**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ**

**КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

# УЗАГАЛЬНЕННЯ ОЗНАК ЗБІЖНОСТІ ТА АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

**Кваліфікаційна робота (проєкт)**

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконав студент 2 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти

Степанець Євген Олександрович

Керівник доцент, кандидат фізико-математичних наук, професор

Кузьмич Валерій Іванович

Рецензент доцент, кандидат фізико-математичних наук

Вейцбліт Олександр Йосипович

## ЗМІСТ

**ВСТУП………………………………………………………………………3**

**РОЗДІЛ I. ПОНЯТТЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ………6**

1.1. Збіжність та абсолютна збіжність ряду………………………………..6

1.2. Узагальнена збіжність ряду. Приклади………………………………15

1.3. Метод середніх арифметичних підсумовування рядів……………...18

1.4. Метод Абеля-Пуасона…………………………………………………...21

**РОЗДІЛ II. ЗАГАЛЬНІ МАТРИЧНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ……………………………………...24**

2.1. Регулярність матричних методів………………………………………..24

2.2. Абсолютна регулярність матричних методів ………………………27

2.3. Консервативність матричних методів…………………………………..33

**РОЗДІЛ III. КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ..39**

3.1. Методи Чезаро……………………………………………………………39

3.2. Метод Рісса………………………………………………………………43

3.3. Метод Вороного-Нерлунда……………………………………………...44

3.4. Метод Бореля……………………………………………………………49

**ВИСНОВКИ…………………………………………………………….…52**

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……………………………....55**

**ДОДАТКИ…………………………………………………………………61**

Додаток А……………………………………………………..…………61

# ВСТУП

**Актуальність теми**. Ряди широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь.

Вони відіграють важливу роль у математиці принаймні з двох причин: є ефективним інструментом математичних досліджень і одним із найважливіших засобів побудови практичних чисельних методів.

Широким застосуванням теорії рядів і пояснюється актуальність теми дипломної роботи. **Метою** роботи є детальне вивчення основних методів підсумовування збіжних та розбіжних рядів.

Теорія рядів почала розвиватися в кінці XVII ст. але була створена лише в XIX ст. на основі поняття границі в роботах Гаусса, Коші. Багато математиків минулого працювали над проблемою знаходження суми ряду. Ейлер в статті «Про збіжні ряди» (1754-1755р.) називає ряд збіжним, якщо його члени прямують до нуля, і розбіжним в іншому випадку. Надаючи кожному ряду числове значення, яке Ейлер називає сумою ряду, він підкреслює, що частинні суми не завжди мають точне значення, рівне сумі [3.с 65].

Отже, підсумовувати ряд вдалось в тому випадку, коли ряд збіжний: задача підсумовування зводилась лише до відшукання границі послідовності частинних сум. Що ж стосується розбіжних рядів, то в даному випадку застосування частинних сум не дає бажаного результату. Тому для підсумовування розбіжних рядів необхідно було побудувати іншу теорію.

Поставимо ряду U у відповідність деяке число S(U) , яке будемо називати його *сумою*. Ми можемо вважати, що маємо справу з функцією S, визначеною для деяких рядів і яка приймає числові значення. Функцію $S$ будемо називати *підсумовуючою функцією.* Прикладом такої підсумовуючої функції може бути $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Ця функція визначена на множині всіх збіжних рядів, і для кожного збіжного ряду її значення рівне звичайній сумі цього ряду. Так, визначену конкретну підсумовуючу функцію позначимо через $S_0$. [36.ст187]

Можна побудувати надзвичайно велику кількість підсумовуючих функцій. Для виправдання своєї назви вони повинні мати властивості звичайних сум. По-перше, підсумовуюча функція S не повинна суперечити звичайному підсумовуванню збіжних рядів. Іншими словами, якщо U – деякий збіжний ряд, то значення S(U) повинне існувати і бути рівним $S_0(U)$. Підсумовуюча функція S , яка має цю властивість, називається *регулярною*.

По-друге, для будь-яких двох рядів U і V і чисел a і b з існування значень S(U) і S(V) слідує існування значення S(aU+bV) і рівність S(aU+bV)=aS(U) +bS(V).

Підсумовуюча функція, яка має цю властивість називається лінійною[54.с 421].

Наукова робота складається з трьох розділів – «Поняття узагальненої збіжності рядів» , «Загальні матричні методи підсумовування рядів» та «Класичні методи підсумовування рядів».

**Предметом дослідження** є теорія підсумовування розбіжних рядів.

**Об’єктом дослідження** загальні матричні перетврення.

Мета дослідження дозволяє виділити наступні **завдання**:

**Методи дослідження:**

1. Методи функціонального аналізу,
2. Методи матричної алгебри,
3. Метод степеневих рядів,
4. Метод обернених матричних перетворень.

# РОЗДІЛ 1

# ПОНЯТТЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

## 1.1. Збіжність та абсолютна збіжність ряду

Нехай задана деяка нескінченна послідовність чисел

$$a_1,\ \ a_2,\ \ a_3, \ldots .. a_n, \ldots \tag{1.1}$$

Складений з цих чисел символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \cdots \tag{1.2}$$

Називається нескінченим рядом, а самі числа (1.1) – членами ряду. Замість (1.2) користуються знаком суми, часто пишуть так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{1.3}$$

Вказівник $n$ пробігає тут всі значення від 1 до $\infty$.

Станемо послідовно складати члени ряду, складаючи (в нескінченній кількості) суми;

$$\begin{cases} A_1 = a_1 \quad A_2 = a_1 + a_2, \quad A_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \qquad \ldots, \quad A_n = a_1 + \ldots + a_n, \ldots; \end{cases} \tag{1.4}$$

Їх називають частковими сумами (або відрізками) ряду.

Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots \tag{1.5}$$

буде додатнім, тобто. $a_n > 0$ $(n = 1,2,3, \ldots)$. Тоді очевидно,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n,$$

тобто змінна $A_n$ зростаюча. Згадуючи теорему про межу монотонної змінної, ми безпосередньо прийдемо до наступного основного в теорії додатних ряді визначення:

Додатний ряд (1.5) завжди має суму; ця сума буде кінцевою( і, відповідно, ряд – збіжним), якщо часткова сума ряду обмежена зверху, і нескінчена (а ряд – розбіжний) в іншому випадку[1.с 421].

Всі признаки збіжності ( і розбіжності) додатних рядів в кінцевому рахунку, основані на цій простій теоремі. Але безпосередньо її застосування тільки в деяких випадках дозволяє говорити про характер ряду. Приведем деякі приклади цього роду.

1) Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

відомого під назвою гармонічного ряду.

Маємо очевидну нерівність:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n * \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \qquad (1.6)$$

Якщо, відкинути перші два члени, інші члени ряду послідовно розбити на групи, по $2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$ членів в кожній групі

$$2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4};\right. \qquad 2^2\left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8};\right. \qquad 2^3\left\{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}; \ldots\right.$$

$$2^{k-1}\left\{\frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^k}; \ldots,\right.$$

то кожна із цих сум буде більшою ніж $\frac{1}{2}$; в цьому легко переконатись, передбачивши в (1) почергово $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$ Позначимо $n$-у часткову суму гармонійного ряду через $H_n$; тоді, очевидно буде що:

$$H_{2k} > k * \frac{1}{2}.$$

Отримаємо що часткові суми не можуть бути обмежені зверху: ряд має нескінченну суму.

Зазначимо що $H_n$ зі зростанням $n$ зростає доволі повільно. Ейлер, зазначив, що : $H_{1000} = 7{,}48 \ldots$, $H_{100000} = 14{,}39 \ldots$, і так далі.

2) Розглянемо тепер більш загальний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

де $s$ – любе дійсне число, він містить в собі як частковий випадок (при $s - 1$), минулий ряд. По збіжності з рядом (1.6), і цей ряд також називають гармонійним. Так як при $s < 1$ члени ряду більше відповідних членів ряду 1), то в цьому припущені, часткові суми не обмежені зверху, так що ряд розбіжний.

Займемось випадком, коли $s > 1$; положимо для зручності $s = 1 + \vartheta$, де $\vartheta > 0$. Аналогічно (1), маємо на цей раз:

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \frac{1}{(n+2)^s} + \ldots + \frac{1}{(2n)^s} < n * \frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\vartheta}. \qquad (1.7)$$

Виділяючи, як і вище, послідовні групи членів:

$$2\left\{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s};\right. \qquad 2^2\left\{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s};\right. \qquad 2^3\left\{\frac{1}{8^s} + \ldots + \frac{1}{16^s}; \ldots\right.$$

$$2^{k-1}\left\{\frac{1}{\left(2^{k-1}+1\right)^s} + \ldots + \frac{1}{\left(2^k\right)^s}; \ldots,\right.$$

За допомогою (1.3) легко показати, що ці суми відповідно менші членів прогресії

$$\frac{1}{2^\vartheta}, \frac{1}{4^\vartheta} = \frac{1}{(2^\vartheta)^2}, \frac{1}{8} = \frac{1}{(2^\vartheta)^3}, \ldots, = \frac{1}{(2^{k-1})^2} == \frac{1}{(2^\vartheta)^{k-1}}, \ldots$$

В током випадку очевидно, що яку ю часткову суму розглянутого ряду не обрати, вона буде меншою постійного числа

$$l = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\vartheta}}{1 - \frac{1}{2^\vartheta}},$$

відповідно, ряд сходиться[8.с 211].

**Теорема 1.1.** Збіжність або розбіжність додатного ряду часто встановлюють шляхом порівняння його з іншим рядом, свідомо збіжним або розбіжним рядом. В основі такого порівняння лежить наступна теорема.

**Теорема 1.2.** Нехай дані два додатних ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{1.9}$$

Якщо, хоча б починаючи с деякого місця ( припустимо, для $n > N$), виконується нерівність: $a_n \leq b_n$, то із збіжності ряду (1.5) виходить збіжність ряду (1.4) або – що – із за розбіжності ряду (1.4) виходить розбіжність ряжу (1.5).

**Теорема 1.3.** Якщо існує границя

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \qquad (0 \leq K \leq +\infty),$$

то із збіжності ряду (1.5), при $K < +\infty$, випливає збіжність ряду (1.4), а із розбіжності першого ряду, при $K > 0$, випливає розбіжність другого. Таким чином при $(0 \leq K \leq +\infty)$ обидва ряди збігаються або обидва розбігаються одночасно.) [42.с 123].

**Теорема 1.4.** Якщо, хоча б починаючи з деякого місця ( припустимо, для $n > N$), виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{1.10}$$

то із збіжності ряду (1.5) випливає збіжність ряжу (1.4) або, що із розбіжності ряду (1.4) випливає розбіжність ряду (1.5).

Ми виділили що збіжність додатних рядів, по більшій мірі, встановити легко, завдячуючи наявності зручних ознак. Звідси природньо почати з тих випадків, коли питання про збіжність даного ряду приводить до питання про збіжність додатного раду.

