень: точність, точність та легке редагування
малюнок.

1. Малюнок повинно бути правильним, тобто виходячи з усіх його елементів ми використовуємо той же метод прогнозування.
2. Малюнок повинен бути чітким, тобто давати повну картину а оригінал показаний; сприяє розвитку просторового мислення, допомагає знайти відповідні шляхи вирішення проблеми.
3. Малюнок повинен бути простим для побудови, Вся побудова має бути зрозуміла учням і не викликає тягар навчального матеріалу.

Але жодна з теорій навчання не може пояснити всі труднощі розвитку учнів зображати стереометричні фігури в силу складності й багатогранності начального процесу.

У темі Паралельність прямих і площин у просторі". закладається фундамент для вивчення стереометрії. Особливу увагу потрібно приділити втіленню в життя спрямованості теми. Завдяки цій темі учні формують чітке уявлення про поняття геометричних об'єктів (пряма ,пощина)

В 10 класі геометрія закінчується темою "Перпендикулярність прямих і площин у просторі". Значної уваги приділяють у формуванні таких понять: основне поняття відстані, поняття кута як міри положення прямої і площин та двогранний кут як геометрична фігура.

Розгляд теми "Координати і вектори" дозволять повторити навчальний матеріал з курсу стереометрії і узагальнення векторного методу та координатного методів у випадку простору.

У темі “ Геометричні тіла. Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл” розглядаються основні види геометричних тіл та їх властивості. Вона є центральною темою у підготовці знань учнів з курсу стереометрії. При вивченні передбачається формування таких навичок: конструювання і класифікація тіл та їх поверхонь

1.2Мета вивчення змістової лінії

1. Систематичне вивчення властивостей геометричних фігур у просторі.
2. Розвиток просторових уявлень та уяви. Зображування фігур у просторі.
3. Вивчення учнями способів обчислення в геометричних величин і подальші досягнення логічного мислення
4. Здатний зображувати на просторові фігури площині, вказані в умовах теорем та задач, виділяти відомі фігури на рисунках та моделях.
5. Здатність зображити та знайти на малюнках геометричні фігури, указані в змісті.
6. Вміти описувати взаємне розміщення двох прямих у просторі; прямої та площини; двох площин.
7. Зображує і знаходить на малюнках многограники і тіла обертання та їх елементи.
8. Вміти знаходити розміщення прямих та площин у просторі, також паралельність прямих, пряма та площина, двох площин, з'ясовувати чи є дві прямі мимобіжними.
9. Використовує відповідність паралельності між прямими і площиною у просторі до опису та пояснення взаємозв'язку придметів и навколишнього світу.
10. Застосовує відношення між прямими та площинами у просторі, відстані та кути у просторі до опису об'єктів навколишнього світу.
11. Встановлює перпендикулярність прямої та площини, двох площи
12. Обчислює відстані та кути у просторі
13. Використовує координати у просторі для вимірювання відстані кутів.
14. Розпізнає основні види многогранників та їх елементи
15. Зображує просторові фігури і виконує на них нескладні побудови.
16. За відомими координатами учень повинен вміти будувати просторову систему координат

17. Обґрунтовує властивості властивості многограників,формули для обчислення площі бічної повної поверхонь призми та піраміди.
18. Розв'язує нескладні задачі на комбінацію просторових фігур

1.3 Місце змістової лінії в курсі стереометрії старшої школи

В викладанні стереометрії повинно бути широке застосування геометричних фігур,їх моделей і зображень. Учні повинні вміти:

1.1. Наводить приклади просторових геометричних фігур (плоских і неплоских) та основних многогранників.
1.2. Класифікує взаємне розміщення прямих і площин у просторі.
1.3. Застосовує метод слідів і проекцій для побудови перерізів та розв'язування задач.
1.4. Обґрунтовує взаємозв'язок паралельності й перпендикулярності прямих і площин у просторі
1.5. Формує означення двогранного кута, многограного кута.
1.6. Будує зображення многогранників та їх елементів, користуючись властивостями паралельного проектування.

1.7. Обґрунтовує властивості многогранників формули для обчислення площ бічної та повної поверхонь призми, піраміди, зрізаної призми.

1.4 Вимоги до математичної підготовки здобувачів середньої освіти

При вивченні стереометрії учні повинні вміти:

1) наводити приклади геометричних фігур
2) формулювати означення та властивоті стереометрії
3) доводити властивості та теореми
4) вміти будувати відрізки заданої довжини і кутів
5) встановлювати взаємне розміщення прямих і площин у просторі
6) Будувати зображення фігур у просторі і виконувати нескладні побудови
7) обчислювати кути та відстані у просторі

Перш за все учні повинні розуміти розміщення прямих і площин у просторі їхні відповідні кути і відстань, а вже поті обгрунтовувати свої просторові уявлення , опираючись на властивості, означення та теореми.

Методика викладання стереометрії в школі

Метою навчання стереометрії є вивчення властивостей геометричних фігур у просторі, просторовий розвиток, природне уявлення та мислення, підходи до навчання учнів обчислити важливі геометричні величини і розвиток логічного мислення.

Зміст шкільного курсу стереометрії протягом останніх років не зазнав істотних змін порівняно з традиційним.

Він має п'ять змістових ліній:

1) просторові геометричні фігури та їхні властивості;

2) геометричні побудови;

3) геометричні перетворення;

4) координати і вектори в просторі;

5) геометричні величини.

Отже, в курсі стереометрії надалі розвиваються основні змістові лінії планіметрії, тому йому властивий систематизувальний і узагальнювальний виклад, широке використання аналогій, спрямованість на закріплення й розвиток умінь і навичок, набутих в основній школі.

Структура викладання стереометрії має такі принципи:

- У курсі геометрії 5-6 класів ознайомлення учнів з основними поняттями геометрії простору, формули для обчислення площі та об’єму геометричного тіла.
- Матеріал стереометрії має поєднуватися з аналогічним планіметричним матеріалом; властивості плоских фігур потрібно показувати на відповідних елементах стереометричних фігур, певні властивості стереометрії;

Стереометричний матеріал, що вивчається у 7-9-х класах, за назвами дещо збігається із запропонованим у 5-6-х класах, проте зміст понять поступово наповнюється новими логіко-математичними властивостями, а сформовані образи перетворюються у математичні поняття, яким потім даються чіткі означення.

До завдань, що стосуються вивчення стереометричної частини курсу, належать такі: формування понять про певні класи многогранників, тіл обертання та вивчення деяких їх властивостей; формування вмінь застосовувати формули площ поверхонь та об'ємів тіл до розв'язування прикладних задач; формування конструктивних умінь учнів, їх графічної культури.

В шкільному курсі геометрії вивчаються наступні теми: «Вступ до стереометрії»; «Паралельність прямих і площин у просторі»; «Перпендикулярність прямих і площин у просторі»; «Координати, геометричні перетворення та вектори у просторі»; «Многогранники»; «Тіла обертання»; «Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл» “Паралельність прямих і площин у просторі”. У цій темі закладається фундамент для вивчення стереометрії. Особливу увагу потрібно приділити втіленню в життя спрямованості теми. Завдяки цій темі учні формують чітке уявлення про взаємовідношення геометричних об'єктів (прямих, площин)і відношень між ними з об'єктами навколишнього світу.

В 10 класі геометрія закінчується темою “Перпендикулярність прямих і площин у просторі”. Значної уваги приділяють у формуванні таких понять: загальне поняття відстані, поняття кута як міри розміщення прямих і площин та двогранного кута як геометричної фігури.

Розгляд теми “Координати і вектори” дозволять повторити навчальний матеріал з курсу стереометрії і узагальнення векторного і координатного методів у випадку простору.

У темі “ Геометричні тіла. Об'єми і площі поверхонь геометричних тіл” розглядаються основні види геометричних тіл та їх властивості. Вона є центральною темою у підготовці знань учнів з курсу стереометрії. При вивченні передбачається формування навичок конструювання і класифікації тіл та їх поверхонь.

