

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики  
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

**ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЕВКЛІДОВОЇ ПЛОЩИНИ**  
**ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

**Кваліфікаційна робота (проект)**  
на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконав: студентка 221М групи  
Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)  
Освітньо-професійної (наукової) програми другого  
(магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю  
014.04 Середня освіта (математика) галузі знань 01  
Освіта / Педагогіка  
кваліфікація: викладач математики  
Кириленко Аліна Леонідівна

Керівник кандидат педагогічних наук, ст. викладач  
Григор'єва В.Б.  
Рецензент доктор фізико-математичних наук,  
професор  
Львов М.С.

Херсон – 2020

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	4
<b>Розділ 1. Загальні питання теорії геометричних перетворень</b>	
1.1. Історичний огляд проблеми дослідження .....	7
1.2. Відображення та перетворення .....	9
1.3. Приклади перетворення площини.....	13
1.4. Відшукання образу фігури при заданому перетворенні.....	17
1.5. Композиція відображення.....	22
1.6. Обернене перетворення.....	27
1.7. Інваріантні точки та інваріантні прямі.....	29
<b>Розділ 2. Рух площини</b>	
2.1. Рух площини та їх властивості.....	34
2.2. Рух першого і другого роду.....	43
<b>Розділ 3. Перетворення подібності</b>	
3.1. Гомотетія.....	51
3.2. Перетворення подібності.....	54
3.3. Аналітичний вираз перетворення подібності.....	57
3.4. Класифікація перетворень подібності.....	60
<b>Висновки</b> .....	64
<b>Список використаних джерел</b> .....	66
<b>Додатки</b>	
Додаток А.....	70

Додаток Б.....	74
Додаток В.....	97
Додаток Г.....	99
Додаток Д.....	115

## ВСТУП

*Актуальність проблеми дослідження.* В ряді навчальних дисциплін, що складають в сукупності шкільний курс математики (алгебра та початки аналізу, геометрія, тригонометрія), геометрія грає особливо важливу роль. Ця роль визначається і відносною складністю геометрії у порівнянні з іншими предметами математичного циклу, і видатним значенням цього предмету для підвищення загальної математичної культури учнів, і великим значенням геометрії для вивчення оточуючої нас дійсності. Геометрія вивчає властивості форм навколишнього дійсного світу. Вона, як і будь-яка інша наука, що вивчається в школі, дає необхідні в житті корисні відомості та навички. Проте цим не вичерпується її значення. Геометрія повинна також знайомити учнів з деякими загальними ідеями, які можуть наблизити їх до розуміння найбільш важливих питань сучасної науки.

Однією з таких ідей є ідея перетворення. Ідея перетворень є однією з провідних у сучасній математичній науці і в різних галузях її застосувань. Вона тісно пов'язана з ідеями відображень, які широко використовуються в практиці (архітектура, геодезія тощо) та функцій, оскільки функціональна залежність встановлює співвідношення між числовими значеннями величин, а геометричні перетворення дозволяють знайти зв'язок між різними геометричними фігурами. Можна сказати, що це буде та ж функціональна залежність, але виражена інакше, за допомогою геометричної мови.

В середині XIX ст. геометрія досягла значного розквіту. Був нагромаджений об'ємний фактичний матеріал. На зміну єдиній аналітичній геометрії прийшли різні «геометрії», які значною мірою розвивалися незалежно одна від одної. Гостро стало питання про встановлення зв'язку та спорідненості між ними. З'явилася настійна необхідність виробити загальну точку зору на геометричний простір, знайти критерії, за якими можна було б встановити, що є предметом вивчення тієї чи іншої геометрії, навести

порядок у величезному зібранні накопичених знань. Сприяли вирішенню цих проблем дослідження з проєктивної геометрії, присвячені аналізу поведінки фігур при різних перетвореннях, які поступово перейшли до вивчення самих перетворень та їх класифікацій. Вагомий внесок у розвиток цих ідей зробили німецький математик А.Мебіус (1790 – 1868) і англійський А.Келі (1821 – 1895) [15]. Заключним етапом на цьому шляху стала Ерлагенська програма (1872) німецького математика Фелікса Клейна (1849 – 1925) [16]. Ним були зроблені перші зусилля з використання геометрії перетворень як основи геометрії. Майже протягом сторіччя такий підхід був відомий лише серед математиків. У ХХ столітті були спроби використати його для розвитку математичної освіти.

Перетворення площини та метод подібності широко використовуються в курсі планіметрії при введенні нових понять, доведень теорем, розв'язуванні задач на побудову тощо. Серед перетворень особливе місце займають центральна та осьова симетрії. За допомогою центральної симетрії вивчається теорія паралельних, а за допомогою осової симетрії вводиться поняття перпендикулярності прямих на площині. Також залишаються вони і міцним засобом для вивчення багатьох питань стереометрії, головним чином, при розв'язуванні задач. Теорія подібності, зокрема, гомотетія, відіграє особливо важливу роль в навчанні учнів розв'язуванню геометричних задач. Саме цією актуальністю даного питання обумовлено вибір теми роботи та визначений її практичний напрямок.

Основна *мета* дослідження – розкрити питання про можливість застосування перетворень площини до розв'язування різноманітних задач та доведення тверджень.

*Предметом* дослідження виступають перетворення площини, а *об'єктом* дослідження – безпосередньо рухи та перетворення подібності площини.

Виходячи з мети дослідження, визначені його основні *завдання*, а саме:

- розглянути основні положення теорії перетворень площини;

- визначити основні властивості рухів площини та їх аналітичний вираз з метою розкриття питання застосування до розв'язування задач;
- розглянути основні властивості перетворень подібності площини та їх аналітичний вираз з метою розкриття питання застосування до розв'язування задач.

Основні *методи дослідження*, що використовувалися у роботі, – це методи відображення площини, композиція перетворень площини.

*Теоретичне значення* роботи полягає у систематизації основних теоретичних положень теорії перетворень площини. *Практичне значення* роботи полягає у розкритті можливості застосування геометричних перетворень площини до розв'язування задач та доведення тверджень.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету

В структурі роботи виділено три основні розділи. В першому розділі наведено деякі теоретичні положення, що стосуються властивостей відображень площини. В другому розділі наведено основні положення, які стосуються поняття рухів площини, наведено приклади рухів площини та визначено аналітичну характеристику рухів. В третьому розділі наведено основні положення, які стосуються поняття перетворення подібності площини, наведено приклади перетворень подібності площини та визначено їх аналітичну характеристику.

В додатках до роботи розкрито питання застосування рухів площини та перетворень подібності до розв'язування різноманітних задач.

Матеріал роботи може бути використаний вчителями загальноосвітніх шкіл, а також викладаючі та студентами вищих навчальних закладів.

# РОЗДІЛ 1

## ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

### 1.1. Історичний огляд проблеми дослідження

Відомо, що загальна схема побудови курсу елементарної геометрії взята у давньогрецьких вчених; видатну роль тут зіграли “Начала” Евкліда (II ст. до н.е.) [14]. Для свого часу “Начала” були безсумнівно видатним витвором; високі наукові та методичні переваги зробили цю книгу основним підручником, за яким буквально на протязі тисячоліть вивчали геометрію багато поколінь учнів.

У своїй побудові курсу геометрії Евклід безпосередньо виходив із загальних принципів дедуктивної побудови науки, викладених Аристотелем, – і на протязі багатьох століть геометрія вважалася тією наукою, в якій принципи логіки Аристотеля знаходять найбільш повне втілення. Проте наприкінці XIX ст. у зв’язку з розвитком аксіоматичних досліджень було виявлено, що загальна схема дедуктивної побудови науки не була продумана Аристотелем до кінця і що “Начала” Евкліда як кінцеве втілення цієї загальної схеми потребують уточнень. Одночасно з цим математика кінця XIX – початку XX ст. розкрила, що загальна ідея аксіоматики може бути застосована не лише в геометрії, і що в ряді інших математичних дисциплін ця ідея може бути реалізована простіше і методично більш доступно, ніж в геометрії.

Інша сторона евклідових традицій полягає у нехтуванні рухами та геометричними перетвореннями взагалі. Евклід у своєму викладі спеціально прагнув обійтися без використання рухів, застосовуючи їх лише в тих випадках, коли не бачив іншої можливості (наприклад, при доведенні ознак рівності трикутників); логічну завершеність ця лінія знаходить в аксіоматиці Гільберта, з якої повністю виключено поняття руху [11].

Розвиток математики, зокрема, геометрії в XIX ст. довів хибність прагнення виключити з геометрії поняття перетворення; навпаки, стало зрозумілим, що це поняття є одним з самих центральних. Прогрес геометрії в цьому столітті був у значній мірі пов'язаний з широким використанням нових типів перетворень, в першу чергу проєктивних (Понселе, Мьобіус, Штейнер, Штаудт, Дарбу та ін.) [3, 4]. Велике значення відіграло встановлення Клейном та Пуанкаре зв'язку цих перетворень з неевклідовою геометрією Лобачевського [19]; це сприяло виникненню нового, більш широкого погляду на неевклідову геометрію і навіть на класичну геометрію Евкліда (Келі, Клейн). Певну завершеність нові точки зору знайшли в Ерлангенській програмі Ф.Клейна (1872 р.), яка вказувала на новий, досить загальний погляд на геометрію. При цьому виявилось, що вчення про геометричні перетворення тісно пов'язано також з деякими алгебраїчними концепціями (поняття групи), що відіграють в сучасній математиці основну роль. Значний вплив здійснило теоретико-множинне обґрунтування геометрії і на аксіоматичні дослідження (аксіоматика Шура евклідової геометрії, в якій основну роль відіграє група рухів).

Кінець XIX і початок XX ст. характеризуються подальшим розширенням списку цікавих для геометрії груп перетворень; на перше місце тут слід поставити топологічні перетворення (загальні взаємно однозначні та взаємно неперервні перетворення), подальше вивчення яких сприяло значному зближенню геометрії та аналізу. З іншого боку, в цей же час стала зрозумілою основна роль у всій математиці загального поняття функції або відображення, що досить близьке поняттю геометричного перетворення (значну роль у зближенні цих понять зіграло геометричне трактування Риманом теорії функцій комплексної змінної) [15]. Нарешті, теоретико-групова точка зору на геометрію значно стимулююче вплинула на вивчення геометрій, в основу яких покладено не поняття точки, а будь-яке інше геометричне перетворення (лінійчата геометрія, геометрія кіл та сфер тощо); при цьому виникла необхідність у розгляді нових цікавих перетворень.



Таким чином, у ХІХ ст. з'ясувалося, що поняття перетворення відіграє в геометрії основну роль; воно може бути покладено в основу означення самого предмету геометрії. Одночасно стало зрозумілим велике загальне математичне значення цього поняття, що тісно пов'язане з поняттям групи та функції, які в значній мірі визначають обличчя сучасної математики, а також велике місце його і в прикладеннях математики. Все це, звичайно, повинно було визначити певну перебудову викладання геометрії, в якому геометричні перетворення повинні зайняти місце, що відповідає їх науковому значенню; подібна перебудова диктується і чисто методичними міркуваннями (доведення геометричних теорем, пов'язані з перетвореннями фігур, більш доступні учням, що приступають до вивчення геометрії, ніж дедуктивні висновки з аксіом). Висування на перший план геометричних перетворень має ще й ту цінність, що дозволить вказати деякі загальні методи, які дають ключ до розв'язання відразу багатьох геометричних задач на доведення та побудову. При цьому подібні розв'язання в багатьох випадках є більш природними, а тому більш простими, ніж інші способи розв'язання.

## 1.2. Відображення та перетворення

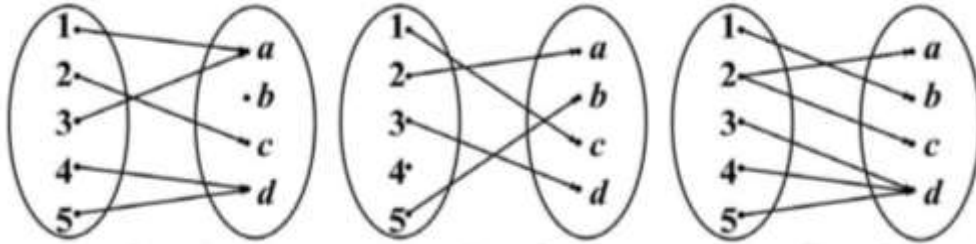
Нехай  $A$  та  $B$  – деякі множини. Кажуть, що задано відображення  $f$  множини  $A$  в множину  $B$ , якщо *кожному* елементу множини  $A$  за деяким законом чи правилом поставлено у відношення  $f$  (один) елемент множини  $B$ .

За допомогою символів це можна записати так :  $f: A \rightarrow B$  або  $A \xrightarrow{f} B$  (читаємо: «відображення  $f$  множини  $A$  в множину  $B$ »). Множина  $A$  називається областю визначення відображення  $f$ , а множина  $B$  – областю  $f$ .

Якщо при відображенні  $f$  елементу  $x$  множини  $A$  ставиться у відповідність елемент  $y$  множини  $B$ , то пишуть :  $f(x) = y$ , або  $x \xrightarrow{f} y$ , або  $x \rightarrow y, f$  символ  $f$ , якщо це не викликає не розумінь. При цьому елемент  $y$  називається образом елемента  $x$  (кажуть також, що  $x$  переходить

в  $y$  або  $x$  відображається на  $y$ ). Елемент  $x$ , в свою чергу, називається прообразом елемента  $y$ .

На мал.1 задано відображення  $f$  множини  $\{1,2,3,4,5\}$  в множину  $\{a,b,c,d\}$ . Тут :  $f(1) = a$ ,  $f(2) = c$ ,  $f(3) = a$ ,  $f(4) = d$ ,  $f(5) = d$ . Прообразами елемента  $a$  є числа 1 та 3; прообразом елемента  $c$  є число 2; елемент  $b$  немає прообразу.



Мал.1

Мал.2

Мал.3

Поняття відображення є центральним поняттям математики, з яким ми зустрічаємося майже в кожному розділі.

Наприклад, функції  $y = x^2$ ,  $y = e^x$ ,  $y = \sin x$  можна розглянути як відображення множини всіх дійсних чисел  $R$  в множину  $R$ : кожному числу  $x$  перша функція ставить у відповідність число  $x^2$ , друга функція- число  $e^x$ , третя функція- число  $\sin x$  [11].

Формула  $z = x^2 + y^2$  кожній впорядкованій парі  $(x, y)$  дійсних чисел ставить у відношення число  $z$ , рівне  $x^2 + y^2$ . Таким чином, ця формула задає відображення множини  $R \times R$  в множину  $R$  ( $f$  функцію двох змінних).

Числову послідовність  $(x_n)$  можна розглянути як відображення множини  $N$  всіх натуральних чисел в множину  $R$ : кожному натуральному числу  $n$  ставиться у відповідність визначене число  $x_n$ , яке називається  $n$ -м числом послідовності.

Нехай  $V$  – множина всіх векторів тривимірного простору. Додавання векторів є відображення, яке будь-якій впорядкованій парі векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  (тобто кожному елементу множини  $V \times V$ ) ставить у

відповідність за означеним законом (а саме по правилу трикутника) вектор, позначений  $\vec{a} + \vec{b}$  та називається сумою векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ . Таким чином, додавання векторів можна розглянути як відображення множини  $V \times V$  в множину  $V$ .

Нехай  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  – деякі фіксовані вектори, а  $t$  – змінна, яка проходить множину всіх дійсних чисел  $R$ . Векторне рівняння  $\vec{v} = t * \vec{a} + t^2 * \vec{b}$  кожному дійсному числу  $t$  ставить у відповідність вектор  $t * \vec{a} + t^2 * \vec{b}$ . Таким чином, це рівняння задає відображення множини  $R$  в множину  $V$  ( $f$  векторну функцію скалярного аргументу).

Процес виміру довжин відрізків можна трактувати як відображення множини всіх відрізків в множину додатних дійсних чисел: кожному відрізку ставиться у відповідність відповідне число – довжина цього відрізка при вибраній одиниці виміру.

*Зауваження.* Відображення площини в себе може бути задане (при наявності деякої декартової системи координат) формулами виду  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = \varphi(x, y)$ , які дозволяють, знаючи координати  $x$  та  $y$  будь-якої точки площини, знайти координати  $x'$ ,  $y'$  її образу [7]. Такі формули ми будемо називати формулами відображення площини (в даній системі координат).

Нехай  $f$  – відображення множини  $A$  в множину  $B$ , а  $C$  – деяка підмножина множини  $A$ . Множина образів всіх елементів множини  $C$  називаються образом множини  $C$  та позначається через  $f(C)$ . Зокрема, образ області визначення  $A$  відображення  $f$  називається множиною значень цього відображення.

Наприклад, для відображення на мал.1 образом множини  $\{1; 2\}$  є множина  $\{a; c\}$  (кажуть також, що при даному відображенні множина  $\{1; 2\}$  переходить в множину  $\{a; c\}$  або відображається на множину  $\{a; c\}$ ).

Нехай задане відображення  $f: A \rightarrow B$  та  $D$  – деяка підмножина області прибуття  $B$ . Повним прообразом множини  $D$  називається множина

всіх елементів із  $A$ , образи яких належать  $D$ . Повний прообраз множини  $D$  позначається через  $f^{-1}(D)$ . Зокрема, якщо  $D$  складається з одного елемента  $y$ , то  $f^{-1}(D)$  називається повним прообразом елемента  $y$  та позначається  $f^{-1}(y)$ .

Наприклад, для відображення на мал.1 повним прообразом множин  $\{a\}, \{a; b\}$  та  $\{a; b; c\}$  є відповідно множини  $\{1; 3\}, \{1; 3\}$  та  $\{1; 2; 3\}$ .

Відображення  $f: A \rightarrow B$  називається ін'єкцією, якщо образи будь-яких двох різних елементів множин  $A$  різні.

Відображення  $f: A \rightarrow B$  називається сюр'єкцією ( або відображенням множини  $A$  на множину  $B$  ), якщо будь-який елемент множини  $B$  є образом хоча б одного елемента із  $A$ . Зокрема, відображення  $f: A \rightarrow B$  називається сюр'єкцією, якщо будь-який елемент із множини  $B$  має хоча б один прообраз; зокрема, відображення  $f: A \rightarrow B$  називається сюр'єкцією, якщо  $f(A) = B$ , тобто якщо множина значень даного відображення збігається з його областю прибуття [23].

Відображення, показане на мал.1, не є ін'єкцією, так як, наприклад, образи елементів 1 та 3 збігаються. Це відображення не є і сюр'єкцією, так як елемент  $b$  немає ні одного прообразу.

Відображення  $f: A \rightarrow B$ , яке є одночасно ін'єкцією та сюр'єкцією, називається бієкцією ( бієктивним відображенням). Бієктивне відображення називається по іншому взаємно однозначним відображенням множини  $A$  на множину  $B$ . В цьому випадку також кажуть, що між елементами множин  $A$  та  $B$  встановлено взаємно однозначну відповідність.

Кажучи про відображення  $f: A \rightarrow B$ , ми не виключаємо і такої ситуації, коли область визначення  $A$  збігається з областю прибуття  $B$ . В цьому випадку маємо відображення множини  $A$  в себе -  $f: A \rightarrow A$ . Наприклад, у [2] розглядалось відображення площини в себе, задане формулами  $x' = x + y$ ,  $y' = x - y$ .

Може виявитись, що відображення  $f: A \rightarrow A$  є бієкцією. Тоді кажуть, що  $f$  є перетворенням множини  $A$ . І так, перетворенням множини  $A$  називається взаємно однозначне відображення множини  $A$  на саму себе.

Прикладом перетворення множини (зокрема, площини) є тотожне перетворення; так називають відображення, при якому будь-який елемент множини (будь-яка площина) відображена в саму себе.

### 1.3. Приклади перетворень площини

#### *Паралельний перенос*

Нехай  $\vec{p}$ - фіксований вектор. Паралельним переносом на вектор  $\vec{p}$  називається відображення площини в саму себе, при якому кожна точка  $M$  переходить в таку точку  $M'$ , що  $\overline{MM'} = \vec{p}$ .

Перенос на вектор  $\vec{p}$  позначається  $T_{\vec{p}}$ .

Приклад 1. Знайдемо формули паралельного переносу на вектор  $\vec{p}(a, b)$ .

*Приклад*. Нехай при переносі на вектор  $\vec{p}(a, b)$  довільна точка  $M(x, y)$  переходить в точку  $M'(x', y')$ , тоді за означенням переносу  $\overline{MM'} = \vec{p}$ . Прирівнюючи відповідні координати векторів  $\overline{MM'}$  та  $\vec{p}$ , отримуємо  $x' - x = a, y' - y = b$ , звідси  $x' = x + a, y' = y + b$  (\*). Це і є шукані формули.

*Зауваження*. Узагальнюючи цей розв'язок, можна сформулювати загальний прийом відшукування формул відображення площини в саму себе.

Приклад 2. Довести, що будь-яке перетворення площини, задане в деякому афінному базисі формулами (\*), є паралельним переносом на вектор  $\vec{p}(a, b)$ .

*Розв'язання*. Нехай  $f$ - перетворення, задане формулами (\*), а  $\varphi$  – переніс на вектор  $\vec{p}(a, b)$ . За доведеному вище перетворення  $\varphi$  задається формулами  $x' = x + a, y' = y + b$ . Як бачимо, перетворення  $f$  та

$\varphi$  задають в даному афінному базисі однаковими формулами та співпадають. Тому,  $f$  це перенос на вектор  $\vec{p}(a, b)$ .

*Зауваження.* Приведений розв'язок заснований на очевидній ідеї збігу двох перетворень площини, заданих однаковими формулами в деякому афінному базисі [17].

### *Поворот (обертання)*

Нехай на орієнтованій площині задано точку  $O$  та направлений (орієнтований) кут, величина якого рівна  $\alpha$ . Поворот (обертання) навколо точки  $O$  на кут  $\alpha$  називається відображенням площини самої в себе, при якому точка  $O$  відображається сама в себе, а будь-яка точка  $M$ , відмінна від точки  $O$ , переходить в таку точку  $M'$ , що  $OM' = OM$  та кут  $MOM'$  рівний  $\alpha$ .

Поворот навколо точки  $O$  (центр повороту) на кут  $\alpha$  (кут повороту) позначається  $R_0^\alpha$ . Очевидно, що якщо  $\alpha = \beta + 2k\pi$ , де  $k \in Z$ , то  $R_0^\alpha = R_0^\beta$  і навпаки.

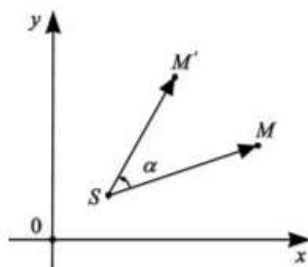
*Зауваження.* В трьох мірному просторі аналогом повороту навколо точки є поворот навколо прямої [7]; його можна визначити так.

Нехай в просторі дано пряму  $\alpha$  та направлений (орієнтований) кут, що лежить в деякій площині, перпендикулярній прямій  $\alpha$ , причому величина цього кута рівна  $\alpha$ . Поворот навколо прямої  $\alpha$  на кут  $\alpha$  називається відображенням простору самого в себе, при якому всяка точка прямої  $\alpha$  відображається сама на себе, а всяка точка  $M$ , не належить прямій  $\alpha$ , переходить в таку точку  $M'$ , що :

- 1) точки  $M$  та  $M'$  рівновіддалена від прямої  $\alpha$ ;
- 2) точки  $M$  та  $M'$  лежать в деякій площині  $\sigma$ , перпендикулярній прямій  $\alpha$ ; при цьому  $\sigma \cap \alpha = O$ ;
- 3) кут  $MOM'$  рівний  $\alpha$ .

Приклад 3. Складемо формулу повороту навколо точки  $S(x_0, y_0)$  на кут  $\alpha$  ( система координат – прямокутна).

*Розв'язання.* Нехай при повороті  $R_S^\alpha$  довільна точка  $M(x, y)$ , відміна від точки  $S$ , переходить в точку  $M'(x', y')$  (мал.4).



Мал.4

За означенням повороту  $SM = SM'$  та орієнтований кут [25]  $MSM'$  рівний  $\alpha$ , тобто  $\angle(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SM}') = \alpha$ . Так як  $\overrightarrow{SM}(x - x_0; y - y_0)$ ,  $\overrightarrow{SM}'(x' - x_0; y' - y_0)$ , то, використовуючи відомі формули, отримуємо:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SM} * \overrightarrow{SM}'}{|\overrightarrow{SM}| * |\overrightarrow{SM}'|} = \frac{(x - x_0) * (x' - x_0) + (y - y_0) * (y' - y_0)}{|\overrightarrow{SM}|^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x' - x_0 & y' - y_0 \end{vmatrix}}{|\overrightarrow{SM}| * |\overrightarrow{SM}'|} = \frac{-(y - y_0) * (x' - x_0) + (x - x_0) * (y' - y_0)}{|\overrightarrow{SM}|^2},$$

звідси:

$$\begin{cases} (x - x_0) * (x' - x_0) + (y - y_0) * (y' - y_0) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) * \cos \alpha \\ -(y - y_0) * (x' - x_0) + (x - x_0) * (y' - y_0) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) * \sin \alpha \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $x'$  та  $y'$ , отримуємо:

$$\begin{cases} x' = x * \cos \alpha - y * \sin \alpha - x_0 * \cos \alpha + y_0 * \sin \alpha + x_0, \\ y' = x * \sin \alpha + y * \cos \alpha - x_0 * \sin \alpha - y_0 * \cos \alpha + y_0 \end{cases}$$

Формули (\*) зіставленні для всіх точок  $M$ , відмінних від центра повороту  $S_0$ . Зокрема, як легко побачити, вони годяться і для точки  $S$ .

Дійсно, у відповідності з формулами (\*)  $S(x_0; y_0) \rightarrow S(x_0; y_0)$ , що і потрібно за означенням повороту.

Зокрема, якщо центр повороту збігається з початком координат, то формули (\*) приймають наступний вигляд :

$$\begin{cases} x' = x * \cos \alpha - y * \sin \alpha \\ y' = x * \sin \alpha + y * \cos \alpha \end{cases}$$

( формули повороту навколо початку координат на кут  $\alpha$  )

### *Центральна симетрія*

Центральною симетрією з центром  $O$  називається відображенням площини саму в себе, при якому всяка точка  $M$  переходить в точку  $M'$ , симетричну точку  $M$  відносно точки  $O$ . Центральна симетрія з центром  $O$  позначається  $Z_0$ .

Нагадаємо, що точки  $M$  та  $M'$  називаються симетричними відносно точки  $O$ , якщо відрізок  $MM'$  ділиться точкою  $O$  пополам. При цьому вважається, що точка  $O$  симетрична сама в себе відносно  $O$ .

### *Осьова симетрія*

Нехай на площині дана пряма  $\alpha$  та точка  $M$ . Як відомо, точка  $M'$  називається симетричною точці  $M$  відносно прямої  $\alpha$ , якщо відрізок  $MM'$  перпендикулярний прямій  $\alpha$  та ділить його навпіл. При цьому вважається, що будь-яка точка прямої  $\alpha$  симетрична сама в себе відносно цієї прямої.

Осьова симетрія з віссю  $\alpha$  називається відображення площини саму в себе, при якому кожна точка  $M$  переходить в точку  $M'$ , симетричну точці  $M$  відносно прямої  $\alpha$ . Осьова симетрія з віссю  $\alpha$  позначається  $S_\alpha$ .

*Зауваження.* В трьох вимірному просторі для осьової симетрії існує два аналоги [12].

1) Відображення відносно прямої визначається аналогічно осьовій симетрії; достатньо в приведеному означенні замінити слово « площина» словом «простір».

2) Відображення відносно площини  $\sigma$  – відображення простору самого в себе, при якому будь-яка точка  $M$  переходить в точку  $M'$ , симетричну точці  $M$  відносно площини  $\sigma$ .



Приклад 4. Складемо формули осьової симетрії, віссю якої є пряма  $\alpha$ , задана в ортонормованому базисі рівнянням  $Ax + By + C = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай при осьовій симетрії  $S_\alpha$  довільна точка  $M(x, y)$  переходить в точку  $M'(x', y')$ . Тоді, по-перше, відрізок  $MM'$  перпендикулярний прямій  $\alpha$  і як стало  $\overrightarrow{MM'} * \vec{p} = 0$ , де  $\vec{p}$  – напрямний вектор прямої  $\alpha$ . По-друге, середина відрізка  $MM'$  – точка  $M_0$  – належить прямій  $\alpha$ . Маємо:

$$\overrightarrow{MM'}(x' - x; y' - y), \vec{p}(B; -A), M_0\left(\frac{x' + x}{2}; \frac{y' + y}{2}\right).$$

Звідси отримуємо:

$$\overrightarrow{MM'} * \vec{p} = 0 \Rightarrow B * (x' - x) - A(y' - y) = 0,$$

$$M_0 \in \alpha \Rightarrow \frac{A(x'+x)}{2} + \frac{B(y'+y)}{2} + C = 0$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $x'$  та  $y'$

$$\begin{cases} x' = -\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} * x - \frac{2AB}{A^2 + B^2} * y - \frac{2AC}{A^2 + B^2}, \\ y' = -\frac{2AB}{A^2 + B^2} * x + \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} * y - \frac{2BC}{A^2 + B^2}, \end{cases} \quad (*)$$

*Гомотетія*

Нехай дана деяка точка  $O$  та число  $k \neq 0$ . Гомотетією з центром  $O$  та коефіцієнтом  $k$  називається відображення площини самої себе, при якому кожна точка  $M$  площини переходить в точку  $M'$ , що  $\overrightarrow{OM'} = k * \overrightarrow{OM}$ . Гомотетія з центром  $O$  та коефіцієнтом  $k$  відображається  $H_O^k$ .