Якщо члени ряду не всі додатні, але починаючи с деякого місця стають додатними, то відкинувши достатню кількість початкових членів ряду, зведемо діло до дослідження додатного ряду. Якщо члени ряду від’ємні або, по крайній мірі с деякого місця стають від’ємними, то ми повернемося до розгляду випадків шляхом зміни знаків усіх членів. Таким чином, істотно новим випадком буде той, коли серед членів ряду є нескінчена кількість як додатних, так і від’ємних членів[14.с 175].

**Теорема 1.5.** Нехай даний ряд (1.1) з членами довільних знаків. Якщо сходиться ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{1.11}$$

зіставлений із абсолютних величин його членів, то даний ряд також сходиться.

Для установлення абсолютної збіжності ряду (1.1) до додатного ряду (1.4) можуть бути застосовані всі ознаки збіжності. Але треба бути обережним с признаками розбіжності: якщо навіть ряд (1.7) буде розбіжним то ряд (1.1) може все ж таки збігатись (не абсолютно). Виключення демонструють тільки признаки Кожима і Даламбера, і саме тому, що коли вони констатують розбіжність ряжу (1.7), то це означає, що спільний член $|a_n|$ не прямування до ряду (1.7) не прямує до нуля, а тоді і $a_n$ до нуля не прямує, так що і ряд (1.7) не прямує до нуля, а тоді і $a_n$ до нуля не прямує, так що і ряд (1.1) також росходиться. Тому згадані ознаки можуть бути пересказані по застосуванню до довільного ряду. Зробимо наприклад, для признака Даламбера ( який зазвичай застосовується на практиці):

**Признак Даламбера.** Нехай для змінної $D_n^* = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ існує визначена границя:

$$D^* = \lim D_n^*,$$

тоді при $D^* < 1$ даний ряд (1.1) абсолютно сходиться, а при $D^* > 1$ він розбігаєтся.

**Степеневий ряд, його проміжок збіжності.** Розглянемо степеневий ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x \ + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1.12}$$

Являючий собою ніби то “нескінчений многочлен ”, розташований по зростаючим степеням змінної $x(a_0, a_1, a_2, \ldots$ тут визначають постійні коефіцієнти).

Запропонуємо тепер визначити, який вид має “ область збіжності ” степеневого ряду, тобто множина $X = \{x\}$ тих значень змінної, для яких ряд (1.8) сходиться [11.с 313].

**Лема 1.1.** Якщо ряд (1.8) сходиться для значень $x = \bar{x}$, відмінного від 0, то він абсолютно сходиться для будь якого значення $x$, задовольняючого нерівність $|x| < |\bar{x}|$.

Із збіжності ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{x}^n = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \ldots + a_n\bar{x}^n + \ldots, \tag{1.13}$$

випливає, що його спільний член прямує до 0, а відповідно, - обмежений:

$$|a_n\bar{x}^n| \leq M \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.14}$$

Візьмемо тепер будь яке $x$, для якого $|x| < |\bar{x}|$, і зіставимо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\bar{x}^n| = |a_0| + |a_1\bar{x}| + |a_2\bar{x}^2| + \ldots + |a_n\bar{x}^n| + \ldots, \tag{1.15}$$

Так як:

$$|a_n\bar{x}^n| = |a_n\bar{x}^n| * \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leq M * \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \tag{1.16}$$

І члени ряду (1.11) являються меншими відповідних членів збіжной гармонійной прогресії ( зі знаменником $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leq 1$):

$$M + M * \left|\frac{x}{\bar{x}}\right| + M * \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2 + \ldots + M * \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n + \ldots, \tag{1.17}$$

То за теоремою про збіжність рядів ряд (1.11) сходиться. В такому випадку, як ми знаємо ряд (1.8) сходиться абсолютно.

При $x = 0$ сходиться, очевидно, всякий ряд (1.8). Але є степеневий ряд, який – по-мимо цього – не сходиться не при одному значені $x$. Прикладом такого "всюди розбіжного" ряду може слугувати ряд $\sum_1^{\infty} n!\ \ x^n$, як в цьому переконатись за допомогою признаку Даламбера. Подібні ряди для нас не цікаві [39.с 221].

Припустимо, що для ряду (1.8) взагалі існують такі відмінні від 0 значення $x = \bar{x}$, при яких він сходиться, і розглянемо множину $\{|\bar{x}|\}$. Ця множина може опинитися обмеженою з верху, або ні.

В останньому випадку, які б значення $x$ не обрати, необхідно знайдеться таке $\bar{x}$, що $|x| = |\bar{x}|$, а тоді за лемою (1.1), при взятому значені $x$ ряд (1.8) абсолютно сходиться. Ряд опиняється “всюди збіжним”

Нехай тепер множина $\{|\bar{x}|\}$ обмежена зверху, і $R$ буде його точною верхньою межею. Якщо $|x| > R$, то відразу зрозуміло, що при цьому значенні $x$ ряд (1.8) розбіжний. Візьмем тепер будь-яке $x$, для якого $|x| < R$. По відношенню точної границі, необхідно знайти таке $\bar{x}$, що $|x| < |\bar{x}| < R$, а це, за лемою (1.1), знову тягне за собою абсолютну збіжність ряду (1.8) [13.с 135].

І так у відкритому проміжку $(-R, R)$ ряд (1.8) абсолютно сходиться, для $x > R$ і $x < -R$ ряд заздалегідь росходиться, і лише в кінцях проміжка $x = \pm R$ загального твердження зробити не можна – там, дивлячись по обставинам, може мати місце і збіжність, і розбіжність.

Для кожного степеневого ряду вигляду (1.8), якщо тільки він не являється всюди розбіжним “область збіжності” $X$ представлє собою цільний проміжок від $-R$ до $R$, з включенням кінців або ні, цей проміжок може бути і нескінченим. В середині проміжка, до того ж ряд сходиться абсолютно.

Згаданий проміжок називають проміжком збіжності, а число $R(0 << R \leq \infty)$ – радіусом збіжності ряду[45.с 511].

**Теорема 1.6. (Кожима – Адамара )** Радіус збіжного ряду (1.8) є величина обернена найбільшій границі $p$ змінної $p_n = \sqrt[n]{|a_1|}$:

$$R = \frac{1}{p}$$

(при цьому, якщо $p = 0$, то $R < +\infty$, якщо $p > +\infty$, то $R = 0$).

Ця теорема відкрита Кожима, була забута, Адамар знову знайшов її і вказав додаток.

**Знакозмінні ряди.**

Знакозмінними рядами – називається ряди, члени яких почергово мають то додатний то від'мний знак. Знакозмінний ряд зручніше записати так, що би знаки членів були виявлені, наприклад

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots (c_n > 0). \qquad (1.18)$$

По відношенню до знакозмінних рядів має місце наступна теорема.

**Теорема 1.7. (Лейбніца)** Якщо члени знакозмінного ряду (1.14) монотонно спадають по абсолютній величині:

$$c_{n+1} < c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (1.19)$$

і прямує до нуля:

$$\lim c_n = 0,$$

то ряд сходиться [42.с 121].

## 1.2 Узагальнена збіжність ряду. Приклади

**Приклад 1.1**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0)$

Якщо $a \leq 0$, то порушується необхідна умова збіжності, і ряд розходиться. При $a > 1$ члени ряду опиняються менші ніж члени ряду $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$: ряд сходиться (за теоремою (1.2)).

**Приклад 1.2**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)1}$ сходиться, так як за теоремою (1.2) $\frac{(n!)^2}{(2n)1} = \frac{n!}{2^n * (2n-1)!} < \frac{1}{2^n}$

**Приклад 1.3**.

Довести збіжність рядів і знайти їх суми:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ ; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$.

**Розв'язання**.

Для ряду а) загальний член має вигляд $a_n = bq^{n-1}$. Сам ряд є сумою членів геометричної прогресії з першим членом прогресії b і знаменником q. У випадку, коли $|q| \geq 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ буде розбіжним, бо не виконується необхідна ознака збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} bq^{n-1} = \begin{cases} b, & |q| = 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

У випадку, коли $|q| < 1$, ряд є сумоє членів нескінченно спадної геометричної прогресії і його суму обчислюють за формулою $S = \frac{b}{1-q}$ .

Для випадку б) загальний член ряду $\frac{1}{n^2+3n+2}$ можна записати у вигляді

$$a_n = \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} .$$

Тоді частинна сума ряду $S_n$ має вигляд

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 + \frac{1}{n+2} .$$

Звідси границя послідовності частинних сум

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+2}) = 1 = S$ [51.c 421].

Отже, за означенням ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ збіжний і його сума дорівнює одиниці.

У випадку в) загальний член ряду подамо у вигляді

$$a_n = \frac{1+2^n}{3^n} = (\frac{1}{3})^n + (\frac{2}{3})^n.$$

Тоді частинна сума

$S_n= \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + (\frac{1}{3})^n + (\frac{2}{3})^n =$ $(\frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + (\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 2.$

Кожна з дужок є сумою n членів нескінченно спадної геометричної прогресії, яку можна обчислити за формулою

$S_n = \frac{a_1(1-q^{n-1})}{1-q}$ .

Тому

$S_n = 2 + \frac{{}^1\!/_3\,(1-({}^1\!/_3)^n)}{1-{}^1\!/_3} + \frac{{}^2\!/_3\,(1-({}^2\!/_3)^n)}{1-{}^2\!/_3} = 2 + \frac{1}{2}(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2\ \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ .

Звідси $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2\left(\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)) = \frac{9}{2}$.

Отже, ряд збіжний і його сума дорівнює $\frac{9}{2}$.

**Приклад 1.4**.

Використовуючи необхідну ознаку збіжності ряду, встановити розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{n+3})^n$.

**Розв’язання.**

За необхідною ознакою збіжності знайдемо границю n-го члена

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ \lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n+3})^n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{2}{n+3})^n = e^{-2} \neq 0$, а це означає, що ряд сходиться.

Якщо всі члени ряду - невід’ємні числа, то числовий ряд називають **знакододатним.** Для дослідження поведінки знакододатних рядів користуються ознаками порівняння та достатніми ознаками збіжності.

**Перша ознака порівняння**. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ два знакододатних ряди, причому для всіх $n \in N$ виконується нерівність $a_n \leq b_n$. Тоді:

1) якщо сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходиться і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - розбіжний.

**Друга ознака порівняння**. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ два знакододатних ряди. Якщо існує скінченна відмінна від нуля границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Для порівняння зручно використовувати такі ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ – геометричний ряд, що сходиться коли $|q| < 1$ і росходиться коли $|q| \geq 1$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – узагальнений гармонічний ряд, що сходиться коли $\alpha \leq 1$. Якщо $\alpha = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називають гармонічним [2.с 151].

**Ознака Даламбера**. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n}$=q, то

1) при $q < 1$ ряд сходиться;
2) при $q > 1$ ряд росходиться.

Коли q=1 поведінка ряду залишається нез'ясованою.

**Ознака Коші**. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ =q, то

1) при $q < 1$ ряд сходиться;
2) при $q > 1$ ряд росходиться.

Коли q=1 поведінка ряду залишається нез'ясованою.