Це важливо для формування просторових уявлень учнів та для розвитку думки почніть вводити поняття, аксіоми, теореми та багато задач стереометрії тестування моделі та візуальний малюнок. Модель та малюнок дозволяють учням виділити істотні властивості просторової структури та класифікувати сповіщення про необхідне спілкування та з'єднання графічні елементи, виконуючи аналітичний аналіз і на об'єктних доказах щоб вирішити проблему, підсумуйте докази, поширивши це твердження
для всіх чисел у даному розділі.

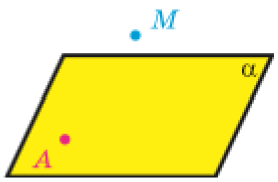
РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕРИЧНІ ФІГУРИ У ПРОСТОРІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

2.2 Вивчення провідних понять змістової лінії

Головними фігурами в просторі є точка, пряма і площина.

Якщо A — точка площини α , тоді а A лежить у площині α , а площина α проходить через точку A. Це записується так : $A \in \alpha$. Якщо точка M не належить площині α, то записують так: $M \notin \alpha$

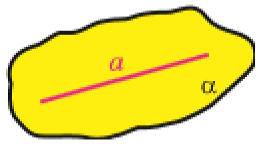
Рисунок



2.1

Якщо кожна точка прямої a належить площині α , то кажуть, що пряма a лежить у площині α , а площина α проходить через пряму a . Це можна позначати так: $a \subset \alpha$. Якщо пряма b не належить площині α , то це позначають так: $b \not\subset \alpha$.

Рисунок



2.2

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, то кажуть, що вони перетинаються в точці A , і записують так: $a \cap \alpha = A$. На відповідному рисунку частину прямої, яка «закрита» зображенням площини, вважають невидимою і зображають штриховою лінією.

Аксіома 1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

Аксіома 2. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Аксіома 3. Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

Аксіома 4. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку

Аксіома 5. Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.

Аксіома 6. Дві фігури називаються рівними, якщо існує відповідність між їх точками, при якій відстані між парами відповідних точок рівні.

Аксіома 7. Дві фігури називаються подібними, якщо існує відповідність між їх точками, при якій відстані між відповідними точками змінюються в одне і те саме число разів.

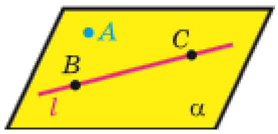
\

2.2 Вивчення теорем, правил, алгоритмів.

Теорема 1. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай точка A не лежить на прямій l. Виберемо на прямій l довільні точки $B\,i\,C$. Через точки $A, B, C,$ які не лежать на одній прямій l, за *аксіомою 2* проходить єдина площина α. За *аксіомою 3* пряма l лежить у площині α. Отже, площина α проходить через пряму l і точку A.

Рисунок

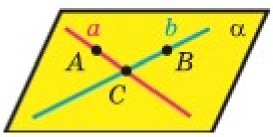


2.3

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через пряму l і точку $A,$ проходитиме також через точки A, B, C. За *аксіомою 2* вона повинна збігатися з площиною α .

Теорема 2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Рисунок



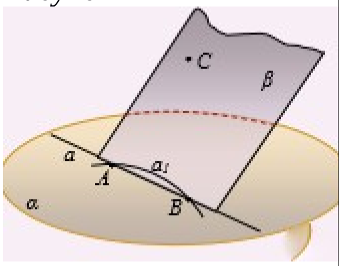
2.4

Доведення: Нехай прямі $a\,i\,b$ перетинаються в точці C . Виберемо на прямій a довільну точку A , а на прямій b — точку B , відмінні від точки C . Через точки $A, B, C,$ які не лежать на одній прямій, за *аксіомою 2* проходить єдина площина α. За *аксіомою 3* пряма a лежить у площині α і пряма b лежить у площині α. Отже, площина α проходить через прямі $a\,i\,b$.

Теорема 3. Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить цій площині.

Доведення. Нехай задано пряму a , площину a і точки A та B прямої a , які належать площині a . Виберемо точку C, що не належить прямій a . Через точку C і пряму a проведемо площину b. Якщо a і b збіжаться, то пряма a належить площині a.

Рисунок

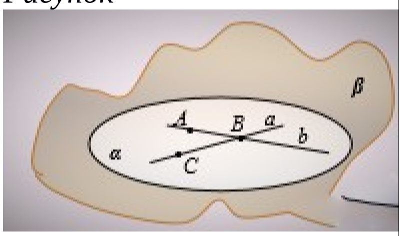


2 .5

Якщо ж площини a і b різні, але мають дві спільні точки A і B, то вони перетинаються по деякій прямій a_1 , що містить ці точки. Отже, через дві точки A і B проходять дві прямі a і a_1 , що суперечить аксіомі належності l_1 . Тому прямі a і a_1 – збігаються. Але оскільки a_1 належить a , то і пряма a теж належить a .

Теорема 4. Через три точки, що не належать прямій, можна провести площину і тільки одну.

Рисунок



2.6

Нехай A, B, C – задані точки. Проведемо через точки A і B пряму b , а через точки C і B – пряму a . Прямі a і b різні та мають спільну точку B. Через них можна провести площину a. Доведемо, що вона єдина, методом від супротивного.

Припустимо, що існує інша площина b, що містить точки A, B, C. Тоді, за *теоремою 3*, прямі $a i b$ належать площині $b.$ Отже, площини $a i b$ мають дві спільні прямі $a i b,$ які перетинаються, Отже, площина a – єдина.

2.3 Характеристика системи вправ

Для формування в учнів просторових уявлень використовують системи усних вправ. Вони сприяють введенню нових понять та закріплення матеріалу.
Основне місце треба віднести навчання зображувати фігури у просторі та виконувати побудови на зображеннях.

Вивчення геометричних фігур відбувається шляхом зведення складніших з них до простіших. Найпростішими геометричними фігурами вважаються точки, прямі і площини, основні властивості яких описуються аксіомами. Інші властивості цих найпростіших фігур доводяться на основі аксіом логічним шляхом.

Зміст шкільного курсу стереометрії згруповано в 4 основні смислові рядки:

1) розрахунки геометрії місця та його структур;
2) Геометричні перетворення;
3) координація та сектори у просторі;
4) геометричні значення.

У 5-6 класах вивчають із стереометрії (прямокутний паралелепіпед, куб) фігури та простіші їх властивості, геометричні величини (висота, довжина, градусна міра кута, площа, об'єм) та його вимірювальні тіла, побудова геометричних фігур (без урахування та посилання на аксіоми конструктивної геометрії) .

У 7-9 класах учні також вивчають форми в просторі - призму, піраміду, циліндр, грудочку, коло. Учень повинен створити опис геометричних фігур та їх об'єктів і бути незалежним від обчислення. Доведені раніше ксіоми та теореми можуть бути використані для доведення теорем.

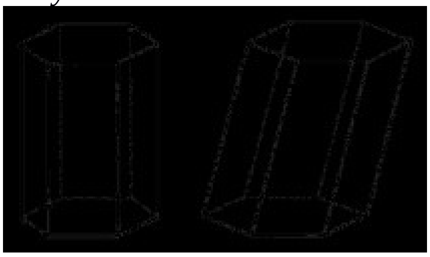
У 10-11 класах учні повині вміти вимірювати геометричні велечини у просторі які характерезують розміщення геометричних фігур (відстань, кути) та знаходити площю та об'єм. У період вивчення теми мають бути розглянуті різні методи обчислення об'ємів і площ геометричних фігур.

2.4 ВЛАСТИВОСТІ МНОГОГРАНИКІВ

Призма

При́зма — стереометрична , багатогранна фігура многогранник також його називають (призматоїд), у якого дві грані — рівні n -кутники, вони розташовані в паралельних площинах, а інші n граней — паралелограми. Ці паралелограми називають бічними гранями призми, а решта два n -кутники називаються її основами.