#### 1.4. Відшукання образу фігури при заданому перетворенні

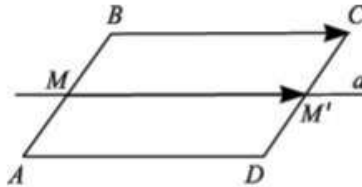
Нехай  $f$  – деяке перетворення площини, а  $\Phi$  – деяка фігура. Відповідно до означення, даного вище, образ фігури  $\Phi$  при перетворенні  $f$  є така фігура  $\Phi'$ , яка складається із всіх тих і тільки тих точок площини, кожна із яких є образом деякої точки фігури  $\Phi$ . Звідси, опираючись на

поняття рівності двх множин [21], отримуємо наступне правило відшукання образу фігури.

Щоб довести, що при перетворенні  $f$  фігура  $\Phi$  переходить в фігуру  $\Phi'$  (відображається на фігуру  $\Phi'$ , перетворюється в фігуру  $\Phi'$ ), достатньо :

- взяти довільну точку  $M$  фігури  $\Phi$  та довести, що її образ належить фігурі  $\Phi'$  ;
- взяти довільну точку  $M'$  фігури  $\Phi'$  та довести, що її прообраз належить фігурі  $\Phi$ .

*Приклад 1.* Дано паралелограм  $ABCD$ . Доведемо, що при переносі на вектор  $\overrightarrow{BC}$  відрізок  $AB$  відображається на відрізок  $DC$ . (мал.5)



Мал.5

*Розв'язання.* Через довільну точку  $M$  відрізка  $AB$  проведемо пряму  $\alpha$ , паралельну  $BC$ . Нехай  $M' = \alpha \cap CD$ . Очевидно, точка  $M'$  належить відрітку  $DC$ . Так як  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BC}$ , то при переносі на вектор  $\overrightarrow{BC}$  точка  $M$  переходить в точку  $M'$ .

Навпаки, візьмемо довільну точку  $M'$  на відрітку  $DC$  та проведемо через неї пряму  $\alpha$ , паралельну  $BC$ . Позначимо  $\alpha \cap AB = M$ . Ясно, що точка  $M$  належить відрітку  $AB$ . Так як  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BC}$ , то  $M$  прообраз точки  $M'$  при переносі на вектор  $\overrightarrow{BC}$ .

Отже, образ  $M'$  будь-якої точки  $M$  відрізка  $AB$  належить відрітку  $DC$  та, навпаки, прообраз  $M$  будь-якої точки  $M'$  відрізка  $DC$  належить відрітку  $AB$ .

Відповідно до приведенного вище правила підводимо підсумок, що при переносі  $T_{\overrightarrow{BC}}$  відрізок  $AB$  відображається на відрізок  $DC$ .

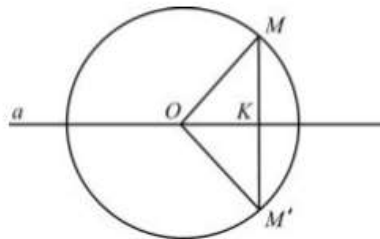
У ряду випадків правило 5.1 має більш просту форму; вона застосовується для так званих інволютивних перетворень.

Перетворення  $f$  називається інволютивним, тоді коли для будь-якої точки  $M$  виконується умова: якщо  $f(M) = M'$ , то  $f(M') = M$ . Легко бачити, що центральна та осьова симетрії є інволютивними перетвореннями.

Нехай потрібно довести, що при інволютивних перетвореннях  $f$  фігура  $\Phi$  відображається сама в себе. Виявляється, що в цьому випадку досить обмежитися лише першою дією правила [5], а саме довести, що образ довільної точки фігури  $\Phi$  належить фігурі  $\Phi$ . Твердження ж другого пункту правила [5] впливає при цьому із твердження першого. Насправді, візьмемо довільну точку  $M'$  фігури  $\Phi$  і нехай  $f(M') = M$ . В силу першого пункту правила [5]  $M \in \Phi$ .

Так як  $f$  інволютивне, то  $f(M) = M'$ , тобто  $M$  –прообраз точки  $M'$  і, таким чином, вимоги другого пункту правила [6] виконані.

Приклад 2. Пряма  $\alpha$  проходить через центр окружності  $\omega$ . Доведемо, що центр осьової симетрії  $S_\alpha$  окружність  $\omega$  відображається сама в себе ( мал.6).



Мал. 6

*Розв'язання.* Нехай  $M \in \omega$  та  $S_\alpha(M) = M'$ , а  $MM' \cap \alpha = K$ . За означенням осьової симетрії  $MM' \perp \alpha$  та  $MK = M'K$ , тому  $\triangle OMK = \triangle OM'K$ , з відси випливає, що  $OM' = OM$ . Так як  $M \in \omega$  та  $OM = OM'$ , то  $M' \in \omega$ , що і потрібно було довести.

Пряма  $\alpha$  (точка  $O$ ) називається віссю симетрії (центром симетрії) фігури  $\Phi$ , якщо при осьовій симетрії  $S_\alpha$  (при центральній симетрії  $Z_0$ ) фігура  $\Phi$  відображається сама в себе.

В силу визначення отриманого вище результату можна надати наступну форму: «Будь-яка пряма, яка проходить через центр окружності, виявляється віссю симетрії цієї околиці».

Відшукані образи фігури у співвідношенні з правилом [5] як виявилось досить нагромадженні. Більш зручним іноді виявляється іноді інший спосіб – координатний. Він заснований на наступному твердженні.

Нехай фігура  $\Phi$  в деякій системі координат задана рівнянням

$$F(x, y) = 0 \quad (1),$$

а перетворення  $f$  задано формулами  $x' = \varphi(x; y)$ ,  $y' = \psi(x; y)$  (2).

Виразимо із формул (2) змінні  $x$  та  $y$  через  $x'$  та  $y'$ :

$$x = \varphi_1(x'; y'), \quad y = \psi_1(x'; y') \quad (3).$$

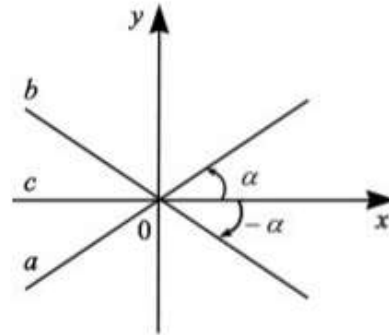
Зауважимо, що, принаймні, теоретично це зробити можливо, так як  $f$  – перетворення. Тому система (2) при будь-яких  $x'$  та  $y'$  має єдиний розв'язок  $(x; y)$ . Доведемо, що образ фігури  $\Phi$  – фігура  $\Phi'$  – задається рівняннями  $F(\varphi_1(x'; y'), \psi_1(x'; y')) = 0$  (4).

Дійсно, нехай точка  $M'(x'; y') \in \Phi'$ , тоді ця точка є образом деякої точки  $M(x, y)$ , яка належить фігурі  $\Phi$ . Тому правильне рівняння  $F(x, y) = 0$ . Заміняючи в цьому рівнянні  $x$  та  $y$  на  $\varphi_1(x'; y')$  та  $\psi_1(x'; y')$  із (3), отримуємо правильне рівняння  $F(\varphi_1(x'; y'), \psi_1(x'; y')) = 0$ . Таким чином, координати будь-якої точки фігури  $\Phi'$  задовольняють рівняння (4).

Навпаки, нехай координати точки  $M'(x'; y')$  задовольняють рівняння (4). Точка  $M'$  є образом деякої точки  $M(x, y)$ , при чому  $x$  та  $y$  зв'язані з  $x'$  та  $y'$  формулами (3). Тоді із (4) отримуємо  $F(x, y) = 0$ . Це означає, що точка  $M$  належить фігурі  $\Phi$  та відповідно, точка  $M'$  належить фігурі  $\Phi'$ .

І так, (4) є рівняння образу фігури  $\Phi$ .

Приклад 3. Пряма  $c$  проходить через точку перетину прямих  $a$  та  $b$  і ділить навпіл вертикальні кути, утворені цими прямими. Доведемо, що при осьовій симетрії  $S_c$  пряма  $a$  відображається на пряму  $b$ .

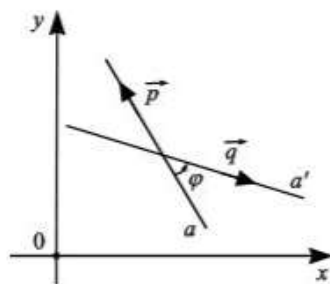


Мал. 7

*Розв'язання.* Введем прямокутну декартова система координат, направивши вісь  $Ox$  по прямій  $c$  ( мал.7). Нехай орієнтований кут від осі  $Ox$  до прямої  $a$  рівний  $\alpha$ , тоді орієнтований кут від осі  $Ox$  до прямої  $b$  рівний  $-\alpha$ . Пряму  $a$  можна задати рівнянням  $y = kx$ , тоді пряма  $b$  задається рівнянням  $y = -kx$ .

Формули осьової симетрії відносно прямої  $c$  ( осі  $Ox$ ) має вид  $x' = x$ ,  $y' = -y$ . Виражаючи  $x$ ,  $y$  через  $x'$ ,  $y'$  отримуємо :  $x = x'$ ,  $y = -y'$ . Підставляючи ці вирази в рівняння прямої  $a$ , отримуємо рівняння її образу :  $y' = -kx'$  або , в звичних образах:  $y = -ky$ . Як бачимо, отримали рівняння прямої  $b$ . Це значить, що  $S_c(a) = b$ .

Приклад 4. Доведемо, що при повороті  $R_0^\alpha$ , де  $0 < |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ , будь-яка пряма  $a$  переходить в таку пряму  $a'$ , що кут між прямими  $a$  та  $a'$  рівний  $|\alpha|$ . (мал.8)



Мал. 8

*Розв'язання.* Введемо на площині прямокутну декартову систему координат с початком в точці  $O$ .

Нехай пряма  $\alpha$  задається в цій системі рівнянням  $Ax + By + C = 0$ .

Щоб знайти образ прямої  $\alpha$ , використаємо формули повороту  $R_0^\alpha$ :

$$\begin{cases} x' = x * \cos \alpha - y * \sin \alpha \\ y' = x * \sin \alpha + y * \cos \alpha \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $x$  та  $y$ , отримуємо :

$$\begin{cases} x = x' * \cos \alpha + y' * \sin \alpha \\ y = -x' * \sin \alpha + y' * \cos \alpha \end{cases}$$

Підставимо отримані вирази в рівняння прямої  $\alpha$ , та знаходимо рівняння прямої  $\alpha'$ :

$$(A * \cos \alpha - B * \sin \alpha) * x' + (A * \sin \alpha + B * \cos \alpha) * y' + C = 0.$$

Знайдемо косинус кута  $\varphi$  між прямими  $\alpha$  та  $\alpha'$ ; він рівний модулю косинуса кута між направляючими векторами  $\vec{p}$  та  $\vec{q}$  прямих  $\alpha$  і  $\alpha'$ .

Так як  $\vec{p}(-B; A)$ ,  $\vec{q}(-A * \sin \alpha - B * \cos \alpha; A * \cos \alpha - B * \sin \alpha)$ , то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{p} * \vec{q}|}{|\vec{p}| * |\vec{q}|} = \frac{(A^2 + B^2)|\cos \alpha|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A^2 + B^2}} = |\cos \alpha| \left( \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \right).$$

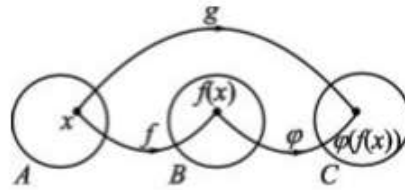
Очевидно, що  $|\cos \alpha| = \cos|\alpha|$ . Таким чином,  $\cos \varphi = \cos|\alpha|$ .

Враховуючи, що  $|\alpha|, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , отримуємо, що  $\varphi = |\alpha|$ .

*Зауваження.* Аналогічно можна довести, що якщо  $\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$ , то  $\varphi = \pi - |\alpha|$ .

## 1.5. Композиція відображення

Композицією відображення  $f: A \rightarrow B$  та  $\varphi: B \rightarrow C$  називається відображення  $g: A \rightarrow C$ , яке кожному елементу  $x$  із множини  $A$  ставить у відповідність елемент  $\varphi(f(x))$  із множини  $C$  (мал.9).



Мал.9

Композиція відображення  $f$  та  $\varphi$  відображається  $\varphi \circ f$  (справа пишуть те відображення, яке виконується першим [19]). Таким чином, за означенням композиції для будь-якого елемента  $x$  із множини  $A$  виконується рівняння  $\varphi \circ f(x) = \varphi(f(x))$ .

Розглянемо приклад відшукування композиції перетворення площини.

Приклад 1 . Перетворення  $f$  та  $\varphi$  в деякому афінному базисі задано формулами :

$$\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = x - y \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - 1 \end{cases} \quad \text{відповідно.}$$

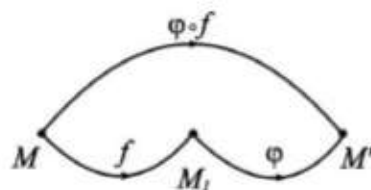
Знайдемо формули відображення  $\varphi \circ f$  та  $f \circ \varphi$ .

*Розв'язання.*

а) Нехай  $M(x; y) \xrightarrow{f} M_1(x_1; y_1)$ , тоді  $x_1 = x + 5, y_1 = x - y$  (1).

Нехай далі  $M_1(x_1; y_1) \xrightarrow{\varphi} M'(x'; y')$ , тоді  $x' = x_1 + y_1, y' = x_1 - 1$  (2)

При відображенні  $\varphi \circ f$ :  $M(x; y) \rightarrow M'(x'; y')$ . Використовуючи формули (1) та (2), виділяємо  $x'$  та  $y'$  через  $x$  і  $y$ :  $x' = 2x - y + 5, y' = x + 4$ . Це і є формули відображення  $\varphi \circ f$  ( мал.10).



Мал. 10

б) Нехай  $M(x; y) \xrightarrow{\varphi} M_1(x_1; y_1)$ , а  $M_1(x_1; y_1) \xrightarrow{f} M'(x'; y')$ , тоді :

$$\begin{cases} x_1 = x + y \\ y_1 = x - 1 \end{cases} \quad (3) \quad \text{та} \quad \begin{cases} x' = x_1 + 5 \\ y' = x_1 - y_1 \end{cases} \quad (4).$$

При відображенні  $f \circ \varphi$   $M(x; y) \rightarrow M'(x'; y')$ . Із (3) та (4) отримуємо формули відображення  $f \circ \varphi$ : 
$$\begin{cases} x' = x + y + 5 \\ y' = y + 1 \end{cases}.$$

*Зауваження.* Порівняємо формули відображення  $f \circ \varphi$  та  $\varphi \circ f$ , бачимо, що  $f \circ \varphi \neq \varphi \circ f$ .

**Приклад 2.** Знайдемо композицію  $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$  двох поворотів з одним і тим самим центром.

*Розв'язання. Перший спосіб.* Виберемо на площині прямокутну декартову систему координат з початком в точці  $O$ . В цій системі координат повороти  $R_O^\alpha$  та  $R_O^\beta$  задаються формулами :

$$\begin{cases} x' = x * \cos \alpha - y * \sin \alpha \\ y' = x * \sin \alpha + y * \cos \alpha \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x' = x * \cos \beta - y * \sin \beta \\ y' = x * \sin \beta + y * \cos \beta \end{cases} \quad \text{відповідно.}$$

Находячи формули композиції  $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$  ( як в прикладі 1), отримуємо :

$$\begin{cases} x' = (x * \cos \alpha - y * \sin \alpha) * \cos \beta - (x * \sin \alpha + y * \cos \alpha) * \sin \beta \\ y' = (x * \cos \alpha - y * \sin \alpha) * \sin \beta + (x * \sin \alpha + y * \cos \alpha) * \cos \beta \end{cases}$$

або, після очевидних перетворень ,

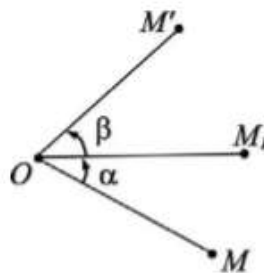
$$\begin{cases} x' = x * \cos(\alpha + \beta) - y * \sin(\alpha + \beta) \\ y' = x * \sin(\alpha + \beta) + y * \cos(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Звідси випливає, що композиція  $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$  є поворот  $R_O^{\alpha+\beta}$ .

*Другий спосіб.* Візьмемо довільну точку  $M$ .

Нехай  $R_O^\alpha(M) = M_1$ ,  $R_O^\beta(M_1) = M'$  (мал.11). Тоді за означенням повороту маємо:  $OM = OM_1$ ,  $\angle MOM_1 = \alpha$ ,  $OM_1 = OM'$ ,  $\angle M_1OM' = \beta$ . Звідси випливає , що  $OM = OM'$ ,  $\angle MOM' = \alpha + \beta$ . Таким чином, відображення  $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$  переводить довільну точку  $M$  в таку точку  $M'$ , що  $OM = OM'$  та  $\angle MOM' = \alpha + \beta$ .





Мал. 11

Це значить, що композиція  $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$  є поворотом  $R_O^{\alpha+\beta}$ .

*Підведемо підсумки.* Аналізуючи процес розв'язання першої задачі (приклад 1), можна сформулювати загальне правило відшукування формул композиції перетворення площини.

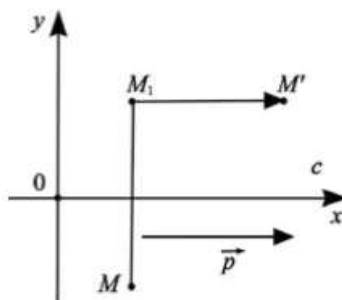
В другій частині задачі (приклад 2) потрібно було визначити вид деякого перетворення площини (а саме композиції  $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ ). Перший розв'язок заснований на відшуванні формул цього перетворення з наступним розпізнаванням цього виду.

До перетворення площини, розглянутих вище, додамо ще одне-ковзну симетрію.

Ковзна симетрія називається композиція осьової симетрії  $S_c$  та переносу на ненульовий вектор  $\vec{p}$ , паралельний осі  $c$ .

Приклад 3. Знайдемо формули ковзної симетрії  $T_{\vec{p}} \circ S_c$ .

*Розв'язання.* Виберемо на площині прямокутну декартову систему координат, направив вісь  $Ox$  по прямій  $c$  (мал. 12), тоді  $\vec{p}(a; 0)$ . Візьмемо довільну точку  $M(x; y)$ . При осьовій симетрії  $S_c: M(x; y) \rightarrow M_1(x_1; y_1)$ , тому  $x_1 = x$ ,  $y_1 = -y$ .



Мал. 12

Перенос на вектор  $\vec{p}$  переводить точку  $M_1(x_1; y_1)$  в точку  $M'(x'; y')$ , тому  $x' = x_1 + a$ ,  $y' = y_1$ .

Із (1) та (2) отримуємо :  $x' = x + a$ ,  $y' = -y$ . Це і є шукані формули ковзної симетрії в вибраній системі координат.

Приклад 4. Доведемо, що для будь-яких перетворень  $f, \varphi$  та  $g$  однієї і тієї ж множини  $M$  маємо співвідношення  $g \circ (\varphi \circ f) = (g \circ \varphi) \circ f$  (асоціативний закон).

*Розв'язання.* Для того щоб довести, що два перетворення  $p$  та  $q$  однієї і тієї ж множини  $M$  співпадають, досить встановити, що для будь-якого елемента  $x$  цієї множини виконуються рівняння  $p(x) = q(x)$  (перетворення  $p$  та  $q$  однаково діють на будь-який елемент множини  $M$ ).

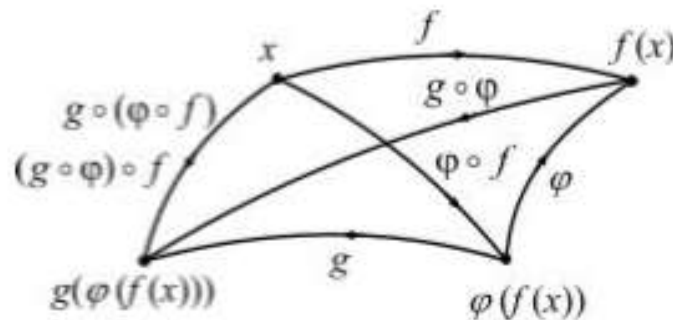
Візьмемо довільний елемент множини  $M$  та знайдемо його образ при відображенні  $g \circ (\varphi \circ f)$  та  $(g \circ \varphi) \circ f$ .

За означенням композиції відображення маємо :

$$(g \circ (\varphi \circ f))(x) = g((\varphi \circ f)(x)) = g(\varphi(f(x))) \quad (1)$$

$$((g \circ \varphi) \circ f)(x) = (g \circ \varphi)(f(x)) = g(\varphi(f(x))) \quad (2).$$

Порівнюючи (1) та (2) та враховуючи, що елемент  $x$  був вибраний довільно, бачимо, що  $g \circ (\varphi \circ f) = (g \circ \varphi) \circ f$  ( мал.13)



Мал. 13

*Зауваження.* Як відомо із курсу алгебри, із асоціативності деякої операції слідує, що результат композиції трьох та більше елементів ( в залежності, перетворення площини) не залежить від способу розміщення

дужок в цій композиції. Наприклад,  $(a * b) * (c * d) = (a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d$  і так далі.

## 1.6. Обернене перетворення

Нехай  $f$  – перетворення площини, тоді для кожної точки  $M$  існує єдина точка  $M'$ , така, що  $f(M') = M$ . Відображення площини самої в себе, при якому будь-яка точка  $M$  переходить в таку точку  $M'$ , що  $f(M') = M$ , називається зворотнім відображенням  $f$ . Позначається  $f^{-1}$ .

Легко побачити, що якщо  $f$  – перетворення площини, то зворотнє йому відображення  $f^{-1}$  також є перетворенням площини.

Із даного визначення безпосередньо випливає, що:

а) якщо  $f(M) = M'$ , то  $f^{-1}(M') = M$ ;

б) якщо  $f^{-1}(M) = M'$ , то  $f(M') = M$ ;

в) якщо при перетворенні  $f$  фігура  $\Phi$  відображається на фігуру  $\Phi'$ , то при зворотному перетворенні фігури  $\Phi'$  відображається на фігуру  $\Phi$ .

Приклад 1. Доведемо, що для будь-яких перетвореннях  $f$  та  $\varphi$  маємо місце співвідношенню  $(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$ .

Розв'язання. Візьмемо довільну точку  $M$  та знайдемо її образ при перетворенні  $f^{-1} \circ \varphi^{-1}$ . Нехай  $\varphi^{-1}(M) = M_1$ ,  $f^{-1}(M_1) = M'$ , тоді за означенням композиції  $(f^{-1} \circ \varphi^{-1})(M) = M'$  (1).

Знайдемо образ точки  $M$  при перетворенні  $(\varphi \circ f)^{-1}$ .

Так як  $f^{-1}(M_1) = M'$ , то  $f(M') = M_1$ . Так як  $\varphi^{-1}(M) = M_1$ , то

$\varphi(M_1) = M$ . Так як  $f(M') = M_1$ , а  $\varphi(M_1) = M$ , то  $(\varphi \circ f)(M') = M$ .

Звідси отримуємо  $(\varphi \circ f)^{-1}(M) = M'$  (2). Рівняння (1) та (2) означають, що перетворення  $f^{-1} \circ \varphi^{-1}$  та  $(\varphi \circ f)^{-1}$  однаково діють на будь-яку точку  $M$ , тому,  $(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$ .

Приклад 2. Доведемо, що перетворення, зворотнє переносу на вектор  $\vec{p}$ , якщо перенос на вектор  $-\vec{p}$ , тобто  $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$ .

Розв'язання. Візьмемо довільну точку  $M$ , і нехай  $(T_{\vec{p}})^{-1}(M) = M'$ , тоді  $T_{\vec{p}}(M') = M$ .

Звідси випливає, що  $\overrightarrow{M'M} = \vec{p}$  та як стало бути  $\overrightarrow{MM'} = -\vec{p}$ . Останнє означає, що  $T_{-\vec{p}}(M) = M'$ . Таким чином, перетворення  $(T_{\vec{p}})^{-1}$  та  $T_{-\vec{p}}$  однаково діють на будь-яку точку:  $(T_{\vec{p}})^{-1}(M) = T_{-\vec{p}}(M)$ . Це значить, що  $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$ .

*Зауваження*. Запропонованому розв'язанню можна придати декілька інше логічне оформлення.

«Нехай перетворення  $(T_{\vec{p}})^{-1}$  переводить довільну точку  $M$  в точку  $M'$ , тоді  $T_{\vec{p}}(M') = M$  і відповідно,  $\overrightarrow{M'M} = \vec{p}$ , звідки  $\overrightarrow{MM'} = -\vec{p}$ . Останнє значить, що перетворення  $(T_{\vec{p}})^{-1}$  переводить довільну точку  $M$  в таку точку  $M'$ , що  $\overrightarrow{MM'} = -\vec{p}$ . Звідси за означенням переносу випливає, що  $(T_{\vec{p}})^{-1}$  є перенос на вектор  $-\vec{p}$ .»

Логіка наведеного розв'язання відповідає загальному прийому розпізнавання виду перетворення площини [6].

Стосовно до задач на розпізнавання виду перетворень  $f^{-1}$ , то цьому прийому можна придати і більш специфічну форму.

Приклад 3. Доведемо, що якщо  $f \circ \varphi = g$ , то  $f = g \circ \varphi^{-1}$  та  $\varphi = f^{-1} \circ g$ .

*Розв'язання*. Помножимо дві частини рівняння  $f \circ \varphi = g$  на  $\varphi^{-1}$  справа:  $(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi^{-1}$ .

Далі, використовуючи асоціативний закон композиції перетворення, отримуємо  $g \circ \varphi^{-1} = f \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = f \circ e = f$ , що і потрібно було довести.

Аналогічно доводиться, що  $\varphi = f^{-1} \circ g$ , тільки тепер дві частини вихідного рівняння помножимо на  $f^{-1}$  зліва.

Приклад 4. Перетворення  $f$  задано формулами:  $x' = x + y + 1$ ,  $y' = x - y - 2$ . Знайдемо формули зворотного перетворення.

*Розв'язання.* Нехай при перетворенню  $f^{-1}$  точка  $M(x; y)$  переходить в точку  $M'(x'; y')$ , тоді  $f(M') = M$  і, тому ,

$$\begin{cases} x = x' + y' + 1 \\ y = x' - y' - 2 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $x'$  та  $y'$ , отримуємо :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Це і є формули перетворення  $f^{-1}$ .

*Зауваження.* Узагальнюючи процес розв'язання даної задачі, проходимо до відповідного прийому відшукування формул зворотного перетворення.

### 1.7. Інваріантні точки та інваріантні прямі

Точка  $M$  (фігура  $\Phi$ ) називається інваріантною точкою (інваріантною фігурою) перетворення  $f$ , якщо  $f(M) = M$  ( $f(\Phi) = \Phi$ ).

Наприклад, інваріантній точці повороту  $R_O^\alpha$  є точка  $O$ , а інваріантною фігурою – будь-яка окружність з центром в точці  $O$  [12].

Інваріантними точками симетрії  $S_a$  є всі точки осі  $a$ , а інваріантними прямими – вісь  $a$  та будь-яка пряма, перпендикулярна осі  $a$ .

Розглянемо приклади відшукування інваріантних точок та прямих перетворень площини.

Приклад 1. Знайдемо всі інваріантні точки та інваріантні прямі повороту  $R_O^\alpha$ .

*Розв'язання.* В якості початку прямокутної декартової системи координат візьмемо центр повороту. Нехай  $M(x; y)$  – інваріантна точка, тоді, використовуючи формули повороту  $R_O^\alpha$ , отримуємо:

$$\begin{cases} x = x * \cos \alpha - y * \sin \alpha \\ y = x * \sin \alpha + y * \cos \alpha \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} (1 - \cos \alpha) * x + y * \sin \alpha = 0 \\ -x * \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) * y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Число розв'язання системи (1), а значить, і число інваріантних точок залежить від визначника цієї системи :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{vmatrix} = 2(1 - \cos \alpha)$$

Не порушуючи спільності, можна вважати, що  $\alpha \in [-\pi; \pi]$ , тому якщо  $\alpha \neq 0$ , то  $\Delta \neq 0$  і система (1) має один розв'язок :  $(0; 0)$ .

Тому, в цьому випадку маємо одну інваріантну точку- центр повороту. Якщо ж  $\alpha = 0$ , то  $R_O^\alpha$  представляє собою тотожне перетворення  $e$  і всі точки площини є інваріантними.