**Інтегральна ознака Коші**. Нехай члени знакододатного ряду такі, що

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$; $f(x)$- така неперервна незростаюча функція, що

$$f(1) = a_{1,}\ f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$$

Тоді зі збіжності невласного інтерграла $\int_1^\infty f(x)dx$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^\infty a_n$

а з розбіжності інтеграла

$\int_1^\infty f(x)dx$ , випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^\infty a_n$

## 1.3 Метод середніх арифметичних підсумовування рядів

Найпростішим методом підсумовування розбіжного ряду є метод середніх арифметичних. Цей метод допускає багато важливих узагальнень; у цьому розділі ми піддамо деякі з них більш систематичному дослідженню. Нам буде зручно дещо змінити позначення і замість $S_n$ писати $A_n$, а замість суми ряда S писати A. Так, запис $\sum a_n$= A (C, 1) буде означати, що

$$\lim \frac{A_0+A_1+\cdots+A_n}{n+1} = A.$$

При цьому ми інколи будемо користуватися буквою А для позначення не тільки суми ряду, але й самого ряду, і, напиклад, говорити, що $_nA$ сумуємо (C, 1) – методом; таким чином,

$$1\text{-}1\text{+}1\text{-}\ldots=\frac{1}{2}\ (H, 1).$$

Цей метод недостатній для сумування ряда 1-2+3-4+..., так як тут частинні суми $A_n$ рівні 1, -1, 2, -2, 3, -3,... і

$H_n^1=\frac{A_0+A_1+\cdots+A_n}{n+1}$ дорівнює $\frac{n+2}{2(n+1)}$ при n парному і 0 при непарному. Однак прийти до границі, повторюючи процес усереднення; справді перше з найдених значень є $\frac{1}{2}$ + 0 (1) і тому

$$H_n^2=\frac{H_0^1+H_1^1+\ldots+H_n^1}{n+1} \to \frac{1}{4}.$$

При цьому $H_n^1, H_n^2, \ldots$ замість $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$,... для спрощення типографського набору; верхні індекси не повинні розумітися як показники степеней[37.с 256].

Аналогічно три усереднення дадуть для ряду 1-3+6-10+... сумму $\frac{1}{8}$.

Таким чином ми приходимо до наступного визначення сумування (H, k) для будь-якого натурального k. Ми визначаємо $H_n^k$, для k=0, 1, 2,.., умовами $H_n^0 = A_n$ і

$$H_n^{r+1} = \frac{H_0^r + H_1^r + \cdots + H_n^r}{n+1}. \tag{1.20}$$

Якщо $H_n^k \to A$ при $n \to \infty$, то ми говоримо, що ряд $\sum_{a_n}$ є сумуємо (H, k) до суми A, і пишемо

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \text{A (H, k)}. \tag{1.21}$$

Під сумою (H, 0) ми розуміємо звичайну збіжність.

**Елементарні теореми відносно суми по Гьольдеру**.

Гьольдереві визначення, хоча вони і являються найбільш очевидними узагальненнями (C, 1) – визначення, для більшості цілей – не найбільш зручні. Однак вони мають і деякі переваги. В часності, якщо ми будемо позначати середні $H_n^k$, утворені, виходячи з частичних сум $A_n$, через $H_n^k(A)$) – через $H^k$(A), то, як це випливає з визначень, ми будемо мати

$$H_n^k\{H^l(A)\} = H_n^l\{H^k(A)\} = H_n^{k+l}(A);$$

а це зробить докази деяких теорем особливо простими.

**Теорема 1.8.** Якщо $\sum_{a_n} =$ A (H, k) де k≥0, то $\sum_{a_n}$ = A(H,k’) для всіх k’>k.

Це відразу випливає з визначень і теореми Коші

**Теорема 1.9.** Якщо $\sum_{a_n}$ = A (H,k), то $A_n$=0 ($n^k$) і $a_n$=0 ($n^k$).

Насправді, $H_n^k$=A+0 (1), і тому:

$$H_n^{k-1} = (n+1)H_n^k - nH_{n-1}^k = 0\ (\mathrm{n}),$$

$$H_n^{k-2} = (n+1)H_n^{k-1} - nH_{n-1}^{k-1} = 0\ (n^2),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A_n = H_n^0 = (n+1)H_n^1 - nH_{n-1}^1 = 0(n^k),$$

$$a_n = A_n - A_{n-1} = 0(n^k).$$

Це – «лімітуюча теорема» для (H,k)-метода. З неї, наприклад, випливає, що (як ми в цьому безпосередньо впевнилися в §5.2) ряд 1-2+3-4+... не може бути сумованим (H, 1)

Наступна теорема виявляє деякі незручності методів Гьольдера [44.с 441].

**Теорема 1.10.** (H, k) - метод має властивості:

$(\alpha)$ $$\sum Ca_n = C\sum a_n$$

$(\beta)$ $$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n \qquad (1.22)$$

$(\gamma)$ $$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = a_0 + (a_1 + a_2 + \cdots),$$

$(\delta)$ $$a_0 + (a_1 + a_2 + \cdots) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

кожну рівність треба розуміти наступним чином:

«Якщо права частина має значення в сенсі (H, k), то і ліва частина має значення в цьому ж сенсі, і обидва значення рівні». Так, рівність $(\delta)$ означає: « Якщо ряд $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ додаємо до А, то ряд $a_1 + a_2 + + \cdots$ додаємо до А-$a_0$».

Властивості $(\alpha)$ і $(\beta)$ тривіальні (і справедливі для будь-якого лінійного методу). Далі, вважаючи $b_n = a_{n+1}$, маємо $B_n = A_{n+1} - a_0$, і

$\frac{B_0+B_1+\cdots+B_n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}(\frac{A_0+A_1+\cdots+A_{n+1}}{n+2} - a_0)$,

звідки випливають властивості ( $\gamma$) і ($\delta$) при k=1. Але звязку між середніми для $a_n$і $b_n$при k не прості, і ми відкладаємо кінцівку доведення до

## 1.4 Метод Абеля-Пуасона

Одним з представників напівнеперервних методів підсумовування– метод Пуассона - Абеля. Пуасон застосовував цей метод до додовання рядів Фурьє.

Визначення методу. Ряд (1.3) називається сумованим методом Пуассона-Абеля, коротко А-додавним до числа Ủ, якщо степеневий ряд f$(x)$=$\sum u_n x^n$ сходиться при|x|<1 і $\lim_{x\to 1-} f(x)$=$\lim_{x\to 1-} \sum u_n x^n$ =Ủ.

Також переформулювати це визначення можна й по іношому:

Послідовність (1.5) називається А-додатним до числа U', якщо степеневий ряд $\sum U_n x^n$ сходиться при |x|<1 і

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(1-x)\sum U_n x^n=\text{U'}. \qquad (1.23)$$

Таким чином, метод А-напівнеперервний метод сумування, заданий за допомогою (1.23) і відповідно з

$$\alpha_k(x) = x^k \qquad (1.24)$$

$$\alpha_k(x) = (1-x)x^k$$

Далі, ряд (1.2) називається абсолютно сумованим методом Пуассона- Абеля, коротко |A|- сумованим, якщо функція (1.24) має обмежену зміна на піввідрізку $0 \leq x < 1$, або, що теж саме, якщо

$$\int_0^1 |\frac{d}{dx} f(x)|\, dx < \infty.$$

Наприклад, ряд $\sum(-2)^{\mathrm{n}}$ не є A-сумованим, так як степеневий ряд $\sum(-2x)^n$

розходиться при $|x| \geq \frac{1}{2}$. Також ряд $\sum \frac{1}{n+1}$ не є A-сумованим, так як для нього

*f(x)*= - $\frac{1}{x}$ *ln (1-x)*→ ∞ при х→1-. Навпаки, для ряду (1.4) маємо

*f(x)*= $(1+x)^{-\alpha-1} \rightarrow 2^{-\alpha-1}$ при х→ $1-$, тобто ряд (1.4) є A-сумованим до суми $2^{-\alpha-1}$. Ряд (1.4) також |A| - сумованим, бо для нього

$\int_0^1 |\frac{d}{dx} f(x)|dx$=$|\alpha+1| \int_0^1 (1+x)^{-2} dx < \infty$.

Визначення |A|- сумованості дав Уіттекер.

**Регулярність, збереження абсолютної збіжності.**

**Теорема 1.11.** Метод A регулярний. Безпосередньо випливає з теореми Абеля.

**Теорема 1.12** (належить Уіттекеру)

Метод |A| зберігає абсолютну збіжність.

**Теорема 1.13.**

Якщо $Re_{\alpha>-1}$, то A ɔ $C^\alpha$ і обидва методи сумісні. Нехай $(x_n)$- будь-яка послідовність точок на дійсній осі, прямуюча до 1 зліва. Припустимо, що ряд (1.4) додоємо методом $C^\alpha$. Тоді в силу (1.22), маємо

$$f(x_n) = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_k S_k^\alpha x_n^k = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_k \sigma_k^\alpha A_k^\alpha \, x_n^k,$$

при чому *f(x)* існує при |x|<1, так як по теоремі 1.11 маємо $u_n$=$\sigma(n^{Rel})$. Вираз справа є матричним перетворенням послідовності $(\sigma_k^\alpha)$. Покажемо, що зі збіжності послідовності $(\sigma_k^\alpha)$ виплливає існування

$$\lim \quad f(x_n) = \lim \quad \sigma_n^\alpha. \; (20.2) \qquad (1.25)$$

Для цього потрібно до матриці чисел

$$c_{nk}=(1-x_n)^{\alpha+1}A_k^{\alpha}x_n^k \qquad (1.26)$$

застосувати теорему 1.13 , при чому можемо обмежитись випадком, коли $\alpha > -1$ дійсне число. В такому випадку

$$c_{nk} \geq 0, \lim_n c_{nk} = 0$$

і побочимо що:

$$\sum_k c_{nk} = (1 - x_n)^{\alpha+1} \sum_k A_k^{\alpha} x_n^k = 1,$$

**Теорема 1.14**. Якщо $Re_{\alpha}$ >*-1, то* $|A| \supset |C^{\alpha}|$[3.с 131].

# РОЗДІЛ II

# ЗАГАЛЬНІ МАТРИЧНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

## 2.1 Регулярність матричних методів

Для знаходження теорем, що дають необхідні і достатні умови для того, щоб

Безпосередній метод, або метод шкидко зростаючих послідовностей.

Історично – це перший метод для доказу теорем про матричні перетворення, примінений Теплицем в 1911 році. Достатність умов доводиться безпосередньо, а їх необхідність доводиться від противного шляхом побудови однієї послідовності класу $\alpha$ такої, що при невиконанні розглянутої умови перетворення послідовність не входить в клас $\beta$.

Метод, заснований на застосуванні теореми Банаха-Штейнгауза про точкову збіжність на банаховому просторі послідовності неперервних лінійних функціоналів. Цей метод (в часних випадках) використовував вже Хан. Систематичне застосування цього методу маємо в статті Кулля, де розглядаються матричні перетворення подвійних послідовностей [4.с 159].

Метод Целлера. Він розроблений в 1953 році німецьким математиком Целлером і грунтується на використанні теореми Банаха про замкнутий графік.

Для знаходження формул границі перетвореної послідовності (тобто $\lim\ U'_n$) або суми перетвореного ряду (тобто $\sum U'_n$) зручно також використовувати загальним видом неперервного лінійного функціонала розглянутого простору послідовностей.