Рисунок



2.7

Визначає назву призми багатокутник, що лежить в основі,: трикутна призма,— трикутник чотирикутна — чотирикутник; п'ятикутник — п'ятикутна (пентапризма) і т. д.

Призма - це конкретна форма циліндра в загальному (а не круговому) значенні. Призма вважається прямою, якщо її краї круглі. Деякі призми нахилені. Кажуть, що призма є правильною, коли вона пряма, і її основи є правильними багатокутник.

Висота призми - відстань між площинами основи.

- Основами призми є ті самі багатокутники..
- Сторони призми однакові.
- Бічні ребра призми паралельні і рівні.
- Об'єм призми пропорційний добутку його висоти та площі основи:
- $V = S * h$

- Правильної призми об'єм з n -кутною основою дорівнює $V=\frac{n}{4}hs^2ctg\frac{\pi}{n}$
- (s - довжина сторони багатокутника).
- Площа повної поверхні призми дорівнює сумі площі її бічної поверхні і подвоєної площі основи.
- Площа бічної поверхні довільної призми, $S=P*l$ де P —периметр перпендикулярного перерізу, l — довжина бічного ребра.

•Площа бічної поверхні прямої призми $S=P*h$,

де P — периметр основи призми, h — висота призми.

•Площа бічної поверхні прямої призми з правильною n -кутною основою дорівнює

$$A=\frac{n}{2}s^2ctg\frac{\pi}{n}+nsh$$

•Перпендикулярний переріз перпендикулярний до всіх бічних ребер призми.

•Кути перпендикулярного перерізу — це лінійні кути двогранних кутів при відповідних бічних ребрах.

•Перпендикулярний переріз перпендикулярний до всіх бічних граней.

•Двоїстим багатогранником *прямої призми* є біпіраміда.

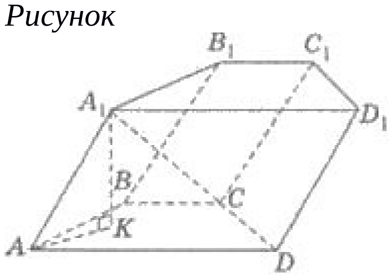
Площа бічної поверхні призми дорівнює $S=PH$, де P — периметр основи, H — висота.

Площа поверхні призми дорівнює $S=2S+PH$, де S — площа основи, h — висота,

P — периметр основи.

Площа поверхні правильної призми в основі якої є правильни n -кутник дорівнює: $A=\frac{n}{2}S^2ctg\frac{\pi}{n}+nSh$

Рисунок



2.8

Грані призми, які не є гранями основ називають бічними гранями призми, а сторони бічних граней, які належать основам - бічними ребрами призми. На малюнку 448 паралелограми AA1D1D, ABB1A1, BB1C1C і CC1D1D - бічні грані призми; відрізки AA1, BB1, CC1, DD1 - бічні ребра призми.

Очевидно: всі краї ребер призми однакові та однакові. Призма називається n-кут, коли вона заснована на n-куті.

На малюнку зображено чотирикутну призму.

Перпендикуляр, проведений з деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають висотою призми.

На малюнку : A1K - висота призми.

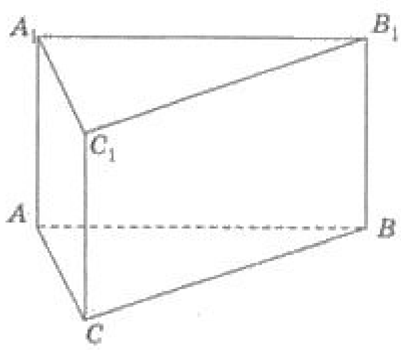
Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані, називають діагоналлю призми.

На малюнку : A1C - діагональ призми.

Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ, в протилежному випадку призму називають похилою.

На малюнку зображено похилу чотирикутну призму, а на малюнку - пряму трикутну призму.

Рисунок



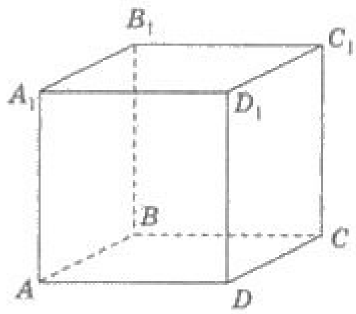
2.9

Зрозуміло, що бічні грані прямої призми - прямокутники, а висота прямої призми дорівнює її бічному ребру.

Пряму призму називають правильною, якщо її основою є правильний многокутник.

На малюнку 450 зображено правильну чотирикутну призму, її основа - квадрат ABCD. У правильній призмі всі бічні грані - рівні прямокутники.

Рисунок



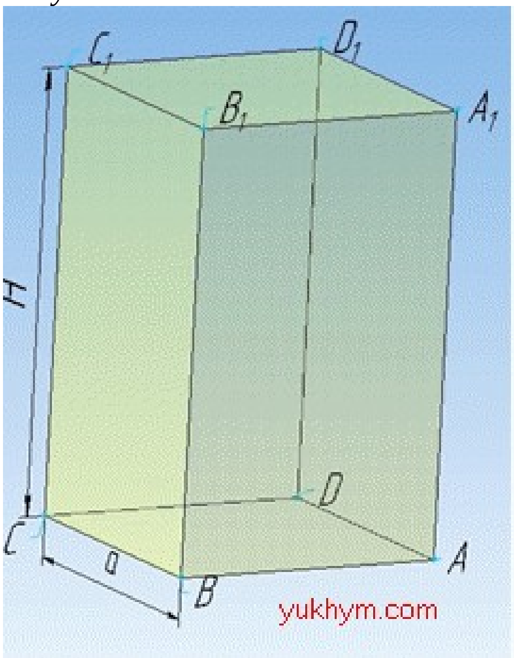
2.10

Приклади

Задача 1.

Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота –H.

Рисунок



2.11

Розв'язання:

Площя повної поверхні правильної призми:

$Sn = 2\,Soc + Sb$.

В основі правильної чотирикутної призми лежить квадрат зі стороною a.

Тому площа основи:

$Soc = a\,2,$

периметр основи:

$Poc = 4\,a$.

Площа бічної поверхні:

$Sb = Soc \cdot H = 4\,aH$.

Площа повної поверхні правильної чотирикутної призми:

Sn=2Soc+Sb=2a2+4aH=2a(a+2H).

Відповідь: $2\,a(a + 2\,H)$

Задача 2

В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою 20 см і катетом 16 см. Знайти довжину діагоналі грані призми, що містить менший катет трикутника, якщо висота призми дорівнює 5 см.

Розв'язання. 1) Нехай ABCA1B1C1 - трикутна призма, що задана в умові;C = 90°,

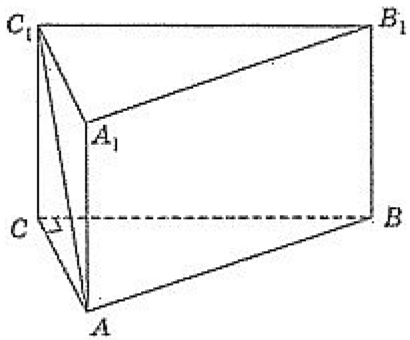
AB = 20 см; BC = 16 см; CC1 = 5 см.

2) В ΔABC: $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12\,(см)$

) Отже AC < BC, а тому необхідно знайти діагональ бічної грані, що містить AC, тобто довжину відрізка AC1.