Переходим до відшукування інваріантних прямих. Нехай пряма  $a$  задається рівнянням  $Ax + By + C = 0$ , тоді її образ- пряма  $a'$ - задається рівнянням  $(A * \cos \alpha - B * \sin \alpha) * x + (A * \sin \alpha + B * \cos \alpha) * y + C = 0$ . Щоб пряма  $a'$  збігалась з прямою  $a$ , необхідно (але не достатньо), щоб напрямні вектори цих прямих були колінеарні, тобто

$$\begin{vmatrix} -B & A \\ -A * \sin \alpha - B * \cos \alpha & A * \cos \alpha - B * \sin \alpha \end{vmatrix} = 0$$

звідки  $(A^2 + B^2) * \sin \alpha = 0$  та  $\sin \alpha = 0$ . Останнє можливе лише тоді коли  $\alpha = 0$  ( $R_O^\alpha = e$ ) та  $\alpha = \pm\pi$  ( $R_O^\alpha = Z_0$ ).

В першому випадку всі прямі площини є інваріантними. В другому випадку рівняння прямої  $a'$  приймає вид  $Ax + By - C = 0$ . Звідси становиться зрозумілим, що якщо  $C = 0$ , то  $a' = a$ ; якщо ж  $C \neq 0$ , то  $a' \neq a$  (але зате  $a' \parallel a$ ). Таким чином, якщо  $\alpha = \pm\pi$ , тобто  $R_O^\alpha = Z_0$ , то інваріантними є всі прямі, які проходять через точку  $O$ , і тільки вони.

Якщо, поворот  $R_O^\alpha$  відмінний від тотожного перетворення та центральної симетрії ( $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pm\pi$ ), то інваріантних прямих, як випливає із вище сказаного, то немає.

Висновки даного експерименту наведенні в табл. 1

Таблиця 1

Вид перетворення площини	Інваріантні точки	Інваріантні прямі
Тотожне перетворення $e$ (перенос $T_{\vec{p}}$ , де $\vec{p} = 0$ ; поворот $R_O^\alpha$ , де $\alpha = 0$ )	Всі точки	Всі прямі
Паралельний перенос $T_{\vec{p}}$ де $\vec{p} \neq 0$	Немає	Всі прямі, паралельні вектору $\vec{p}$
Поворот $R_O^\alpha$ , де $\alpha \in [-\pi; \pi]$ та $\alpha \neq 0$ , $\alpha \neq \pm\pi$	Точка $O$	Немає
Центральна симетрія $Z_O$ ( $R_O^\alpha$ , де $\alpha \neq \pm\pi$ )	Точка $O$	Всі прямі, які проходять через точку $O$
Осьова симетрія $S_a$	Всі точки осі $a$	Вісь $a$ і всі прямі, перпендикулярні осі $a$
Ковзна симетрія, задана віссю $b$ та вектором $\vec{p}$	Немає	Вісь $b$

Приклад 2. Знайдемо всі інваріантні точки та інваріантні прямі осьової симетрії  $S_a$ .

*Розв'язання.* Введемо прямокутну декартову систему координат, направив вісь  $Ox$  по прямій  $a$ . В цій системі координат, осьової симетрії мають вигляд:  $x' = x$ ,  $y' = -y$

Нехай  $M(x; y)$  – інваріантна точка, тоді  $x = x$ ,  $y = -y$ . Розв'язуючи цю систему, отримуємо  $y = 0, x \in R$ . Це значить, що інваріантними є всі точки осі  $a$ , і тільки вони.

Переходим до відшукування інваріантних прямих. Нехай пряма  $b$  задається рівнянням  $Ax + By + C = 0$  (1), тоді її образ-пряма  $b'$  задається рівнянням  $Ax - By + C = 0$  (2). Вияснимо, при яких  $A, B$  та  $C$  пряма  $b'$  збігається з прямою  $b$ .

Щоб прямі  $b'$  та  $b$  співпадали, необхідно (але не достатньо) щоб напрямні вектори  $\vec{p}(B; -A)$  та  $\vec{q}(B; A)$  цих прямих були колінеарні, тобто  $\begin{vmatrix} B & -A \\ B & A \end{vmatrix} = 0$ , звідки  $A * B = 0$ .

1. Якщо  $A = 0, B \neq 0$ , то рівняння прямих  $b$  та  $b'$  приймають вигляд  $By + C = 0$  та  $-By + C = 0$ . Звідки становиться зрозумілим, що якщо  $C \neq 0$ , то  $b \neq b'$ ; якщо ж  $C = 0$ , то  $b = b'$ . В останньому випадку  $b$  збігається з віссю  $a$ .

2. Якщо  $B = 0, A \neq 0$ , то рівняння прямих  $b$  та  $b'$  однакові:  $Ax + C = 0$  та, відповідно,  $b$  – інваріантна пряма. В цьому випадку пряма  $b$  перпендикулярна осі  $a$ .

Тому інваріантними прямими осьової симетрії  $S_a$  є вісь  $a$  та всі прямі, перпендикулярні осі  $a$ . Отримані результати відображенні в таблиці 1.

Підкреслимо, що проведений тут дослід оказує лише, що других інваріантних прямих осьова симетрія не має [22].

Приклад 3. Знайдемо інваріантні точки та прямі ковзної симетрії, заданої віссю  $b$  та вектором  $\vec{p}$ .

*Розв'язання.* Ведемо на площину прямокутну декартову систему координат, направивши вісь  $Ox$  по прямій  $b$ . В цій системі координат формули ковзної симетрії мають вид:  $x' = x + a$ ,  $y' = y$ .

Для відшукування інваріантних точок отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = -y \end{cases};$$

вона не має розв'язання, так як  $a \neq 0$ . Тому інваріантних точок немає.

Переходимо до відшукування інваріантних прямих. Нехай пряма  $l$  задається рівнянням  $Ax + By + C = 0$ , тоді її образ-пряма  $l'$  задається



рівнянням  $Ax - By + C - Aa = 0$ . Міркуючи, так як в попередньому прикладу, приходимо до висновку : що пряма  $l'$  збігалась з прямою  $l$ , необхідно, щоб один із коефіцієнтів  $A$  або  $B$  були рівними  $0$ .

1. Якщо  $A = 0, B \neq 0$ , то рівняння прямих  $l$  та  $l'$  приймають вид  $By + C = 0$  та  $-By + C = 0$ . Звідси видно, що якщо  $C = 0$ , то  $l' = l = b$  і відповідно,  $b$  – інваріантна пряма. Якщо ж  $C \neq 0$ , то  $l' \neq l$ .

2. Якщо  $B = 0, A \neq 0$  то рівняння прямих  $l$  та  $l'$  приймають вид  $Ax + C = 0$  та  $Ax + C - Aa = 0$ . Так як  $C \neq C - Aa$ , то в цьому випадку  $l' \neq l$ .

І так, використовуючи симетрію з віссю  $b$  маємо лише одну інваріантну пряму – вісь  $b$ . Отримуємо результат відображений в таблиці 1.

## РОЗДІЛ 2

### РУХИ ПЛОЩИНИ

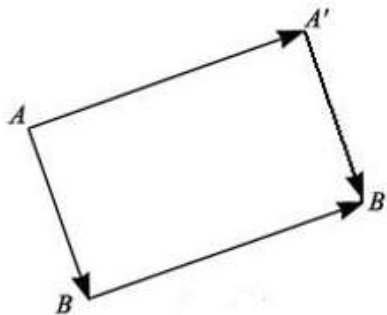
#### 2.1. Рухи площини та їх властивості

Перетворення площини називається рухом (переміщенням), якщо для будь-яких двох точок  $A$  та  $B$  і їх образів  $A'$  і  $B'$  виконується умова  $A'B' = AB$ . Інакше кажучи, рухом називається перетворення площини, що зберігає відстань між будь-якими двома точками

Прикладом руху є, очевидно, тотожне перетворення площини [7].

Приклад 1. Доведемо, що паралельним переносом є рух.

*Розв'язання. Перший спосіб.* Нехай при переносі на вектор  $\vec{p}$  точки  $A$  та  $B$  переходять відповідно в точки  $A'$  та  $B'$  (мал. 14)



Мал. 14

Маємо:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}$ , так як  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{p}$ .

Звідси отримуємо:  $|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}|$ , тобто  $A'B' = AB$  (1). Так як рівняння (1) виконується для будь-яких точок  $A$  та  $B$ , то паралельний перенос і є рух.

*Другий спосіб.* Введемо на площині прямокутну декартову систему координат. В цій системі перенос задається формулами:  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$ .

Нехай при переносі довільної точки  $A(x_1; y_1)$  та  $B(x_2; y_2)$  переходять відповідно в точки  $A'(x'_1; y'_1)$  та  $B'(x'_2; y'_2)$ , тоді  $x'_1 = x_1 + a$ ,  $y'_1 = y_1 + b$ ,  $x'_2 = x_2 + a$ ,  $y'_2 = y_2 + b$  (2). Обраховуючи відстані  $AB$  та  $A'B'$  і враховуючи рівняння (2), проходимо до висновку:  $A'B' = AB$ . Звідси випливає, що перенос є рухом.

Матриця  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  називається ортогональною, якщо

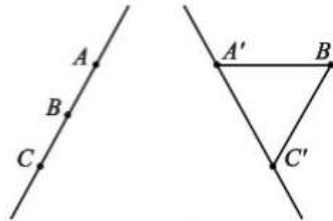
$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0 (*).$$

Доведемо, що визначення ортогональної матриці рівний або  $+1$ , або  $-1$ . Дійсно, із умови (\*) отримуємо:  $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = 1$ , звідки  $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 1$ , і тому  $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$ , або  $a_1b_2 - a_2b_1 = -1$ , що і потрібно було довести.

Розглянемо властивості руху.

1<sup>0</sup>. При русі колінеарні точки переходять в колінеарні точки.

*Доведення.* Припустимо, що при деякому русі колінеарні точки  $A, B, C$  переходять в неколінеарні точки  $A', B', C'$  ( мал.15).



Мал. 15

Серед точок  $A, B, C$  одна і тільки одна лежить між двома іншими. Нехай, наприклад,  $A - B - C$ , тоді  $AB + BC = AC$ . За визначенням руху  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $AC = A'C'$  і, як бачимо  $A'B' + B'C' = A'C'$ . З іншої сторони, так як точки  $A', B', C'$  не лежать на одній прямій, то  $A'B' + B'C' > A'C'$ . Протириччя. Отже, точки  $A', B', C'$  колінеарні.

2<sup>0</sup>. При русі зберігається просте відношення трьох точок [14].

*Доведення.* Нехай при деякому русі  $f$  колінеарні точки  $A, B, C$  переходять в точки  $A', B', C'$  (колінеарні). Позначимо  $(AB, C) = \lambda$ ,  $(A'B', C') = \lambda'$  та доведемо, що  $\lambda = \lambda'$ .

За означенням простого відношення  $\overrightarrow{AC} = \lambda * \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{A'C'} = \lambda' * \overrightarrow{C'B'}$  звідси

$|\overrightarrow{AC}| = |\lambda| * |\overrightarrow{CB}|$ ,  $|\overrightarrow{A'C'}| = |\lambda'| * |\overrightarrow{C'B'}|$  (1). Так як  $f$  – рух, то із (1) слідує, що  $|\lambda| = |\lambda'|$ .

Якщо  $\lambda = 0$ , то  $C = A$ ,  $C' = A'$  і відповідно  $\lambda' = 0$ .

Якщо  $\lambda > 0$ , то  $A - C - B$  та  $AC + CB = AB$ . Звідси, враховуючи, що  $f$  – рух, отримуємо  $A'C' + C'B' = A'B'$  і, відповідно,  $A' - C' - B'$ , тобто  $\lambda' > 0$ .

Якщо  $\lambda < 0$ , то точка  $C$  не лежить між  $A$  та  $B$ . Нехай, наприклад,  $B - A - C$ , тоді  $BA + AC = BC$ , звідси  $B'A' + A'C' = B'C'$ . Це значить, що  $B' - A' - C'$  і відповідно, точка  $C'$  не лежить між  $A'$  та  $B'$ , тобто  $\lambda' < 0$ .

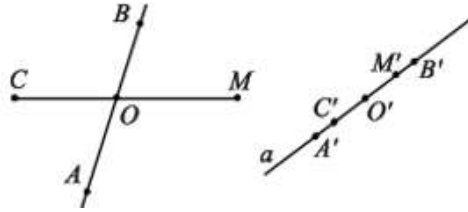
Отже,  $|\lambda| = |\lambda'|$ , причому числа  $\lambda$  та  $\lambda'$  мають однакові знаки, відповідно,  $\lambda = \lambda'$ .

3<sup>0</sup>. При русі неколінеарні точки переходять в неколінеарні точки.

*Доведення.* Допустимо, що при русі  $f$  неколінеарні точки  $A, B, C$  переходять в точки  $A', B', C'$ , які належать прямій  $a$ . Візьмемо довільну точку  $M$  і доведемо, що її образ  $M'$  належить прямій  $a$ . Розглянемо декілька випадків.

а) Якщо точка  $M$  належить прямій  $AB$ , то її образ  $M'$  належить прямій  $a$  (властивість 1<sup>0</sup>).

б) Нехай точка  $M$  та  $C$  лежить на різних сторонах від прямої  $AB$  (мал. 16). Позначимо:  $O = MC \cap AB$ ,  $f(O) = O'$ . В силу властивості 1<sup>0</sup>  $O' \in a$  і, відповідно, в силу тієї ж властивості  $M' \in a$ .



Мал. 16

в) Нехай точки  $M$  та  $C$  лежать по одну сторону від прямої  $AB$ . Зафіксуємо деяку точку  $D$ , яка знаходиться по іншу сторону від прямої  $AB$ ; її образ- точка  $D'$ - належить прямій  $a$  за доказами які зазначено вище. Проводячи для точок  $M$  та  $D$  ті ж роздуми, що і для точок  $M$  та  $C$  в попередньому випадку, стверджуємо  $M' \in a$ .

Таким чином, будь-яка точка площини переходить в точку, яка належить прямій  $a$ . Відповідно, точка, не належить прямій  $a$ , не має прообразів і тому відображення  $f$  не є перетворенням площини. Це протиріччя визначає рух. Властивість доведена.

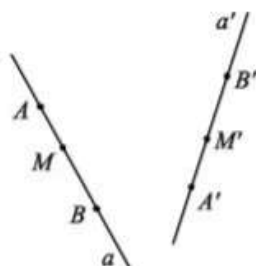
*Наслідок.* При русі афінний базис переходить а афінний базис .

4<sup>0</sup>. При русі зберігається відношення «лежати між» для будь-яких трьох точок прямої.

Ця властивість безпосередньо впливає із властивості 2<sup>0</sup>.

5<sup>0</sup>. При русі: а) пряма відображається на пряму; б) відрізок відображається на відрізок; в) промінь відображається на промінь; г) півплощина відображається на півплощину; д) кут відображається на кут.

*Доведення.* а) Нехай при русі  $f$  точки  $A$  і  $B$  прямої  $a$  переходять у точки  $A'$  і  $B'$  (мал. 17). Доведемо, що тоді пряма  $AB$  переходить у пряму  $A'B'$ . Згідно з прийомом 5.1. доказ проведемо в два етапи.



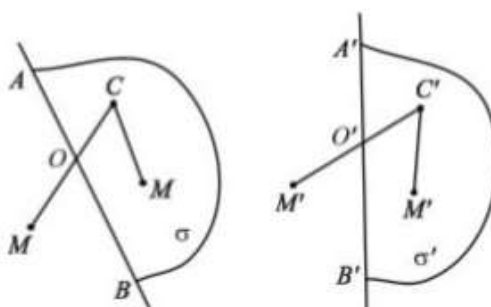
Мал. 17

Візьмемо довільну точку  $M$  на прямій  $AB$ ; нехай  $M \rightarrow M'$ . Тоді  $M' \in A'B'$  (властивість  $1^0$ ).

Навпаки, візьмемо довільну точку  $M' \in A'B'$  і нехай точка  $M$  - її прообраз. Якщо б  $M \notin AB$ , то і  $M' \notin A'B'$  (властивість  $3^0$ ). Протиріччя. Тому  $M \in AB$ , що і потрібно було довести.

Властивості  $5^0(б)$  і  $5^0(в)$  доводяться аналогічно згідно з наведеною схемою; пропонуємо провести доказ цих властивостей самостійно.

г) Нехай відкрита півплощина  $\sigma$  визначається прямою  $AB$  і точкою  $C$  і при русі  $f: A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$  (мал. 18). Позначимо через  $\sigma'$  відкриту півплощину, яка визначається прямою  $A'B'$  та точкою  $C'$  і доведемо, що  $\sigma \rightarrow \sigma'$ .



Мал. 18

Візьмемо довільну точку  $M \in \sigma$ , тоді відрізок  $CM$  не перетинається з прямою  $AB$ . Відповідно, їх образи – відрізок  $C'M'$  та пряма  $A'B'$  – також не перетинаються, тобто  $M' \in \sigma'$ .

Навпаки, візьмемо  $M' \in \sigma'$  і нехай  $M$  – прообраз точки  $M'$ .

Припустимо, що  $M \notin \sigma$ , тоді відрізок  $CM$  перетинається з прямою  $AB$  в деякій точці  $O$ .

Отже, відрізок  $C'M'$  перетинається з прямою  $A'B'$  в точці  $O'$  і тому  $M' \notin \sigma'$ . Отримали протиріччя. Тому,  $M \in \sigma$ . Отже,  $\sigma \rightarrow \sigma'$ .

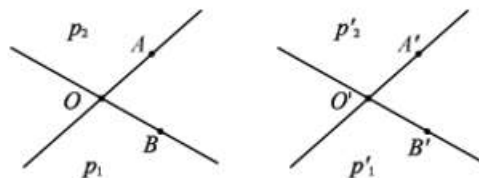
Оскільки, крім того, пряма  $AB$  відображається на пряму  $A'B'$ , то властивість  $5^0(\text{г})$  повністю доведено.

д) Приступаючи до доведення цієї властивості, зауважимо, що кут, як геометричну фігуру можна визначити по-різному. Зупинимося на двох трактуваннях:

- кутом  $AOB$  називається об'єднання променів  $OA$  і  $OB$ ;
- кутом  $AOB$  (якщо точки  $A, B, O$  не колінеарні) називається перетин півплощин  $p_1$  та  $p_2$ , де  $p_1$  — та півплощина, визначається прямою  $OA$ , яка містить точку  $B$ , а  $p_2$  — та півплощина, яка визначається прямою  $OB$ , яка містить точку  $A$ ; якщо ж точки  $A, B, O$  лежать на прямій  $a$  (причому точка  $O$  лежить між  $A$  та  $B$ ), то кут  $AOB$  називається будь-яка із півплощин з границею  $a$ .

У разі першого трактування властивість  $5^0(\text{д})$  є очевидний наслідок властивості  $5^0(\text{в})$ . Доведемо цю властивість для другого визначення.

Отже, нехай дано кут  $AOB$ , причому точки  $A, B, O$  не колінеарні (в іншому випадку доказ очевидний). Нехай при русі  $f: A \rightarrow A', B \rightarrow B', O \rightarrow O'$  (мал. 19).



Мал. 19

Доведемо, що тоді кут  $AOB$  відображається на кут  $A'O'B'$ . Кут  $AOB$  є перетин півплощин  $p_1$  та  $p_2$  (див. вищенаведене визначення); кут  $A'O'B'$  є

перетин півплощин  $p'_1$  та  $p'_2$ , де  $p'_1$  є півплощина, що визначається прямою  $O'A'$  та точкою  $B'$ , а  $p'_2$  є півплощина, яка визначається прямою  $O'B'$  та точкою  $A'$ .

Так як при русі  $f: A \rightarrow A', B \rightarrow B', O \rightarrow O'$ , то  $p_1 \rightarrow p'_1$   $p_2 \rightarrow p'_2$ , отже, перетин півплощин  $p_1$  та  $p_2$  відображається на перетин півплощин  $p'_1$  та  $p'_2$ , тобто кут  $AOB$  переходить у кут  $A'O'B'$ , що і треба було довести.

*Примітка.* Легко бачити, що при русі  $f$  внутрішня область кута  $AOB$  відображається на внутрішню область кута  $A'O'B'$ , а границя кута  $AOB$  – на границю кута  $A'O'B'$  [8].

Прапором  $(O, h, p)$  називається сукупність, що складається з точки  $O$ , променя  $h$  з початком в точці  $O$  і півплощини  $p$ , яка визначається тією прямою, що містить промінь  $h$ .

*Наслідок.* При русі прапор переходить в прапор.  $6^0$ . При русі паралельні прямі переходять у паралельні прямі.

*Доведення.* Якщо б паралельні прямі  $a$  та  $b$  відображалися на прямі, що перетинаються в точці  $O'$ , то точка  $O$  – єдиний прообраз точки  $O'$  – належала б прямим  $a$  та  $b$ , що суперечить умові.

*Примітка.* Зауважимо, що наведені вище докази  $3^0, 4^0, 5^0, 6^0$  властивостей залишаються в силі для будь-яких перетворень площини, які мають властивості  $1^0 - 2^0$ .

Інакше кажучи, встановлено наступне: якщо деяке перетворення площини зберігає колінеарність точок і просте відношення колінеарних точок, то воно також належить до вище згаданих властивостей  $3^0 - 6^0$ .

Приступаючи до розгляду наступних властивостей, нагадаємо, що два відрізки рівні (конгруентні) тоді і тільки тоді, коли їх довжини рівні; два кути рівні (конгруентні) тоді і тільки тоді, коли рівні їх градусні (радіанні) міри; трикутники  $ABC$  та  $A'B'C'$  рівні (конгруентні), якщо рівні їх відповідні сторони і відповідні кути.



7<sup>0</sup>. При русі відрізок переходить у рівний йому відрізок; кут – у рівний йому кут; трикутник – в рівний йому трикутник.

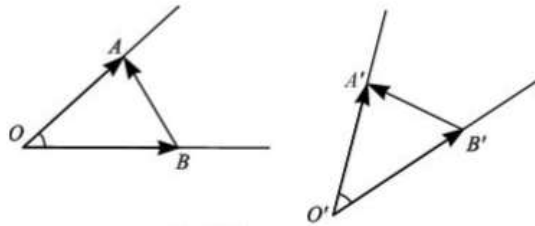
*Доведення.*

а)

Перше

очевидно.

б) Нехай при деякому русі точки  $A, B, O$  переходять в точки  $A', O', B'$ , так що кут  $AOB$  відображається на кут  $A'O'B'$  (мал. 20).



Мал. 20

За

визначенням

руху

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{O'A'}|, |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O'B'}|, |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{B'A'}| \quad (1).$$

Скористаємося далі очевидною тотожністю:

$$\vec{a} * \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2). \quad \text{Застосовуючи його до скалярних}$$

добутків  $\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O'A'} * \overrightarrow{O'B'}$  і враховуючи рівності (1), приходимо до висновку, що  $\overrightarrow{OA} * \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'A'} * \overrightarrow{O'B'}$  (2).

З (1) і (2) отримуємо  $\cos(\widehat{OA, OB}) = \cos(\widehat{O'A', O'B'})$ , звідки і отримуємо рівність кутів  $AOB$  та  $A'O'B'$ .

в) Нехай при русі  $f$  вершини  $A, B, C$  трикутника  $ABC$  переходять відповідно в точки  $A', B', C'$  (неколінеарні!), тоді відрізки  $AB, BC, CA$  відображаються на відрізки  $A'B', B'C', C'A'$  відповідно. Таким чином, трикутник  $ABC$  переходить у трикутник  $A'B'C'$ . За доведеним вище, відповідні сторони і відповідні кути цих трикутників рівні, тому трикутники рівні.

*Наслідок.* Дано прапор  $(O, h, p)$ . Нехай при русі  $f: O \rightarrow O', h \rightarrow h', p \rightarrow p'$ .

а. якщо  $A \in h, A' \in h'$  та  $OA = O'A'$ , то  $f(A) = A'$ .

б. якщо промінь  $q$  з початком в точці  $O$  розташований у півплощині  $p$ , а промінь  $q'$  з початком в точці  $O'$  – в півплощині  $p'$  і  $(h, q) = (h', q')$ , то  $f(q) = q'$ .

*Доведення.* а) Нехай  $f(A) = A_1$  тоді,  $A_1 \in h'$  та  $O'A_1 = OA$ . За умовою  $O'A' = OA$ , отже,  $O'A_1 = O'A'$ . Так як на даному промені від його початкової точки можна відкласти єдиний відрізок заданої довжини, то точки  $A'$  та  $A_1$  збігаються, тобто  $f(A) = A'$ . Наслідок (б) пропонуємо довести самостійно.

8<sup>0</sup>. При русі взаємно перпендикулярні прямі переходять у взаємно перпендикулярні прямі.

Цей наслідок безпосередньо випливає з 7<sup>0</sup>.

*Наслідок.* При русі ортонормований базис переходить у ортонормований базис.

9<sup>0</sup>. Якщо при деякому русі точка  $O$  переходить в точку  $O'$ , то окружність з центром у точці  $O$  переходить у коло того ж радіуса з центром в точці  $O'$ .

**Теорема 2.** Будь-який рух задається в ортонормованому базисі формулами виду  $x' = a_1x + b_1y + c_1$ ,  $y' = a_2x + b_2y + c_2$ , (\*) з ортогональною матрицею  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ .

*Доведення.* Нехай на площині заданий ортонормований базис  $R$  і рух  $f$  переводить точку  $M(x; y)$  в точку  $M'(x'; y')$  (всі координати беруться в базисі  $R$ ). Рух  $f$  переводить базис  $R$  в ортонормований базис  $R'$ . У базисі  $R'$  точка  $M'$  має координати  $x$  (наслідок 1<sup>0</sup>). Складаючи формули переходу від базису  $R$  до базису  $R'$  і застосовуючи ці формули до точки  $M'$  отримуємо:

$$x' = x * \cos \alpha - \varepsilon * y * \sin \alpha + x_0, \quad y' = x * \sin \alpha + \varepsilon * y * \cos \alpha + y_0$$

(\*\*) (нагадаємо, що в даному випадку  $x', y'$ - старі координати точки  $M'$ , а  $x, y$ - нові [9]). Так як формули (\*\*) виражають координати точки  $M'$  в базисі  $R$  через координати точки  $M$  в тому ж базисі, то ці формули і задають рух  $f$  в базисі  $R$ .

Позначаючи  $\cos \alpha = a_1$ ,  $-\varepsilon \sin \alpha = b_1$ ,  $x_0 = c_1$ ,  $\sin \alpha = b_2$ ,  $\varepsilon \cos \alpha = b_2$ ,  $y_0 = c_2$ , отримуємо формули виду (\*). Як легко перевірити, матриця, складена з коефіцієнтів при  $x$  та  $y$  в отриманих формулах (\*\*), є ортогональною, так що теорема доведена.

*Зауваження.*

1. Приходимо до висновку: відображення площини самої на себе є рухом тоді і тільки тоді, коли в деякому ортонормованому базисі воно задається лінійними формулами (\*) з ортогональною матрицею, складеною з коефіцієнтів при  $x$  та  $y$ .

2. Теорему 2 можна використати для відшукування формул деякого руху, заданого трьома парами відповідних точок  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$  (див. п. 4.4. у «Зведенні»).

3. З доведення теореми 2 випливає, що якщо рух переводить ортонормований базис  $R$  в ортонормований базис  $R'$ , то в базис  $R$  цей рух задається такими формулами, які виходять з формул переходу від базису  $R$  до базису  $R'$  шляхом заміни  $x$  на  $x'$ ,  $y$  на  $y'$  і навпаки. Цей факт служить основою відповідного прийому.

4. Формули (\*) в матричній формі можна записати так:

$$X' = A * X * X_0, \text{ де } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Будемо називати це рівність матричним рівнянням перетворення в базисі  $R$ . З вищевикладеного випливає, що матриця  $A$  є матриця переходу від базису  $R$  до базису  $R'$  (образу базиса  $R$ ). Зауважимо, що матричні рівняння можна застосовувати для будь-яких перетворень, заданих в аффіному базисі формулами виду (\*).

## 2.2. Рухи першого і другого роду

**Теорема 3.** Якщо перетворення  $f$  задано в аффіном базисі  $R = \{O, E_1, E_2\}$  формулами  $x' = a_1x + b_1y + c_1$ ,  $y' = a_2x + b_2y + c_2$  (\*) (або, що

те ж саме, матричним рівнянням  $X' = A * X * X_0$ ), то:

а) перетворення  $f$  переводить базис  $R$  в деякий афінний  $R' = \{O', E'_1, E'_2\}$ ;

б) формули (\*) можуть бути отримані з формул переходу від базису  $R$  до базису  $R'$  шляхом заміни  $x$  на  $x'$ ,  $y$  на  $y'$  і навпаки;

в) у матричному рівнянні перетворення  $f$  матриця  $A$  є матриця переходу від базису  $R$  до базису  $R'$ ;

г) перетворення  $f$  переводить довільну точку  $M$  з координатами  $x, y$  в базис  $R$  в точку  $M'$  з тими ж координатами в базисі  $R'$ .

*Доведення.* а) використовуючи формули (\*), знаходимо образи точок  $O, E_1, E_2$ :  $f(O) = O'(c_1; c_2)$ ,  $f(E_1) = E'_1(a_1 + c_1; a_2 + c_2)$ ,  $f(E_2) = E'_2(b_1 + c_1; b_2 + c_2)$ .

Таким чином,  $\overrightarrow{O'E'_1}(a_1; a_2), \overrightarrow{O'E'_2}(b_1; b_2)$ .

Так як  $f$  – перетворення площини, то  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , а це значить, що вектори  $\overrightarrow{O'E'_1}$  та  $\overrightarrow{O'E'_2}$  не колінеарні. Відповідно, трійка  $\{O', E'_1, E'_2\}$  представляє собою деякий афінний базис  $R'$  – образ базиса  $R$ .