**Теорема 2.1. Кожима-Шура**

Матричне перетворення називається зберігаючим збіжність, якщо воно переводить всі послідовності, що збігаються або ряди в збіжні послідовності, тобто якщо зі збіжності послідовності $(U_k)$ або для ряду (1.5) завжди слідує збіжність послідовності $(U'_n)$. Якщо при цьому

$$\lim \quad U'_n=\lim \quad U_k,$$

То матричне перетворення називається регулярним.

В теорії підсумовування головну роль відіграє

**Теорема 2.2.** Для того, щоб перетворення (A) існувало і зберігало збіжність, необхідно і достатньо виконання умов :

Якщо матриця $\alpha$=$(a_{nk})$ трикутна, то підсумовування в умовах 2 і 3 підноситься до індекса n.

1 існує $\lim_n a_{nk}$=$a_k$,

2 існує $\lim_n \sum_k a_{nk}$=a, (2.1)

3 $\sum_k |a_{nk}|= \sigma$

При цьому, якщо $\lim \quad U_k$=U, то

$$\lim U'_n= aU + \sum a_k(U_k - U) = (a - \sum a_k)\, U + \sum a_k\, U_k.$$

Теорема 2.1 належить для трикутних матриць Кохіма і в загальному випадку Шуру. Тому матриці, що задовольняють умови 1 і 3 теореми 2.1. випливає

$$\sum |a_k| < \infty. \qquad (2.2)$$

Дійсно, з умов 3 для будь-якого $m = 0 , 1 ,\ldots$ випливає

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{nk}|=\varphi \qquad (2.3)$$

Переходячи в останній границі при n→ ∞, в силу умови 1, отримаємо умову

$$\sum_{k=0}^{m}|a_k| = \varphi \qquad (2.4)$$

рівносильне умові (2.1) [5.с 152].

**Теорема 2.3** Для того, щоб перетворення (A) було регулярним, необхідно і достатньо виконання умов $1-3$ теореми 2.1 з $a_k$= 0 і a = 1.

Якщо перетворення (A) застосувати до класу послідовностей ($U_k$), для яких lim

Це випливає з теореми 2.1, E={$e_v$}. Приведемо тепер аналоги теорем 2.1 і 2.2 для перетворення (B).

**Теореми 2.4.** Для того, щоб перетворення (B) існувало і зберігало збіжність, необхідно і достатньо виконання умов

1 існує $\lim_n \alpha_{nk}$=$\alpha_k$, (2.5)

2 $\sum_k |\Delta\alpha_{nk}|$= $\varphi$ (1).

**Теорема 2.5. Шура** Для того, щоб перетворення (A) існувало і переводило всі обмежені послідовності ($U_k$) в збіжні послідовності ($U'_n$), необхідно і достатньо виконання умов:

1 існує $\lim_n a_{nk}$= $a_k$,

2 $\sum_k |a_{nk}|$= $\varphi$ (1), (2.6)

3 $\lim_n \sum_k |a_{nk}$-$a_k|$=0.

З умови 2 випливає існування перетворення (A), а з умов 1 і 2, випливає абсолютна збіжність ряду в формулі (2.6). Звідси, позначивши

$$\sum_k |a_{nk}\text{-}\ a_k|= \delta_n,$$

з умови 3

$$|U'_n\text{-} \sum a_k U_k|=|\sum_k(a_{nk}\text{-}a_k)\ U_k|= \varphi(1)\ \delta_n= \sigma\ (1)\ \text{ при n}\to\infty.$$

Необхідність умов 1 і 2 випливає з теореми 2.1[7.с 321].

**Теорема 2.6. Хана** Для того, щоб перетворення (А) існувало і переводило всі збіжні до нуля (або всі обмежені) послідовності $(U_k)$ в обмежені послідовності $(U'_n)$, необхідно і достатньо виконання умови

$$\sum_k |a_{nk}|=\sigma(1).$$

## 2.2. Абсолютна регулярність матричних методів

**Теорема 2.7.** Для того, щоб перетворення (В) існувало і переводило всі абсолютні збіжні ряди (1.2) в збіжні послідовності $(U'_n)$, необхідно і достатньо виконання умов

1 існує $\lim_n \alpha_{nk} = \alpha_{k,}$

2 $\alpha_{nk} = \sigma(1).$ (2.7)

3 $\lim \quad U'_n = \sum \alpha_k u_k.$

З умов 1 і 2 випливає $\alpha_k=\sigma\,(1)$, і, як наслідок, ряд в (1.2) сходиться абсолютно. $|\alpha_{nk} U_k| = \sigma(1)|u_k|$, то перетворення $(B)$ не тільки існує, але ряди в ньому збігаються рівномірно відносно n. Тому по умові 1

$$\lim \quad U'_n = \lim_n \sum_k \alpha_{nk} u_k = \sum_k \lim_n \alpha_{nk} u_k = \sum \alpha_k u_k,$$

**Теорема 2.8. Целлера**. Нехай Х і У є ВК- простором і в Х має місце збіжність по відрізкам. Для того, щоб перетворення (А) існувало і переводило Х в У, необхідно і достатньо існування постійної М $> 0$ такої, що умови $(\alpha)$ і $(\beta)$ виконані для будь-якого відрізку $\overset{m}{x} \in$ Х.

Нехай теоремі Целлера Х=$l$, що допустимо, $l$ являється ВК-простором і в ньому має місце збіжність по відрізкам. Тоді з умов $(\alpha)$ і $(\beta)$ випливає, що

А) $\mathrm{A}e_v \in Y,$

Б) $\| \mathrm{A}e_v \| = \sigma\,(1).$

Навпаки, при Х= $l$ з а) і б) витікає виконання умов $(\alpha)$ і $(\beta)$, з а) витікає

$$A_x^m = \sum_{k=0}^{m} U_k A e_k \in Y,$$

а з б) знайдеться постійна $M > 0$ така, що

$$\| A_x^m \| \leq \sum_{k=0}^{m} |U_k| \, \| Ae_k \| \leq M \sum_{k=0}^{m} |U_k| = M \, \|_x^m\| .$$

**Наслідок 2.2.** Для того, щоб перетворення (А) існувало і переводило простір $l$ в ВК-простір У, необхідно і достатньо виконання умов а) і б).

Застосуємо наслідок 2.1 у випадку *У=с*. Тоді замість перетворення (А) зручно розглядати перетворення (В), для якого

$g_n e_v = \sum_k \alpha_{nk} \delta_{vk} = \alpha_{nv}$, і умова а) наслідок 2.1 перетворюються в умову (2.1), а умова б) наслідок 2.1 перетворюється в умову (2.2) теореми Хана

$$\| Ae_v \| = sup_n |g_n e_v| = sup_n |\alpha_{nv}| = \sigma\,(1) \text{ [10.c 331]}.$$

**Наслідок 2.3** Для того, щоб перетворення (В) переводило все абсолютно збіжні ряди (1.2) в збіжні послідовності $(U'_n)$ і виконувалась рівність

$$\lim \quad U'_n = \sum u_k,$$

необхідно і достатньо виконання умов 1 і 2 теореми 2.7 с $\alpha_k$=1.

**Необхідність**. Якщо $u_k = \delta_{kp}$, то $\sum u_k = \sum |u_k| = \delta_{pp} = 1$;

але з огляду на те, що тоді $U'_n = \sum_k \alpha_{nk} \delta_{kp} = \alpha_{np}$, умови $\alpha_p$=1 необхідні.

Кангро узагальнив теорему 2.7 для банахових просторів X і У з $\alpha_{nk} \in$ L (X, Y), а Ламп – для перетворень узагальнених послідовностей з X і У.

**Теорема 2.9. Хана** Для того, щоб перетворення (В) існувало і переводило всі абсолютно збіжні ряди (1.2) в обмежені послідовності $(U'_n)$, необхідно і достатньо виконання умови

$$\alpha_{nk} = \sigma\,(1).$$

Аналог теореми 2.7 для перетворення (A). Для цього дамо

**Визначення 2.1.** Послідовність $(U_n)$ називається абсолютно збіжною, якщо $\sum |\bar{\Delta} U_n| < \infty$.

**Теорема 2.10.** Для того, щоб перетворення (A) існувало і переводило всі абсолютно збіжні послідовності $(U_k)$ в збіжні послідовності $(U'_n)$ необхідно і достатньо виконання умов

1 $\quad$ існує $\lim_n a_{nk} = a_k$,

2 $\quad$ існує $\lim_n \sum_k a_{nk} = a$, $\quad$ (2.8)

3 $\quad$ $\sum_{k=0}^{m} a_{nk} = \sigma(1)$.

При цьому, якщо $\lim \quad U_n$= U, то має місце (2.1). Так як при $U_k$=1 маємо $U'_n$= $\sum_k a_{nk}$ і послідовність (1.3) абсолютно сходиться, то необхідна збіжність рядів $\sum_{v=k}^{\infty} a_{nv}$. Тому позначимо

$$\alpha_{nk} = \sum_{v=k}^{\infty} a_{nv}. \tag{2.9}$$

Нехай тепер $(U_k)$ – будь-яка абсолютно збіжна послідовність (звідси $U_k$= $\sigma$ (1)) і має місце рівенство (2.9) [11.с 155].

Застосовуючи перетворення Абеля і витікаючого з (2.9) рівності

$$a_{nk} = \Delta\alpha_{nk}, \tag{2.10}$$

Отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_{nk} u_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_{nk} U_k + U_m \sum_{v=m}^{\infty} a_{nv}.$$

Звідси при m→ ∞ зазначемо

$$\sum_k \alpha_{nk} u_k = \sum_k a_{nk} U_k,$$

Тобто формулою (2.9) визначається перехід від перетворення (A) до (B) для всіх (абсолютно) збіжних послідовностей $(U_k)$.

**Достатність.** Нехай, що з умов $1 - 3$ теореми 2.10 випливають умови 1 і 2 теореми 2.8.

$$\alpha_{nk} = \sum_v a_{nv} - \sum_{v=0}^{k-1} a_{nv},$$

**Необхідність.** Навпаки, з умов 1 і 2 теореми 2.10 випливають умови $1-3$ теореми 2.9.

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} = \alpha_{n0} - \alpha_n, \text{ m+1},$$

Матричний метод задається у вигляді одного з перетворень (A), (B), (C), і (D), при чому метод і його матриці всюди позначаємо одною і тою ж літерою.

Якщо матричний метод A заданий у вигляді перетворень (A) або (B), то

$$\{\sum u_n\} = \mathrm{A}\ \{U_n\} = \lim\quad U'_n,$$

а у вигляді (C) або (D) –

$$\{\sum u_n\} = \mathrm{A}\ \{U_n\} = \sum u'_n.$$

Матричний метод називається трикутним, якщо він заданий трикутним перетворенням. Метод A=($\alpha_{nk}$) називається нормальним, якщо він трикутний і $\alpha_{nn} \neq 0$ при будь-якому n=0,1,… .

Відмітимо, що не всі чотири види перетворень самостійні. Покажемо, що легко переходити від перетворення (A) до (D) і навпаки, від (B) до перетворення (C) і навпаки, (тут же стане зрозумілим і вибір наших позначень) [18.с 221].