4) В ΔACC1: $C_1A=\sqrt{AC^2-CC_1^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13\,(см)$

Рисунок



2.12

ПІРАМІДА

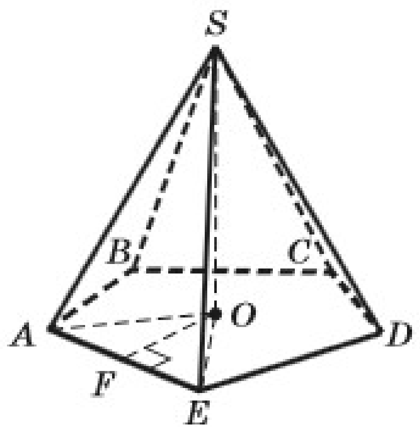
Піраміда — це плоский багатокутник який є основою піраміди , многогранник , точки, які не лежить у площині основи — вершинипі раміди і всіх відрізків, що з'єднують з вершинаною піраміди та точками . Відрізки, що з'єднуються з вершиною піраміди в базових точках, називаються ребрами .

Висота піраміди — перпендикуляр, який падає з вершини площини піраміди..

Піраміда називається $n-кутною$, коли її основою є n-кутник. Трикутна піраміда є тетраедром. Бічна грань піраміди — трикутник. Одною з трикутника вершин є вершина піраміди, а протилежна сторона — сторона основи піраміди. На малюнку SO — висота піраміди. Тоді $\angle OAS$ — кут між бічним ребром і площиною основи (SO — перпендикуляр, SA — похила, OA — проекція).

З основи висоти піраміди (точки O) проведено перпендикуляр на сторону основи (AE). Основу цього перпендикуляра (точку F) з'єднано з вершиною піраміди (точкою S). За теоремою про три перпендикуляри $SF \perp AE$. (SO — перпендикуляр, SP — похила, OF — проекція, $OF \perp AE$ за побудовою.) Отже, SFO — лінійний кут двогранного кута між площиною бічної грані ASE і площиною основи.

Рисунок



2.13

З основи висоти піраміди (точки O) проведемо перпендикуляр на сторону основи (наприклад AE). Основу цього перпендикуляра (точку F) з'єднаємо з вершиною піраміди (точкою S). За теоремою про три перпендикуляри $SF \perp AE$. (SO — перпендикуляр, SP — похила, OF — проекція, $OF \perp AE$ за побудовою.) Отже, SFO — лінійний кут двогранного кута між площиною бічної грані ASE і площиною основи.

Для розв'язування задач про піраміду важливо з'ясовувати, де розміщена основа її висоти.

1. Якщо виконується хоча б одна з таких умов:

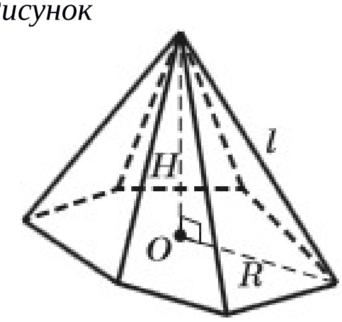
• усі бічні ребра піраміди рівні,

• усі бічні ребра нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом,

• усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди,

• усі бічні ребра рівновіддалені від основи висоти, — то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди. Бічне ребро l , висота H і радіус R описаного навколо основи кола утворюють прямокутний трикутник

Рисунок



2.14

У цьому випадку бічну поверхню можна знайти за формулою ,

$S_1 = \frac{1}{2} l^2 \ (\sin\alpha + \ldots + \sin\alpha_n)$ де l — довжина бічного ребра, $a_1, \ldots a_n$ — плоскі кути при вершині.

2. Якщо виконується хоча б одна з таких умов:

• всі бічні грані нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом,

• усі бічні грані мають однакові висоти,

• висоти бічних граней утворюють однакові кути з висотою піраміди

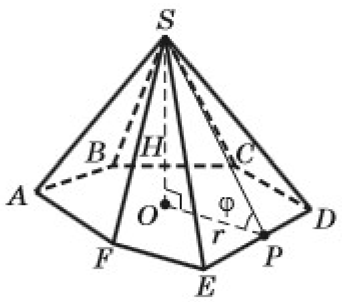
, • бічні грані рівновіддалені від основи висоти, — то основа висоти лежить у центрі кола, вписаного в основу піраміди. На рисунку OSP — прямокутний ($\angle SOP = 90°$) , $OP = r$ — радіус вписаного кола в $ABCDEF$;

$H = SO$ — висота піраміди, SP — висота бічної грані;

ϕ — лінійний кут двогранного кута між бічною гранню й площиною основи;

O — центр вписаного в основу кола, тобто точка перетину бісектрис $ABCDEF$

Рисунок

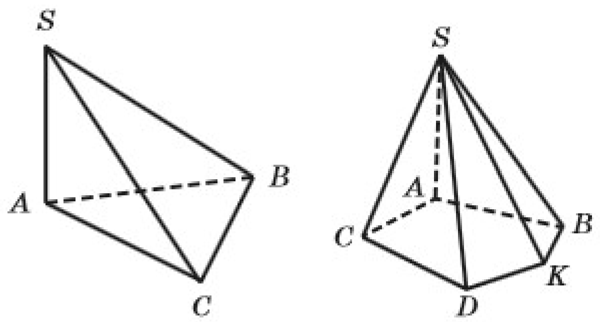


2.15

У цьому випадку $S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\phi}$

3. Якщо бічне ребро перпендикулярне до площини основи, то це ребро є висотою піраміди (див. рисунки).

Рисунок

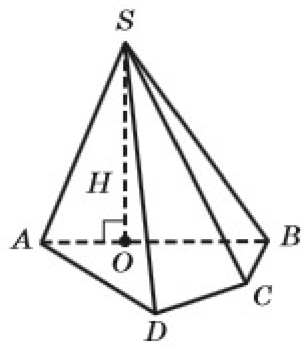


2.16

У цьому випадку $\angle SBA$ і $\angle SCA$ — кути нахилу бічних ребер SB і SC відповідно до площини основи. $\angle BAC$ є лінійним кутом двогранного кута між бічними гранями $SAC\ i\ SBA$.

4. Якщо бічна грань перпендикулярна до площини основи , то висотою піраміди буде висота цієї грані (за теоремою «Якщо пряма, яка лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину, то вона перпендикулярна до другої площини»).

Рисунок



2.17

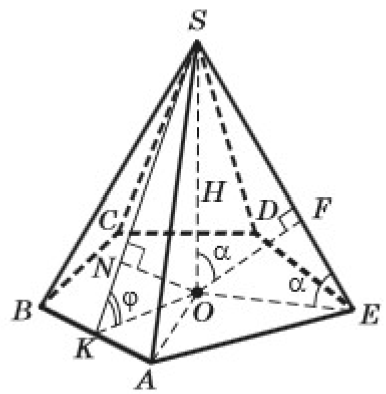
5. Якщо дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди є їх загальне бічне ребро: відстані від основи висоти піраміди

Відстань від основи висоти піраміди до бічного ребра — перпендикуляр, опущений із точки O на це ребро (див. рисунок). Зверніть увагу ($OF \perp SE$, але OFS на рисунку не повинен бути прямим кути при паралельному проектуванні не зберігаються).

OF — відстань від основи висоти до бічного ребра SE.

$OF = H\cos\alpha$, де α — кут між ребром SE і площиною основи.

Рисунок



2.18

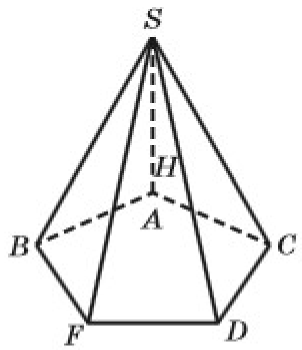
Нехай $OK \perp AB$, тоді $SK \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри. Отже, AB перпендикулярна до площини SOK. Звідси, якщо $ON \perp SK$, то ON перпендикулярна до площини ASB. ON — відстань від основи висоти до бічної грані ASB. $ON = H\cos\phi$. правильна піраміда

Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.