б) Так як  $O'(c_1; c_2), \overrightarrow{O'E'_1}(a_1; a_2), \overrightarrow{O'E'_2}(b_1; b_2)$ , то формули переходу від базису  $R$  до базису  $R'$  має вид:  $x = a_1x' + b_1y' + c_1, y = a_2x' + b_2y' + c_2$  (1). Порівнюючи формули (1) з формулами (\*) перетворення  $f$ , приходимо до потрібного висновку.

в) Із формул (1) бачимо, що матриця  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  є матриця переходу від  $R$  до  $R'$ .

г) Нехай  $M(x; y)_R \xrightarrow{f} M'(x'; y')_R$ , тоді в силу формул (\*):

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \quad (2).$$

Позначимо координати точки  $M'$  в базисі  $R'$  через  $\bar{x}, \bar{y}$ . Запишемо формули переходу (1) для точки  $M'$ :

$$\begin{cases} x' = a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 \\ y' = a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 \end{cases} \quad (3)$$

Віднімаючи з рівняння (3) рівняння (2), отримуємо:

$$\begin{cases} a_1(\bar{x} - x) + b_1(\bar{y} - y) = 0 \\ a_2(\bar{x} - x) + b_2(\bar{y} - y) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Так як  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , то система (4) має єдине, а саме нульове рішення:

$(\bar{x} - x) = 0, (\bar{y} - y) = 0$ , звідки  $\bar{x} = x, \bar{y} = y$ , що і треба було довести.

Як бачимо, теорема 3 стверджує, що властивості а), б), в), г), перераховані у формуванні цієї теореми, переважають не тільки рух, але і будь-які перетворення, які в афінному базисі (не обов'язково ортонормованному!) задаються лінійними формулами виду (\*).

**Теорема 4.** Якщо перетворення  $f$  в афінному базисі  $R$  задається матричним рівнянням  $X' = A * X + X_0$ , то в будь-якому іншому афінному базисі  $\bar{R}$  перетворення  $f$  задається матричним рівнянням  $\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0)$ , де  $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \bar{X}' = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix}$  – координатні стовпці точок

$M$  та  $f(M)$  в базисі  $\bar{R}, C$  – матриця переходу від базису  $R$  до базису  $\bar{R}, \bar{X}_0$  – стовпець із вільних членів у формулах переходу від  $R$  до  $\bar{R}$ .

*Доведення.* Нехай перетворення  $f$  переводить довільну точку  $M$  в точку  $M'$ . Позначимо координати цих точок:  $M(x; y)_R, M(\bar{x}; \bar{y})_{\bar{R}}, M'(x'; y')_R, M'(\bar{x}'; \bar{y}')_{\bar{R}}$ .

Складемо формули перетворення координат при переході від базису  $R$  до базису  $\bar{R}$ :  $\begin{cases} x = c_{11}\bar{x} + c_{12}\bar{y} + x_0 \\ y = c_{21}\bar{x} + c_{22}\bar{y} + y_0 \end{cases}$  (для точки  $M$ ) та

$$\begin{cases} x' = c_{11}\bar{x}' + c_{12}\bar{y}' + x_0 \\ y' = c_{21}\bar{x}' + c_{22}\bar{y}' + y_0 \end{cases} \quad (\text{для точки } M').$$

Запишемо ці рівняння в матричній формі:

$$X = C * \bar{X} + \bar{X}_0 \quad (1),$$

$$X' = C * \bar{X}' + \bar{X}_0 \quad (2),$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \bar{X}' = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix}, \bar{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

За умовою теореми  $X' = A * X + X_0$ . Звідси, враховуючи (1) та (2), отримуємо :

$$\begin{aligned} C * \bar{X}' + \bar{X}_0 &= X' = A * X + X_0 = A * (C * \bar{X} + \bar{X}_0) + X_0 \\ &= A * C * \bar{X} + (A * \bar{X}_0 + X_0). \end{aligned}$$

Помножимо дві частини цього рівняння на  $C^{-1}$  зліва :

$$(C^{-1} * C) * \bar{X}' + C^{-1} * \bar{X}_0 = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0),$$

звідси

$\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0)$ , що і треба було довести.

*Наслідок. 1<sup>0</sup>.* Якщо перетворення  $f$  в деякому афінному базисі задано лінійними формулами виду

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, y' = a_2x + b_2y + c_2 \quad (*),$$

то в будь-якому іншому афінному базисі воно задається лінійними формулами того ж вигляду.

2<sup>0</sup>. Кожний рух в будь-якому афінному базисі задається лінійними формулами виду (\*).

**Теорема 5.** Якщо перетворення  $f$ , задане в базисі  $R$  лінійними формулами виду (\*), переводить базис  $R$  в однаково ( протилежно) орієнтований з ними базис  $R'$ , то вона переводить будь-який інший базис  $R_1$  також в однаково ( протилежно ) орієнтований з ними базис  $R'_1$ .

*Доведення.* Запишемо перетворення  $f$  в базис  $R$  в матричній формі :  $X' = A * X + X_0$ , де  $A$  – матриця переходу від базису  $R$  до базису  $R'$  – образу базису  $R$ .

В базисі  $R_1$  перетворення  $f$  задається матричним рівнянням  $\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0)$ , де  $C$  – матриця переходу від базису  $R$  до базису  $R_1$ , а  $C^{-1} * A * C$  – матриця переходу від базису  $R_1$  до базису  $R'_1$  – образу базису  $R_1$ .

Легко бачити, що  $\det(C^{-1} * A * C) = \det A \neq 0$ . Якщо базис  $R'$  та  $R$  однаково орієнтовані, то  $\det A > 0$ , але тоді  $\det(C^{-1} * A * C) > 0$  і, відповідно, базиси  $R'_1$  та  $R_1$  також однаково орієнтовані.

Якщо ж базис  $R'$  та  $R$  протилежно орієнтовані, то  $\det A < 0$ , але тоді  $\det(C^{-1} * A * C) < 0$  і, відповідно, базиси  $R'_1$  та  $R_1$  також протилежно орієнтовані, що і треба було довести.

Теорема 5 має місце, зокрема, і для рухів; вона робить коректним наступне визначення [15]. Рух  $f$  називається рухом першого (другого) роду, якщо воно зберігає (змінює) орієнтацію якогось базису (і, отже, будь-якого базису).

*Наслідок.* 3<sup>0</sup>. Нехай в ортонормованному базисі рух  $f$  задано формулами (\*). Якщо визначник, складений із коефіцієнтів при  $x$  та  $y$ , рівний 1, то  $f$  – рух першого роду; якщо цей визначник рівний  $-1$ , то  $f$  – рух другого роду.

4<sup>0</sup>. Якщо рух задано в ортонормованному базисі формулами (\*\*), то  $f$  є рухом першого роду тоді і тільки тоді коли,  $\varepsilon = 1$ , і рухом другого роду тоді і тільки тоді, коли  $\varepsilon = -1$ .

Як відомо, перенесення, поворот, центральна, осьова і змінна симетрії є рухами [5]. Виникає питання: чи існують рухи іншого виду, відмінні від перерахованих? Відповідь на це питання дають теореми про класифікацію рухів.

**Теорема 6.** Будь-який рух першого роду є або поворот, або паралельний перенос.

*Доведення.* Нехай  $f$  – довільний рух першого роду, заданий в деякому ортонормованному базисі  $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$  формулами (\*\*\*) (див. §10):

$$x' = x * \cos \alpha - y * \sin \alpha + x_0, y' = x * \sin \alpha + y * \cos \alpha + y_0.$$

Не порушуючи загальності, можна вважати, що  $\alpha \in [-\pi; \pi]$ .

З'ясуємо, чи має  $f$  інваріантні точки. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} x = x * \cos \alpha - y * \sin \alpha + x_0 \\ y = x * \sin \alpha + y * \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (1 - \cos \alpha) * x + y * \sin \alpha = x_0 \\ -x * \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) * y = y_0 \end{cases} \quad (1).$$

Визначник системи:  $\Delta = 2(1 - \cos \alpha)$ . Якщо  $\alpha \neq 0$ , то  $\Delta \neq 0$ . В цьому випадку рух  $f$  має єдину інваріантну точку  $O_1(x_1; y_1)$ . Перенесемо початок координат в точку  $O_1$  та знайдемо формули руху  $f$  в базисі  $R_1 = \{O_1, \bar{i}, \bar{j}\}$ . В матричній формі шукані формули мають вид :

$$\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0) (*) \quad (\text{теорема 4}), \quad \text{де}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \bar{X}' = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} - \text{координатні стовпці в базисі } R_1 \text{ довільної точки } M \text{ і її}$$

образ :  $M'$ ;  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  – матриця перетворення  $f$  в базисі  $R$ ;  $C$  – матриця переходу від  $R$  до  $R_1$  ( в нашому випадку  $C = C^{-1} = E$ );  $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ .

Так як  $(x_1; y_1)$  – розв'язання системи (1), то  $\bar{X}_0 = A * \bar{X}_0 + X_0$  і рівність (\*) має вид :  $\bar{X}' = A * \bar{X}$ . Записуючи отримане рівняння в координатній формі, знаходимо формули  $f$  в базисі  $R_1$  :  $\bar{x}' = \bar{x} * \cos \alpha - \bar{y} * \sin \alpha$ ,  $\bar{y}' = \bar{x} * \sin \alpha + \bar{y} * \cos \alpha$ . Як бачимо, рух  $f$  представляє собою поворот навколо точки  $O_1$  на кут  $\alpha$ .

Якщо ж  $\alpha = 0$ , то формули (\*\*) приймають вигляд  $x' = x + x_0$ ,  $y' = y + y_0$ . В цьому випадку  $f$  є перенос на вектор  $\vec{p}(x_0; y_0)$ . Теорема доведена.

**Теорема 7.** Будь-який рух другого роду є або осьова симетрія, або ковзаюча симетрія.

*Доведення.* Нехай  $f$  – довільний рух другого роду, заданий в деякому ортонормованому в базисі  $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$  формулами (\*\*):

$$x' = x * \cos \alpha + y * \sin \alpha + x_0, \quad y' = x * \sin \alpha - y * \cos \alpha + y_0.$$

Знайдемо формули цього руху в базисі  $R_1 = \{O_1, \bar{i}_1, \bar{j}_1\}$ , який однаково орієнтований в базисом  $R$  і задовольняє умові:  $O_1 \left( \frac{x_0}{2}; \frac{y_0}{2} \right)$ ,  $(\vec{i}, \vec{i}_1) = \frac{\alpha}{2}$ .

В матричній формі шукані формули мають вид :

$$\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0),$$



де  $\bar{X}, \bar{X}'$  – координатні стовпці в базисі  $R_1$  точки  $M$  та її образу  $M'$ ;

$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$  – матриця руху  $f$  в базисі  $R$ ;

$C = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  – матриця переходу від  $R$  до  $R_1$ ;

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \bar{X}_0 = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{2} \\ \frac{y_0}{2} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо послідовність :  $C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, C^{-1} * A * C =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0) = (x_0 * \cos \frac{\alpha}{2} + y_0 * \sin \frac{\alpha}{2}).$$

Таким чином, в базисі  $R_1$  рух  $f$  задається формулами:

$$\bar{x}' = \bar{x} + (x_0 * \cos \frac{\alpha}{2} + y_0 * \sin \frac{\alpha}{2}), \bar{y}' = -\bar{y}.$$

Тепер стає явним, що якщо  $x_0 * \cos \frac{\alpha}{2} + y_0 * \sin \frac{\alpha}{2} = 0$ , то  $f$  –осьова симетрія; якщо ж  $x_0 * \cos \frac{\alpha}{2} + y_0 * \sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ , то  $f$  –ковзаюча симетрія.

Теорему доведено.

*Примітка.* Порівнюючи ці результати з таблицею 1, приходимо до наступних висновків.

1. Рух першого роду, що не має інваріантних точок, є паралельним перенесенням.
2. Рух першого роду з єдиною інваріантною точкою є поворотом.
3. Рух другого роду, що не має інваріантних точок, є ковзної симетрією.
4. Рух другого роду, що має пряму інваріантних точок, є осьовою симетрією.

Таким чином, знаючи рід і кількість інваріантних точок деякого руху, можна визначити його вид.

Приклад 1. Перетворення  $f$  задано в ортонормованому базисі формулами  $x' = -x + 5, y' = y + 1$ . Доведемо, що  $f$  – рух, і визначимо його рід та вид.

*Розв'язання.* Матриця  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , складена з коефіцієнтів при  $x$  та  $y$ , є ортогональною, відповідно,  $f$  – рух. Так як визначник цієї матриці рівний  $-1$ , то  $f$  – рух другого роду.

Знайдемо інваріантні точки:  $\begin{cases} x = -x + 5 \\ y = y + 1 \end{cases}$ . Система розв'язання немає, відповідно, інваріантних точок немає і тому  $f$  – ковзна симетрія.

## РОЗДІЛ 3

### ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

#### 3.1. Гомотетія

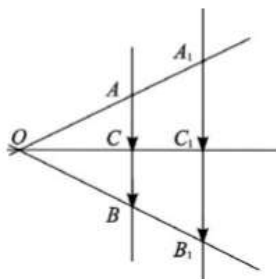
Нехай дано точка  $O$  і число  $k \neq 0$ . Гомотетія з центром  $O$  та коефіцієнтом  $k$  називається відображення площини самої в себе, при якому будь-яка точка  $M$  переходить в таку точку  $M'$ , що  $\overrightarrow{OM'} = k * \overrightarrow{OM}$ .

Позначається:  $H_O^k$ .

Розглянемо наступні властивості гомотетії

1<sup>0</sup> При гомотетії колінеарні точки переходять в колінеарні точки.

*Доведення.* Нехай при гомотетії  $H_O^k$  точки  $A, B, C$  переходять в точки  $A_1, B_1, C_1$ , тоді за основною властивістю гомотетії  $\overrightarrow{A_1B_1} = k * \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{A_1C_1} = k * \overrightarrow{AC}$  (мал.45).



Мал.45

Так як точки  $A, B, C$  колінеарні, то існує таке число  $\lambda$ , що  $\overrightarrow{AC} = \lambda * \overrightarrow{AB}$ . Помножуючи обидві частини цього рівняння на  $k$  і враховуючи попередні рівняння, отримуємо  $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda * \overrightarrow{A_1B_1}$ . Останнє значить, що точки  $A_1, B_1, C_1$  колінеарні, що і потрібно було довести.

2<sup>0</sup> При гомотетії зберігається просте відношення трьох точок.

*Доведення.* Нехай при гомотетії  $H_O^k$  колінеарні точки  $A, B, C$  переходять відповідно в точки  $A_1, B_1, C_1$  (мал. 45).

Позначимо  $(AB, C) = \lambda$  і доведемо, що  $(A_1B_1, C_1) = \lambda$ .

За означенням простого відношення із рівняння  $(AB, C) = \lambda$  випливає, що  $\overrightarrow{AC} = \lambda * \overrightarrow{CB}$ .

В силу основної властивості гомотетії

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda * \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{C_1B_1} = k * \overrightarrow{CB} \quad (1).$$

Помножимо обидві частини рівняння (1) на  $k$  і враховуючи рівняння (2), отримуємо  $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda * \overrightarrow{C_1B_1}$ .

Це значить, що  $(A_1B_1, C_1) = \lambda$ , що і потрібно було довести.

Перерахуємо ті властивості гомотетії, що є логічними наслідками властивостей  $1^0 - 2^0$  [14].

3<sup>0</sup> При гомотетії неколінеарні точки переходять в неколінеарні точки.

*Наслідок.* При гомотетії афінний базис переходить в афінний базис.

4<sup>0</sup> При гомотетії зберігається відношення «лежати між» для будь-яких трьох точок.

5<sup>0</sup> При гомотетії пряма відображається на пряму, відрізок-на відрізок, промінь –на промінь, півплощина –на півплощину, кут-на кут.

*Зауваження.* В останньому випадку, як і при русі, внутрішня область кута відображається на внутрішню область кута.

6<sup>0</sup> При гомотетії паралельні прямі переходять в паралельні прямі.

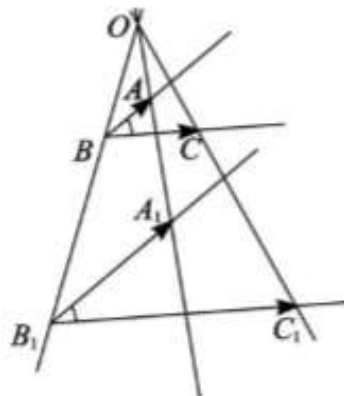
Це випливає очевидним чином із основної властивості гомотетії.

8<sup>0</sup> При гомотетії кут переходить в рівний йому кут.

*Доведення.* Дано кут  $ABC$  (мал.46). Нехай при гомотетії  $H_O^k$  точки  $A, B, C$  переходять в точки  $A_1, B_1, C_1$  і, значить, кут  $ABC$  переходить в кут  $A_1B_1C_1$ . Позначимо:  $\Delta ABC = \varphi$ ,  $\Delta A_1B_1C_1 = \varphi_1$ . Маємо:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{BA} * \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| * |\overrightarrow{BC}|} \quad (1),$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\overrightarrow{B_1A_1} * \overrightarrow{B_1C_1}}{|\overrightarrow{B_1A_1}| * |\overrightarrow{B_1C_1}|} \quad (2).$$



Мал.46

За основною властивістю гомотетії  $\overrightarrow{B_1A_1} = k * \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B_1C_1} = k * \overrightarrow{BC}$ , відповідно,

$$\cos \varphi_1 = \frac{k^2 * \overrightarrow{BA} * \overrightarrow{BC}}{|k^2| * |\overrightarrow{BA}| * |\overrightarrow{BC}|} = \cos \varphi.$$

Так як  $\cos \varphi = \cos \varphi_1$  та  $\varphi, \varphi_1 \in [0, \pi]$ , то  $\varphi = \varphi_1$  і, відповідно,  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$  що і потрібно було довести.

*Наслідок.* При гомотетії перпендикулярні прямі переходять в перпендикулярні прямі.

9<sup>0</sup> При гомотетії коло переходить в коло [12].

10<sup>0</sup> Якщо  $k \neq 1$ , то гомотетія  $H_O^k$  має єдину інваріантну точку.

Ця властивість, як бачимо, витікає із означення гомотетії. Для доведення можна використовувати також формули гомотетії.

*Приклад.* Дано точки  $A$  та  $B$  і довільне число  $k$ , відмінне від  $0$  та  $1$ . Доведемо, що існує єдина точка  $O$ , така, що при гомотетії  $H_O^k$  точка  $A$  переходить в точку  $B$ .

*Пошук розв'язання.* Припустимо, що шукана точка  $O$  існує, тоді  $\overrightarrow{OB} = k * \overrightarrow{OA}$ . Виразимо вектор  $\overrightarrow{OA}$  через  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -k * \overrightarrow{OA}$ , звідки  $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{1-k} * \overrightarrow{AB}$  (1).

І так, якщо шукана точка існує, то вона задається умовою (1).

*Розв'язання.* Розглянемо гомотетію  $H_O^k$ , де точка  $O$  визначається умовою (1). Доведемо, що при цій гомотетії  $A \rightarrow B$ . Насправді із (1) отримуємо:  $(k - 1) * \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ , звідки  $\overrightarrow{OB} = k * \overrightarrow{OA}$ .

Це значить, що  $A \xrightarrow{H_O^k} B$ , що і потрібно було довести.

Доведемо що точка  $O$  єдина. Припустимо, що існує ще одна точка – точка  $S$ , така, що при гомотетії  $H_S^k$   $A \rightarrow B$ , тоді  $\overrightarrow{SB} = k * \overrightarrow{SA}$ .

Звідки отримуємо:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = -k * \overrightarrow{AS}$ ,  $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{1-k} * \overrightarrow{AB}$  (2).

Порівнюючи (1) та (2), робимо висновок, що  $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AO}$  і, відповідно,  $S = O$ , що і потрібно було довести.

*Зауваження.* Зауважемо, що пошук розв'язання даної задачі мав початок з речення, де ціль задачі досягнуто («Припустимо, що шукана точка  $O$  існує...»). Далі, із цього припущення був зроблений висновок ( $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1-k} * \overrightarrow{AB}$ ), який став кінцевим розв'язанням .

Такий прийом нерідко використовується на етапі пошуку розв'язання [7.]

### 3.2. Перетворення подібності

Перетворення площини називається перетворенням подібності з коефіцієнтом  $k(k > 0)$ , якщо для будь-яких двох точок  $A$  та  $B$  і їх образів  $A'$  та  $B'$  виконується умова  $A'B' = k * AB$ .

Кажуть більш простішими словами, перетворення подібності є таке перетворення площини, при якому всі відстані змінюються в одному і тому ж відношенні. Коефіцієнт  $k$  і характеризує як раз міру цих змін. Іноді перетворення подібності називається коротко подібностями.

#### ***Теорема 8. Основна теорема про перетворення подібності***

Будь-яке перетворення подібності можна представити у вигляді композиції гомотетії і руху.

*Доведення.* Нехай  $f$  – перетворення подібності з коефіцієнтом  $k$ . Розглянемо композицію  $\varphi = f \circ H_O^{\frac{1}{k}}$ , де  $O$  – довільна фіксована точка. Легко встановити, що  $\varphi$  – рух (див. впр. 337). Помножимо обидві частини останнього рівняння на  $H_O^k$  справа:

$$\varphi \circ H_O^k = \left( f \circ H_O^{\frac{1}{k}} \right) \circ H_O^k.$$

Перетворюючи праву частину цього рівняння, отримуємо :

$$\varphi \circ H_O^k = f \circ \left( H_O^{\frac{1}{k}} \circ H_O^k \right) = f \circ H_O^1 = f \circ e = f.$$

Отже,  $f = \varphi \circ H_O^k$ , де  $\varphi$  – рух, що і потрібно було довести.

*Приклад .* Нехай дано трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$ , в деяких  $A = A_1, \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ .

Доведемо, що існує єдине перетворення подібності, при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$ .

*Розв'язання.* 1. Позначимо:  $\frac{A_1B_1}{AB} = k$ , то  $A_1B_1 = k * AB, A_1C_1 = k * AC$ .

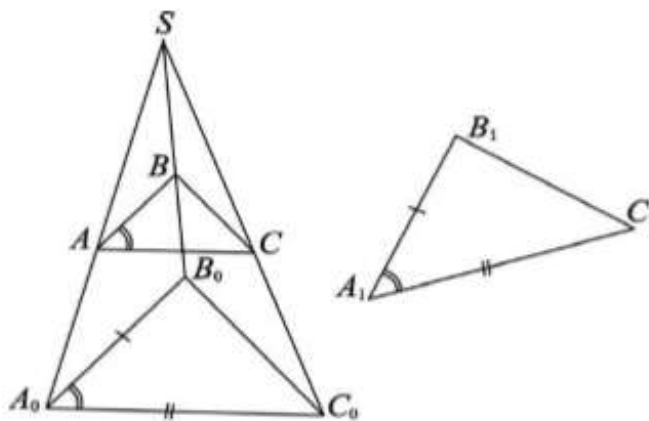
Розглянемо гомотетію  $H_S^k$  (мал. 48); точка  $S$  вибрана довільно. При цьому трикутник  $ABC$  переходить в трикутник  $A_0B_0C_0$ , в якому  $\angle A_0 = \angle A = \angle A_1$ ,

$$A_0B_0 = k * AB = A_1B_1,$$

$$A_0C_0 = k * AC = A_1C_1.$$

Звідси випливає, що трикутник  $A_0B_0C_0$  та  $A_1B_1C_1$  рівні і , значить, протирічить руху  $\varphi$ , при якому  $A_0 \rightarrow A_1, B_0 \rightarrow B_1, C_0 \rightarrow C_1$ .

Композиція  $\varphi \circ H_S^k$  (позначимо її через  $f$ ) є перетворенням подібності і переводить точки  $A, B, C$  в точки  $A_1, B_1, C_1$  відповідно.



Мал.48

Отже, існування шуканого перетворення подібності встановлено. Доведемо його єдиність.

2. Припустимо, що існує ще одне перетворення подібності  $g$ , при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$ . Ясно, що коефіцієнт цього перетворення рівний  $\frac{A_1B_1}{AB}$ , тобто  $k$ .

Розглянемо композицію  $g \circ H_S^{\frac{1}{k}}$ . Це перетворення є рухом і переводить точки  $A_0, B_0, C_0$  в точки  $A_1, B_1, C_1$  відповідно.

Так як в трикутниках  $A_0B_0C_0$  та  $A_1B_1C_1$   $\angle A_0 = \angle A_1, A_0B_0 = A_1B_1, A_0C_0 = A_1C_1$ , то рух, який переводить точки  $A_0, B_0, C_0$  в точки  $A_1, B_1, C_1$  єдиний.

Відповідно, рух  $g \circ H_S^{\frac{1}{k}}$  збігається з рухом  $\varphi: \varphi = g \circ H_S^{\frac{1}{k}}$ . Помножимо обидві частини цього рівняння на  $H_S^k$ , отримуємо:  $\varphi \circ H_S^k = g$ , звідки  $f = g$ , що і потрібно було довести.

Доведене твердження значить, кажучи трохи інакше, що будь-яке перетворення подібності однозначно визначається парою трикутників  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$ , які задовольняють умові:  $\angle A_1 = A, \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ .

Будь-який рух перетворення подібності з коефіцієнтом  $k = 1$ . Тому до числа подібності відносять паралельне перенесення, поворот (зокрема, центральна симетрія), осьова симетрія, ковзна симетрія. До числа



перетворень подібності відноситься також гомотетія [4]. Розглянемо нові приклади перетворень подібності.

#### *Центрально-подібне обертання*

Центрально-подібним обертанням будемо називати композицію гомотетії  $H_O^k$  і повороту  $R_O^\alpha$ , який відмінний від центральної симетрії і тотожного перетворення.

Зрозуміло, що центрально-подібним обертанням  $R_O^\alpha \circ H_O^k$  є перетворення подібності з коефіцієнтом, рівним  $|k|$ , тому центрально-подібне обертання має всі властивості перетворення подібності [18].

Якщо  $k = 1$ , то центрально-подібне обертання  $R_O^\alpha \circ H_O^k$  є поворот, відмінний від центральної симетрії і тотожного перетворення.

#### *Центрально-подібна симетрія*

Центрально-подібною симетрією будемо називати композицію осьової симетрії  $S_\alpha$  і гомотетії  $H_O^k$ , де  $O \hat{I} a$   $k \neq \pm 1$ .

Зрозуміло, що центрально-подібна симетрія  $H_O^k \circ S_\alpha$  є перетворенням подібності з коефіцієнтом, рівним  $|k|$ , і тому вона має всі властивості перетворення подібності.

### **3.3. Аналітичний вираз перетворення подібності**

**Теорема 9.** Будь-яке перетворення подібності з коефіцієнтом  $k$  задається в ортонормованому базисі  $R = \{O, E_1, E_2\}$  формулами виду

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, y' = a_2x + b_2y + c_2 \quad (*)$$

$$\text{які задовольняють умовам } a_1^2 + a_2^2 = k^2 \quad (1),$$

$$b_1^2 + b_2^2 = k^2 \quad (2),$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \quad (3).$$

*Доведення.* Представимо дане перетворення подібності  $f$  у вигляді композиції гомотетії  $H_O^k$  і руху  $\varphi: f = \varphi \circ H_O^k$ .

Складемо формули перетворення  $H_O^k$  і  $\varphi$  в базисі  $R$ :

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} (H_0^k); \quad \begin{cases} x' = x * \cos \alpha - \varepsilon * y * \sin \alpha + x_0 \\ y' = x * \sin \alpha + \varepsilon * y * \cos \alpha + y_0 \end{cases} (\varphi).$$

Використовуючи ці формули, знаходимо формули перетворення  $f$ :

$$\begin{cases} x' = k(x * \cos \alpha - \varepsilon * y * \sin \alpha) + x_0 \\ y' = k(x * \sin \alpha + \varepsilon * y * \cos \alpha) + y_0 \end{cases} (**).$$

Позначимо

$$\begin{aligned} k * \cos \alpha &= a_1, & -k * \varepsilon * \sin \alpha &= b_1, & x_0 &= c_1, \\ k * \sin \alpha &= a_2, & k * \varepsilon * \cos \alpha &= b_2, & y_0 &= c_2, \end{aligned}$$

отримуємо формули виду (\*), причому коефіцієнти при  $x$  та  $y$ , як легко побачити, задовольняють умовам (1), (2), (3), що і потрібно було довести.

Зіставивши цю теорему з [3], приходимо до висновку: відображення площини самої в себе є перетворенням подібності з коефіцієнтом  $k$  тоді і тільки, коли в деякому ортонормованому базисі воно задається лінійними формулами (\*), які задовольняють умови (1), (2), (3).

*Зауваження 1.* Формули (\*) можна записати в матричному вигляді наступним чином :

$$X' = A * X + X_0, \text{ де } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

*Зауваження 2.* Із теореми 9 слідує, що до перетворення подібності застосовуються теореми 3-5, які, нагадаємо, мають місце для будь-яких перетворень площини, заданих в деякому афінному базисі лінійними формулами, тобто формулами виду (\*). Зокрема, застосовуючи до перетворення подібності наслідок 1 теореми 4, отримуємо наступну властивість.