Дійсно, з огляду на збіжності всіх рядів в перетворенні (A), маємо

$$u'_n = \bar{\Delta}U'_n = \sum_k a_{nk}\, U_k - \sum_k a_{n-1,k}\ U_k = \sum_k \bar{\Delta} a_{nk} U_k,$$

і, як наслідок,

$$\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta}\ a_{nk}. \tag{2.11}$$

Аналогічно,

$$\bar{\alpha}_{nk} = \bar{\Delta}\alpha_{nk} \tag{2.12}$$

Також, навпаки, з огляду на збіжності всіх рядів в перетворенні (D), маємо

$$U'_n = \sum_{m=0}^{n} u'_m = \sum_{m=0}^{n} \sum_k \bar{a}_{mk}\ U_k = \sum_k (\sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}) U_k,$$

і, як наслідок,

$$a_{nk} = \sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}. \tag{2.13}$$

Аналогічно

$$\alpha_{nk} = \sum_{m=0}^{n} \bar{\alpha}_{mk} \tag{2.14}$$

Для трикутних методів формули (2.13) і (2.14) отримують вигляд

$$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk} \tag{2.15}$$

$$\alpha_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{\alpha}_{mk} \tag{2.16}$$

Формула (2.11) є формулою переходу від перетворення (A) до перетворення (D); формула (2.13) – від (D) до (A); формула (2.12) – від (B) до (C); формула (2.14) – від (C) до (B).

Відмітимо, що перехід від перетворень (A) до (B) або навпаки не завжди можливий. Тому в загальному випадку перетворення (A) і (B) самостійні. Однак, якщо метод трикутний, то всі чотири вида перетворень рівносильні [16.c 161].

Знайдемо тепер формули переходу від перетворень (A) до перетворення (B) і навпаки, у випадку трикутного методу.

Дійсно,

$$U'_n = \sum_{v=0}^{n} a_{nv}\, U_v = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} \sum_{k=0}^{v} u_k = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{v=k}^{n} a_{nv}) u_k,$$

звідки,

$$\alpha_{nk} = \sum_{v=k}^{n} a_{nv} \tag{2.17}$$

З формули (2.17) при $k < n$ виводимо

$$\Delta\alpha_{nk} = \sum_{v=k}^{n} a_{nv} - \sum_{v=k+1}^{n} a_{nv} = a_{nk},$$

звідки (при всіх k)

$$a_{nk} = \Delta\alpha_{nk} \tag{2.18}$$

Формула (2.17) є формулою переходу від перетворення (A) до (B) у випадку трикутного методу, а формула (2.18) – від (B) до (A).

Методи A і $\alpha$ називається подвійними, якщо замість (2.17)

$$\alpha_{nk} = \sum_{v=k}^{\infty} a_{nv}.$$

Як наслідок, методи $\alpha$ і A є подвійними, якщо виконані умови (2.18) і $\alpha_{nk} \to 0$ при $k \to \infty$. Властивості таким методів вивчали Кантер і інші.

Далі, у випадку трикутного методу, з (2.17), (2.14) випливає

$$\bar{\alpha}_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \bar{\Delta}\, a_{nv} \tag{2.19}$$

$$\bar{\alpha}_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \bar{a}_{nv} \tag{2.20}$$

Аналогічно знаходимо

$$\bar{a}_{nk} = \Delta\bar{\alpha}_{nk} \tag{2.21}$$

$$\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta}\Delta\alpha_{nk} = \Delta\bar{\Delta}\alpha_{nk} \tag{2.22}$$

$$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \Delta\bar{\alpha}_{mk} = \Delta \sum_{m=k}^{n} \bar{\alpha}_{mk} \tag{2.23}$$

$$\alpha_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mv} \tag{2.24}$$

Відмітимо, що для трикутного методу, наприклад, з формул (2.17), (2.14) і (2.20) випливає

$$a_{nn} = \alpha_{nn} = \bar{\alpha}_{nn} = \bar{a}_{nn} \tag{2.25}$$

Також відмітимо, що для трикутного методу має місце рівність

$$\sum_{n=k}^{\infty} \bar{\alpha}_{nk} = \lim_{n} \alpha_{nk} \tag{2.26}$$

Дійсно, з (2.14) безпосередньо випливає

$$\sum_{n=k}^{\infty} \bar{\alpha}_{nk} = \bar{\alpha}_{kk} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \bar{\Delta}\, \alpha_{nk} = \lim_{n} \alpha_{nk} \text{ [37.c 321]}$$

## 2.3 Консервативність матричних методів

Багато проблем теорії рядів часто вирішуються за допомогою зворотнього перетворення. Наприклад, для перетворення (A) це означає знайти формулу, яка виражає члени послідовності $U_n$ через члени послідовності $U'_n$. Відмітимо, що для нескінченої трикутної матриці A=$(a_{nk})$ (двосторонньої) зворотньою матрицею називається матриця $\mathrm{A}^{-1} = (\wr_{nk})$, якщо

$$\sum_{v=k}^{n} a_{nv} \wr_{vk} = \sum_{v=k}^{n} \wr_{nv} a_{vk} = \delta_{nk},$$

тобто, якщо

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = (\delta_{nk}).$$

**Теорема 2.11.** Для трикутного матричного методу A обернене перетворення $\mathrm{A}^{-1}$ існує тоді і тільки тоді, якщо метод A нормальний, при чому матриця $\mathrm{A}^{-1}$ є оберненою матрицею матриці A. Так як метод A трикутний, то можемо розглядати лише перетворення (A).

Нехай $\alpha$=$(a_{nk})$ нормальний. Маємо

$$U'_n = a_{n0}U_0 + a_{n1}U_1 + \cdots + a_{nn}U_n.$$

Звідси, так як $a_{nn} \neq 0$ при будь-якому n=0,1,…., випливає

$$U_0 = \frac{1}{a_{00}} U'_0,$$

$$U_1 = \frac{1}{a_{11}} U'_1 - \frac{a_{10}}{a_{11}} U_0 = \frac{1}{a_{11}} U'_1 - \frac{a_{10}}{a_{11}a_{00}} U'_0$$

і т.д. Припустимо, що для кожного m=0,1,…, n-1 існують числа $\xi_{mk}$, при яких

$$U_m = \sum_{k=0}^{m} \xi_{mk} U'_k,$$

$$U_n = \frac{1}{a_{nn}}(U'_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk}\, U_k),$$

враховуючи, що $a_{nn} \neq 0$ при будь-якому n=0,1,…, знаходимо, що $U_n$ однозначно виражається через $U'_0$, $U'_1$,…,$U'_n$ тобто має місце формула

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_{nk}\, U'_k \tag{2.27}$$

Однозначно визначені числа $\xi_{nk}$ – елементи зворотної матриці $\alpha^{-1}$ матриці $\alpha$. Дійсно, рівність

$$\sum_{v=0}^{n} a_{nv}\, U_v = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} \sum_{k=0}^{v} \xi_{vk}\, U'_k = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{v=k}^{n} a_{nv} \xi_{vk}) U'_k = U'_n$$

має місце тоді і тільки тоді, якщо

$$\sum_{v=k}^{n} a_{nv} \xi_{vk} = \delta_{nk} \tag{2.28}$$

Так як при допомозі (2.28) і (A)

$$U_n = \sum_{v=0}^{n} \xi_{nv} U'_v = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{v=k}^{n} \xi_{nv} a_{vk}) U_k,$$

то, позначивши

$$b_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \xi_{nv} a_{vk},$$

і зазначимо, що також

$$b_{nk} = \delta_{nk},$$

бо в такому випадку, з (2.28) випливає,

$$\sum_{v=k}^{n} b_{nv} \xi_{vk} = \sum_{v=k}^{n} \xi_{vk} \sum_{\text{æ}=v}^{n} \xi_{n\text{æ}} a_{\text{æ}v} = \sum_{\text{æ}=k}^{n} \xi_{n\text{æ}} \sum_{v=k}^{\text{æ}} a_{\text{æ}v} \xi_{vk} = \xi_{nk}.$$

Як наслідок, матриця нормального методу $\alpha$ має двосторонню зворотню матрицю $\alpha^{-1}$=($\xi_{nk}$). Теорема доведена [5.с 226].

Доведення теореми (2.11) випливає і з того факту, що визначник системи лінійних рівностей

$$a_{00}U_0 = U'_0$$

$$a_{10}U_0 + a_{11}U_1 = U'_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a_{n0}U_0 + \cdots + a_{nn}U_n = U'_n$$

відмінний від нуля, тобто

$$a_{00}a_{11}\dots a_{nn} \neq 0.$$

З теореми (2.11) випливає існування зворотніх і для матриць перетворень ($B$) – ($D$), якщо вони нормальні. Тому разом з формулою (2.11) для перетворень ($B$), ($C$) і ($D$) відповідно маємо

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}\, U'_k \tag{2.29}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{\eta}_{nk}\, u'_k \tag{2.30}$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{\xi}_{nk} u'_k \tag{2.31}$$

Знайдемо формули, які звязують зворотні перетворення (2.27), (2.29), (2.30) і (2.31) між собою, враховуючи, що

$$U'_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} u'_k.$$

Звідси,

$$u_n = \textstyle\sum_{v=0}^{n} \eta_{nv}\, U'_v = \sum_{v=0}^{n} \eta_{nv} \sum_{k=0}^{v} u'_k = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{v=k}^{n} \eta_{nv}) u'_k,$$

і, як наслідок,

$$\eta_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \eta_{nv} \tag{2.32}$$

Звідки, аналогічно:

$$\eta_{nk} = \Delta\bar{\eta}_{nk} \tag{2.33}$$

В точності так, як (2.32) і (2.33), отримуємо

$$\bar{\xi}_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \xi_{nv} \tag{2.34}$$

$$\xi_{nk} = \Delta\bar{\xi}_{nk} \tag{2.35}$$

З (2.29) і (2.30) знаходимо

$$u_n = \bar{\Delta} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \xi_{nk} \, U'_k = \sum_{k=0}^{n} \bar{\Delta} \, \xi_{nk} U'_k,$$

Тобто

$$\eta_{nk} = \bar{\Delta}\xi_{nk} \tag{2.36}$$

Звідси

$$\xi_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \eta_{mk} \tag{2.37}$$

З (2.37) і (2.32) отримаємо

$$\xi_{nk} = \Delta \sum_{m=k}^{n} \bar{\eta}_{mk} = \sum_{m=k}^{n} \Delta\bar{\eta}_{mk} \tag{2.38}$$

З (2.32) і (2.36) отримаємо

$$\bar{\eta}_{nk} = \sum_{v=k}^{n} \bar{\Delta} \, \xi_{nv} \tag{2.39}$$

Нарешті, з (2.39) і (2.34) отримуємо

$$\bar{\eta}_{nk} = \bar{\Delta}\bar{\xi}_{nk} \tag{2.40}$$

Звідки ми отримаємо

$$\bar{\xi}_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{\eta}_{mk} \tag{2.41}$$

Формули (2.40) і (2.41) аналогічні формулам (2.36) і (2.37).

