МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ГЕОМЕТРИЧНІ ОБРАЗИ В МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала студентка 2 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти

Ткаченко Іванна Олександрівна

Керівник доцент, кандидат фізико-математичних наук, професор

Кузьмич Валерій Іванович

Рецензент доцент, кандидат фізико-математичних наук

Вейцбліт Олександр Йосипович

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП…………………………………………………………………. 3

РОЗДІЛ 1. МЕТРИЧНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ…… 7

1.1.Основні поняття метричного простору……………………… 7

1.2.Приклади метричних просторів……………………………… 10

1.3.Основні поняття топологічного простору…………………… 11

1.4.Приклади топологічних просторів…………………………… 17

РОЗДІЛ 2. НЕЕВКЛІДОВІ ГЕОМЕТРІЇ……………………… 19

2.1. Геометрія Лобачевського………………………………………. 19

2.2. Проективна геометрія……………………………………….. 22

2.3. Аксіоматика Гільберта………………………………………. 23

2.4. Геометрія Рімана…………………………………………….. 25

РОЗДІЛ 3. ОСНОВИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ……………… 27

3.1. Основні поняття метричної геометрії……………………… 27

3.2. Прямолінійне розміщення точок метричного простору……… 30

3.3. Плоске розміщення точок метричного простору…………….. 32

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕМЕНТИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ……………………… 35

4.1. Формування понять точки, відстані між точками та прямолінійності їх розміщення у шкільному курсі математики………………………………………………………………. 35

4.2. Узагальнення поняття кута ……..……………………………… 73

ВИСНОВКИ……………………………………………………….. 77

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……………………… 79

ДОДАТКИ

Додаток А………………………………………………………... 88

Вступ

Метрична геометрія – область геометрії для якої метричний простір є основним об’єктом дослідження. Метрична геометрія вивчає множину точок, опираючись тільки на задані значення відстані між членами пари точок простору. Метрична геометрія використовується у різних галузях науки, в яких визначається та розглядається відстань між об’єктами, наприклад в геодезії, картографії та фізиці[1,3,4,6,7].

Розвиток цієї області геометрії пов’язаний з іменами К.Менґера [5] , Л.Блюменталя [1], Дж. Кріппена [2], Т. Гавела та ін.

Актуальність проблеми вивчення геометричних образів у метричному просторі також зумовлена реальним станом вивчення основних геометричних понять та фігур учнями середньої та старшої школи. Багато учнів не вміють розв’язувати задачі практичного змісту з геометрії ,більше того,окремим учнямнавіть уявити складно конкретне геометричне тіло. Про це свідчить аналіз діагностичних тестових та контрольних робіт учнів 7-11 класів, анкетування вчителів, бесіди з учителями та учнями, результати ЗНО.

Таким чином, актуальність дослідження [86], зумовлена:

- потребами особистості у ґрунтовних знаннях властивостей геометричних образів у метричному просторі для повсякденного життя та практичної діяльності;

- новими вимогами сучасного суспільства до особистості та відповідними цілями навчання;

- недостатнім рівнем засвоєння значною частиною випускників профільних шкіл знань з розділу «Геометричні тіла»;

- потребою вдосконалення методичної системи вивчення геометричних тіл з погляду сучасних наукових теорій;

- відмінностями між різними методологічними підходами до вивчення понять та доведення тверджень, різним структуруванням геометричного матеріалу.

Актуальність проблеми дослідження та її недостатня розробленість у методиці навчання геометрії і зумовили вибір теми кваліфікаційної роботи: «Геометричні образи в метричному просторі».

Звязок з науковими программами, планами, темами. Робота виконувалася у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Мета дослідження: полягає в тому, щоб теоретично обґрунтувати методичну систему вивчення геометричних образів у метричному просторі.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні **ЗАВДАННЯ**:

1) Проаналізувати матеріали шкільного курсу геометрії з формулювання основних геометричних понять;
2) Описати узагальнені основні геометричні поняття;
3) Систематизувати матеріал з основ метричної геометрії при вивченні базових математичних дисциплін;
4) Розглянути приклади узагальнених основних геометричних понять у конкретних метричних просторах.