*Будь-яка подібність задається в будь-якому афінному базисі лінійними формулами виду (\*).*

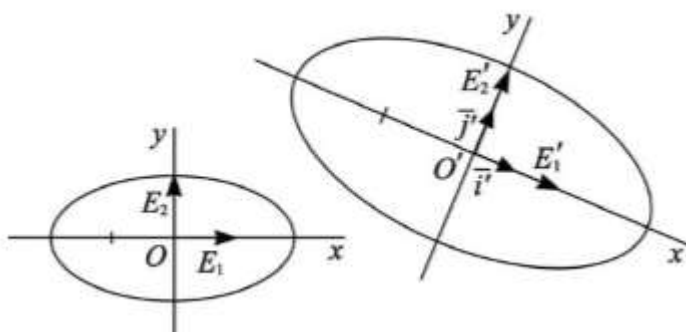
Теорема 5, сформульована для перетворення подібності, приймає наступний вигляд.

**Теорема 5'.** Якщо подібність  $f$  переводить базис  $R$  в однаково (протилежно) орієнтований з ним базис  $R'$ , то воно переводить будь-який

інший базис  $R_1$  також в однаково ( протилежно) орієнтований з ним базис  $R'_1$ .

Приклад. Доведемо, що при будь-якому перетворенні подібності еліпс переходить в еліпс.

*Розв'язання.* Нехай еліпс  $\omega$  задано в ортонормованому базисі  $R = \{O, E_1, E_2\}$  рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (мал. 49).



Мал.49

Перетворення подібності  $f$  переводить базис  $R$  в базис  $R' = \{O', E'_1, E'_2\}$ , в якому  $O'E'_1 = k * OE_1, O'E'_2 = k * OE_2, O'E'_1 \perp O'E'_2$  ( $k$  – коефіцієнт перетворення  $f$ ). В базисі  $R'$  фігура  $\omega' = f(\omega)$  задається тим самим рівнянням, що і фігура  $\omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Розглянемо базис  $\vec{R} = \{O', \vec{i}', \vec{j}'\}$ , де  $\vec{i}' = \frac{1}{k} * \overrightarrow{O'E'_1}, \vec{j}' = \frac{1}{k} * \overrightarrow{O'E'_2}$ . Цей базис є, як бачимо, ортонормованим. Формули переходу від  $R'$  до  $\vec{R}$  має вигляд:  $x = \frac{1}{k} * x', y = \frac{1}{k} * y'$ .

Використовуючи ці формули, знаходимо рівняння фігури  $\omega'$  в базисі  $R$ :  $\frac{x'^2}{(ka)^2} + \frac{y'^2}{(kb)^2} = 1$ .

Звідси робимо висновок, що фігура  $\omega'$  є еліпс з півосями, рівними  $ka$  та  $kb$ .

Зауважимо, що ексцентриситети  $\varepsilon$  та  $\varepsilon'$  еліпсів  $\omega$  та  $\omega'$  рівні. Дійсно,

$$\varepsilon' = \frac{\sqrt{(ka)^2 - (kb)^2}}{ka} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon.$$

Із теореми 5' (§23) випливає, що будь-яке перетворення подібності або зберігає орієнтацію будь-якого базису, або змінює його. Це дає нам можливість зробити наступне означення.

Перетворення подібності називається подібністю першого роду (другого роду), якщо воно зберігає (змінює) орієнтацію будь-якого базису.

Нехай подібність  $f$  задано в деякому базисі  $R$  формулами (\*) із [6]. Як відомо, матриця  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  є матрицею переходу від базису  $R$  до базису  $R'$  – образу  $R$ . Звідси, враховуючи визначення однаково ( протилежно ) орієнтованих базисів, приходимо до *наслідку*.

Подібність  $f$ , задане формулами  $x' = a_1x + b_1y + c_1, y' = a_2x + b_2y + c_2$ , є подібністю першого роду ( другого роду) тоді і тільки тоді, коли  $\det A > 0$  ( $\det A < 0$ ). Зокрема, якщо перетворення  $f$  задане формулами (\*\*) із [6], то при  $\varepsilon = 1$   $f$  – подібність першого роду, а при  $\varepsilon = -1$   $f$  – подібність другого роду.

### 3.4. Класифікація перетворень подібності

Як відомо, до числа перетворень подібності відносять паралельний перенос, гомотетію, центральну-подібне обертання (зокрема, поворот), осьова симетрія, ковзна симетрія, центральну-подібна симетрія [23]. Виникає запитання: чи існує перетворення подібності, відмінне від перерахованих вище? Відповідь на це запитання дають нижче класифіковані теореми.

**Теорема 10.** Будь-яка подібність першого роду є або паралельний перенос, або гомотетія, або центральну-подібне обертання.

*Доведення.* Нехай  $f$  – довільна подібність першого роду з коефіцієнтом  $k$  ( $k > 0$ ), задане в деякому ортонормованому базисі  $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$  формулами

$$\begin{aligned}x' &= k(x * \cos \alpha - y * \sin \alpha) + x_0, \\y' &= k(x * \sin \alpha + y * \cos \alpha) + y_0.\end{aligned}$$

Не порушуючи загальності, можна вважати, що  $\alpha \in [-\pi; \pi]$ .

1. Якщо  $k = 1$ , то  $f$  є рухом першого роду і, як бачимо, є або переносом (при  $\alpha = 0$ ), або поворотом навколо точки  $O$  на кут  $\alpha \in [-\pi; \pi]$  і відмінний від 0.

Якщо при цьому (в випадку повороту)  $\alpha = \pm\pi$ , то  $f$  є центральна симетрія- частинним випадком гомотетії.

Якщо ж  $\alpha = \pm\pi$  та  $\alpha \neq 0$ , то  $f$  – поворот – частковий випадок центрально-подібного обертання.

2. Нехай  $k \neq 1$ , тоді перетворення  $f$  відмінне від руху і має єдину інваріантну точку  $O_1(x_1; y_1)$  (впр.380).

Перенесемо початок координат в точку  $O_1$  і складемо формули перетворення  $f$  в базисі  $R_1\{O_1, \vec{i}, \vec{j}\}$ . В матричній формі шукані формули мають вигляд :

$$\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0) \quad (1),$$

де  $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$  та  $\bar{X}' = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix}$  – координатні стовпці в базисі  $R_1$

довільної точки  $M$  та її образу  $M'$ ;  $A = \begin{pmatrix} k * \cos \alpha & -k * \sin \alpha \\ k * \sin \alpha & k * \cos \alpha \end{pmatrix}$  – матриця перетворення  $f$  в базисі  $R$ ;  $C$  – матриця переходу від базису  $R$  до базису  $R_1$  (в нашому випадку  $C = C^{-1} = E$ );  $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ .

Так як  $(x_1; y_1)$  – розв'язок системи  $\begin{cases} x = k * (x * \cos \alpha - y * \sin \alpha) + x_0 \\ y = k * (x * \sin \alpha + y * \cos \alpha) + y_0 \end{cases}$ , то  $\bar{X}_0 = A * \bar{X}_0 + X_0$ , і тому матричне рівняння (1) приймає вигляд :  $\bar{X}' = AX$ . Записавши його в координатній формі, отримуємо формули перетворення  $f$  в базис

$$R_1: \begin{cases} \bar{x}' = k * (\bar{x} * \cos \alpha - \bar{y} * \sin \alpha) \\ \bar{y}' = k * (\bar{x} * \sin \alpha + \bar{y} * \cos \alpha) \end{cases}.$$

Звідси бачимо, що перетворення  $f$  є композиція гомотетії  $H_{O_1}^k$  та повороту  $R_{O_1}^\alpha$ .

Якщо поворот  $R_{O_1}^\alpha$  є тотожне перетворення (при  $\alpha = 0$ ), або центральна симетрія (при  $\alpha = \pm\pi$ ), то  $f$  є гомотетія; в іншому випадку (тобто при  $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pm\pi$ )  $f$  є центрально-подібне обертання. Теорему доведено.

**Теорема 11.** Будь-яка подібність другого роду є або осьова симетрія, або ковзна симетрія, або центрально-подібна симетрія.

*Доведення.* Нехай  $f$  – довільна подібність другого роду, задане в ортонормованому базисі  $R_1\{O_1, \vec{i}, \vec{j}\}$  формулами

$$\begin{cases} x' = k(x * \cos \alpha - y * \sin \alpha) + x_0 \\ y' = k(x * \sin \alpha + y * \cos \alpha) + y_0 \end{cases}, \text{ де } \alpha \in [-\pi; \pi].$$

Якщо  $k = 1$ , то  $f$  рух другого роду і, відповідно, є або осьовою симетрією, або ковзною симетрією.

Нехай  $k \neq 1$ , тоді  $f$  має єдину інваріантну точку  $O_1(x_1; y_1)$  (впр.380).

Розглянемо ортонормований базис  $R_1\{O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1\}$ , який однаково орієнтований з базисом  $R$  і задовольняє умові  $(\vec{i}, \vec{i}_1) = \frac{\alpha}{2}$ .

Формули перетворення  $f$  в базисі  $R_1$  мають вигляд  $\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} + C^{-1} * (A * \bar{X}_0 + X_0 - \bar{X}_0)$  (1), де, як в теоремі 5,  $\bar{X}, \bar{X}'$  – координатні стовпці в базисі  $R_1$  довільної точки  $M$  і її образу  $M'$ ;

$A = \begin{pmatrix} k * \cos \alpha & k * \sin \alpha \\ k * \sin \alpha & -k * \cos \alpha \end{pmatrix}$  – матриця перетворення  $f$  в базисі  $R$ ;

$C = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$  – матриця переходу від  $R$  до  $R_1$ ;

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \bar{X}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Так як  $(x_1; y_1)$  – розв'язання системи

$$\begin{cases} x = k(x * \cos \alpha - y * \sin \alpha) + x_0 \\ y = k(x * \sin \alpha + y * \cos \alpha) + y_0 \end{cases}$$

то  $\bar{X}_0 = A * \bar{X}_0 + X_0$ . Тому рівняння (1) приймає вигляд :

$$\bar{X}' = (C^{-1} * A * C) * \bar{X} \quad (2).$$

Далі знаходимо :  $C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, C^{-1} * A * C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$

Таким чином, рівняння (2) в координатній формі має вигляд :

$$\begin{cases} \bar{x}' = k\bar{x} \\ \bar{y}' = -k\bar{x} \end{cases}$$

Звідси, враховуючи , що  $k \neq \pm 1$  (інакше  $f \in \text{рух}$ ), робимо висновок, що  $f \in \text{центрально-подібною симетрією}$ . Теорему доведено.

*Приклад.* Перетворення  $f$  задане в ортонормованому базисі формулами  $\begin{cases} x' = 3x + 7y - 1 \\ y' = 7x - 3y + 2 \end{cases}$

Доведемо, що  $f$  – перетворення подібності і визначимо його вид.

*Розв'язання.* Матриця, яка складається із коефіцієнтів при  $x$  та  $y$ , має вигляд  $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$  і задовольняє наступним умовам :

$$3^2 + 7^2 = 7^2 + (-3)^2 = 21, 3 * 7 + 7 * (-3) = 0.$$

Відповідно , в силу ознаки перетворення подібності [24]  $f$  – перетворення подібності з коефіцієнтом  $k = \sqrt{21}$ . Так як  $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -21 < 0$ , то  $f$  подібність другого роду, а так як  $k \neq 1$ , то  $f$  – центрально-подібна симетрія.

## ВИСНОВКИ

Поняття про перетворення в геометрії виникло насамперед з розгляду рухів. Особливістю ж рухів, найбільш важливою з точки зору геометрії, є збереження величини і форми фігури. Рухома фігура в усі моменти руху зберігає свою форму і розміри, вона така ж в кінці руху, як і на початку. Таким чином, якщо брати тільки початковий і кінцевий моменти руху, то ми можемо встановити відповідність між точками фігури в початковому і кінцевому її положенні, при якому кожній точці  $M$  фігури  $F$  у початковому положенні тіла ставиться у відповідність точка, в яку переходить точка  $M$ , коли фігура  $F$  переміститься з початкового положення у кінцеве. При цьому, якщо точки  $M$  і  $N$  фігури  $F$  перейдуть у точки  $M'$  і  $N'$ , то відрізки  $MN$  і  $M'N'$  рівні між собою. У геометрії під рухом розуміють не процес переміщення фігури, а вказану вище відповідність між точками фігури у початковому і кінцевому її положенні. Такий підхід до справи дозволяє розглядати рух у геометрії як відображення, що переводить кожен відрізок у рівний йому відрізок. І таке відображення є найпростішим з геометричної точки зору, оскільки воно зберігає як форму, так і розміри фігури, змінюючи лише її розташування.

Теорія геометричних перетворень, яка виникла як узагальнення поняття руху, використавши теорію точкових множин і елементи теорії групи, суттєво вплинула на розуміння предмету геометрії. Подібно до того як метод координат привів до злиття в єдине ціле геометрії, аналізу і алгебри, теорії груп, по суті справи, об'єднує в одне ціле уже не тільки математичні, але й інші природничі і навіть гуманітарні науки. Серед усіх видів геометричних перетворень особливе місце займає осьова симетрія. Геометрія перетворень подає альтернативне бачення, контрастне з класичною геометрією, і дозволяє відкрити шлях для аналітичної геометрії чи лінійної алгебри (в якій розширено поняття симетрії). Дійсно, можна також виразити



геометрію перетворень завдяки складним числам, комплексним або завдяки матрицям.

Широке застосування у практиці мають й інші геометричні перетворення. Так, значна частина фізичних рухів (так звані поступальні переміщення), які використовуються в різних механізмах, зводяться до паралельного перенесення. За допомогою паралельного перенесення можна розв'язувати багато практичних задач. Також у фізиці і техніці часто знаходиться застосування обертання - поворот як навколо точки, так і навколо осі в просторі (існує теорія обертового руху, обертових спектрів тощо). Вагоме значення має теорія обертання в астрономії.

Результати теорій геометричних перетворень, як і інших розділів математики, застосовуються до розв'язання важливих задач практики, тому що в них описані властивості і закономірності реальних предметів і явищ матеріального світу, і, що саме характерне, не одного якого-небудь предмету чи явища, а надзвичайно великої їх кількості, які існують самостійно і незалежно одне від одного і які разом з тим знаходяться між собою у нерозривному діалектичному зв'язку.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адлер А. Теория геометрических построений / Переклад з німецького Г. М. Фихтенгольца/ А.Адлер - Вид. 3-тє. - Л.: Учпедгиз, 1940. - 232 с.
2. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение/ И.И. Александров - Видання вісімнадцяте. - М.: Учпедгиз, 1950. - 176 с.
3. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: Книжка для вчителя/ М.І.Антоненко - К.: Рад. шк., 1991. - 128 с.
4. Аргунов Б.И. Геометрические построения на плоскости. Пособие для студентов педагогических институтов/ Б.И.Аргунов, М.Б. Балк - Вид. 2. - М.: Учпедгиз, 1957.-268 с.
5. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач: Посібник для вчителя/ Г.П.Бевз –К.: Рад.школа, 1988.
6. Болтянский В.Г. Поворот и центральная симметрия // Математика в школе/ В.Г.Болтянский -1989. - №6. – С. 108-120.
7. Болтянский В.Г. Преобразования. Векторы : пособие для учителей / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. — М. : Просвещение, 1964. — 304 с.
8. Боравльов А.П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Посібник для студентів математичних спеціальностей/ А.П.Боравльов, І.Г.Ленчук. - К.: Вища школа, 2002. -192 с.
9. Боровик В.Н. Геометричні перетворення площини. [Текст] / В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, М.М. Мурач, В.П. Яковець – Суми : Університет. книга, 2003. - 504с
10. Боровик В.Н. Курс вищої геометрії / В.Н. Боровик, В.П. Яковець. — Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. — 464 с.

11. Бутузов В.Ф. Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики / В.Ф. Бутузов, СБ. Кадомцев, З.Г. Позняк, С.А. Шестаков, И.И. Юдина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 488 с.
12. Вейль Г. Симетрия / Г. Вейль. – Москва: "Едіторіал УРСС", 2003.
13. Вишенський В. А. Збірник задач з математики: Навч. посібник. — 2-ге вид., доп. / В. А. Вишенський, М. О. Перестюк, А. М. Самойленко. — К.: Либідь, 1993. — 344 с.
14. Воронец А.М. Геометрия циркуля/ А.М. Воронец - М.-Л.: ОНТИ, 1934. - 40 с.
15. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрических задач/ Я.Е.Гольдберг –К.: Рад. школа, 1990.
16. Гришина Т.С. Логический прием сравнения в стереометрических задачах/ Т.С. Гришина // Математика в школе. –1991.- №6.
17. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей/ Я.И. Груденов –М.: Просвещение, 1981.
18. Дорофеев С.Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах / С.Н. Дорофеев: Учебное пособие.-Пенза :Информационно –издательский центр ПГУ, 2002.-189 с.:библиогр.22 назв.
19. Зайцева Г.Д. Развитие навыков решения стереометрических задач/ Г.Д. Зайцева // Математика в школе. –1982.-№1.
20. Земляков А. Математика бильярда / А. Земляков — Журнал «Квант», 1976. — №5.
21. Изаак Д.Ф. Задачи по геометрии на максимум и минимум в классе/ Д.Ф. Изаак // Математика в школе. –1984.-№2.
22. Имранов Б.Т. Применение векторов к решению геометрических задач на вычисление расстояний и углов/ Б.Т. Имранов //Математика в школе. –1984.-№2.

23. Ілляшенко В.Я. Геометричні задачі на максимум і мінімум / В.Я. Ілляшенко — Луцьк : ВОНМІПОПК, 1995. — 34 с.
24. Калинин А.К. Система базовых задач на комбинацию геометрических тел/ А.К. Калинин // Математика в школе. —1995.-№4.
25. Клопский В.М. Основные понятия и аксиомы стереометрии. Параллельность в пространстве/ В.М.Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский // Математика в школе. —1981.-№3.
26. Клопский В.М. Основные понятия и аксиомы стереометрии. Перпендикулярность в пространстве/ В.М.Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский // Математика в школе. —1981.-№5.
27. Моденов П.С. Геометрические преобразования / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. — М. : Изд-во МГУ, 1961. — 230 с.
28. Недошивкин Е.Ф. Расстояния и углы между прямыми и плоскостями/ Е.Ф. Недошивкин, Е.Г. Соловьева // Математика в школе. — 2001. — №3.
29. Павлов В. О. Збірник задач з проєктивної геометрії / В. О. Павлов — К. : Вища школа, 1974. — 163 с.
30. Петерсен Ю.П. Методы и теории решения геометрических задач на построение/ Ю.П. Петерсен - Методтипография Э. Лисснера и Ю. Романа, 1892. -114 с.
31. Семенович О. Ф. Геометрія. Групи перетворень / О. Ф. Семенович — К. : Рад. школа, 1971. — 279 с
32. Слепкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів/ З.І. Слепкань - К.: ЗодіакЕКО, 2000.-5 1 2 с.
33. Трайнин И.Я. Основания геометрии / И.Я. Трайнин — М. : Учпедгиз, 1961. — 326 с.
34. Четверухин Н.Ф. Изображение фигур в курсе геометрии / Н.Ф. Четверухин — М. : Учпедиз, 1958. — 217 с.

35. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия / Н.Ф. Четверухин — М. : Просвещение, 1969. — 368 с.
36. Шарыгин И. Ф. Задачник по геометрии / И.Ф. Шарыгин — М. Дрофа: 1996
37. Шарыгин И.Ф. Учимся решать задачи по геометрии. (Стереометрия. Многогранники.) / И.Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1989.-№5.
38. Швец В.А. Поиск решения задач на вычисление в курсе стереометрии/ В.А. Швец // Математика в школе. –1987.-№1.
39. Штейнер Я. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга/ Я.Штейнер - М.: Учпедгиз, 1939. - 80 с.
40. Энциклопедия элементарной математики. — М. : Наука, 1961. — кн. V. — С. 270–347.
41. <http://shkolyar.in.ua/podibnist-fugur/peretvorenniya>.
42. <http://shkolyar.in.ua/podibnist-fugur/peretvorenniya>
43. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ed/Point\\_circle.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ed/Point_circle.png)
44. <http://svitppt.com.ua/images/32/31169/770/img21.jpg>
45. [http://ito.vspu.net/ENK/2011-2012/MZN\\_2011-2012/mzn\\_imfito/Stud\\_rob/2014/Magdich/images/image022.png](http://ito.vspu.net/ENK/2011-2012/MZN_2011-2012/mzn_imfito/Stud_rob/2014/Magdich/images/image022.png)

## Рівність фігур

Фігура  $\Phi$  називається рівною (конгруентною) фігурі  $\Phi'$ , якщо існує такий рух, при якому фігура  $\Phi$  відображається на фігуру  $\Phi'$ . Відображається :  $\Phi = \Phi' (\Phi \cong \Phi')$ .

Зокрема, якщо  $\Phi$  та  $\Phi'$  – трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$ , то, кажуть о рівності цих трикутників, зазвичай вважають (згідно з традицією [7]), що існує такий рух, при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$  (і, відповідно,  $\Delta ABC \rightarrow A_1B_1C_1$ ).

Приклад 1. Як відомо, в шкільних підручниках іноді приймають наступні (часні) визначення рівності трикутників : трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  називаються рівними, якщо  $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, CA = C_1A_1, A = A_1, B = B_1, C = C_1$ . Доведемо, що стосовно до трикутників загальні та часні визначення рівності еквівалентні.

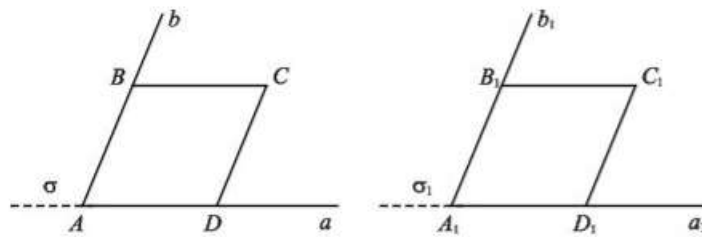
*Розв'язання.* Нехай трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  рівні по сутті загального визначення, тобто існує рух  $f$ , при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$ . Тоді ( в силу відомих властивостей руху)  $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, CA = C_1A_1, A = A_1, B = B_1, C = C_1$ . Це значить, що дані трикутники рівні і по суті часного визначення.

Навпаки, якщо  $\Delta ABC \rightarrow A_1B_1C_1$  по суті часного визначення, то  $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, A = A_1$  і існує такий рух, при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$ . Це значить, що дані трикутники рівні і по суті часного визначення, що і треба було довести.

Для доведення того, що існує рух, при якому фігура  $\Phi$  відображає на фігуру  $\Phi_1$  ( і, стало бути,  $\Phi = \Phi_1$  ), можуть використовуватися способи відшукання образу фігури [4]. Інша група прийомів заснована на теоремі про подвижність площини і її наслідках.

Приклад 2. Доведемо, що якщо суміжні сторони і кут між ними одного паралелограма дорівнюють відповідно суміжних сторонах і куту між ними іншого паралелограма, то ці паралелограми рівні.

*Розв'язання. Перший спосіб.* Нехай в паралелограм  $ABCD$  та  $A_1B_1C_1D_1$   $AB = A_1B_1, AD = A_1D_1, A = A_1$  (мал.25). Позначимо через  $a$  промінь  $AD$ ,  $a_1$ -промінь  $A_1D_1$ ,  $b$  –промінь  $AB$ ,  $b_1$  –промінь  $A_1B_1$   $\sigma$  – півплощина, яка визначає пряму  $AD$  і точку  $B$ ,  $\sigma_1$  – півплощина, яка визначається прямою  $A_1D_1$  і точкою  $B_1$ .



Мал. 25

Існує рух  $f$ , при якому флаг  $(A, a, \sigma)$  переходить в флаг  $(A_1, a_1, \sigma_1)$ . Так як  $AD = A_1D_1$ , то при цьому  $D \rightarrow D_1$ . Далі, так як  $A = A_1$ , то  $b \rightarrow b_1$ , а так як  $AB = A_1B_1$ , то  $B \rightarrow B_1$ . Нарешті, при русі  $f$  прямі  $BC$  та  $DC$  переходять відповідно в прямі  $B_1C_1$  та  $D_1C_1$  (властивість руху). Відповідно, точка перетину прямих  $BC$  та  $DC$  переходить в точку перетину  $B_1C_1$  та  $D_1C_1$ , тобто  $C \rightarrow C_1$ . Таким чином, рух  $f$  переводить  $ABCD$  та  $A_1B_1C_1D_1$ , відповідно,  $ABCD = A_1B_1C_1D_1$ .

*Другий спосіб.* Так як  $AB = A_1B_1, AD = A_1D_1, A = A_1$ , то  $\triangle ABC \rightarrow A_1B_1C_1$ . Відповідно, існує рух  $f$ , при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, D \rightarrow D_1$ . При цьому рух  $C \rightarrow C_1$  (див. перший спосіб). Таким чином, рух  $f$  переводить  $ABCD$  в  $A_1B_1C_1D_1$ , відповідно,  $ABCD = A_1B_1C_1D_1$ .

У першому розв'язанні дані паралелограма «прив'язувались» до флагів  $(A, a, \sigma)$  та  $(A_1, a_1, \sigma_1)$ , а в іншому – до трикутників  $ABD$  та  $A_1B_1D_1$ .

Приклад 3. Доведемо, що якщо півосі  $a$  та  $b$  еліпса  $\omega$  рівні півосям еліпса  $\omega_1$ , то ці еліпси рівні.

*Розв'язання.* Так як півосі даних еліпсів рівні  $a$  та  $b$ , то існує ортонормований базис  $R$ , в якому еліпс  $\omega$  задається рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (1), і існує ортонормований базис  $R_1$ , в якому еліпс  $\omega_1$  задається рівнянням (1).

Існує рух  $f$ , при якому базис  $R$  переходить в базис  $R_1$ . При якому рух еліпса  $\omega$  перетворюється в фігуру  $\omega'$ , яка задається в базисі  $R_1$  рівнянням (1). Це значить, що фігура  $\omega'$  збігається з еліпсом  $\omega_1$ . Відповідно,  $f(\omega) = \omega_1$  і тому еліпси  $\omega$  та  $\omega_1$  рівні.

Наведене розв'язання відповідає одній із трьох схем, приведених в п. 7.2. «Зведення».

Трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  називаються однаково орієнтовані (протилежно орієнтовані), якщо однаково орієнтовані (протилежно орієнтовані) базиси  $R\{A, B, C\}$  та  $R_1\{A_1, B_1, C_1\}$ .

Легко побачити, що рівні трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  однаково орієнтовані (протилежно орієнтовані) тоді і тільки тоді, коли існує рух першого роду ( другого роду ), при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$ .

Приклад 4. Трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  рівні і протилежні орієнтовані. Доведемо, що середини відрізків, які з'єднують середини відповідних сторін цих трикутників, лежать на одній прямій.

*Розв'язання.* Так як трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  рівні і протилежно орієнтовані, то існує рух  $f$  другого роду, при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$ . При цьому сторони  $AB, BC, CA$  перетворюються у відрізки  $A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1$  відповідно. Відповідно, середини  $M, N, P$  сторін  $AB, BC, CA$  переходять в середини  $M_1, N_1, P_1$  сторін  $A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1$ .

Так як  $f$  – рух другого роду, то  $f$  є будь-яка осьова симетрія, або ковзна симетрія. В першому випадку середини відрізків



$MM_1, NN_1, PP_1$  належать осі симетрії. В другому випадку середини вказаних відрізків належать осі ковзної симетрії в силу відомої властивості.

## Застосування рухів до розв'язання задач на обчислення та доведення

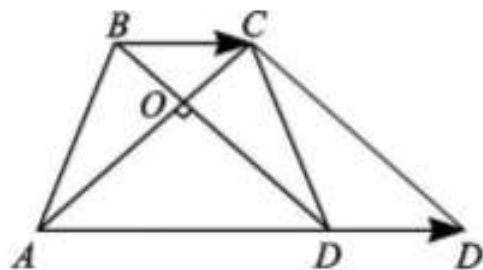
### Допоміжні побудови

Допоміжні ( додаткові) побудови є ключовою ланкою процесу розв'язання багатьох геометричних задач. Засобом створення вдалого додаткової побудови є нерідко перетворення площини, зокрема рух. Основна ідея застосування в цьому плані перетворень площини складається в наступному : окремі фрагменти вихідної геометричної ситуації піддаються деякому перетворенню, в результаті якого отримується деяка додаткова фігура, більш зручна для розв'язання поставленої задачі.

**Приклад 1.** Сума основ трапеції дорівнює 10 см. Знайдемо її діагоналі, якщо відомо, що вони перпендикулярні і відносяться як 3: 4.

*Розв'язання.* При переносі на вектор  $\overrightarrow{BC}$   $B \rightarrow C, D \rightarrow D_1$ , тому відрізок  $BD$  переходить в рівний і паралельний йому відрізок  $CD_1$ , причому  $DD_1 = BC, D_1 \in AD$  (мал.26). Маємо  $\angle ACD_1 = \angle AOD = 90^\circ$ ,  $AD_1 = AD + DD_1 = AD + BC = 10$  см.