Поклавши k = n у формулах (2.36), (2.39), (2.41) і (2.28), для будь-якого нормального методу A, враховуючи (2.13), знайдемо

$$\xi_{nn} = \eta_{nn} = \bar{\eta}_{nn} = \bar{\xi}_{nn} = \frac{1}{a_{nn}} = \frac{1}{\alpha_{nn}} = \frac{1}{\bar{\alpha}_{nn}} = \frac{1}{\bar{a}_{nn}} \tag{2.42}$$

Для трикутних методів зворотні перетворення (якщо вони існують) мають більш складний вид.

Характеристика матричного методу

Нехай A – матричний метод підсумовування у вигляді перетворення (A). Для того, щоб метод A зберігав збіжність, необхідно і достатньо виконання умов теореми 2.1 Кожима-Шура.

Для того, щоб метод A породжував збіжність необхідно і достатньо виконання умов теореми (2.2) Шура [56.с 80].

Якщо A зберігає збіжність, то слідуючи Виланському, число

$$\rho(\mathrm{A}) = \mathrm{a} - \sum a_k$$

називається характеристикою методу A.

Якщо $\rho$(A)≠0, то метод A називається корегулярним.

В частності, регулярний матричний метод A являється корегулярним з характеристикою $\rho$(A)=1.

Якщо $\rho$(A)=0, то метод A називається конулевим.

Покажемо, що будь-який матричний метод, породжуючий збіжність, являється конулевим [14.с 111].

Дійсно, з умови 3 теореми (2.1) Шура виплиає, що

$$\lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k) = 0,$$

Звідки отримаємо

$$\text{a}=\lim_n \sum_k a_{nk} = \sum a_k$$

(бо збіжність цих рядів випливає з умов 1 і 2 теореми 2.1 Шура) і, як наслідок, $\rho$(A)=0.

Так як по означенню матричний метод не може бути одночасно корегулярним і конулевим, то по доведенню, він також не може бути одночасно породжуючим збіжність і корегулярним. Звідси випливає

**Теорема 2.12** Неякий корегулярний матричний метод не може підсумовувати всі обмежені послідовності [35.с 241].

Теорему (2.12) вперше довів Штейнгауз для регулярного А методу; приведене доведення її належить Кангро.

**Теорема 2.13**. Для будь-якої обмеженої і розбіжної послідовності існує регулярний матричний метод, підсумовуючий її до будь-якого заданого числа.

Отже, всі обмежені послідовності можна підсумовувати лише деякою множиною регулярних матричних методів. Реймерс взяв нові, так звані контитуальні методи підсумовування (які являються узагальненнями матричних методів підсумовування), серед яких є регулярні методи, які підсумовують всі обмежені послідовності.

# РОЗДІЛ III

# КЛАСИЧНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

## 3.1 Методи Чезаро

Нехай А – деякий матричний метод підсумовування.

Ряд (1.2) називається **абсолютно підсумовуваним** методом А (або |А| - підсумовуваним), якщо перетворений ряд абсолютно сходиться, тобто, якщо

$$\sum |u'_n| < \infty.$$

При цьому, якщо метод заданий перетворенням (А) або (В), то вважаємо, що

$$u'_n = \bar{\Delta} U'_n \qquad (3.1)$$

Відмітимо, що і при |А|-підсумовуваності А-сумою ряда (1.1) являється число $\sum u'_n$, а не число $\sum |u'_n|$ [48.с 145].

Множина всіх рядів (послідовностей), які метод А абсолютно підсумовує, називається полем абсолютної підсумовуваності методу А і позначається одним із символів |А|’, $l$А або $a$А.

Якщо будь-який абсолютно збіжний ряд являється |А|- підсумовуваним, то говорять, що метод А зберігає абсолютну збіжність. Якщо при цьому зберігається сума будь-якого абсолютно збіжного ряду, то говорять, що метод А абсолютно регулярний[48.с 146].

**Метод підсумовування Чезаро**

**Означення 3.1 метод Чезаро.** До методу підсумовування Чезаро приходимо наступним чином. Утворюємо чезаровські суми порядку $\alpha$ ряду (1.1), поклавши

$$S_n^0 = U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

і при $\alpha \geq 1$

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1}.$$

Разом з чезарівськими сумами $S_n^\alpha$ в означенні методу Чезаро важливі і біноміальні коефіцієнти – числа Чезаро –

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n},$$

які є коефіцієнтами біноміального ряду

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum A_n^\alpha x^n \qquad (3.2)$$

Чезаровські середні, коротко $C^\alpha$- середні, визначимо відношенням

$$\sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha} \qquad (3.3)$$

Якщо існує кінцева границя

$$\lim \quad \sigma_n^\alpha = U',$$

то говорять, що ряд (1.5) підсумовуваний методом Чезаро порядку $\alpha$ до числа U'.

Метод Чезаро порядку $\alpha$ позначають через $C^\alpha$ або (C,$\alpha$).

Як наслідок,

$$C^\alpha\{\sum u_n\} = \lim_n \sigma_n^\alpha \qquad (3.4)$$

Відмітимо, що (C, 0) – це метод збіжності, бо $A_n^0$=1

і

$$\sigma_n^0 = \frac{S_n^0}{A_n^0} = U_n;$$

метод (C, 1) – це метод арифметичних середніх, так як $A_n^1 = n + 1$ і, як наслідок,

$$\sigma_n^1 = \frac{S_n^1}{A_n^1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U_k.$$

Покажемо тепер, що середні (15.2) можна привести до виду (A), тобто до виду

$$\sigma_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, U_k \tag{3.5}$$

Для цього утворимо формальний добуток рядів

$$\frac{1}{1-x} \sum U_n\, x^n = \sum x^n * \sum U_n x^n = \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right) x^n = \sum S_n^1\, x^n.$$

Далі, припустимо, що

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}} \sum U_n\, x^n = \sum S_n^{\alpha-1}\, x^n,$$

для будь-якого $\alpha$=1,2,... отримуємо

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} \sum U_n\, x^n = \frac{1}{1-x} \sum S_n^{\alpha-1}\, x^n = \sum x^n \sum S_n^{\alpha-1}\, x^n =$$

$$= \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1}\right) x^n.$$

Як наслідок, методом математичної індукції нами доведена формула

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum U_n\,x^n = \sum S_n^{\alpha}\,x^n \tag{3.6}$$

Звідси випливає

$$\sum\nolimits_n \left(\sum\nolimits_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}\,U_k\right)x^n = \sum A_n^{\alpha-1}\,x^n * \sum U_n\,x^n = \sum S_n^{\alpha}\,x^n.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях зміної x, знахойдемо

$$S_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1}\,U_k \tag{3.7}$$

і після ділення на $A_n^{\alpha}$ отримаємо

$$\sigma_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\,U_k \tag{3.8}$$

До цих пір припускалося, що $\alpha = 0, 1, \ldots$ . Але, при допомозі відношення (3.8) можемо середні $\sigma_n^{\alpha}$ визначити і для не цілого $\alpha$, навіть для уявного $\alpha$. Для цього потрібно якось визначити величини $S_n^{\alpha}$ так, щоб вони мали сенс для комплексних $\alpha$. Тому за визначення величин $S_n^{\alpha}$ будемо вважати формулу (3.7). Тоді з (3.8) підсумємо, що метод Чезаро $C^{\alpha}$ визначається для будь-якого комплексного $\alpha$ а Re $\alpha > -1$ у вигляді трикутного матричного перетворення (A) послідовності в послідовність з матрицею

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} \tag{3.9}$$

Якщо в доведенні відношення (3.7) величини $U_n$ замінити на $u_n$, то замість (3.7) і (3.8) отримаємо відповідно

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\sum u_n\,x^n = \sum S_n^{\alpha}\,x^n \tag{3.10}$$

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha u_k \tag{3.11}$$

Як наслідок, метод Чезаро $C^\alpha$ у вигляді перетворення (B) ряду в послідовності визначається матрицею

$$\alpha_{nk} = \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} \tag{3.12}$$

Визначення методу $C^\alpha$ при $\alpha$=1,2,... дано Чезаро, а для будь-яких $\alpha >$ -1 дано незалежне один від одного Кноппом і Чепменом. Практично більше розглядають метод $C^\alpha$ при $\alpha >$ -1 бо, як нищє побачимо, тоді $\alpha_{nk} >$0. Визначення методів $C^\alpha$ і $C_0^\alpha$ при $\alpha$ = -1,-2 [66.с 166].

## 3.2 Метод Рісса

Метод зважених середніх Рісса можна розглядати як узагальнення методу арифметичних середніх. Тому його часто називають також методом зважених середніх арифметичних.

**Означення 3.2 метод зважених середніх Рісса.** Методом зважених середніх Рісса називають трикутний матричний метод, визначений послідовністю комплексних чисел $p_n$ у вигляді перетворення (A) матрицею чисел

$$a_{nk} = \frac{pk}{P_n} \tag{3.13}$$

Де $P_n$=$\sum_{k=0}^{n} pk$, $P_n \neq 0$.

Метод зважених середніх Рісса позначають через (R, $p_n$).

В часності, метод (R, 1) є методом середніх арифметичних.

Метод (R, $\frac{1}{n+1}$), слідуючи Ріссу, звичайно називають методом логарифмічних середніх і позначають через $l$ або $(l)$.

Метод (R, $p_n$) при $p_n$=$(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}$, тобто при $P_n$=$(n+1)^{\alpha}$, звичайно називають методом Зігмунда порядку $\alpha$ і позначають через (z, $\alpha$), так як Зігмунд вивчав швидкість приближення R≤ $\alpha$ диференційованих функцій (z, $\alpha$) – середніми ряду Фурьє при $\alpha$=1, 2,... . В частності, (z, 1) = (C, 1), а

(z, 0)=$E_0$.

З (3.13) при k≥1 отримуємо

$$\sum_{v=k}^{n} a_{nv} = \frac{1}{P_n}\sum_{v=k}^{n} p_v = \frac{1}{P_n}\left(\sum_{v=0}^{n} p_v - \sum_{v=0}^{k-1} p_v\right) = \frac{P_n - P_{k-1}}{P_n}, \quad (3.14)$$

Звідки, вважаючи $P_{-1}$=0, в силу (8.5) метод (R, $p_n$) у вигляді перетворення (B) визначається матрицею чисел

$$\alpha_{nk} = 1 - \frac{P_{k-1}}{P_n} \quad (3.15)$$

Матрицею (3.15) визначив свій метод сам Рісс. Тому замість (R, $p_n$) іноді також пишуть (R, $P_n$) або просто P.