Віссю правильної піраміди називається пряма, яка містить її висоту. Бічні ребра правильної піраміди рівні, бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники. Висота бічної грані, проведена з вершини піраміди, називається апофемою. Вона є бісектрисою та медіаною бічної грані, оскільки та є рівнобедреним трикутником.

теорема. Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему. $S_б = \frac{Pl}{2}; S_б = \frac{a \cdot n \cdot l}{2}$

Рисунок



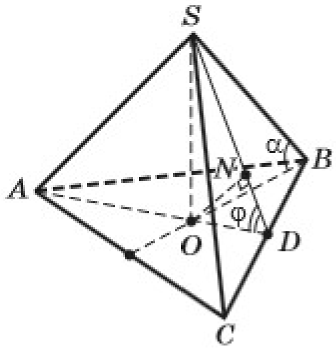
2.19

де P — периметр основи, a — сторона основи, l — довжина апофеми.

Правильна трикутна піраміда

В основі правильної трикутної піраміди лежить рівносторонній трикутник, який зображується довільним трикутником Центром ABC є точка перетину його бісектрис, котрі водночас є висотами і медіанами. Медіани при паралельному проектуванні зображуються медіанами. Тому будуємо дві медіани основи. Точка їх перетину — основа висоти піраміди. Зображуємо висоту, а потім з'єднуємо вершину піраміди з вершинами основи. Отримаємо бічні ребра.

Рисунок



2.20

На рисунку: $SBO = \alpha$ — кут нахилу бічного ребра до площини основи (однаковий для всіх ребер); $SDO = \phi$ — кут нахилу бічної грані до площини основи (однаковий для всіх граней).

Нехай $AB = BC = AC = a$.

$Тоді OB = R = \frac{a}{\sqrt{3}}; OD = r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; R = 2r;$ $SO = H; H = Rtg\,\alpha; H = rtg\,\phi$ Отже $tg\,\phi = 2\,tg\,\alpha$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\phi}$

Площина осьового перерізу ASD є площиною симетрії правильної трикутної піраміди. Ця площина перпендикулярна до площини основи і площини грані BSC . Цікаво також відмітити, що мимобіжні ребра піраміди $(SA\,i\,BC, SB\,i\,AC, SC\,i\,AB)$ є перпендикулярними. Якщо $ON \perp SD$, то ON є відстанню від основи висоти не тільки до апофеми, а й до бічної грані BSC . $ON = r\,sin\phi$.

Правильна чотирикутна піраміда

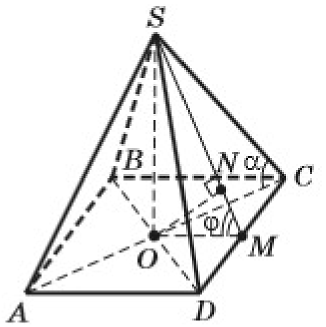
В основі правильної чотирикутної піраміди лежить квадрат, який зображується довільним паралелограмом. точка перетину діагоналей є центром.

Данна точка — це основа висоти піраміди.

Нехай сторона квадрата а (див. рисунок).

Тоді $OC = R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; OM = r = \frac{a}{2}$ $H = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha; H = \frac{a}{2} tg\phi; tg\phi = \sqrt{2} tg\alpha$

Рисунок



2.21

Зверніть увагу: $OM = r, OM \perp CD$, тобто $OM \parallel BC$.

При паралельному проектуванні паралельність зберігається

$$S_{осн} = a^2; S = \frac{a^2}{\cos\phi}$$

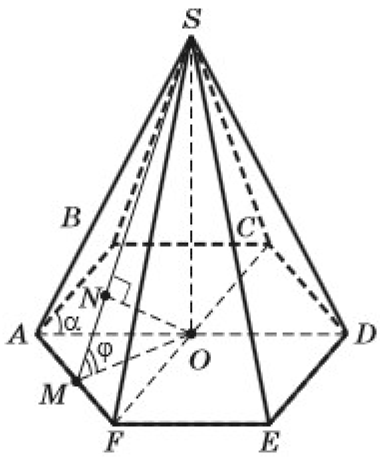
Відстань від основи висоти до бічної грані:

$$ON = r \cdot \sin\phi; ON = \frac{a \cdot \sin\phi}{2}$$

Правильна шестикутна піраміда

В основі правильної шестикутної піраміди лежить правильний шестикутник . Його центром є точка перетину діагоналей. Ця точка — основа висоти піраміди. Тоді $OD = R = a$;

Рисунок



2.22

Нехай сторона правильного шестикутника а.

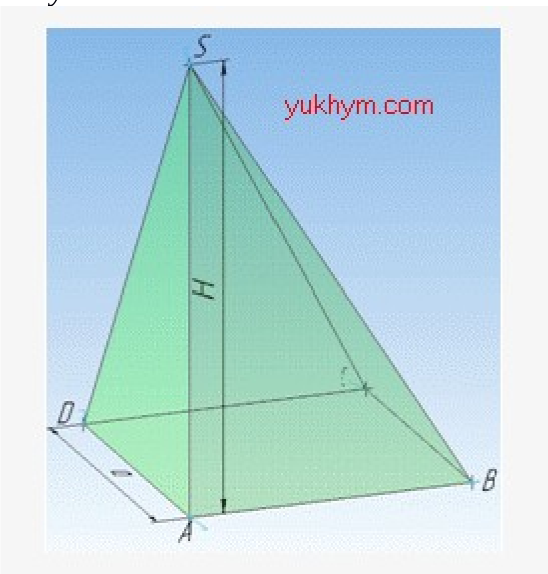
$$OM = r = \frac{a\sqrt{3}}{2}; H = SO = \frac{a\sqrt{3}}{2} tg\phi ; S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad H = SO = atg\alpha ; tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} tg\phi \; S_б = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\phi}$$

Приклади

Задача 1.

Основа піраміди – квадрат зі стороною а. Висота піраміди дорівнює H і проходить через одну з вершин основи. Визначити площу бічної поверхні піраміди.

Рисунок



2.23

Площа бічної поверхні піраміди $SABCD$ визначається як сума площ всіх її бічних граней (трикутників): $Sб = SSAD + SSAB + SSDC + SSBC$.

За умовою задачі, основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $AB = BC = CD = AD = a$, в висота проходить через вершину квадрата, тому $SA \perp (ABCD)$, тобто $SA \perp AD \, i \, SA \perp AB$, , звідси слідує, що трикутники $SAD \, i \, SAB$ – прямокутні.

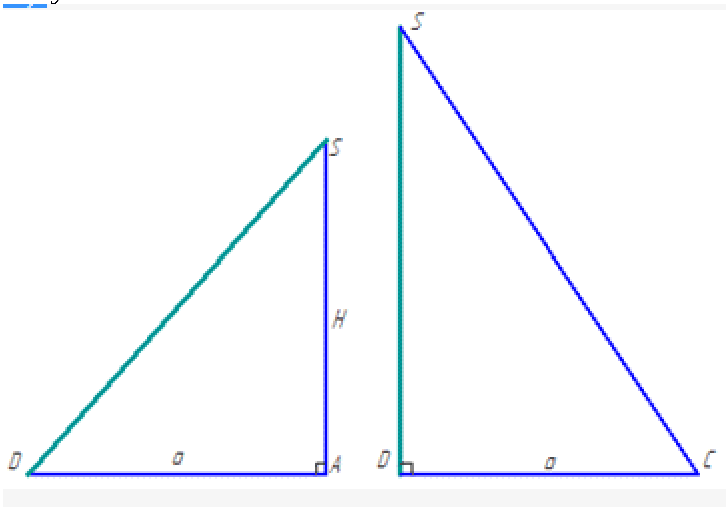
Розглянемо прямокутні трикутники $SAD(\angle SAD=90) \, i \, SAB(\angle SAB=90)$. В них $AD = AB = a \, i \, SA = H$ (як висота піраміди) – катети цих трикутників, тому $\Delta SAD = \Delta SAB$ (за двома катетами).