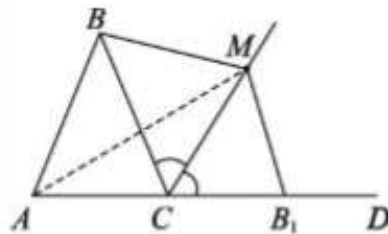
Позначимо  $AC = 3x$ , тоді  $CD_1 = 4x$ . Отримуємо рівняння :  $9x^2 + 16x^2 = 100$ , звідки  $x = 2$  і, відповідно,  $AC = 6$  см,  $BD = 8$  см.



**Приклад 2.** На бісектрисі зовнішнього кута  $C$  трикутника  $ABC$  візьмемо точку  $M$ . Доведемо, що  $AC + CB < AM + MB$ .

*Розв'язання.* При осьовій симетрії, віссю якою служить бісектриса зовнішнього кута  $B_1CD$  трикутника  $ABC$ ,  $M \rightarrow M, C \rightarrow C, B \rightarrow B_1$ , причому  $B_1 \in CD$  (мал.27).

Тому  $BC \rightarrow B_1C, BM \rightarrow B_1M$ , і, відповідно,  $CB_1 = CB, MB_1 = MB$ . В трикутнику  $AMB_1: AB_1 < AM + MB_1$ , звідси  $AC + CB_1 < AM + MB_1$  і, нарешті,  $AC + CB < AM + MB$ , що і треба було довести.



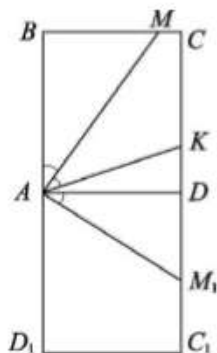
Мал. 27

**Приклад 3.** На сторонах  $BC$  та  $CD$  квадрата  $ABCD$  взяті точки  $M$  та  $K$  відповідно, причому  $\angle BAM = \angle MAK$ . Доведемо, що  $BM + KD = AK$ .

*Розв'язання.* При повороті навколо точки  $A$  на кут  $-90^\circ$  (мал.28) квадрат  $ABCD$  відображається на квадрат  $ADC_1D_1$ , так що точки  $C, D, C_1$  лежать на одній прямій.

Далі,  $M \rightarrow M_1 (M_1 \in DC_1, \angle MAM_1 = 90^\circ)$ , відрізок  $BM$  переходить в рівний йому відрізок  $DM_1$ , а кут  $\angle BAD$  – в рівний йому кут  $\angle DAM_1$ . Маємо:  $\angle AM_1K = 90^\circ - \angle DAM_1, \angle M_1AK = 90^\circ - \angle MAK$ .

Так як  $\angle DAM_1 = \angle BAM = \angle MAK$ , то  $\angle AM_1K = \angle M_1AK$  і, відповідно,  $AK = KM_1$ . Таким чином,  $BM + KD = M_1D + KD = KM_1 = AK$ , що і потрібно було довести.



Мал. 28

## Застосування руху до розв'язання задач на доведення.

### Переформулювання мети задачі

Процес розв'язання досить складної задачі за допомогою перетворень нерідко починається з переформулювання її цілі на мову геометричних перетворень або, інакше кажучи, зведення даної задачі до такої, яка сформульована в термінах перетворень. Тим самим задача зводиться до відшукування образу фігури, або до відшукування образу точки. Приведемо приклади і вправи, призначенні для оволодіння цим важливим вмінням.

**Приклад 1.** а) Щоб довести, що відрізок  $AB$  рівний відрізку  $CD$ , досить встановити, що при деякому русі відрізок  $AB$  відображається на відрізок  $CD$  (властивість руху, §7).

б) Щоб довести, що кут між прямими  $a$  та  $b$  рівний  $\varphi$ , де  $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ , досить показати, що при деякому повороті на кут  $\varphi$  або на кут  $180^\circ - \varphi$  пряма  $a$  відображається на пряму  $b$ . Зокрема, щоб довести, що прямі  $a$  і  $b$  взаємно перпендикулярні, досить встановити, що при повороті на кут  $90^\circ$  або  $-90^\circ$  пряма  $a$  відображається на пряму  $b$ .

в) Щоб довести, що трикутник  $ABC$  правильний, досить встановити, що при повороті навколо деякої точки  $O$  на кут  $120^\circ$  (або  $-120^\circ$ ) трикутник  $ABC$  відображається на себе.

Дійсно, нехай при повороті  $R_O^{120^\circ}$   $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$ . Тоді відрізок  $AB$  переходить у відрізок  $BC$ , а відрізок  $BC$  — у відрізок  $CA$  і, відповідно,  $AB = BC = CA$ , тобто трикутник  $ABC$  — правильний. Так як за означенням повороту  $OA = OB = OC$ , то точка  $O$  — його центр.

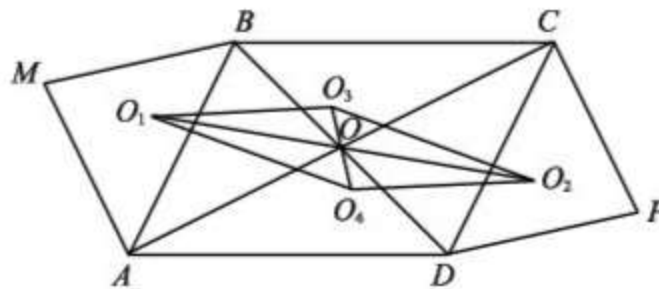
г) Щоб довести, що точка перетину прямих  $a$  та  $b$  належать прямій  $c$ , досить показати, що при осьовій симетрії з віссю  $c$  пряма  $a$  відображається на пряму  $b$ .

д) Щоб довести, що лінії  $L_1, L_2, L_3, \dots$  перетинаються в одній точці, досить встановити, що вони є образами деяких ліній  $L'_1, L'_2, L'_3, \dots$ , які перетинаються в одній точці (визначення образу фігури).

Наведемо приклади завдань, у процесі вирішення яких здійснюється переформулювання мети в плані геометричних перетворень.

**Приклад 2.** Діагоналі паралелограма  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . На сторонах  $AB$  та  $CD$ , поза паралелограмом побудовані правильні трикутники  $ABM$  та  $CDP$ ; точки  $O_1$  та  $O_2$  — їх центри. Точки  $O_3$  та  $O_4$  — центри кола, описаного навколо трикутників  $O_1CD$  та  $O_2AB$ . Доведемо, що чотирикутник  $O_1O_2O_3O_4$  — паралелограм, діагоналі якого перетинаються в точці  $O$ .

Опишемо спочатку пошук розв'язання; він відбувається зазвичай приховано, в розумовому плані, і майже не знаходить відображення в чистовом розв'язанні.



Щоб довести, що  $O_1O_2O_3O_4$  – паралелограм (мал.29), досить встановити, що при центральній симетрії  $Z_0$   $O_1 \rightarrow O_2$  та  $O_3 \rightarrow O_4$  (переформулювання мети задачі). В свою чергу, щоб довести, що  $O_1 \rightarrow O_2$ , досить встановити, що трикутник  $ABM$  переходить в трикутник  $CDP$ ; для цього досить показати, що  $AB \rightarrow CD$  і півплощини, яка містить трикутник  $ABM$ , переходить в півплощину, яка містить трикутник  $CDP$ . Далі, щоб довести, що  $O_3 \rightarrow O_4$ , досить встановити, що трикутник  $O_1CD$  переходить в трикутник  $O_2AB$ ; для цього досить знайти образи точок  $O_1, C, D$ .

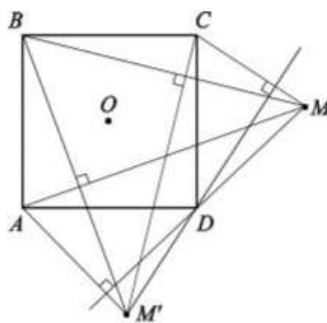
*Розв'язання.* При центральній симетрії  $Z_0$   $A \rightarrow C, B \rightarrow D$ , а півплощина, яка містить трикутник  $ABM$ , переходить в півплощину, яка містить трикутник  $CDP$  (оскільки півплощина, яка визначається прямою  $AB$  і точкою  $O$ , переходить в півплощину, яка визначається прямою  $CD$  і точкою  $O$ ). Звідси випливає, що  $M \rightarrow P$ , і тому  $O_1 \rightarrow O_2$ .

Далі, при центральній симетрії  $Z_0$   $C \rightarrow A, D \rightarrow B, O_1 \rightarrow O_2$ , відповідно, трикутник  $O_1CD$  переходить в трикутник  $O_2AB$  і тому  $O_3 \rightarrow O_4$ .

Остаточно отримуємо:  $O_1 \rightarrow O_2$  та  $O_3 \rightarrow O_4$ , відповідно, відрізки  $O_1O_2$  та  $O_3O_4$  діляться точкою  $O$  навпіл і тому  $O_1O_2O_3O_4$  – паралелограм, а точка  $O$  – його центр.

**Приклад 3.** Дані квадрат  $ABCD$  і точка  $M$ . Через точки  $A, B, C, D$  проведені прямі  $a_1, a_2, a_3, a_4$  перпендикулярні прямим  $MD, MA, MB, MC$  відповідно. Доведемо, що прямі  $a_1, a_2, a_3, a_4$  перетинаються в одній точці.

*Пошук розв'язання.* Щоб довести, що прямі  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , перетинаються в одній точці, досить встановити, що вони є образами (при деякому русі) прямих, які перетинаються в одній точці. Таким чином є, як бачимо, прямі  $MD, MA, MB, MC$ , а шуканим рухом – поворот навколо центра квадрата на кут  $90^\circ$  (мал.30).



Мал. 30

*Розв'язання.* При повороті  $R_0^{90^\circ} D \rightarrow A$ , відповідно, пряма  $DM$  переходить в перпендикулярну їй пряму, яка проходить через точку  $A$ , тобто в пряму  $a_1$ .

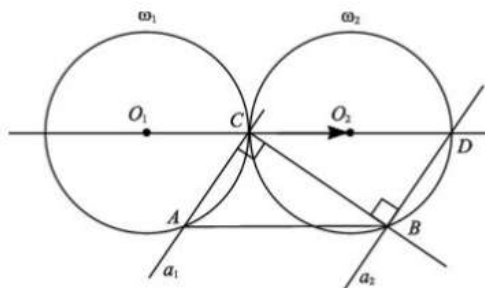
Аналогічно встановлюємо, що при вказаному повороті прямих  $AM, BM, CM$  переходить відповідно в прямі  $a_2, a_3, a_4$ .

Звідси слідує, що образ точки  $M$  — точка  $M'$  — належить прямим  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , що і потрібно було довести.

**Приклад 4.** На колі  $\omega_1(O_1; R)$  та  $\omega_2(O_2; R)$ , які дотикаються в точці  $C$ , взяті точки  $A$  та  $B$  відповідно, такі, що  $ABC = 90^\circ$ . Доведемо, що  $AB = 2R$ .

*Пошук розв'язання.* Щоб довести, що  $AB = 2R$ , досить встановити, що при переносі на вектор  $\overrightarrow{O_1O_2} A \rightarrow B$ . Точка  $A$  є точка перетину кола  $\omega_1$  і прямої  $CA$  (позначимо її через  $a_1$ ).

Тому, щоб знайти образ точки  $A$ , досить знайти образи кола  $\omega_1$  і прямої  $a_1$ , а для цього, в свою чергу, досить знайти образи точок  $O_1$  та  $C$  (мал.31).



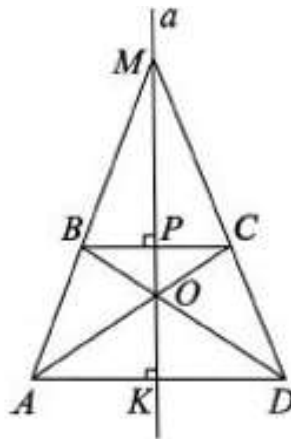
Мал.31

*Розв'язання.* Позначимо через  $D$  другу точку перетину прямої  $O_1O_2$  і кола  $\omega_2$ . Так як  $\angle CBD = 90^\circ$ , то  $a_2 \parallel a_1$ , де  $a_2$  – пряма  $BD$ .

При переносі на вектор  $\overrightarrow{O_1O_2}$   $O_1 \rightarrow O_2$ , тому  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ . Так як  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{O_1O_2}$ , то  $C \rightarrow D$ . Відповідно, пряма  $a_1$ , яка проходить через точку  $C$ , переходить в паралельну їй пряму, яка проходить через точку  $D$ , тобто  $a_1 \rightarrow a_2$ . Так як  $a_1 \rightarrow a_2, \omega_1 \rightarrow \omega_2$ , то точки перетину  $a_1$  та  $\omega_1$  переходять в точки перетину  $a_2$  та  $\omega_2$ . Але  $C \rightarrow D$ , а значить,  $A \rightarrow B$ . Відповідно,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_1O_2}$  і тому  $AB = 2R$ , що і потрібно було довести.

**Приклад 5.** Доведемо, що пряма, що проходить через точку перетину діагоналей рівнобічної трапеції і точки перетину продовжень її бічних сторін, ділить основи трапеції навпіл.

*Розв'язання.* Нехай діагоналі трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ , а продовження бокових сторін  $AB$  та  $CD$  – в точці  $M$  (мал.32). Проведемо через точку  $M$  пряму  $a$ , перпендикулярну  $AD$  (а значить, перпендикулярну і  $BC$ ). Так як трикутники  $AMD$  та  $BMC$  – рівнобедренні, то ця пряма ділить основи трапеції навпіл ( мал. 32). Залишається довести, що точка перетину діагоналей належить прямій  $a$ .



Мал.32

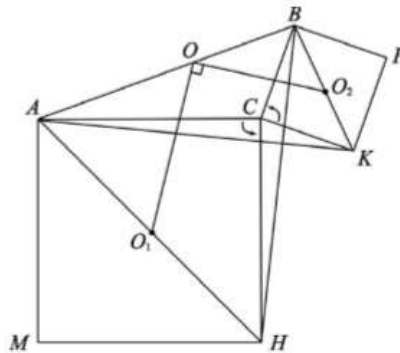
При осьовій симетрії з віссю  $a$   $A \rightarrow D, C \rightarrow B$ , тому діагональ  $AC$  переходить в  $DB$ , а  $DB$  – в  $AC$ . Відповідно, точка перетину  $AC$  та  $DB$



переходить в точку перетину  $DB$  та  $AC$ , так як  $O \rightarrow O$ . Таким чином, точка  $O$  є інваріантною і, відповідно, належить прямій  $a$ , що і треба було довести.

**Приклад 6.** На сторонах  $AC$  та  $BC$  трикутника  $ABC$  побудовані поза трикутника квадрати  $AMHC$  і  $BPKC$ . Точки  $O_1$  та  $O_2$  – центри цих квадратів, а точка  $O$  – середина  $AB$ . Доведемо, що відрізки  $OO_1$  та  $OO_2$  рівні і перпендикулярні.

*Розв'язання.* Зауважимо, що відрізок  $OO_1$  паралельний відрітку  $BH$  і рівний його половині, а відрізок  $OO_2$  паралельний відрітку  $AK$  і рівний його половині. Тому досить показати, що відрізки  $BH$  та  $AK$  рівні і перпендикулярні (мал. 33).



Мал.33

Розглянемо поворот  $R_C^{90^\circ}$ . При цьому  $A \rightarrow H, K \rightarrow B, AK \rightarrow HB$  і тому відрізки  $AK$  і  $BH$  рівні і перпендикулярні, звідки і слідує потрібне.

Деякі з наведених нижче завдань можна вирішити не тільки за допомогою рухів, але і використовуючи традиційні геометричні методи, наприклад рівність трикутників. Рекомендуємо де це можливо, розглянути і порівняти обидва підходи.

### Застосування рухів до вирішення завдань на побудову

Якщо в процесі рішення задачі на побудову використовується якийсь перетворення площини, то говорять, що задача вирішена методом

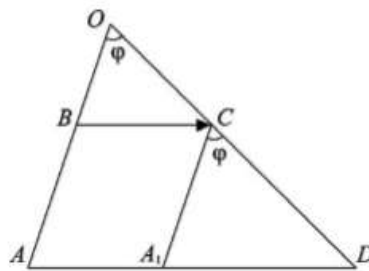
геометричних перетворень. Охарактеризуємо найбільш вживані прийоми, які в своїй сукупності складають згаданий метод.

### *Зближення елементів шуканої фігури*

Цей прийом використовується в задачах на побудову багатокутників і полягає в наступному. У процесі аналізу окремі лінійні елементи шуканої фігури піддаються якому-небудь перетворенню (найчастіше – паралельного перенесення) з метою отримати такий допоміжний трикутник, який можна було б побудувати, і, володіючи яким, можна побудувати шукану фігуру.

Приклад 1. Побудуємо трапецію, знаючи її основи, одна із бокових сторін та кут між продовженням бокових сторін.

*Аналіз.* Нехай  $ABCD$  – шукана трапеція:  $AD = a, BC = b, CD = c, \angle AOD = \varphi$  (мал.34).



Мал.34

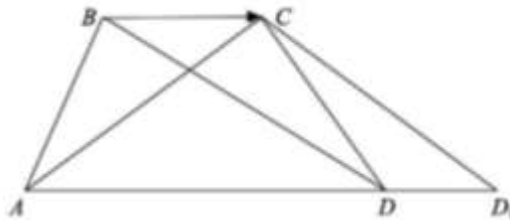
При переносі на вектор  $\overrightarrow{BC}: B \rightarrow C, A \rightarrow A_1 \quad AB \rightarrow A_1C$ , причому  $A_1 \in AD, A_1C \parallel AB, AA_1 = BC$  і, стало бути, в трикутнику  $A_1CD: A_1C = a - b, \angle A_1CD = \varphi, CD = c$ . За цими даними трикутник  $A_1CD$  можна побудувати. Керуючись трикутником  $A_1CD$ , можна легко побудувати і шукану трапецію.

*План побудови.* Будуємо трикутник  $A_1CD$  за вказаними вище даними; на промені  $DA_1$  відкладаємо відрізок  $DA = a$ ; будуємо точку  $B$ .

Доведення і дослідження пропонуємо провести самостійно.

Приклад 2. Побудуємо трапецію, знаючи суму її основ, діагоналі і одну із бокових сторін.

*Аналіз.* Нехай  $ABCD$  –шукана трапеція:  $AD + BC = p, AC = e, BD = f, CD = c$  (мал.35).



Мал.35

Зробимо перенос на вектор  $\overrightarrow{BC}$  діагональ  $BD: B \rightarrow C, D \rightarrow D_1, BD \rightarrow CD_1$ , причому  $CD_1 = BD, D_1 \in AD, DD_1 = BC$ .

В трикутнику  $ACD_1: AD_1 = p, AC = e, CD_1 = f$ . За цими даними трикутник  $ACD_1$  можна побудувати; знаючи інформацію про цей трикутник, можна побудувати і трапецію.

*План побудови.* Будуємо трикутник  $ACD_1$  за вказаними вище даними; будуємо точку  $D$  – точку перетину відрізка  $AD_1$  і кола  $\omega(C; c)$ ; будуємо точку  $B$ .

Доведення і дослідження пропонуємо провести самостійно.

Як бачимо із цих прикладів, в залежності від специфіки задачі «зближувати» доводиться різні лінійні елементи шуканої фігури.

#### *Побудова точки перетину фігури і образу фігури*

Цей прийом використовується в тих задачах, де потрібно побудувати точки

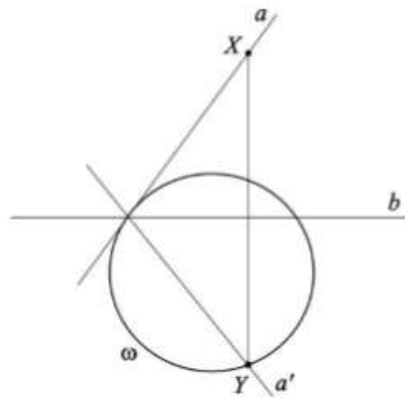
$X$  та  $Y$ , які належать відповідно відомим фігурам ( лініям)  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$ . Суть даного прийому складається в наступному:

- підбирають перетворення  $f$ , при якому точка  $X$  переходить в точку  $Y$ ;
- підвергають цьому перетворенню фігуру  $\Phi_1$  та довести, що точка  $Y$  ( друга шукана точка ) яка належить перетину другої відомої фігури  $\Phi_2$  та образу  $\Phi_1'$  першої фігури; тим самим впливає спосіб побудови точки  $Y$ ;

- в процесі побудови точка  $X$  отримується з точки  $Y$  із застосуванням перетворення  $f^{-1}$ .

Приклад 3. Побудуємо відрізок  $XU$ , кінці якого належать даній прямій  $a$  і даному колу  $\omega$  (відповідно) так, що цей відрізок був перпендикулярний іншій прямій  $b$  і ділить її навпіл.

*Аналіз.* Припустимо, що шуканий відрізок  $XU$  побудований ( мал.36). Розглянемо осьову симетрію  $S_b$  (так як саме при цьому перетворенні точка  $X$  переходить в точку  $U$ ). При цьому:  $X \rightarrow U, a \rightarrow a'$ , відповідно,  $U \in a' \cap \omega$  (1); тут  $a$  – перша відома фігура  $\Phi_1$ , а  $\omega$  – друга. Відношення (1) дозволяють побудувати точку  $U$ . Маючи точку  $U$ , легко побудувати точку  $X$ :  $X = S_b(U)$ .

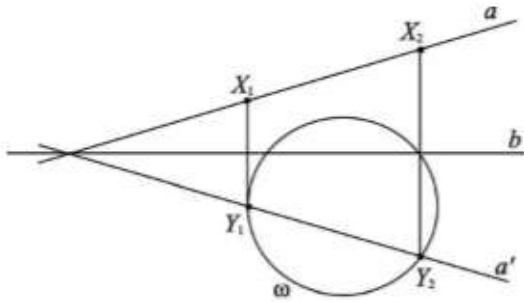


Мал.36

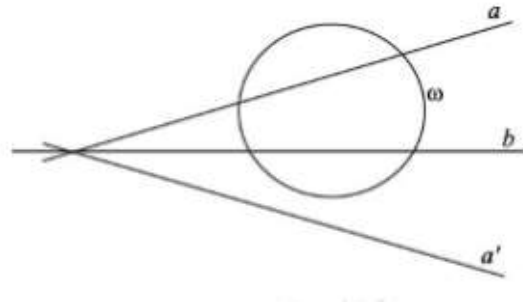
*План побудови.* Побудуємо послідовність:  $a' = S_b(a), U \in a' \cap \omega, X = S_b(U)$ . Відрізок  $XU$  - шуканий.

*Доведення.* Із побудови беззаперечно виходить, що відрізок  $XU$  перпендикулярний прямій  $b$  і ділить його навпіл.  $U \in \omega$  за побудовою. Доведемо, що  $X \in a$ . Дійсно, при осьовій симетрії  $S_b: a' \rightarrow a, U \rightarrow X$ , значить,  $X \in a$  (так як  $U \in a'$ ).

*Дослідження.* Задача може мати 0, 1 або 2 розв'язання в залежності від числа тих загальних точок прямої  $a'$  та кола  $\omega$ , які не належать прямій  $b$ . На мал. 36 показали випадок одного розв'язання; на мал. 37-а має два розв'язання; на мал. 37-б розв'язання немає.



Мал. 37-а



Мал. 37-б

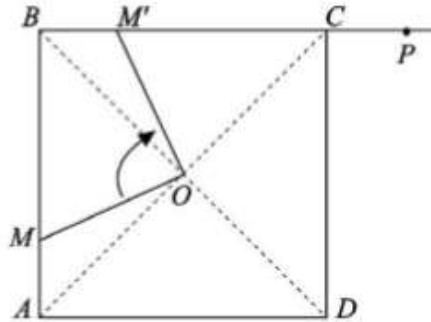
#### *Поповнення множини відомих точок*

Цей прийом використовується в тих завданнях, де шукана фігура спочатку задається деякими точками  $A, B, C, \dots$ , яких, на перший погляд, недостатньо, щоб побудувати цю фігуру. У подібних випадках підбирають таке перетворення, при якому пряма, що містить відому точку  $A$  і деякий лінійний елемент шуканої фігури, відображається на пряму, яка містить іншу відому точку  $B$  і інший лінійний елемент шуканої фігури. При цьому точка  $A$  переходить в деяку точку  $A'$ , яка поповнює набір даних точок  $A, B, C, \dots$ , що і дозволяє побудувати шукану фігуру.

Приклад 4. Побудуємо квадрат  $ABCD$ , якщо відомі його центр  $O$  та точки  $M$  та  $P$ , які належать прямим  $AB$  та  $BC$  відповідно.

*Аналіз.* Допустимо, що шуканий квадрат  $ABCD$  побудований (мал. 38). Тут прямі  $AB$  та  $BC$  містить, з одної сторони, лінійні елементи-сторони  $AB$  та  $BC$  — шуканого квадрата, а з іншої сторони — відомі точки  $M$  та  $P$ . Перетворенням, яке переводить  $AB$  в  $BC$ , є поворот  $R_O^{-90^\circ}$ . І так, при повороті  $R_O^{-90^\circ}$  пряма  $AB$  переходить в пряму  $BC$ , а точка  $M$  — в точку  $M'$ , яка належить прямій  $BC$ . Це дає можливість побудувати пряму  $BC$  ( за

точками  $P$  та  $M'$ ). Використовуючи останню, легко побудувати шуканий квадрат.



Мал. 38

*План побудови.* Будуємо послідовність:  $M' = R_O^{-90^\circ}(M)$ ; пряму  $M'P$ ; образи прямої  $M'P$  при повороті  $R_O^{-90^\circ}, R_O^{90^\circ}, R_O^{180^\circ}$ ; точки  $A, B, C, D$  і, нарешті, шуканий квадрат.

Доведення і дослідження пропонуємо довести самостійно.

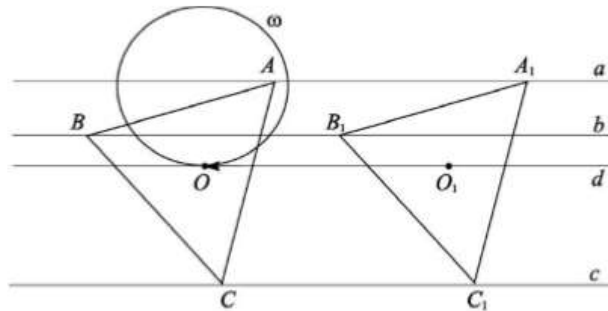
#### *Побудова прообразу шуканої фігури*

Цей прийом складається в наступному. Нехай потрібно побудувати фігуру  $\Phi$ , яка має деякі властивості  $\alpha$  та  $\beta$ . Спочатку будують додаткову фігуру  $\Phi_1$ , яка має властивості  $\alpha$ . Потім підбирають перетворення  $f$ , при якому фігура  $\Phi_1$  переходить в шукану фігуру  $\Phi$ . Це перетворення  $f$  повинно бути таким, що властивість  $\alpha$ , яка належить фігуру  $\Phi_1$ , властиве фігурою  $\Phi$ , а властивість  $\beta$  набула її. Наявність множини  $\Gamma$  таких перетворень  $f$ , яка зберігає властивість  $\alpha$ , і слідує посиленням для застосування вказаного способу.

**Приклад 5.** Побудуємо правильний трикутник, вершини якого належать даним паралельним прямим  $a, b, c$ , а центр належить даному колу  $\omega$ .

*Аналіз.* Шуканий трикутник  $ABC$  повинен мати дві властивості:  $\alpha$ ) трикутник  $ABC$ - правильний, і вершини  $A, B, C$  належать прямим  $a, b, c$  відповідно;  $\beta$ ) центр  $O$  трикутника належить колу  $\omega$  (мал.39). При будь-якому переносі, вектор якого паралельний даним прямим, властивість  $\alpha$  зберігається. Тому прообраз шуканого трикутника- трикутник  $A_1B_1C_1$ -

шукаємо серед правильних трикутників з вершинами на прямих  $a, b, c$ . Одну з вершин цього трикутника можна було вибрати довільну на відповідній прямій (наприклад,  $A_1$  на пряму  $a$ ), тоді побудова двох інших вершин відбувається шляхом відшукування перетину фігури і образу фігури (див. п. 16.2): побудуємо  $b' = R_{A_1}^{60^\circ}(b)$ ; знаходимо точку  $C_1 \in c \cap b'$ ; будуємо точку  $B_1 = R_{A_1}^{-60^\circ}(C_1)$ .



Мал. 39

Замітимо, що для даної точки  $A_1$  здійснюється ще один додатковий трикутник  $A_1B_2C_2$ ; він отримується шляхом зміни напрямлення двох поворотів в приведеній вище побудові.

Використовуючи трикутник  $A_1B_1C_1$ , підберемо паралельний перенос, при якому додатковий трикутник переходить в шуканий. Для цього досить через центр трикутника  $A_1B_1C_1$  — точку  $O_1$  — провести пряму  $d$ , паралельну  $a$ . Нехай  $O \in d \cap \omega$ . Тоді перенос на вектор  $\overrightarrow{O_1O}$  і є шуканим.

*План побудови.* Фіксуємо на прямій  $a$  точку  $A_1$ ; будуємо правильний трикутник  $A_1B_1C_1$  так, що  $B_1 \in b, C_1 \in c$ ; знаходимо точку  $O (O \in d \cap \omega, \text{ де } d \parallel a)$ ; будуємо трикутник  $ABC$  — образ трикутника  $A_1B_1C_1$  при переносі на вектор  $\overrightarrow{O_1O}$ ; трикутник  $ABC$  — шуканий.