З (3.15) при n≥1 знаходимо

$$\bar{\Delta}\alpha_{nk} = -P_{k-1}\left(\frac{1}{P_n} - \frac{1}{P_{n-1}}\right) = \frac{P_{k-1}(P_n - P_{n-1})}{P_n\, P_{n-1}}, \quad (3.16)$$

звідки, вважаючи $\frac{0}{0}$ = 1, в силу (8.2), метод (R, $p_n$) у вигляді перетворення (C) визначається матрицею чисел

$$\bar{\alpha}_{nk} = \frac{P_{k-1}p_n}{P_n\, P_{n-1}} \tag{3.17}$$

Через (3.17), враховуючи означеннях абсолютної підсумованості, і те, що метод (R, $p_n$) трикутний, ряд (1.1) називають | R, $p_n$| - додатнім, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}\, u_k \right| < \infty,$$

при чому

$$(\mathrm{R}, p_n)\ \{\sum u_k\} = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n\, P_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}\, u_k \text{ [20.с 300].}$$

### 3.3 Метод Вороного-Нерлунда

Метод Вороного - Нерлунда можна розглядати як узагальнення методу Чезаро. Вперше цей метод розглядав Вороний в 1902 р. Стаття Вороного представляє собою коротку замітку в рідкісному видавництві. Тому вона не розповсюднилась серед математиків і залишилася в забутті. Метод став відомим завдяки Нерлунда, який ввів його незалежно від Вороного, і опублікував свою роботу в 1919 р. Робота Вороного стала відомою завдяки анлійському перекладі її в 1932 р. Тамаркіна з примітками перекладача.

**Означення 3.3 метод Вороного – Нерлунда.** Методом Вороного – Нерлунда називають трикутний матричний метод, визначений послідовністю комплексних чисел $p_n$, у вигляді перетворення (А) матрицею з чисел

$$a_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n} \tag{3.18}$$

де $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k,\ \ P_n \neq 0.$

Метод Вороного – Нерлунда позначають через (WN, $p_n$).

В частності, метод $C^{\alpha}$ являється методом (WN, $p_n$) з $p_n$= $A_n^{\alpha-1}$.

Метод (WN, $\frac{1}{n+1}$), слідуючи Ріссу, називають методом гармонічних середніх [24.c 311].

Метод (WN, $p_n$) з $p_n$=1 при n$<\beta$ і $p_n$=0 при n$\geq \beta$ називають методом $z_\beta$ Сільвермана – Саса. Зрозуміло, що $z_1 = E_0$.

Звідси слідує що:

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{P_n}\sum_{v=k}^{n} p_{n-v} = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n-k} p_{n-k-v} = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n-k} p_v, \tag{3.19}$$

і, означає, у вигляді перетворення (B) метод (WN, $p_n$) визначається матрицею чисел (ним визначає цей метод Вороний)

$$\alpha_{nk} = \frac{P_{n-k}}{P_n} \tag{3.20}$$

Тому замість (WN, $p_n$) іноді пишуть (WN, $P_n$) або просто P.

Регулярність (3.20), розглянемо при яких умовах метод (WN, $p_n$) зберігає збіжність. Застосовуючи теорему 2.1 Кожима – Шура, отримуємо умови

1 $$\lim_n a_{nk} = \lim_n \frac{p_{n-k}}{P_n} = a_k$$

2 $$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k} = \frac{1}{P_n}P_n = 1 \tag{3.21}$$

3 $$\sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| = \frac{1}{|P_n|}\sum_{k=0}^{n} |p_{n-k}| = \sigma(1).$$

Виявляється, що умову 1 можна спростити, а саме, умова 1 випливає з існування границі

$$a_0 = \lim \frac{p_n}{P_n} \tag{3.22}$$

Дійсно, з подання

$$\frac{p_{n-k}}{P_n} = \frac{p_{n-k}}{P_{n-k}} \frac{P_{n-k}}{P_{n-k+1}} \dots \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{P_n}$$

укладаємо, що існує $a_k$ і

$$a_k = a_0(1 - a_0)^k,$$

бо

$$\lim_n \frac{p_{n-k}}{P_{n-k}} = a_0, \quad \lim_n \frac{P_{n-k}}{P_{n-k+1}} = \lim_n(1 - \frac{p_{n-k+1}}{P_{n-k+1}}) = 1 - a_0.$$

**Теорема 3.1.** Метод (WN, $p_n$) зберігає збіжність тоді і тільки тоді, коли виконані умови

1 $$\text{існує} \lim \frac{p_n}{P_n} = a_0$$

2 $$\sum_{k=0}^{n} |pk| = \sigma\,(P_n).$$

Зрозуміло, що умова 2 теореми (3.1) відпадає, якщо $p_k \geq 0$.

Зазначимо, що з умови 2 теореми (3.1) випливає необхідна умова

$P_m = \sigma(P_n)$ при всіх $0 \leq m \leq$ n.

З теореми (3.1) випливає:

**Наслідок 3.1.** Метод (WN, $p_n$), зберігаючий збіжність, буде регулярним тоді і тільки тоді, якщо $a_0 = 0$.

Йорлунд розглядав лише випадок $a_0 = 0$.

У Вороного величини $P_n > 0$ такі, що ряд $\sum P_n$=∞ і $P_0 + \dots + P_n = \sigma\,(n^{\lambda})$ при деякому λ.

З наслідку (3.1) при $p_k = A_k^{\alpha-1}$ випливає теорема (2.4), а при $p_k$=$\frac{1}{k+1}$ отримуємо, що метод гармонічних середніх регулярний. Метод $z_\beta$ також регулярний, бо при n≥ $\beta$ для нього $P_n = \beta$ і $p_n$=0.

У випадку $a_0$ ≠0. Для цього знайдемо характеристику методу [24.с 542].

Маємо:

$$\rho(P) = 1 - \sum a_k = 1 - \sum a_0(1-a_0)^k = 1 - a_0 : [1 - (1-a_0)] = 0. \tag{3.23}$$

**Наслідок 3.2.** Метод (WN, $p_n$), зберігаючий збіжність, являється або регулярним, або конулевим [55.с 234].

**Теорема 3.2. Зворотні матриці.** Метод (WN, $p_n$) нормальний тоді і тільки тоді, якщо $p_0 \neq 0$, бо $a_{nn} = \frac{1}{P_n} p_0$. Тому метод (WN, $p_n$) зворотній тоді і тільки тоді, коли $p_0 \neq 0$.

Знайдемо зворотню матрицю $(\mathrm{WN}, p_n)^{-1}$=($\wr_{nk}$). В нашому випадку формула (2.24) перетворюється в

$$\sum_{v=k}^{n} p_{n-v} \wr_{vk} = \delta_{nk} P_n \tag{3.24}$$

де ліва частина нагадує член добутку Коші двох рядів. Тому застосуємо наступний штучний прийом. В силу теореми (3.2) маємо

$$\sum p_n\, x^n * \sum_n \wr_{nk} x^n = \sum_n (\sum_{v=0}^{n} p_{n-v} \wr_{vk}) x^n = \sum_n \delta_{nk} P_n x^n = P_k x^k,$$

звідки, позначивши

$$\frac{1}{\sum p_n x^n} = \sum c_n\, x^n \tag{3.25}$$

(ділене існує, якщо $p_o \neq 0$), виводимо

$$\sum_n \wr_{nk}\, x^n = P_k x^k * \sum c_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} P_k\, c_{n-k} x^n,$$

і після прирівняння коефіцієнтів при однакових степенях x знаходимо

$$ξ_{nk} = P_k c_{n-k} \tag{3.26}$$

Якщо (3.25) замінити через

$$\frac{1}{\sum P_n x^n} = \sum d_n x^n \tag{3.27}$$

то аналогічно отримуємо

$$ŋ_{nk} = P_k d_{n-k} \tag{3.28}$$

### 3.4 Метод Бореля

Нехай дано числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Ряд називається збіжним за Борелем (або *B*-збіжним), якщо існує границя:$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{x^k}{k!} S_k = S$ де $S_k$ — часткові суми ряду. Число *S* тоді називається борелівською сумою ряду[9.с 298].

Нехай дано числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Ряд називається збіжним за Борелем (або $B'$-збіжним), якщо існує інтеграл:

$$\int_0^\infty dt e^{-t} \sum_n \frac{a_n}{n!} t^n = S \tag{3.29}$$

Суть методу полягає в наступному: за рядом (1.4) і його частинними сумами $A_n$ будується вираз

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

Якщо останній ряд збігається, хоча б для достатньо великих значень $x$ і його сума при $x \to +\infty$ має границю $A$, то це число є «узагальненою сумою» в розумінні Бореля для даного ряду (1.4) [9.c 299].

Доведемо регулярність методу Бореля. Припустимо збіжність ряду (2.30) і позначимо його суму через $A$, а залишки $A - A_n$ –через $a_n$. Маємо (для достатньо великих $x$)

$$A - e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} A \frac{x^n}{n!} - e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

Задамо довільне мале число $\varepsilon > 0$; знайдеться такий номер $N$,що для $n > N$ буде $|a_n| < \varepsilon/2$. Представимо останній вираз у вигляді суми

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Другий доданок за абсолютною величиною $< \varepsilon/2$, яке не було $x$, а перший є добутком $e^{-x}$ на многочлен, цілий відносно $x$, є абсолютно $< \varepsilon/2$ при достатньо великих $x$. Регулярність доведена.

**Приклад.**

Підсумувати ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ методом Бореля.

Побудуємо вираз

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}.$$

Оскільки, $A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = 0, A_4 = 1, A_5 = 0, \ldots$, то

$$e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x}\left(1 + 1\cdot\frac{x^2}{2!} + 1\cdot\frac{x^4}{4!} + 1\cdot\frac{x^6}{6!} + \cdots\right) = e^{-x}\cdot chx =$$
$$= e^{-x}\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Знайдемо границю цього виразу при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, сума заданого ряду за Борелем рівна $^1/_2.$ [33.с 56]

# ВИСНОВКИ

В дипломній роботі розглянуто основні методи підсумовування збіжних та розбіжних рядів.

Робота складається із вступу і трьох розділів.

В першому розділі розглянуто поняття про узагальнену збіжність рядів. Методи Абеля-Пуасона, та наведено деякі приклади узагальненої збіжності рядів.

В другому розділі розглядається загальні матричні методи підсумовування рядів. Вводиться поняття регулярності матричних методів підсумовування. Після цього розглядаються основні методи підсумовування таких рядів як метод Кожима-Шура і Чезаро. Встановлюється співвідношення між ними. Крім того з'ясовується суть інших методів (Хана, Вороного).

В третьому розділі розглянуто класичні методи підсумовування рядів, такі як: (метод Чезаро), (метод Рісса), (метод Вороного-Нерлунда) і (метод Бореля).

Під час роботи над вказаною темою опрацьовано і систематизовано теоретичний матеріал про підсумовування збіжних та розбіжних рядів з різних джерел. Самостійно розв'язано ряд прикладів на застосування розглянутих методів підсумовування рядів.

За результатами роботи можна зробити наступні висновки:

1. Методи підсумовування рядів є логічним узагальненням поняття збіжності ряду.

2. Методи підсумовування рядів можна порівнювати між собою та застосовувати послідовно.