Довжини їх гіпотенуз обчислюємо за теоремою Піфагора:

Площа трикутників $SAD \, i \, SAB$:

$SSAD = SSAB = aH/2$ (півдобуток катетів).

Рисунок



2.24

Відрізок SA – перпендикуляр опущений на площину основи піраміди (квадрата ABCD), відрізок SD – похила, а відрізок AD – проекція похилої на площину основи.

Оскільки $AD \perp CD$, то за теоремою «про три перпендикуляри» (пряма, що перпендикулярна до проекції похилої, перпендикулярна і до самої похилої) маємо $SD \perp CD$, тому трикутник $\angle SDC$ – прямокутний.

Аналогічно встановлюємо, що трикутник SBC – прямокутний.

Розглянемо прямокутні трикутники $\angle DC\,(\Delta\, SDC = 90^o)\, i\, \Delta\, SBC\,(\angle SBC = 90^o)\, \Delta\, SDC$ $(SDC = 90)\, i\, SBC\,(SBC = 90)$.

В них $CD = BC = a$ і $SD = SB = \sqrt{a^2 + H^2}$ - катети цих трикутників, тому $\Delta SDC = \Delta SBC$ (за двома катетами).

Їх площа:

$$S_{SDC} = S_{SBC} = \frac{a\sqrt{a^2 + H^2}}{2}$$

Площу бічної поверхні піраміди SABCD знаходимо через суму подвійних добутків площ відповідних граней:

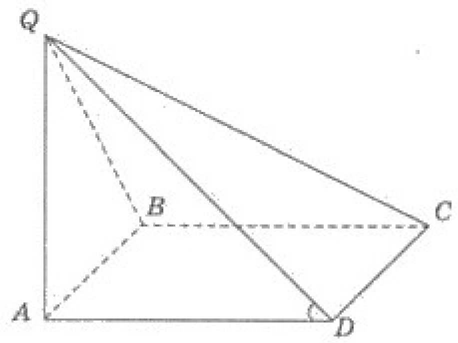
$$SAD+S_{SAB}+S_{SDC}+S_{SBC}=2S_{SAD}+2S_{SDC}=aH+a\sqrt{a^2+H^2}=a\left(H+\sqrt{a^2+H^2}\right)$$

Відповідь: $a(H+\sqrt{a^2+H^2})$

Задача 2.

В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 30º. Знайти об’єм піраміди, якщо середнє за величиною бічне ребро піраміди дорівнює 4 см.

Рисунок



2.25

Розв’язання.

1) Нехай $QABCD$ - задана в умові піраміда; $ABCD$ - квадрат; бічні грані $QAD\,i\,QAB$ перпендикулярні площині основи .

2) Оскільки бічні грані $QAD\,i\,QAB$ перпендикулярні площині основи, то бічне ребро по якому перетинаються ці грані, також перпендикулярне до основи. Тому $QA=h$ - висота піраміди.

3) $AD \perp DC$ тому за теоремою про три перпендикуляри $QD \perp DC$.

А отже $QAD \perp DC$ Тому QDA - кут, що утворює бічна грань QDC із площиною основи. $\angle QDA$ = 30° (за умовою).

4) Оскільки ΔQAD - прямокутний ($\angle A = 90°$), то $QD > QA$. ΔQDC — прямокутний ($\angle QDC = 90°$), тому $QD < QC$. Враховуючи також $QD = QB$ (з рівності трикутників $QAD\, i\, QAB$) матимемо, що саме QD - середнє за величиною бічне ребро. За умовою $QD = 4\ см$.

5) В $\Delta QAO : QA = 4/2 = 2(см)$, використовуючи властивість катета,що лежить проти кута 30°.

$$AD = \sqrt{QD^2 - QA^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

6) Площа основи

7) Об’єм піраміди

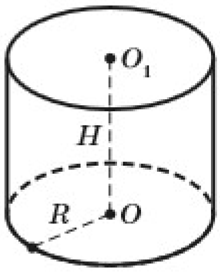
2.5 ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Циліндр

Сферичний циліндр - це тіло, що складається з двох кіл, які не знаходяться в одній площині і з'єднуються паралельною передачею і фазами, що з'єднують відповідні точки кола.

Кола називають основами циліндрів, а частини, які з'єднують точки кола з колами, називають генераторами циліндрів.

Рисунок



2.25

Основи циліндра однакові і лежать в одній площині. Циліндри, що генерують, однакові і мають однаковий розмір. Площа поверхні циліндра містить виробників, верхню частину підстав та ширину корпусу.
Радіус циліндра є базовим містом.

Висота циліндра - відстань між площинами основи. Вісь циліндра - це лінія, що проходить через центр основи. Вісь циліндра така ж, як і у генератора.

Циліндр вважається простим, коли виробники примушували до базових літаків. Вертикальний циліндр (у даному випадку називається лише циліндр) виходить обертанням прямокутника у вигляді осі навколо сторони. У вертикальному циліндрі висота така ж, як і у генератора. Перетин площини, перпендикулярної осі циліндра, є прямокутником.

Дві його сторони є виробником циліндрів, а дві інші - однакові та однакові розетки.

Осьова фаза - площина площини, яка проходить через отвір циліндра.

Площина, паралельна осі циліндра, повернена до площини її основ

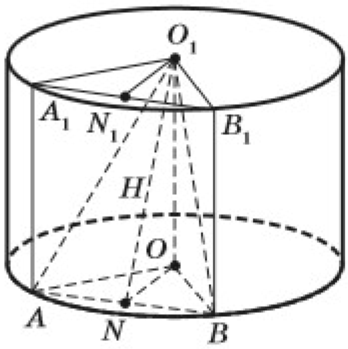


Рисунок 2.26

Відстанню від осі циліндра до площини перерізу, якщо ця площина паралельна осі циліндра, є перпендикуляр, проведений з точки $O1$, до хорди A_1B_1 (або з O до AB). Зверніть увагу: відрізок O_1N_1 є висотою, тобто бісектрисою й медіаною в рівнобедреному трикутнику $A_1O_1B_1$*,де з O до AB* (радіус циліндра).

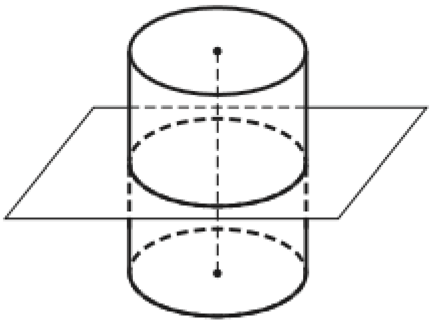
Хорду AB видно з центра нижньої основи під кутом AOB , а з центра верхньої основи — під кутом AO_1B. . Відрізок O_1N є бісектрисою, медіаною, висотою рівнобедренного AO_1B.,

а AOB є ортогональною проекцією AO_1B. на площу нижньої основи. Отже,

$$S_{\triangle AO_1B} = \frac{S_{\triangle AOB}}{\cos\angle O_1NO}.$$

Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи

Рисунок



2.27

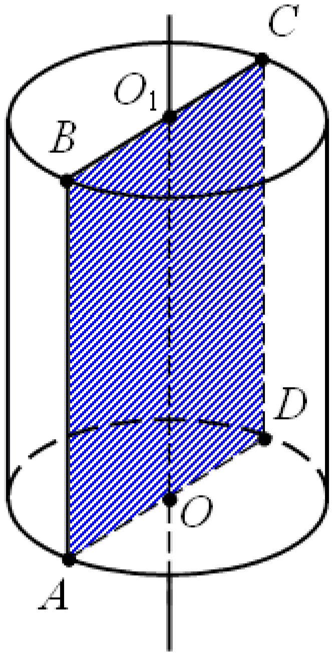
Приклади

Задача 1.

Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу які 4. Знайти кут між діагоналями осьового перерізу.

Розв'язання.

Рисунок



2.28

Розглянемо осьовий переріз $ABCD$. Твірна циліндра AB дорівнює його висоті, а відрізок AD є діаметром циліндра, тоді площа перерізу буде

В основі циліндра лежить круг, площа якого дорівнює За умовою задачі можна записати співвідношення

Бачимо, що висота циліндра дорівнює діаметру, тобто $ABCD$ - квадрат. Як відомо, діагоналі квадрата перетинаються під прямим кутом.

Відповідь: 90°.

Задача2.

В циліндрі радіуса R і висоти H проведено переріз, паралельний осі циліндра. На якій відстані від осі знаходиться площина перерізу, якщо його площа дорівнює S?

Розв'язання

Відомо, що переріз циліндра площиною, яка паралельна осі циліндра, є прямокутник. Розглянемо прямокутник $ABCD$

Його площа S, $CD = H$,тоді.

Опустимо з точки O - центра основи циліндра перпендикуляр на відрізок AD. Оскільки вісь паралельна перерізу, то OK - відстань від осі до перерізу. $AK = KD$.

:

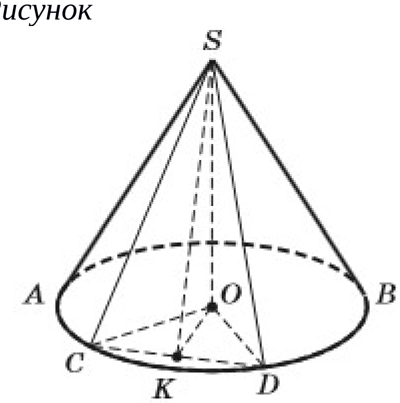
КОНУС

Круговий конус - це тіло, яке утворює коло - основу конуса, помилкову точку в площині кола - верх конуса, і всі частини, які з'єднують верхню частину конуса з базовими точками. Компоненти, що з'єднують вершину пучка до точок сферичного кола, називаються генераторами конуса.

Конусом називають пряму (далі конус), якщо лінія, що з'єднує вершини конуса до центру основи, знаходиться нижче основної площини. Вертикальним круговим конусом вважається тіло, утворене обертанням трикутного трикутника навколо його ніг у вигляді осі.

Висота грудочки напівпрозора, опущена зверху вниз до основної площини. Вісь прямого кругового конуса - це лінія, що містить його висоту.

Рисунок



2.29

Розглянемо переріз CSD. Він перетинає основу конуса по хорді CD. Хорду CD видно з центра основи під кутом COD, а з вершини конуса — під кутом CSD.

Сам переріз — рівнобедрений CSD з основою CD, де $SC=SD$ — твірні конуса. Його ортогональною проекцією на площину основи конуса є рівнобедрений COD з основою CD і $OC=OD=R$. Відрізок OK є бісектрисою, медіаною, висотою COD, відстанню від точки O до хорди CD. Відрізок SK є бісектрисою, медіаною, висотою CSD та відстанню від вершини конуса S до хорди CD . $\angle SKO$ є лінійним ку- том двогранного кута між площиною перерізу й площиною основи.

Отже, $S_{\triangle CSD} = \frac{S_{\triangle COD}}{\cos \angle SKO}$, $\angle SCO = \angle SDO$

— кути нахилу твірної конуса до його основи. Площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою $S_б = \frac{S_{осн}}{\cos \varphi}$, де $S_{осн}$ - площа основи, ϕ — кут нахилу твірної конуса до його основи.

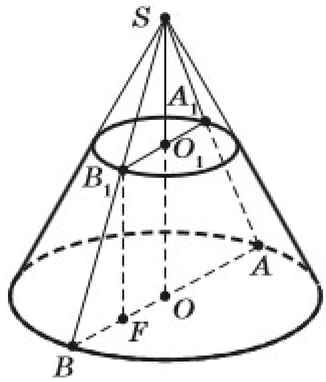
зрізаний конус

Він перетинає конус у площині площини, паралельної нижній стороні конуса, а також на задньому плані - вогнище конуса. Ця площина влітає малий конус у конус.Частина, що залишилась, називається зрізаним конусом (див. рисунок):

$\triangle A_1SO_1 \sim \triangle ASO;$

$\frac{A_1S}{AS} = \frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1O_1}{AO} = \frac{R_1}{R}.$

Рисунок



2.30

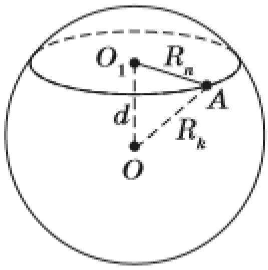
Зверніть увагу на осьовий переріз зрізаного конуса . Це рівнобічна трапеція, у якої основи — діаметри основ зрізаного конуса, бічні сторони — твірні, висота — висота зрізаного конуса.

$S_б = \pi (R + R_1) l$ — формула для обчислення бічної поверхні зрізаного конуса.

КУЛЯ

Куля - це тіло, яке містить всі точки простору не більше відстані від даної точки. Ця точка називається центром кулі, і ця відстань — радіусом кулі. Межу простору називають простором поверхні чи сфера . Відрізок, що з'єднує дві точки поверхні кулі й проходить через центр кулі, називається діаметром. Куля є тілом обертання, яке утворюється під час обертання півкруга навколо його діаметра як осі. Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центр кулі є основа перпендикуляра, опу- щеного з центра кулі на січну площину.

Рисунок



1

На рисунку в $\triangle OO_1A$ $\angle OO_1A = 90^\circ$, OA — радіус кулі, O_1A — радіус перерізу, OO_1 — відстань від центра кулі до площини перерізу (d).

$$R_k^2 = R_n^2 + d^2.$$

Площина, , який проходить через центр простору, називається круглою площиною . Поперечний переріз площини з просторовою шириною називається сферою коло і перетин - велике коло або екватор. Або площина діаметра простору у площина симетрії. Центром галузі є її центр синхронізувати Точка прольоту польоту А кругової області, а саме: називається дотичною в радіусі, випромінюваної в точці А. . Точку А називають точкою дотику. . Дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку — точку дотику.

.Лінія, що проходить через контактну область дотичної у сфері, в цій точці називається дотичною у сфері.

Вона має з кулею тільки одну спільну точку. Лінією перетину двох сфер є коло. Площа сфери радіуса R обчислюється за формулою .

$S = 4\pi R^2$.

Кульовим сегментом називається частина кулі, яку відтинає від неї січна площина.

Якщо куля вписана в призму, то в її перпендикулярний переріз можна вписати коло.

Висота призми дорівнює діаметру кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, тобто діаметру вписаної кулі.

Центр кулі — середина висоти призми, що проходить через центр кола, яке вписане в перпендикулярний переріз.

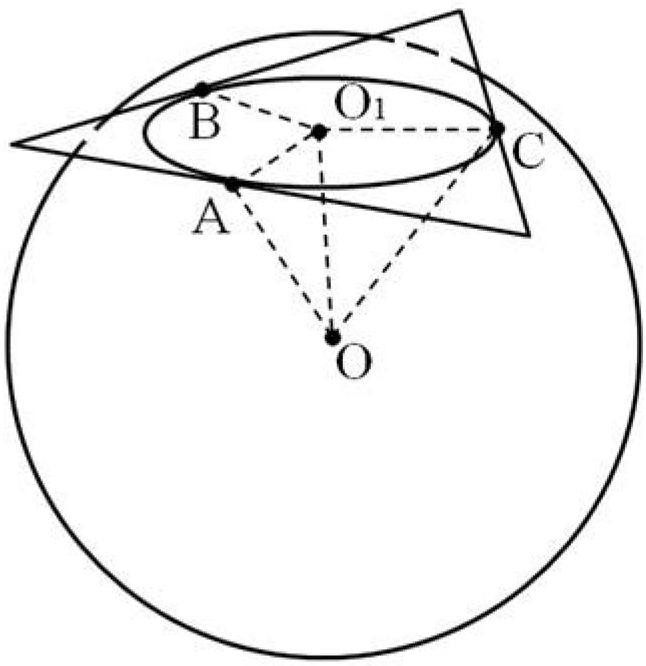
Центр кулі, яка вписана в пряму призму, — це середина висоти призми, що проходить через центр кола, яке вписане в основу призми.