Об’єкт дослідження – метричний простір.

Предмет дослідження – геометричні образи в метричному просторі.

Для розв’язування поставлених завдань застосовувалися такі ***методи*** науково-педагогічного дослідження: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження; вивчення педагогічного досвіду викладачів, та вчителів математики.

Наукова новизна дипломної роботи. Дослідження геометричних образів у метричних просторах, стосовно до шкільного курсу математики, почали проводитись порівняно недавно. На даний час не існує грунтовних методичних розробок застосувань метричної геометрії до формування основних геометричних понять у школярів. У зв’язку з цим, у роботі акцентовано увагу на формуванні понять точки, відстані між точками та прямолінійності їх розміщення у шкільному курсі математики. При цьому, звертається увага на відносність таких понять, та на можливість використання елементів неевклідових геометрій при їх формуванні.

Практичне значення дослідження полягає у тому, що результати роботи можуть бути використані вчителями у процесі викладання математики , під час підвищення кваліфікації вчителів та студентами у період виробничої практики в закладах загальної середньої освіти, у класах з профільним вивченням математики.

Апробація результатів роботи. Основні положення та результати кваліфікаційної роботи пройшли апробацію на науково-практичних конференціях в 2019р «Інноваційні технології навчання природничо-математичних дисциплін у закладах середньої та вищої освіти» [80] та в

2020р «Актуальні проблеми природничо-математичних дисциплін у закладах освіти»[81].

Публікації. Згідно доповідей конференції, надруковані тези «Геометричні образи в метричному просторі»[80] та «Поняття кута утвореного трьома точками метричного простору»[81].

Структура роботи. Дипломна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (86 найменувань) та додатку. Повний обсяг роботи 89 сторінок.

РОЗДІЛ 1
МЕТРИЧНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ

1.1 Основні поняття метричного простору

Приступаючи до вивчення поняття метричного простору, треба дати визначення самій метриці.

Нехай М – довільна непорожня множина. Кажуть, що на M задана метрика, якщо кожній парі елементів $x, y \in M$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\rho\ (x, y)$ називається відстань від x до y, які відповідають наступним властивостям*:*

1^0. $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$ *(або* x *і* y*співпадають);*

2^0. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$для будь-яких $x, y \in M$ (*аксіома симетрії);*

3^0. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$для будь-яких $x, y, z \in M$ (*аксіома трикутника).*

Іншими словами, метрикою на множині M називається відображення ρ декартового добутку $M \times M$ на множину $\mathbb{R}^+$ невід'ємних дійсних чисел, які відповідають указаним вище аксіомам, які називаються *аксіомами метрики*. Множина M разом із заданою на ньому метрикою ρ , тобто якщо пару (M, ρ) називають метричним простором. Елементи множини M називають точками простору (M, ρ).

На одній і тій же множині, яка містить більше однієї точки, можуть бути задані різні метрики. Так, якщо ρ – яка-небудь метрика на M, то, наприклад, kp, де $k \neq 1$ – довільне додатне число, також буде метрикою на M, відміною від метрики ρ. Тому доцільно метричний простір позначити як пару (M, ρ). У тих же випадках, коли зрозуміло, про яку метрику йде мова, знак ρ часто будемо опускати[15].

Якщо $(M, \rho) -$ метричний простір і $A \subset M,$ то пара (A, ρ), де відстань між точками $x, y \in A$ дорівнює відстані між точками в просторі (M, ρ), буде метричним простором. Простір (A, ρ) називають підпростором простору (M, ρ).

Розглядають наступні види множин точок метричного простору.