3. Методи підсумовування рядів можна використовувати для підсумовування ознак збіжності та абсолютної збіжності рядів.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977. – 275 с.
2. Давыдов Н.А. Непрерывность интеграла типа Кожима в замкнутой области // Доклады Академии Наук. – 1949. – т. LXIV. - №6.
3. Давыдов Н.А. Сходимость лакунарніх тригонометрических рядов // Доклады Академии Наук. – 1949. – т. LXV. - №1.
4. Давыдов Н.А. Пример функции,принадлежащей ко всем классам Н$\delta$($\delta$<1) с тейлоровскими коеффициентами, всюду плотными в комплексной плоскости / В кн.: Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950. – С.165-167.
5. Давыдов Н.А. Обобщение примера Лузина и Привалова / В кн.: Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950. – С.167-170.
6. Давыдов Н.А. Условия непрерывности интеграла типа Кожима в замкнутой области / В кн.: Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950. – С.196-199.
7. Давыдов Н.А. Интегральное представление функции, аналитических в еденичном круге / В кн.: Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950. – С.143-147.
8. Давыдов Н.А. Обобщение некоторых теорем о сходимости степенных и тригонометрических рядов // Доклады Академии Наук. – 1951. – т. LXXX. - №3.
9. Давыдов Н.А. Обобщение второй теоремы Абеля // Успехи математических наук. – 1955. т. X – 3(65). – С.135-138.
10. Давыдов Н.А. Об одном свойстве методов чезаро суммирования

рядов // Матем.сборник. – 1956. – т.38(80). - №4. – С. 509-524.
11. Давыдов Н.А. Об обобщении теоремы Абеля // Матем.сборник. – 1956. – т.38(81). - №4. – С. 101-104.
12. Давыдов Н.А. Об одной ошибочной теореме Дайович // Успехи математических наук. – 1957. т. XII – 3(75). – С.295-296.
13. Давыдов Н.А. О границах неопределённости при суммировании ряда методами Чезаро и Пуассона-Абеля // Успехи математических наук. – 1957. т. XII – 4(76). – С.167-174.
14. Давыдов Н.А. О (с)-точках последовательности, суммируемой методом Пуассона-Абеля // Матем.сборник. – 1957. – т.43(85). – С. 67-74.
15. Давыдов Н.А., Коровкин П.П.,Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Учпедгиз, 1957.
16. Давыдов Н.А. Ещё раз об обращении теоремы Абеля // Учёные записки Калининского гос.пед.ин.-та. – 1958. т.XXVI. – С.83-94.
17. Давыдов Н.А. Одно свойство метода Бореля суммирования рядов и теоремы тауберова типа. Сверхсходимость степенных рядов и особые точки аналитических функций // Учёные записки Калининского гос.пед.ин.-та. – 1958. т.XXVI. – С.57-82.
18. Давыдов Н.А. О радиальных граничных значениях аналитических функций // Успехи математических наук. – 1959. т. XIV – 1(85). – С.157-164.
19. Давыдов Н.А. Об одном свойстве одного класса интегралов Стилтьеса // Матем.сборник. – 1959. – т.48(90). №4. – С. 429-446.
20. Давыдов Н.А. Ещё раз об обращении теоремы Абеля // Сборник «Исследования по современным проблемам теории функции комплексного переменного». – М.: Физматгиз, 1960. – С.29-34.
21. Давыдов Н.А. Сверхсуммируемость степенного ряда методами Чезаро // Успехи математических наук. – 1963. т. XVIII – 4(112). – С.129-134.

22. Давыдов Н.А. Поведение обобщённого лакунарного степенного ряда на границе круга сходимости // Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. – Ростов-на-Дону, 1964. – С. 52-53.

23. Давыдов Н.А. (с)-Свойство методов Чезаро и Абеля-Пуассона и теоремы тауберового типа // Матем.сборник. – 1963. – т.43(85). – т.60(102). - №2. – С. 185-206.

24. Давыдов Н.А. Достаточное условие для суммируемости ряда $(\varphi_n)$–методом // Успехи математических наук. – 1964. т. XIX – 5(119). – С.115-118.

25. Давыдов Н.А. О неэффективности регулярных матриц // Успехи математических наук. – 1965. т. XX – 6(126). – С.78-80.

26. Давыдов Н.А. Обобщение теоремы Мерсера // Успехи математических наук. – 1965. т. XX – 6(126). – С.73-78.

27. Давидов М.О.Тауберові теореми для методів сумування інегралів Лебега // Звітно-наукова конференція кафедр інституту [Київський педагогічний]: тези доповідей (фізико-математичні).– К. – 1965. – С 3-4.

28. Давыдов Н.А.Тауберовы теоремы для методов Чезаро суммирования интегралов Лебега // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1966. – вып.2. – С. 108 – 115.

29. Давыдов Н.А. Перенесение одной теоремы Мазура – Орлича для регулярных матричных преобразований на регулярные интегральные преобразования // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1966. – вып.3. – С. 90 – 94.

30. Давыдов Н.А. Обобщение теоремы Кноппа – Белинфанте //Теория функций, функциональный анализ иих приложения. – 1966. – вып.3. – С. 86-89.

31. Давыдов Н.А. О включении и равносильности методов Кожима

суммирования рядов // Укр.матем.журн. – 1967, – т.19. – № 4. – С.29-47.

32. Давыдов Н.А. О включении и равносильности методов Тёплица суммирования рядов // Укр.матем.журн. – 1968, – т.20. – № 4. – С.28-39.

33. Давыдов Н.А. Неэффективные регулярные преобразования //Теория функций, функциональный анализ иих приложения. – 1968. – вып.6. – С. 189-200.

34. Давидов М.О. Елементи теорії функцій комплексної змінної. – К.: Радянська школа, 1968.

35. Давыдов Н.А. Об условиях ограниченности средних, заданных с помощью матриц // Теория функций, функциональный анализ иих приложения. – 1969. – вып.10. – С. 127-131.

36. Давидов М.О. Про одну властивість включення методів підсумовування, що визначаються нормальними матрицями // Укр.матем.журн. – 1970, – т.22. – № 5. – С.672-676.

37. Давидов М.О. Додаткові розділи математичного аналізу. – К.: Вища школа, 1971.

38. Давыдов Н.А. О точности теоремі Мазура – Орлича // Матем.заметки. – 1972. – т.11.– №4. – С. 431-435.

39. Давыдов Н.А.Суммирование ограниченных последовательностей регулярными положительными матрицами // Матем.заметки. – 1973. – т.13. – №2. – С.179 -188.

40. Давыдов Н.А., Коровкин П.П.,Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 255 с.

41. Давыдов Н.А. ($c^{a}$)-свойства методов Чезаро суммирования рядов // Теория функций, функциональный анализ иих приложения. – 1973. – вып.17. – С. 14-23.

42. Давыдов Н.А. О ряде в смысле Кноппа суммы степенного ряда // Теория функций, функциональный анализ иих приложения. – 1974. –

С. 72-83.

43. Давыдов Н.А. Обобщение двух тауберовых теорем Харди и Литтвулда // Укр.матем.журн. – 1974, –№ 6. – С.723-732.

44. Давыдов Н.А. Суммирование ограниченных последовательностей регулярными матрицами // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1975. – вып.23 – С.24-31.

45. Давыдов Н.А. Условия равносильности методов Чезара методу Абеля – Пуассона суммирования неограниченных последовательностей // Укр.матем.журн. – 1975. – т.23. – 32. – С.223-229.

46. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.1 – К.:Вища школа, 1976. – 368 с.

47. Давидов М.О. Теореми тауберового типу для ітерації методів зважених арифметичних середніх // Укр.матем.журн. – 1977, – т.29. – № 3. – С.298-305.

48. Давыдов Н.А., Михалин Г.А. О рядах ограниченных последовательностей // Матем.заметки. – 1978. – т.23. – №4. – С.537-550.

49. Давыдов Н.А. Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах последовательностей // Укр.матем.журн. – 1978, – т.30. – № 6. – С.723-730.

50. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.2. – К.:Вища школа, 1976.

51. Давыдов Н.А. О включении ядер последовательностей, задаваемых с помощью регулярных матриц // Укр.матем.журн. – 1979, – т.31. – № 4. – С.421-425.

52. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.:Вища школа, 1979.

53. Давыдов Н.А., Михалин Г.А. О ядре средних Вороного для

ограниченной последовательностеи // Укр.матем.журн. – 1979. – т.31. – №6. – С.675-682.

54. Давыдов Н.А., Лотоцький В.А. О ядре средних Бореля // Укр.матем.журн. – 1980. – т.32. – №1. – С.11-18.

55. Давыдов Н.А. Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на классах последовательностей // Укр.матем.журн. – 1980. – №2. – С.155-159, 194, 288.

56. Давыдов Н.А. *K*-матрицы, равносильные матрице средних арифметических на множестве ограниченных последовательностей // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1981. вып.35 – С.24-26.

57. Давыдов Н.А., Лотоцкий В.А., Михалин Г.А. Регулярные положительные ограничено-неэффективные матричные методы суммирования // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1982. вып.37 – С.8-11.

58. Давыдов Н.А. *K*-матрицы, не суммирующие расходящиеся ряды с членами, стремящимися к нулю // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. –1982. вып.38 –С.22-25.

59. Давыдов Н.А., Власенко В.Ф. Аналог теоремы Даревского для ограниченных последовательностей // Укр.матем.журн. – 1982. – т.34. - №3. – С.348-350.

60. Давыдов Н.А. $(A, \varphi)$- метод суммирования рядов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1982. вып.39 – С.38-46.

61. Давыдов Н.А. Одно свойство и одна теорема тауберова типа для консервативной матрицы // Укр.матем.журн. – 1983. – т.35. - №1.– С.81-85.

62. Давыдов Н.А. О ядре в смысле Кноппа регулярного положительного преобразования // Известия вузов, математика. –

1983. - №2(249). – С.30-40.

63. Давыдов Н.А. Критерии суммируемости расходящейся последовательности к крайней точке её ядра регулярной положиельной матрицей // Методы алгебры и анализа: тезисы докладов. –Тарту. – 1983. – С.26-27.

64. Давыдов Н.А., Михалин Г.А. О последовательностях действительных чисел, суммируемых и несуммируемых регулярной матрицей // Теоремы тауберова типа и дифференциальные уравнения с малым параметром: сб.науч.тр. – К.: КГПИ, 1983. – С.32-39.

65. Давыдов Н.А. Критерии суммируемости расходящейся последовательности к крайней точке её ядра регулярной положительной матрицей // Укр.матем.журн. – 1984. –т.36. - №3.– С.292-297.

66. Давыдов Н.А. О двух эквивалентных определениях ядра последовательности комплексных чисел // Известия вузов. Математика. – 1986.

67. Давыдов Н.А., Власенко В.Ф. Один класс ограничено-неэффективных нормальных консервативных положительных матриц // Укр.матем.журн. – 1989. – т.41. - №4. – С.550-553.

68. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.1. – К.:Вища школа, 1990.

69. Давыдов Н.А. О необходимых и достаточных условиях, при которых из суммируемости числового ряда следуе его сходимость // Укр.матем.журн. – 1995. – т.47. - №6. – С.747-754.

70. Люстерник Л.А., Соболев В.Й. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 170 с.

71. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – Москва-Ленинград 1950. – С. 163.

# Додаток А

## КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Степанець Євген Олександрович, учасник освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

**ЗАЯВЛЯЮ**, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традиційуніверситету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні йполітичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участів будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючуінформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг абоздійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальнідомагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базіуніверситету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов’язаних з діяльністюуніверситету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров’ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

**УСВІДОМЛЮЮ**, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальностій до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

30.10.2020  Степанець Євген Олександрович