Приклад

Задача

Сторони трикутника 13 см,14см,15 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається усіх сторін трикутника. Радіус кулі 5 см.

Рисунок



2

Розв'язання

Нехай трикутник дотикається кулі у точках A, B, C, тобто ці точки одночасно належать сторонам даного трикутника та сфері. Тоді відрізки OA, OB, OC - радіуси кулі

$$OA = OB = OC = 5 \text{ см}.$$

Опустимо з точки O – центра кулі, перпендикуляр OO_1 в площину трикутника. Трикутники

OAO_1, OCO_1, OBO_1 рівні за катетами і гіпотенузою, тому $BO_1 = AO_1 = CO_1$.

З останньої рівності отримуємо, що точка O_1 рівновіддалена від сторін трикутника, що свідчить про те, що ця точка є центром кола, вписаного в даний трикутник.

Обчислимо довжину радіуса кола (r), вписаного в трикутник, скориставшись формулою

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Обчислимо площу трикутника за формулою Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84(см^2),$$

$$r = AO_1 = \frac{2 \cdot 84}{13+14+15} = 4(см^2).$$

З прямокутного трикутника OAO_1 знайдемо шукану відстань $OO_1 = 3 см$.

Відповідь: 3см.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі (проекту) представлено теоретичне узагальнення й розв'язування питань, пов'язаних з вивчення однієї з провідних змістових ліній геометрії простору. Виконання завдань роботи дозволяють сформулювати наступні висновки:

1. Аналіз зарубіжної і вітчизняної психолого-педагогічної, методичної літератури, практичної діяльності загальноосвітніх навчальних закладів в сфері математичної освіти засвідчив актуальність проблеми дослідження, уточнити предмет, об'єкт і мету дослідження, чітко сформулювати його завдання і зазначити шляхи їх реалізації.
2. Уточнено поняття змістової лінії шкільного курсу математики, яке ми трактуємо як один або кілька параграфів, одну або кілька тем, один або кілька розділів,тісно пов'язаних між з точки зору: вивчення відображених в них фундаментальних математичних ідей (множини, відношення, математичної структури алгебрагічної операції тощо); наукового аналізу понять функції, величини, числа, фігури, алгоритма; вивчення мови шкільної математики ; аналіза логічних основ шкільного курсу математики.
3. Отримані у дослідженні результати засвідчили, що вивчення геометричних просторових фігур та їх властивостей матиме вигляд цілісної системи за умови розгляду таких аспектів:

8) Мета і завдання змістової лінії

9) Місце змістової лінії в шкільному курсі стереометрії.

10) Вимоги до математичної підготовки здобувачів середньої освіти.

11) Особливості викладу у шкільних підручниках і посібниках із стереометрії.

12) Використання провідних понять змістової лінії.

13) Вивчення теорем, правил, алгоритмів.

14) Особливості системи задач змістової лінії.

15) Контроль, оцінка і корекція процесу і результатів діяльності здобувачів під час вивчення змістової лінії.

16) Можливості змістової лінії щодо розвитку у здобувачів освіти мислення, уваги, пам'яті, потрібносно- мотиваційної сфери.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. А.В. Прус «Про прикладну спрямованість шкільного курсу стереометрії»
2. Александров А. Д. О геометрии / А. Д. Александров // Математика в шк. – 1980. – № 3. – С. 56-57
3. Апостолова Г. В. Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, профіл. рівень / Г. В. Апостолова; упорядкув. завдвань : Л. В. Ліпчевського та ін. – К. : Генеза, 2011. – 304 с.
4. Балл Г. А. Теория учебных задач : Психолого-педагогический аспект. / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 184 с
5. Бевз Г. П. Математика : 10 : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – 2-ге вид. – К. : Генеза, 2011. – 272 с.
6. . Бевз Г. П. Математика : 11 : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2011. – 320 с.;
7. Геометрія : дворівн. підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. за кладів : академ. і профільн. рівні / Є. П. Нелін. — Х. : Гімназія, 2010.— 240 с. : іл.
8. Геометрія: Підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак-ЕКО;
9. Геометрія: підручник для 9 кл. загальноосвітніх навч. закл./ А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. – Харків: «Ранок»;
10. Геометрія: підручник для 9 кл. загальноосвітніх навч. закл./ Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір – «Гімназія»
11. Геометрія: під руч. для 10 кл. закл. загальн. середн. освіти (про фільний рівень) / О. Я. Біляніна, Г. І. Білянін, В. О. Швець. — К. : Грамо та, 2018.
12. Геометрія. Основи стереометрії : Дворівневий підручник для профільного навчання математики у загальноосвітніх навчальних закладах, у 10-му класі./ В.О. Тадеєв

13.Геометрія. Підруч. Для 9 кл. загальноосвітньогоь навчального закладу / М.І. Бурда, Н.А.Тарасенкова

14.Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : профіл. рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К. : Генеза, 2010. – 232 с

15. Геометрія : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова. – К. : Зодіак-ЕКО, 2010. – 288 с.

16.Гальперин П.Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка. – М.: Изд. Московского ун-та, 1985.т

17.Збірник навчально-методичних задач з методики навчання геометрії : навчально-методичний посібник / О. І. Матяш, А. Л. Воєвода, Л. Ф. Михайленко, Л. Й. Наконечна. – Вінниця : ФОП «Легкун В. М.», 2012. – 393

18.Ігнатенко М.Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики : дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02. «Теорія та методика навчання математики» / М. Я. Ігнатенко– К. : - 1997. – 335 с.

19.Колягин Ю. М. Задачи в обучении математики. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Часть 1 / Ю. М. Колягин.— М.: Просвещение, 1977. —111 с.

20. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математики. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Часть 2 / Ю. М. Колягин.— М.: Просвещение, 1977. —144 с.

21.. Корнієнко Т. Л. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Розробки уроків / Т. Л. Корнієнко, В. І. Фіготіна.- Х. : Видавництво «Ранок», 2012. - 368 с.

26. Кулюткин Ю. Н. Эвристические методы в структуре решений. / Ю. Н. Кулюткин. – М. :Педагогика, 1970. – 232 с.

22. Ленчук В.І. Основи геометричних побудов. / В. І. Ленчук, І. Г. Ленчук. – Житомир: Олеся, 1994. – 224 с.

23.Мала Л. О. Психолого-педагогічні особливості організації мислення учнів у процесі розв'язування стереометричних задач / Л. О. Мала. // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – 2016. – № 17. – С. 80 – 87.

24. Математика. 11 клас : Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, О. Л. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.

25. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методики : Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М. Колягин, В. А. Оганесян, В. Я. Саннинский, Г. Л. Луканкин. – М. : Просвещение, 1975. – 462 с.

26.Навчально- практичний довідник / М.Я. Забєлишинська.

27. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10 – 11 кл. серед. шк. / О. В. Погорєлов. – К. : Освіта, 2001. – 128 с.

28. Синько Л. С. Розв'язування стереометричних задач. Посібник для учителя. / Л. С. Синько – Суми, 2011. – 190с.

29. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

30.. Стереометрія у старшій школі : посібник для вчителя. / Я. С. Бродський, В. Ю. Гречук, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2005. – 404 с.

31. Швець В.О., Снігур Т.О./ Поняття просторового геометричного тіла в шкільному курсі стереометрії

32. Якиманская И.С. Розвитие пространственного мышления школьников. – М.:Педагогіка, 1980.