Означення 1.1. *Нехай (M, ρ) – довільний метричний простір. Кулею $u(x_0, r)$ з центром в точці x_0 радіуса $r(r > 0)$ називається множина всіх точок $x \in M$, для яких задовольняє нерівність $\rho(x, x_0) < r$. Замкненою кулею називається сукупність точок $x \in M$, для яких $\rho(x, x_0) \leq r$. Множина точок $x \in M$, яка відповідає умові $\rho(x, x_0) \leq r$, називають поверхнею кулі або сферою. Околом точки метричного простору називають будь-яку кулю, що містить цю точку.*

Означення 1.2. *Нехай A – довільна множина метричного простору (M, ρ). Точку $a \in A$ називають внутрішньою точкою множини A, якщо існує окіл цієї точки, який повністю належить A. Сукупність усіх внутрішніх точок множини A називають його внутрішньостю та позначають A^0. Множина, якої всі точки внутрішні називається відкритою* [74,75].

Означення 1.3. *Точку $a \in M$ називають зовнішньою точкою множини A, якщо існує окіл u цієї точки в якій немає точок A, т.я $u \cap A = \emptyset$. Очевидно, точка, яка є зовнішньою точкою множини A, буде внутрішньою точкою його доповнення $CA = M \backslash A$.*

Означення 1.4. *Точку $a \in M$ називають межовою точкою множини A, якщо в будь-якому околі точки aіснує хоча б одна точка з A і хоча б одна точка, яка не належить A.*

Іншими словами, a – гранична точка множини A, якщо кожен окіл точки a має непустий перетин, як з множиною A, так із його доповненням CA. Сукупність всіх граничних точок множини A називають границею, котру будемо позначати $b(A)$.

Означення 1.5. *Точку $a \in M$ називають граничною точкою множини A, якщо в кожному околі a міститьсянескінченнобагато точок з множини A. Множиною всіх граничних точок A, називається довільна множина, позначимо A'.*

Означення 1.6. *Точку $a \in M$ називають точкою дотику множини A, якщо будь-який окіл a містить хоча б одну точку з A. Точкою дотику є кожна гранична точка множини. Зворотне твердження, взагалі кажучи – не вірно.*

Межова точка, гранична та точка дотику можуть як належати множині, так і не належати.

Означення 1.7. *Кожну точку множини A, яка не є його граничною точкою, називають ізольованою.*

Очевидно, якщо a ізольована точка множини A, то існує такий окіл u точки a, в якій, крім a, немає інших точок A. Кожна точка дотику множини – це чи ізольована, чи гранична його точка [15].

Означення 1.8. *Множина A метричного простору (M, ρ) називається обмеженою, якщо існує куля скінченного радіуса, яка містить A.*

Сам метричний простір теж може бути обмеженим. При цьому його метрику називають обмеженою.

Діаметром множини A, позначимо його $d(A)$, називають точну верхню грань відстані між точками множини, т.я.

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} \rho(x, y).$$

Відстань від точки $x_0 \in M$ до множини A називають число

$$\rho(x_0, A) = \inf_{x \in A} \rho(x_0, x).$$

Якщо $\rho(x_0, A) = 0$, то точка x_0 або належить множині A, або є його граничною точкою [74,75].

Відстанню між двома не пустими множинами A та B називають число

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y).$$

1.2 Приклади метричних просторів

Існує декілька прикладів метричних просторів (Понарин Я.Д.) [73], одним з яких є:

1. Простір ізольованих точок
$$d(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases};$$
2. Множина дійсних чисел утворює метричний простір $\mathbb{R}^1 d(x, y) = |x - y|$;
3. Множина впорядкованих груп з n дійсних чисел $x = x_1, x_2 \dots x_n$ з відстанню $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} (y_k - x_k)^2}$ називається n-вимірним арифметичним евклідовим простором $\mathbb{R}^n$ [35];
4. Ту саму множинувпорядкованихгруп з n дійсних чисел $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$, але з відстанню $d(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$ позначимо простором $\mathbb{R}_1^{\mathrm{n}}$;
5. Знову візьмемо множину впорядкованихгруп з n дійсних чисел $x = x_1, x_2 \dots x_n$, і визначимо відстань між його елементами формулою $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$. Цей простір $\mathbb{R}_\infty^{\mathrm{n}}$ в багатьох питаннях аналізу не менш зруний, ніж евклідів простір $\mathbb{R}^n$;