*Доведення* очевидне.

*Дослідження.* Як було зазначено вище, для даної точки  $A_1$  існують два додаткових трикутника:  $A_1B_1C_1$  та  $A_2B_2C_2$  (останній на мал. 39 не показаний). Легко бачити, що ці трикутники симетричні відносно прямої, яка проходить через точку  $A_1$  і перпендикулярній прямій  $a$ . Тому ці центри  $O_1$  та

$O_2$  лежать на одній прямій  $d$ . Виходячи із цього, приходимо до наступних висновків.

Якщо  $d \cap \omega = \emptyset$ , то задача не має розв'язань.

Якщо  $d \cap \omega = \{O\}$ , то отримуємо два розв'язання:  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  – образи трикутників  $A_1B_1C_1$  та  $A_1B_2C_2$  при переносі на вектори  $\overrightarrow{O_1O}$  та  $\overrightarrow{O_2O}$ .

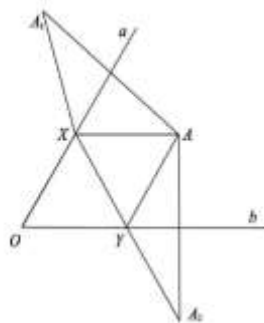
Якщо  $d \cap \omega = \{O, O'\}$ , то задача має чотири розв'язання: образи трикутників  $A_1B_1C_1$  при переносі на вектори  $\overrightarrow{O_1O}$  та  $\overrightarrow{O_1O'}$  і образи трикутників  $A_1B_2C_2$  при переносах на вектори  $\overrightarrow{O_2O}$  та  $\overrightarrow{O_2O'}$ .

#### *Приєм зведення в задачах на оптимізацію*

Зазначений прийом використовується в завданнях, де потрібно побудувати ламану, що володіє певною екстремальною властивістю (наприклад, знайти ламану найменшої довжини). З числа перетворень у цих завданнях найчастіше застосовується осьова симетрія (іноді в поєднанні з паралельним переносом), а основна ідея полягає в такому «розпрямленні» шуканої ламаної, яке дозволила б відповісти на запитання задачі.

Приклад 6. В середині даного гострого кута дана точка  $A$ . На сторонах  $a$  та  $b$  даного кута знайдемо такі точки  $X, Y$ , щоб периметр трикутника  $AXY$  був найменший.

*Аналіз.* Нехай  $X$  та  $Y$  – довільні точки на сторонах  $a$  та  $b$  (мал.40).



Мал.40



Побудуємо точки  $A_1 = S_a(A)$  та  $A_2 = S_b(A)$ . Ясно, що периметр трикутника

$A_1XYA_2$  рівний довжині ламаної  $A_1XYA_2$ . Остання буде мати найменшу довжину тоді і тільки тоді, коли ламана  $A_1XYA_2$  є відрізком. Звідси випливає наступна побудова.

Будуємо вказаним вище образом точки  $A_1$  та  $A_2$  і знаходимо шукані точки:  $X = A_1A_2 \cap a$  та  $Y = A_1A_2 \cap b$ .

*Доведення очевидне.*

*Дослідження.* Замітимо, що кут  $A_1OA_2$  менше розгорнутого, а кути  $a$  та  $b$  лежать всередині кута  $A_1OA_2$ , так що задача має єдиний розв'язок при будь-якому розміщенні точки  $A$  всередині даного кута.

### Застосування рухів до побудови графіків

Результати дозволяють обґрунтувати ті елементарні прийоми, які використовуються при побудові графіків функцій та рівнянь і відомі з шкільного курсу математики.

Уявімо собі, що нам відомий графік функції  $y = f(x)$  – деяка лінія  $\Phi$ . Знайдемо образ цієї лінії при паралельному перенесенні на вектор  $\vec{p}(0; b)$ . Для цього зробимо у відповідність з координатним способом відшукування образу фігури :

- зіставляємо формули переносу :  $x' = x, y' = y + b$ ;
- виражаємо змінні  $x$  та  $y$  через  $x'$  та  $y'$ :  $x = x', y = y' - b$ ;
- підставимо отримані вирази в рівняння  $y = f(x)$  та знаходимо тим самим рівняння шуканого образу  $\Phi': y' = f(x') + b$  або, в звичному вигляді,  $y = f(x) + b$ .

Таким чином, приходимо до наступного правила.

1<sup>0</sup>. Графік функції  $y = f(x) + b$  отримується з графіку функції  $y = f(x)$  за допомогою паралельного переносу на вектор  $\vec{p}(0; b)$ .

Інакше кажучи, графік функції  $y = f(x) + b$  отримується шляхом переносу графіка  $y = f(x)$  вздовж осі  $Oy$  на  $|b|$  одиниць в сторону позитивних  $y$ , якщо  $b > 0$ , і в сторону від'ємних  $y$ , якщо  $b < 0$ .

Пропонуємо використовуючи координатний спосіб відшукування образу фігури, обґрунтувати приведені нижче правила (прийоми) 2<sup>0</sup>, 3<sup>0</sup>, 4<sup>0</sup>, 5<sup>0</sup>.

2<sup>0</sup>. Графік функції  $y = f(x - a)$  отримується з графіка функції  $y = f(x)$  за допомогою паралельного переносу на вектор  $\vec{p}(a; 0)$ .

Інакше, графік функції  $y = f(x - a)$  отримується шляхом переносу графіка функції  $y = f(x)$  уздовж осі  $Ox$  на  $|a|$  одиниць в сторону позитивних  $x$ , якщо  $a > 0$ , і в сторону від'ємних  $x$ , якщо  $a < 0$ .

3<sup>0</sup>. Графік рівняння  $F(x - a, y - b) = 0$  отримується із графіка рівняння  $F(x; y) = 0$  за допомогою паралельного переносу на вектор  $\vec{p}(a; b)$ .

Зауважимо, що перенос на вектор  $\vec{p}(a; b)$  є композицією переносу на вектор  $\vec{p}_1(a; 0)$  і переносу на вектор  $\vec{p}_2(0; b)$ .

Додамо, що на практиці замість переносу графіка уздовж осі  $Ox$  (осі  $Oy$ ) нерідко здійснюється перенос осі  $Oy$  (осі  $Ox$ ) на потрібне число одиниць в напрямленні, протилежному напрямленні шуканого переносу.

4<sup>0</sup>. Графік функції  $y = -f(x)$  отримується з графіка функції  $y = f(x)$  за допомогою осьової симетрії з віссю  $Ox$ .

Інакше, графік функції  $y = -f(x)$  отримується шляхом відображення графіка функції  $y = f(x)$  відносно осі  $Ox$ .

5<sup>0</sup>. Графік функції  $y = f(-x)$  отримується із графіка функції  $y = f(x)$  за допомогою осьової симетрії з віссю  $Oy$ .

Інакше, графік функції  $y = f(-x)$  отримується шляхом відображення графіка функції  $y = f(x)$  відносно осі  $Oy$ .

### Дослідження композиції рухів

Задачі на відшукування композиції рухів розглядалися. Нагадаємо деякі з отриманих результатів.

1.  $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a} + \vec{b}}$ ;
2.  $R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\alpha + \beta}$ ;
3.  $Z_B \circ Z_A = T_{\vec{p}}$ , де  $\vec{p} = 2 * \overrightarrow{AB}$ ;
4.  $T_{\vec{p}} \circ Z_O = Z_{O_1}$ , де точка  $O_1$  визначається рівнянням  $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\vec{p}$ ;
5.  $Z_O \circ T_{\vec{p}} = Z_{O_1}$ , де точка  $O_1$  визначається рівнянням  $\overrightarrow{OO_1} = -\frac{1}{2}\vec{p}$ .

В даному розділі розглядаються задачі, в яких, наряду з вказаними відношеннями і вивченими раніше прийомами, використовуються теореми про композицію симетрії і теореми про розклад руху в композиціях осьової симетрії (див. приклад 1-4).

Приклад 1. Доведемо, що композиція двох осьових симетрій, осі яких перетинаються в точці  $O$ , є поворот навколо точки  $O$ .

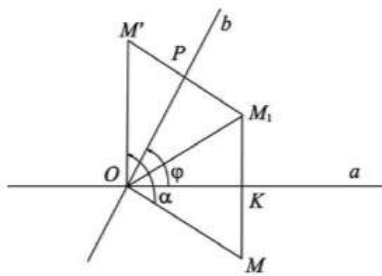
*Розв'язання.* Позначимо  $S_a \circ S_b = f$ , де  $a \cap b = O$ . Так як  $S_a$  та  $S_b$  – рух другого роду, то  $f$  – рух першого роду, тобто або  $f$  – поворот, або – перенос. Легко побачити, що  $f$  має інваріантну точку (точку  $O$ ), але не є тотожним перетворенням. Отже,  $f$  – поворот навколо точки  $O$  на деякий кут  $\alpha$ .

*Зауваження.* Доведемо, що  $\alpha = 2\varphi$ , де  $\varphi$  – орієнтований кут від прямої  $a$  до прямої  $b$ . Дійсно, нехай  $M \neq O, S_a(M) = M_1, S_b(M_1) = M'$  (мал.41).

Маємо :

$$\alpha = \angle MOM' = \angle MOM_1 + \angle M_1OM' = 2 * \angle KOM_1 + 2 * \angle M_1OP = 2\varphi$$

(тут всі кути – орієнтовані).



Мал.41

*Приклад 2.* Доведемо, що будь-який поворот  $R_O^\alpha$  можна представити у вигляді композиції двох осьових симетрій з пересічними осями.

*Розв'язання.* Проведемо через точку  $O$  прямі  $a$  та  $b$ , орієнтований кут між якими рівний  $\frac{\alpha}{2}$  (мал.41). За доведеними вище композиція осьових симетрій  $S_a$  та  $S_b$  є поворот навколо точки  $O$  на кут  $\alpha$ , тобто  $S_b \circ S_a = R_O^\alpha$ , що і потрібно було довести.

*Приклад 3.* Доведемо, що композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельний перенос.

*Розв'язання.* Ведемо на площині декартову систему координат, направив вісь  $Ox$  по прямій  $a$  (мал.42). Пряма  $b$  в цій системі задається рівнянням  $y - y_0 = 0$ . Нехай,  $M(x; y) \xrightarrow{S_a} M_1(x_1; y_1)$ , тоді  $x_1 = x, y_1 = -y$  (1). Далі  $M_1(x_1; y_1) \xrightarrow{S_b} M'(x'; y')$ , тому  $\overline{MM'_1} \cdot \vec{i} = 0$  і середина відрізка

$M_1M'$  належить прямій  $b$ , тобто  $x' - x_1 = 0, \frac{y' + y_1}{2} = y_0$ , звідки  $x' = x_1, y' = 2y_0 - y_1$  (2). Із (1) та (2) отримуємо шукані формули:  $x' = x, y' = y + 2y_0$ . Як бачимо, композиція  $S_b \circ S_a$  є перенос на вектор  $\vec{p}(0; 2y_0)$ .

*Зауваження.* Доведемо, що  $\vec{p} = 2\overline{AB}$ , де  $A$  та  $B$  – точки перетину осей  $a$  та  $b$  з прямою, перпендикулярній цим осям.

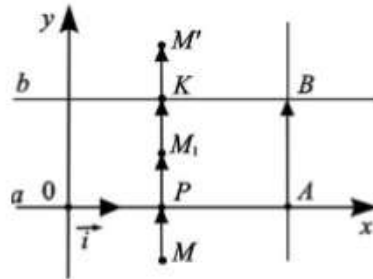
Дійсно,  $\vec{p} = \overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M'} = 2\overline{PM_1} + 2\overline{M_1K} = 2\overline{PK} = 2\overline{AB}$ .

*Приклад 4.* Доведемо, що будь-який паралельний перенос можна представити у вигляді композиції осьових симетрій з паралельними осями.

*Розв'язання.* Нехай  $\overline{MM'} = \vec{p}$ . Візьмемо на відрізку  $MM'$  точки  $P$  та  $K$  так, що  $\overline{PK} = \frac{1}{2}\vec{p}$  (мал.42). Проведемо через ці точки прямі  $a$  та  $b$ ,

перпендикулярні  $MM'$ . Тоді за доведенням вище  $S_b \circ S_a = T_{\vec{p}}$ , що і потрібно було довести.

Розглянуті приклади роблять очевидним наступний висновок: будь-який рух площини можна представити у вигляді композиції не більше трьох осьових симетрій.



Мал.42

Приклад 5. Дослідимо композицію осьової симетрії  $S_c$  і перенос  $T_{\vec{p}}$ , де  $\vec{p} \neq 0$ .

*Розв'язання.* Введемо на площині прямокутну декартову систему координат, направивши вісь  $Ox$  по прямій  $c$ . Складемо формули композиції  $T_{\vec{p}} \circ S_c$  в цій системі координат.

Нехай  $M(x; y) \xrightarrow{S_c} M_1(x_1; y_1)$ , тоді  $x_1 = x, y_1 = -y$  (1).

Нехай, далі,  $\vec{p}(a; b)$  та  $M_1(x_1; y_1) \xrightarrow{T_{\vec{p}}} M'(x'; y')$ , тоді  $x' = x_1 + a, y' = y_1 + b$  (2). Із (1) та (2) отримуємо шукані формули:  $x' = x + a, y' = -y + b$  (3).

Композиція  $f = T_{\vec{p}} \circ S_c$  є рухом другого роду, тобто або осьова симетрія, або ковзна симетрія (в залежності від наявності інваріантних точок; див. табл.1).

Інваріантні точки шукаємо із системи: 
$$\begin{cases} x = x + a \\ y = -y + b. \end{cases}$$

Звідси робимо висновок, що якщо  $a = 0$  (тобто  $p \perp c$ ), то маємо пряму інваріантних точок:  $y = \frac{b}{2}$ . В цьому випадку  $f$  є осьова симетрія. Ї

вісь є пряма, паралельна осі  $c$  і проходить через середину відрізка  $OP$ , де  $O \in c$  та  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ .

Якщо  $a \neq 0$  (тобто вектор  $\vec{p}$  не перпендикулярний осі  $c$ ), то інваріантних точок немає і  $f$  – ковзна симетрія.

Знайдемо вісь  $d$  і вектор  $\vec{q}$  ковзної симетрії  $f$ .

Маємо:  $O(0; 0) \xrightarrow{f} O'(a; b), P(1; 0) \xrightarrow{f} P'(1 + a; b)$ .

Середини відрізків  $OO'$  та  $PP'$ -точки  $O_1\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$  та  $P_1\left(\frac{a}{2} + 1; \frac{b}{2}\right)$  – належать, як відомо, шуканій осі. Як легко бачити, вона задається рівнянням  $y = \frac{b}{2}$ , тобто паралельна прямій  $c$  і проходить через середину відрізка  $OO'$ , де  $O \in c$  та  $\overrightarrow{OO'} = \vec{p}$ .

Далі, візьмемо на знайдений осі довільну точку, наприклад  $C\left(0; \frac{b}{2}\right)$ . Ясно, що вектор  $\overrightarrow{CC'}$  і є шуканий вектор  $\vec{q}$ . Так як  $C\left(0; \frac{b}{2}\right) \xrightarrow{f} C'\left(a; \frac{b}{2}\right)$ , то  $\vec{q}(a; 0)$ .

*Зауваження.* Досліджуючи аналогічним чином композицію  $S_c \circ T_{\vec{p}}$ , приходимо до наступного висновку:

а) якщо  $\vec{p} \perp c$ , то  $S_c \circ T_{\vec{p}}$  є осьова симетрія з віссю  $d$ ; при цьому вісь  $d$  проходить через середину відрізка  $OP$ , де  $O \in c$  і  $\overrightarrow{OP} = -\vec{p}$ ;

б) якщо вектор  $\vec{p}$  не перпендикулярний до осі  $c$ , то  $S_c \circ T_{\vec{p}}$  є ковзна симетрія, яка визначається віссю  $d$  і вектором  $\vec{q}$ .

Пропонуємо самостійно з'ясувати, як побудувати вісь  $d$  та вектор  $\vec{q}$  у випадку (б).

Приклад 6. Досліджуємо композицію двох поворотів  $R_A^\alpha$  та  $R_B^\beta$ , де  $A \neq B$ .

*Розв'язання.* Нехай для визначеності  $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ,  $0^\circ < \beta < 360^\circ$ . Покажемо данні повороти у вигляді композиції осьової симетрії:

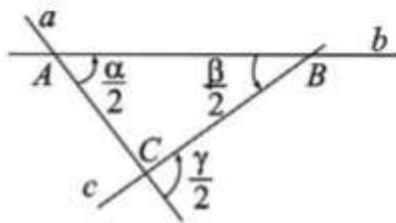
$R_A^\alpha = S_b \circ S_a, R_B^\beta = S_c \circ S_b$ , де в якості прямої  $b$  взято пряму  $AB$ ; кут від прямої  $a$  до прямої  $b$  рівний  $\frac{\alpha}{2}$ , а кут від прямої  $b$  до прямої  $c$  рівний  $\frac{\beta}{2}$  (мал.43).

Отримуємо:

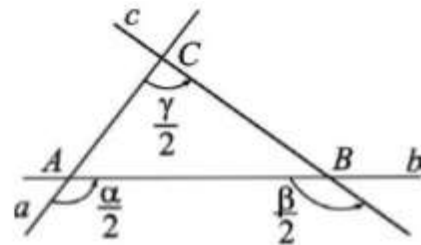
$$R_A^\alpha \circ R_B^\beta = (S_c \circ S_b) \circ (S_b \circ S_a) = S_c \circ (S_b \circ S_b) \circ S_a = S_c \circ e \circ S_a = S_c \circ S_a.$$

Отже, якщо  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$ , тобто  $\alpha + \beta = 360^\circ$ , то  $a \parallel c$  і, відповідно, шукана композиція є паралельним переносом.

Якщо ж  $\alpha + \beta \neq 360^\circ$ , то вісь  $a$  та  $c$  перетинаються в точці  $C$  і шукана композиція є поворот на кут  $\gamma$ , вдвічі більший кута від прямої  $a$  до прямої  $c$ . Неважко побачити, що якщо  $\alpha + \beta < 360^\circ$  (тобто  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 180^\circ$ ), то  $\gamma = \alpha + \beta$  (мал.43-а). Якщо ж  $\alpha + \beta > 360^\circ$  (тобто  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} > 180^\circ$ ), то  $\gamma = (\alpha + \beta) - 360^\circ$  (мал.43-б). В будь-якому випадку шукана композиція  $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$  є поворот  $R_C^{\alpha+\beta}$ .



Мал. 43-а



Мал.43-б

Приклад 7. Досліджуємо композицію  $R_O^\alpha \circ T_{\vec{p}}$ , де поворот  $R_O^\alpha$  відрізняється від тотожного перетворення і  $\vec{p} \neq 0$ .

*Розв'язання.* Покажемо поворот  $R_O^\alpha$  у вигляді композиції осьових симетрій

$R_O^\alpha = S_b \circ S_a$ , причому вісь  $a$  візьмемо перпендикулярну вектору  $\vec{p}$  (мал.44).

$$\text{Отримуємо: } R_O^\alpha \circ T_{\vec{p}} = (S_b \circ S_a) \circ T_{\vec{p}} = S_b \circ (S_a \circ T_{\vec{p}}).$$

Композиція  $S_a \circ T_{\vec{p}}$  є осьова симетрія  $S_c$ , причому  $c \parallel a$ . Тому  $c \cap b = O_1$  і кут від прямої  $c$  до прямої  $b$  рівний  $\frac{\alpha}{2}$ . Відповідно,  $R_O^\alpha \circ T_{\vec{p}} = (S_b \circ S_c) = R_{O_1}^\alpha$ , що і потрібно було довести.

Підводячи підсумки, відзначимо, що в останніх двох прикладах була застосована ідея розкладання руху в композицію осьових симетрій, осі яких вибиралися відповідним чином.



### Подібність фігури

Фігура  $\Phi$  називається подібною фігурою  $\Phi'$ , якщо існує таке перетворення подібності, при якому  $\Phi$  відображається на фігуру  $\Phi'$ . Коефіцієнт  $k$  цього перетворення подібності називається коефіцієнтом подібності даних фігур.

Позначається:  $\Phi \sim \Phi'$ .

Зокрема, якщо  $\Phi$  та  $\Phi'$  – трикутники  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$ , то кажуть про подібність цих трикутників, зазвичай вважають (згідно з ситуацією яка склалася), що існує перетворення подібності, при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$  (і, відповідно,  $\Delta ABC \rightarrow \Delta A_1B_1C_1$ ).

**Приклад 1.** Доведіть, що якщо суміжні сторони одного прямокутника пропорційні суміжним сторонам іншого, то прямокутник подібний.

*Розв'язання.* Нехай в прямокутниках  $ABCD$  та  $A_1B_1C_1D_1$   $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ .

Так як, крім того,  $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$ , то існує перетворення подібності, при якому  $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, D \rightarrow D_1$ . При цьому перетворенні пряма  $BC$  (паралельна  $AD$ ) перетворюється в пряму  $B_1C_1$  (паралельну  $A_1D_1$ ), а пряма  $DC$  – в пряму  $D_1C_1$ . Відповідно, точка перетину прямих  $BC$  та  $DC$ , тобто точка  $C$ , переходить в точку перетину прямих  $B_1C_1$  та  $D_1C_1$ , тобто в точку  $C_1$ .

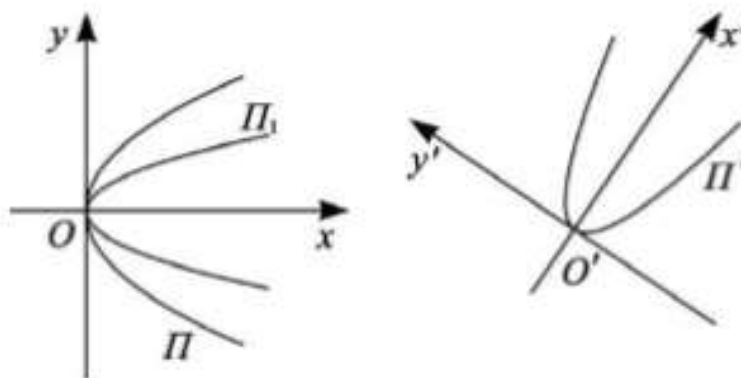
І так, існує перетворення подібності, при якому точки  $A, B, C, D$  переходять в точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  і, стало бути, прямокутник  $ABCD$  відображається на прямокутник  $A_1B_1C_1D_1$ . Відповідно, ці прямокутники подібні.

**Приклад 2.** Доведемо, що будь-які дві параболи подібні.

*Розв'язання.* Нехай  $\Pi$  та  $\Pi'$  – дані параболи. Існує ортонормовані базиси

$R$  та  $R'$ , в яких ці параболи задаються рівнянням  $y^2 = 2px$  та  $y^2 = 2qx$  відповідно.

Розглянемо гомотетію  $H_O^k$ , де  $k = \frac{q}{p}$ . Формули гомотетії:



$$x' = \frac{q}{p}x, y' = \frac{q}{p}y.$$

Мал. 50

При цій гомотетії парабола  $P$  перетворюється в параболу  $P_1$ , задану в базисі  $R$  рівнянням  $y'^2 = 2qx'$ .

Розглянемо далі рух  $\varphi$ , при якому базис  $R$  переходить в базис  $R'$  (такий рух існує за теоремою про рухомість площини).

При русі  $\varphi$  парабола  $P_1$  переходить в фігуру, яка задається тим самим же рівнянням в базисі  $R'$ , тобто  $P_1$  відображається на  $P'$ , значить  $P_1$  та  $P'$  рівні.

Отже,  $P$  та  $P_1$  гомотетичні, а  $P_1$  та  $P'$  рівні, відповідно,  $P$  та  $P'$  подібні, що і потрібно було довести.

## Застосування перетворень подібності до розв'язання задач на доведення

Як зазначалося раніше, додаток геометричних перетворень до задач на доказ засноване найчастіше на ідеї *переформулювання мети (вимоги) задачі на мові геометричних перетворень*. Можливості для такого переформулювання доставляють властивості або визначення того або іншого перетворення. Наведемо деякі засновані на цій ідеї прийоми вирішення завдань на доказ; у дужках після кожного прийому вказується його теоретична база.

1. Щоб довести, що точки  $A, B, C$  колінеарні, досить встановити, що при деякій гомотетії  $H_A^k$  точка  $B$  переходить в точку  $C$ , або встановити, що при деякій гомотетії  $H_B^k$  точка  $A$  переходить в точку  $C$  і тому подібне (визначення гомотетії).

2. Щоб довести, що точки  $A, B, C, \dots$  колінеарні, досить встановити, що вони є образами колінеарних точок  $A_1, B_1, C_1, \dots$  при деяких перетвореннях подібності (властивість перетворень подібності).

3. Щоб довести, що прямі  $a$  та  $b$  паралельні, досить встановити, що при деякій гомотетії  $H_O^k$ , де  $O \notin a$ , пряма  $a$  переходить в пряму  $b$  (властивість гомотетії).

4. Щоб довести, що прямі  $a$  та  $b$  паралельні (перпендикулярні), досить встановити, що вони є образами деяких паралельних (перпендикулярних) прямих при деякому перетворенні подібності (властивість перетворення подібності).

5. Щоб довести, що прямі  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$  проходять через точку  $O$ , досить встановити, що при гомотетії  $H_O^k: A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1, \dots$  (визначення гомотетії).

6. Щоб довести, що лінії  $L_1, L_2, L_3 \dots$  перетинаються в одній точці, досить встановити, що вони є образами або прообразами деяких ліній  $L'_1, L'_2, L'_3 \dots$ , які перетинаються в одній точці (визначення образу фігури).

7. Щоб довести, що коло  $\omega_1$  та  $\omega_2$  дотикаються в точці  $A$ , де  $A \in \omega_1$ , досить встановити, що при гомотетії  $H_A^k$  ( $k \neq 1$ )  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  (властивість гомотетії)

8. Щоб довести, що фігура  $F$  є паралелограмом (ромбом, прямокутником і т.д.), досить встановити, що  $F$  є образом деякого паралелограма ( ромба, прямокутника і т.д.) при деякому перетворенні подібності ( властивість перетворень подібності).

9. Щоб довести, що прямі  $a$  та  $b$  перпендикулярні, досить встановити, що при центральній подібності обертанні навколо деякого центра на кут  $\pm 90^\circ$  пряма  $a$  відображається на пряму  $b$  (властивість центрально-подібного обертання).

10. Щоб довести, що точки  $A, B, C \dots$ , належать деякому колу  $\omega$ , досить встановити, що при деякому перетворенні подібності точки  $A_1, B_1, C_1, \dots$ , які належать деякому колу  $\omega_1$  переходять в точки  $A, B, C \dots$ , а коло  $\omega_1$  переходить в коло  $\omega$  (властивість перетворення подібності).

Розуміється, розглянуті прийоми не вичерпують всіх ситуацій, які допускають застосування перетворень подібності в задачах на доведення.

*Приклад 1.* Доведемо, що в будь-якій трапеції точка перетину діагоналей, точка перетину продовжень бокових сторін і середини основ лежать на одній прямій.

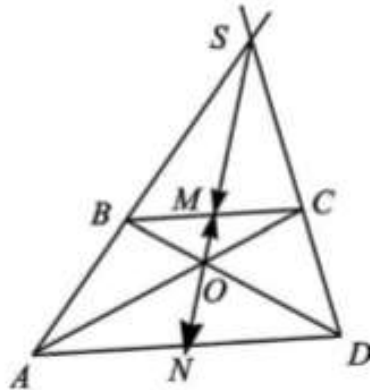
*Пошук розв'язання.* Нехай  $M, N$  – середини основ  $BC$  та  $AD$  трапеції  $ABCD$ ,  $O$  – точка перетину діагоналей, а  $S$  – точка перетину продовжень бокових сторін (мал. 51).

Дана задача розпадається на дві підзадачі:

- довести, що точки  $S, M, N$  колінеарні;
- довести, що точки  $O, M, N$  колінеарні.

На мові геометричних перетворень ці підзадачі переводяться наступним чином :

- довести, що при деякій гомотетії  $H_S^k M \rightarrow N$ , для чого потрібно встановити, що при цій гомотетії відрізок  $BC$  переходить у відрізок  $AD$ ;
- довести, що при деякій гомотетії  $H_O^k M \rightarrow N$ , для чого потрібно встановити, що при цій гомотетії відрізок  $BC$  відображається на відрізок  $AD$ .



Мал. 51

Для розв'язання першої підзадачі необхідно підібрати коефіцієнт  $k$  так, щоб при гомотетії  $H_S^k$  точка  $B$  переходила в точку  $A$ . Очевидно, що  $B \xrightarrow{H_S^k} A$  тоді і тільки тоді, коли  $\overrightarrow{SA} = k * \overrightarrow{SB}$ . Звідси, враховуючи, що точки  $A$  та  $B$  лежать на одну сторону від точки  $S$  (і, значить,  $k > 0$ ), знаходимо:  $k = \frac{SA}{SB}$ .

Для розв'язання другої підзадачі необхідно підібрати коефіцієнт  $k$  так, щоб при гомотетії  $H_O^k$  точка  $B$  переходила в точку  $D$ . Очевидно, що  $B \xrightarrow{H_O^k} D$  тоді і тільки тоді, коли  $\overrightarrow{OD} = k * \overrightarrow{OB}$ . Звідси, враховуючи, що

точки  $B$  та  $D$  лежать по різних сторонах від точки  $O$  (і, значить,  $k < 0$ ), знаходимо  $k = -\frac{OD}{OB}$ .

Вищесказане робить природнім наступне розв'язання. Розглянемо гомотетію  $H_S^k$ , де  $k = \frac{SA}{SB}$ . При цій гомотетії  $B \rightarrow A$ , значить, пряма  $BC$  переходить в пряму  $AD$ . Так як, крім того, пряма  $SD$  відображається сама на себе, то точка  $BC \cap SD$  переходить в точку  $AD \cap SD$ , тобто  $C \rightarrow D$ . Так як  $B \rightarrow A, C \rightarrow D$ , то відрізок  $BC$  переходить у відрізок  $AD$  і, відповідно, середина відрізка  $BC$  – точка  $M$  – переходить в середину відрізка  $AD$  – точку  $N$ . Так як при гомотетії  $H_S^k$   $M \rightarrow N$ , то за означенням гомотетії  $\overrightarrow{SN} = k * \overrightarrow{SM}$  і тому точки  $S, M, N$  колінеарні.

Розглянемо тепер гомотетію  $H_O^k$ , де  $k = -\frac{OD}{OB}$ . При цій гомотетії  $B \rightarrow D$ . Далі, так як пряма  $BC$  переходить в пряму  $DA$ , а пряма  $AC$  відображається сама на себе, то точка  $BC \cap AC$  переходить в точку  $DA \cap AC$ , тобто  $C \rightarrow A$ . Так як  $B \rightarrow D, C \rightarrow A$ , то відрізок  $BC$  переходить у відрізок  $DA$  і, відповідно, середина відрізка  $BC$  переходить в середину відрізка  $DA$ , тобто  $M \rightarrow N$ . Звідси, за означенням гомотетії, випливає, що  $\overrightarrow{ON} = k * \overrightarrow{OM}$  і тому точки  $O, M, N$  колінеарні.

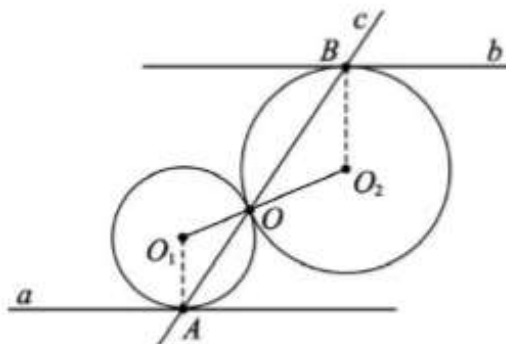
Із вищесказаного слідує, що точки  $O, S, M, N$  колінеарні, що і потрібно було довести.

*Приклад 2*. Коло  $\omega_1(O_1; R_1)$  та  $\omega_2(O_2; R_2)$  дотикається зовнішнім образом в точці  $O$ . Через точку  $O$  проведена пряма  $s$ , яка перетинає ці кола в точках  $A$  та  $B$ . Доведемо, що дотичні до кола, проведенні в точках  $A$  та  $B$ , паралельні.

*Пошук розв'язання*. Для розв'язання задачі досить встановити, що при гомотетії  $H_O^k$  дотична  $a$  переходить в дотичну  $b$  (мал. 52).

Для цього, в свою чергу, необхідно довести, що при гомотетії  $H_O^k$   $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  та  $A \rightarrow B$ . Щоб встановити, що при гомотетії  $H_O^k$  коло  $\omega_1$  переходить в коло  $\omega_2$ , необхідно показати, що  $O_1 \rightarrow O_2$ . Так як точка  $O$  ділить відрізок

$O_1O_2$  у відношенні  $R_1:R_2$ , то отримати це (тобто щоб  $O_1 \rightarrow O_2$ ) можна, вибрати коефіцієнт  $k$  рівним  $-\frac{R_2}{R_1}$ . Сказане приводить до наступного розв'язання.

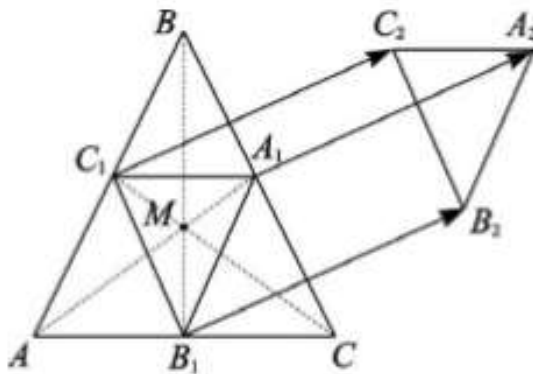


Мал.52

*Розв'язання.* Розглянемо гомотетію  $H_O^k$ , де  $k = -\frac{R_2}{R_1}$ . При цій гомотетії  $O_1 \rightarrow O_2$ , відповідно, коло  $\omega_1$  переходить в таке коло з центром  $O_2$ , радіус якого рівний  $R = |k| * R_1 = R_2$ , тобто  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ . Так як  $\omega_1 \rightarrow \omega_2, c \rightarrow c$ , то точка  $\omega_1 \cap c$  (відмінна від точки  $O$ ) переходить в точку  $\omega_2 \cap c$  (також відмінну від точки  $O$ ), тобто  $A \rightarrow B$ . Звідси випливає, що дотична до кола  $\omega_1$  в точці  $A$  переходить у дотичну до кола  $\omega_2$  в точці  $B$ . Відповідно, вказані дотичні паралельні, що і потрібно було довести.

*Приклад 3.* Точки  $A_1, B_1, C_1$  – середини сторін  $BC, CA, AB$  трикутника  $ABC$ . При переносі  $T_{\vec{p}}$  трикутник  $A_1B_1C_1$  відображається на трикутник  $A_2B_2C_2$ . Доведемо, що прямі  $AA_2, BB_2, CC_2$  перетинаються в одній точці.

*Розв'язання.* При гомотетії  $H_M^{-\frac{1}{2}}$ , де  $M$  – центроїд трикутника  $ABC$ , точки  $A, B, C$  переходять відповідно в  $A_1, B_1, C_1$ . При переносі  $A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2$  (мал.53).



Мал. 53

Таким чином, перетворення  $T_{\vec{p}} \circ H_M^{-\frac{1}{2}}$  переводить точки  $A, B, C$  в точки  $A_2, B_2, C_2$ .

З іншої сторони, перетворення  $T_{\vec{p}} \circ H_M^{-\frac{1}{2}}$  є гомотетія  $H_N^{-\frac{1}{2}}$  (див. впр. 304), де точка  $N$  визначається умовою  $\overline{MN} = \frac{2}{3}\vec{p}$ . Звідси випливає, що прямі  $AA_2, BB_2, CC_2$  проходять через точку  $N$ , що і потрібно було довести.

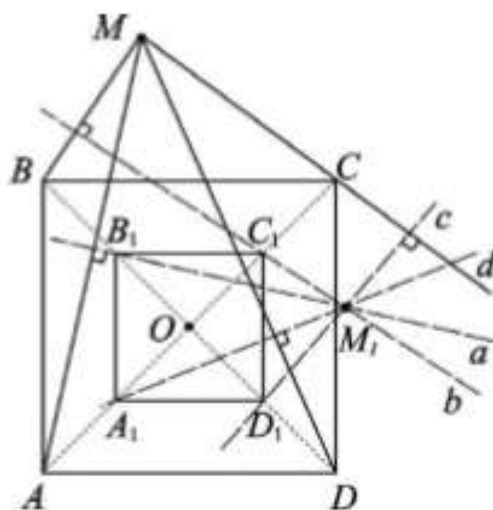
*Зауваження.* Так як при гомотетії  $H_N^{-\frac{1}{2}}$   $A \rightarrow A_2$ , то  $\overline{NA_2} = -\frac{1}{2}\overline{NA}$ . Відповідно, точка  $N$  ділить відрізок  $AA_2$  у відношенні 2:1.

Аналогічно встановлюється, що відрізки  $BB_2$  та  $CC_2$  діляться точкою  $N$  у тому ж відношенні.

**Приклад 4.** Діагоналі квадрата  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  – середини відрізків  $AO, BO, CO, DO$  відповідно;  $M$  – довільна точка. Через точки  $B_1, C_1, D_1, A_1$  проведені прямі  $a, b, c, d$ , перпендикулярні прямим  $MA, MB, MC, MD$  відповідно. Доведемо, що прямі  $a, b, c, d$  перетинаються в одній точці.

*Розв'язання.* Розглянемо центральне-подібне обернання  $R_O^{-90^\circ} \circ H_O^{-\frac{1}{2}}$  (мал. 54). При цьому  $A \rightarrow B_1$ , відповідно, пряма  $MA$  переходить в перпендикулярну їй пряму, яка проходить через точку  $B_1$ , тобто в пряму  $a$ . Звідси слідує, що пряма  $a$  проходить через точку  $M_1$  – образ точки  $M$  при вказаному перетворенні.





Мал. 54

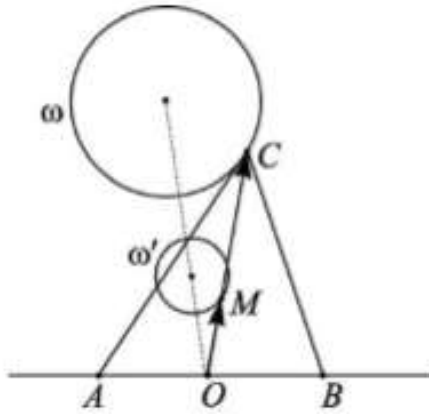
Аналогічно доводиться, що прямі  $b, c, d$  також проходять через точку  $M_1$ , що і потрібно було довести.

*Приклад 5.* На площині дано точки  $A, B$  і коло  $\omega$ , яке не перетинається з прямою  $AB$ . Точка  $C$  рухається по колу  $\omega$ . Доведемо, що геометричне місце (множина) центроїди трикутника  $ABC$  є коло.

*Розв'язання.* Нехай точка  $M$  – центроїда трикутника  $ABC$ , де  $C \in \omega$ , а  $O$  – середина відрізка  $AB$  (мал.55).

При гомотетії  $H_O^{\frac{1}{3}}$  точка  $C$  переходить в точку  $M$ , а коло  $\omega$  – в коло  $\omega'$ . Так як  $C \in \omega$ , то  $M \in \omega'$ .

Навпаки, нехай  $M$  – довільна точка кола  $\omega'$ . При гомотетії  $H_O^3$   $\omega' \rightarrow \omega$  і, відповідно, точка  $M$ , яка належить колу  $\omega'$ , переходить в деяку точку  $C$ , яка належить  $\omega$ . Так як  $H_O^3(M) = C$ , то  $\overrightarrow{OC} = 3 * \overrightarrow{OM}$ . Це значить, що точка  $M$  – центроїд трикутника  $ABC$ . Звідси слідує, що  $M$  належить шуканому геометричному місцю точок.



Мал.55

Отже, будь-яка точка  $M$  шукного геометричного місця точок належить колу  $\omega' = H_O^{\frac{1}{3}}(\omega)$  і, навпаки, будь-яке коло  $\omega'$  належить шуканому геометричному місцю точок. Таким чином, шукане геометричне місце точок є коло  $\omega' = H_O^{\frac{1}{3}}(\omega)$ , де  $O$  – середина відрізка  $AB$ .

### Застосування перетворень подібності до розв'язання задач на побудову

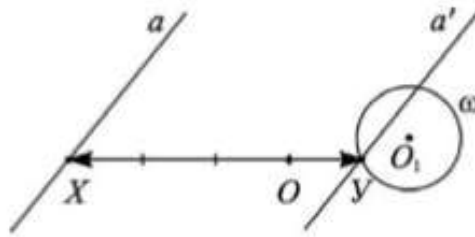
Метод геометричних перетворень в задачах на побудову конкретизується різними прийомами. Розглянемо ті із них, які найбільше використовують для перетворення подібності, відмінних від руху.

#### *Побудова точки перетину даної фігури і образу другої даної фігури*

Цей прийом використовується в задачах, де потрібно побудувати точки  $X$  та  $Y$ , які належать відповідно відомим (даним) фігурам  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$ .

*Приклад 1.* Побудуємо відрізок  $XU$ , кінці якого належали б даній прямій  $a$  та даному колу  $\omega$  відповідно, так, щоб цей відрізок ділився даною точкою  $O$  у відношенні 3:1, рахуючи від прямої  $a$ .

*Аналіз.* Припустимо, що шуканий відрізок  $XU$  побудований (мал.56).



Мал. 56

Розглянемо гомотетію  $H_O^{-\frac{1}{3}}$  (так як саме це перетворення переводить точку  $X$  в точку  $Y$ ). При цьому  $X \rightarrow Y, a \rightarrow a'$ . Так як  $X \hat{I} a$ , то  $Y \hat{I} a'$  і, відповідно,  $Y \in a' \cap \omega$ . Отримане відношення дозволяє побудувати точку  $Y$ . Маючи точку  $Y$ , можна побудувати точку  $X: X = H_O^{-3}(Y)$ .

*Побудова.* Будуємо:

- 1) пряму  $a'$  – образ прямої  $a$  при гомотетії  $H_O^{-\frac{1}{3}}$ ;
- 2) точку  $Y \in a' \cap \omega$  (або точки  $Y_1, Y_2 \in a' \cap \omega$ , якщо пряма  $a'$  перетинається з колом  $\omega$  в двох точках);
- 3) точку  $X$  – образ точки  $Y$  при гомотетії  $H_O^3$  (відповідно- точки  $X_1, X_2$ , точки гомотетії  $Y_1, Y_2$ );
- 4) шуканий відрізок  $XU$  (відповідно- шуканий відрізок  $X_1Y_1, X_2Y_2$ ).

*Доведення.* (проведемо для відрізка  $XU$ ).

1.  $Y \hat{I} \omega$  за побудовою.
2. При гомотетії  $H_O^{-3} a' \rightarrow a, Y \rightarrow X$ . Так як  $Y \hat{I} a'$ , то  $X \hat{I} a$ .
3. Так як  $X = H_O^{-3}(Y)$ , то  $\overrightarrow{OX} = -3\overrightarrow{OY}$  і, відповідно, точка  $O$  належить відрізку  $XU$  і ділить його у відношенні 3:1, починаючи від точки  $X$ .

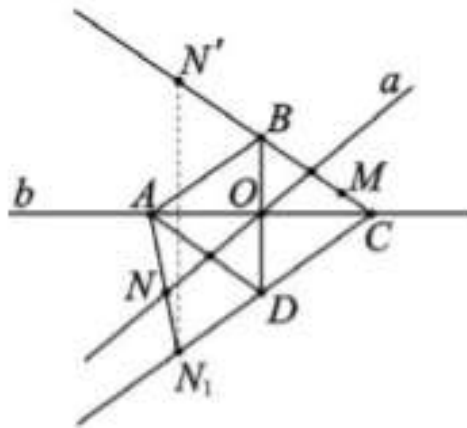
*Дослідження.* Задача може мати одне, два і ні одного розв'язання в залежності від взаємного розміщення даних фігур( точка  $O$ , пряма  $a$ , коло  $\omega$ ).

*Доповнення множини відомих точок*

Цей прийом використовується в задачах, де шукана фігура на самому початку задається деякими точками, якими, на перший огляд, недосить, щоб побудувати цю фігуру.

*Приклад 2.* Побудуємо ромб  $ABCD$ , якщо відома вершина  $A$ , пряма  $b$ , яка містить діагональ  $AC$ , точка  $M$ , яка належить прямій  $BC$ , і точка  $N$ , яка належить прямій, яка проходить через середини сторін  $BC$  та  $AD$ .

*Аналіз.* Припустимо, що шуканий ромб побудований (мал. 57). Розглянемо центрально-подібну симетрію  $S_b \circ H_A^2$ . При цьому пряма, яка проходить через середини сторін  $BC$  та  $AD$ , переходить в пряму  $BC$ , а точка  $N$  – в точку  $N'$ , яка належить прямій  $BC$ . Це дає можливість побудувати пряму  $BC$ ; використовуючи попередні, можна побудувати ромб.



Мал. 57

*План побудови.* Будуємо послідовність:

- точку  $N'$  – образ точки  $N$  при центрально-подібній симетрії  $S_b \circ H_A^2$ ;
- пряму  $MN'$ ;
- точку  $C = MN' \cap b$ ;
- пряму  $CN_1$ , де  $N_1 = H_A^2(N)$ ;
- вершини відрізка  $AC$  – точку  $O$ ;
- вершини  $B$  та  $D$ ;

-  $ABCD$  – шуканий ромб.

Доведення і дослідження пропонуємо зробити самостійно.

### *Приєм подібності*

Цей прийом (за традицією його називають методом подібності) є частинним проявленням прийому побудови прообразу шуканої фігури. Він використовується в задачах, умови яких можна розбити на дві групи, одна із яких визначає шукану фігуру з точністю до подібності.

Тому, нехай потрібно побудувати фігуру  $\Phi$ , яка має певні властивості. На початку будують додаткову фігуру  $\Phi_1$ , яка володіє лише деякими властивостями і подібна шуканій фігурі. Потім підбирають таке перетворення подібності  $f$ , при якому фігура  $\Phi_1$  переходить в шукану фігуру  $\Phi$ . Частіше всього в якості перетворення  $f$  застосовують гомотетію.

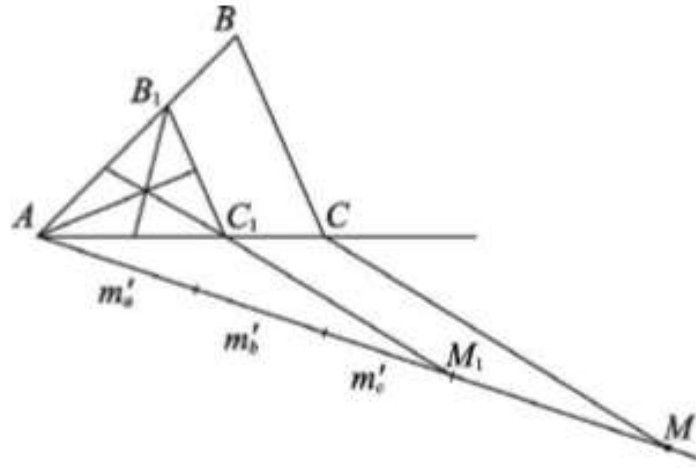
*Приклад 3.* Побудуємо трикутник  $ABC$ , знаючи відношення  $m:n$  двох його сторін, кут  $\varphi$ , який знаходиться між ними, і суму  $p$  всіх його медіан (тут  $m, n, p$  – дані відрізки,  $\varphi$  – даний кут).

*Аналіз.* Використовуючи умову  $AB : AC = m : n$  та  $\angle BAC = \varphi$ , можна побудувати додатковий трикутник  $AB_1C_1$ , подібний шуканому трикутнику  $ABC$ . Для цього досить на сторонах кута, рівного куту  $\varphi$ , відкласти відрізки  $AB_1 = m, AC_1 = n$  або відрізки, пропорційні  $n, m$  (мал. 58).

Підберемо тепер коефіцієнт  $k$  такої гомотетії  $H_A^k$ , при якій трикутник  $AB_1C_1$  переходить в шуканий трикутник  $ABC$  із заданою сумою  $p$  всіх його медіан. Нехай  $m'_a, m'_b, m'_c$  – довжини медіан додаткового трикутника  $AB_1C_1$ , а  $m_a, m_b, m_c$  – довжини медіан шуканого трикутника  $ABC$ . Так як при гомотетії  $H_A^k \Delta AB_1C_1 \rightarrow \Delta ABC$ , то медіани першого трикутника переходять у відповідні медіани трикутника  $ABC$  і, відповідно,  $m_a = k * m'_a, m_b = k * m'_b, m_c = k * m'_c$ . Складаючи ці рівності, знаходимо шуканий коефіцієнт:

$$k = \frac{m_a + m_b + m_c}{m'_a + m'_b + m'_c} = \frac{p}{p'}$$

даного відрізка.



Мал.58

*Побудова.* Будуємо послідовність (мал.58):

1.  $\triangle AB_1C_1$ , в якому  $\angle B_1AC_1 = \varphi$ ,  $AB_1 = m$ ,  $AC_1 = n$ ;
2.  $\triangle ABC$  – образ трикутника  $AB_1C_1$  при гомотетії  $H_A^k$ , де  $k = \frac{p}{p_1}$ , для чого:
  - на промені, який виходять із точки  $A$ , відкладається  $AM = p$ ,  $AM_1 = p_1 = m'_a + m'_b + m'_c$ ;
  - будуємо точку  $C$  – точку перетину променя  $AC_1$  і прямої, яка проходить через точку  $M$  і паралельна  $M_1C_1$  (інакше кажучи,  $C = H_A^k(C_1)$ );
  - будуємо на промені  $AB_1$  точку  $B$  так, щоб  $BC \parallel B_1C_1$ ; інакше кажучи  $B = H_A^k(B_1)$ .

*Доведення.* В трикутнику  $ABC$   $\angle BAC = \varphi$  за побудовою. Так як  $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ , то  $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{m}{n}$ .

При гомотетії  $H_A^k$  медіани трикутника  $AB_1C_1$  переходять в медіани трикутника  $ABC$ , тому  $m_a = k * m'_a$ ,  $m_b = k * m'_b$ ,  $m_c = k * m'_c$ , звідси

$$m_a + m_b + m_c = k * (m'_a + m'_b + m'_c) = \frac{p}{p_1} * p_1 = p,$$

що і потрібно було довести.

*Дослідження.* Легко побачити, що дана задача має розв'язання при будь-якому виборі початкових даних.

*Зауваження.* Звернемо увагу на коефіцієнт тих гомотетій, які застосовувались в прикладі 3 та впр. 453-454:

а) в прикладі 3:  $k = \frac{p}{p_1}$ , де  $p$  – сума медіан шуканого трикутника ( вона відома), а  $p_1$  – сума медіан додаткового трикутника;

б) в прикладі 453:  $k = \frac{2p}{2p_1}$ , де  $2p$  – периметр шуканого трикутника (він відомий), а  $2p_1$  – периметр додаткового трикутника.

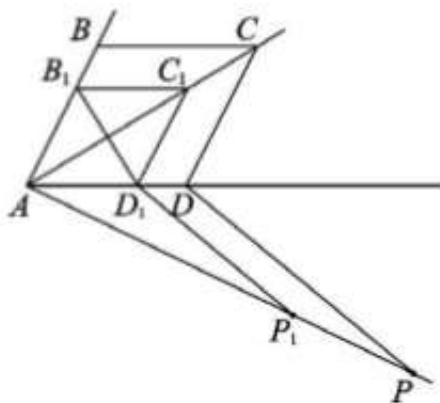
в) в прикладі 454:  $k = \frac{p}{p_1}$ , де  $q$  – сума бісектрис шуканого трикутника ( вона відома), а  $q_1$  – сума відповідних бісектрис додаткового трикутника.

Як бачимо, в усіх трьох задачах коефіцієнт гомотетії став рівним відношенню відомого «лінійного елемента» шуканої фігури до відповідному (однойменному) «лінійному елементу» додаткової фігури. Це спостереження дозволяє в аналогічних задачах, починати розв'язання зразу з побудови, нехтуючи аналізом в силу його очевидності.

Розв'язання наведеної нижче задачі здійснюється ( у відповідності з вищесказаним) за спрощеним сценарієм.

Приклад 4. Побудуємо ромб, знаючи його кут  $\varphi$  та суму діагоналей  $p$ .

*Пошук розв'язання.* В даній задачі перша умова ( кут ромба рівний даному куту  $\varphi$ ) дозволяє побудувати додатковий ромб, подібний шуканому. «Лінійний елемент» шуканого ромба- сума діагоналей  $p$ , значить, коефіцієнт необхідної гомотетії  $k = \frac{p}{p_1}$ , де  $p_1$  -сума діагоналей додаткового ромба. Звідси випливає наступна побудова.



Мал.59

Будуємо: 1) ромб  $AB_1C_1D_1$ , в якому  $\angle B_1AD_1 = \varphi$  (мал.59) ; 2) ромб  $ABCD$  – образ ромба  $AB_1C_1D_1$  при гомотетії  $H_A^k$ , де  $k = \frac{p}{p_1}$ ,  $p_1 = AC_1 + B_1D_1$ .

*Доведення.* При гомотетії ромб переходить в ромб, відповідно, побудований чотирикутник  $ABCD$  є ромбом. Далі  $\angle BAD = \varphi$  за побудовою.

При гомотетії  $H_A^k$  діагоналі  $AC_1$  та  $B_1D_1$  переходять в діагоналі  $AC$  та  $BD$ , відповідно,  $AC = k * AC_1, BD = k * B_1D_1$ . Складуючи ці рівності, отримуємо:  $AC + BD = k * (AC_1 + B_1D_1) = \frac{p}{p_1} * p_1 = p$ , що і потрібно було довести.

*Дослідження.* Задача має єдиний розв'язок при будь-якому виборі початкових даних.

Розглянемо приклади задач, в яких вибір центра гомотетії ( на відміну від розглянутих вище задач) має принципіальне значення. До їх числа відносять такі задачі, в яких потрібно побудувати фігуру, розташовану певним чином відносно даних фігур; іноді такі задачі називаються позиційними.

Приклад 5. Дано гострий кут  $MPK$  і пряма  $a$ , яка перетинає сторони кута.

Побудуємо квадрат  $ABCD$ , центр якого належить прямій  $a$ , вершина  $A$  – променю  $PM$ , а вершини  $B$  та  $C$  – променю  $PK$ .



*Аналіз.* Неважко побудувати додатковий квадрат  $A_1B_1C_1D_1$ , такий, що  $A_1\hat{I}PM$ ,  $B_1\hat{I}PK$ ,  $C_1\hat{I}PK$  (мал.60).

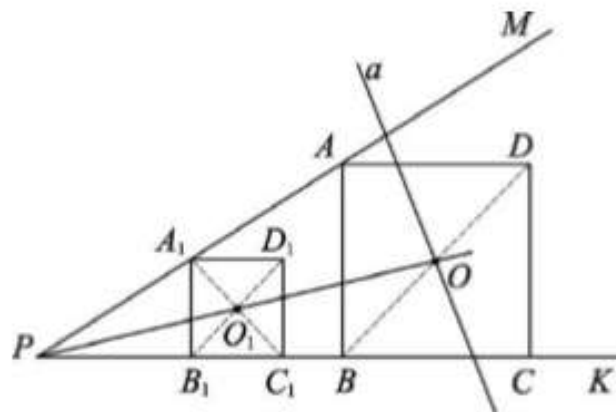
Підберемо гомотетію, при якій квадрат  $A_1B_1C_1D_1$  переходить в шуканий квадрат.

Центром такої гомотетії може слугувати тільки вершина даного кута-точка  $P$ . При цій гомотетії центр  $O_1$  квадрат  $A_1B_1C_1D_1$  переходить в точку  $O$  – центр шуканого квадрата. З однієї сторони, точка  $O$  повина належати прямій  $a$ , з іншої сторони, точка  $O$  належить променю  $PO_1$ . Таким чином, шукана гомотетія визначається точкою  $P$  та парою відповідних точок  $O_1$  та  $O$ , де  $O_1 \rightarrow O$ . Звідси слідує наступна побудова.

*Побудова:*

1. квадрат  $A_1B_1C_1D_1$  (мал.60);
2. точку  $O = a \cap PO_1$ , де  $O_1$  – центр квадрата  $A_1B_1C_1D_1$ ;
3. квадрат  $ABCD$  – образ квадрата  $A_1B_1C_1D_1$  при гомотетії, яка визначається центром  $P$  та точками  $O_1$  та  $O$ .

Доведення і дослідження опускаємо в силу їх очевидності.



Мал.60

Виклавши

загальне міркування з приводу завдання гомотетії в задачах, аналогічних розглянутої, зіставляючи ці міркування з вищенаведеном розв'язанні.

Шукана фігура  $\Phi$  (квадрат  $ABCD$ ) повинна володіти рядом властивостей  $\alpha, \beta, \gamma \dots (A \hat{I} PM; B, C \hat{I} PK; O \hat{I} a)$ . Фігура  $\Phi_1$  (квадрат  $A_1B_1C_1D_1$ ) володіє першими двома властивостями. Гомотетія, яка

переводить  $\Phi_1$  в  $\Phi$ , підбирається так, щоб ці властивості передавалися від фігури  $\Phi_1$  до фігури  $\Phi$ , а третю властивість ( $O \in a$ ) мала фігура  $\Phi$ . В розглянутій вище задачі вибір точки  $P$  в якості центра гомотетії і забезпечив як раз передачу перших двох властивостей фігури  $\Phi$ ; вибір точок  $O_1$  та  $O$  в якості відповідних, дозволив фігурі  $\Phi$  набути третю властивість, яким фігура  $\Phi_1$  не володіла.

Відмітимо також, що і в задачах позиційного типу розв'язання нерідко починається зразу з побудови.

## Додаток Д

**КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ  
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО  
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Я, Кириленко Аліна Леонідівна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

**ЗАЯВЛЯЮ**, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

- самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;
- надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;
- не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;
- своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;
- не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;
- підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;
- поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;
- не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;
- відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;
- запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;
- не брати участі будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

- не підроблювати документи;
- не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;
- не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;
- не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;
- не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;
- не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;
- не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;
- не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

**УСВІДОМЛЮЮ**, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

02.11.2020



Кириленко Аліна Леонідівна