6. Множина $C_{[a,b]}$ всіх неперервних дійсних функцій, визначених на проміжку $[a, b]$ з відстанню $d(f, g) = \max_{a \le k \le b} |g(k) - f(t)|$;

7. Позначимо через l_2метричний простір, точками якого слугують всі можливі послідовності $x = (x_1, x_2 \dots x_n, \dots)$ дійсних чисел, що задовольняють умові $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, а відстань визначається формулою $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}$ [73];

8. Розглянемо множину $C_{[a,b]}$ всіх неперервних дійсних функцій на відрізку $[a, b]$, але відстань визначимо по-іншому, а саме $d(x, y) = (\int_{\mathrm{a}}^{b} (x(t) - y(t))^2)^{\frac{1}{2}}$. Такий метричний простір позначимо $C_2[a, b]$ і будемо називати простором неперервних функцій з квадратичною метрикою[73];

9. Розглянувши множину усіх обмежених послідовностей $x = (x_1, x_2 \dots x_n, \dots)$ дійсних чисел, отримаємо простір m з метрикою $d(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|$ [73];

10. Множина впорядкованих груп з n дійсних чисел з відстанню $d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p\right)^{1/p}$, де $p -$ будь-яке фіксоване число ≥ 1. Цей простір позначимо $\mathbb{R}_p^{\mathrm{n}}$ [73].

1.3. Основні поняття топологічного простору

Означення 1.9. *Нехай X – довільна множина. Сімейство* τ *підмножини X називають топологією на X, якщо виконуються наступні умови:*

1^0. Пуста множина та X належить τ;

2^0. Об’єднання будь-якої сукупності множин з τ *міститься в* τ;

3^0. Перетин будь-якої скінченої сукупності множин з τ міститься в τ.

Множини, які належать топології τ, називають відкритими відносно топології τ або τ -відкритими. Якщо зрозуміло, про яку топологію йде мова, то її елементи називаються просто відкритим.

Множина X називається носієм топології, а пару (X,τ) – топологічним простором.

Отже, задати топологічний простір – це означає вибрати деяку множину X (перший елемент пари) і задати на ньому топологію (другий елемент пари), вказавши ті підмножини X (їх сукупність повинна задовольняти приведеним вище аксіомам), які будемо вважати відкритими в цьому просторі. Елементи множини X називаються точками, а підмножини X – множинами топологічного простору (X,τ). З першої аксіоми слідує, що кожна точка $x \in X$ належить хоча б одному елементу τ.

На одній і ті й же множині можливо задавати різні топології (різні множини називають відкритими), т.я. одна і та ж множина може бути носієм різних топологій.

Також можемо порівнювати топології , як уже раніше відмічали, на одній і ті й же множині можна визначити різні топології. Якщо $\tau_1 \supset \tau_2$, то говорять, що топологія τ_1 сильніше топології τ_2, а τ_2 – слабіше ніж τ_1. Можна також говорити, що τ_1 тонше чим τ_2, а τ_2 – грубіше чим τ_1. Якщо для двох топологій на X не одна з них не містить іншої, то топології називають непорівняльними.

В сукупності всіх топологій на довільний множині X можливо природнім образом ввести часткову упорядкованість, поклавши $\tau_2 < \tau_1$, якщо топологія τ_2 слабіше чим τ_1. Отримана часткова упорядкованість множини має найменший елемент (антидискретна топологія на X) і найбільший елемент (дискретна топологія).

Теорема 1.1. *Якщо* $\{\tau_\alpha, \alpha \in N\}$*– довільна родина топології на множині* X*, то перетин всіх множин цієї родини, тобто, множина* $\tau = \bigcap_{a \in N} \tau_\alpha$ *також утворює топологію на* X*. Ця топологія слабше будь-якої з топологій* τ_α.

Нехай X – довільна множина і S – деяка сукупність його підмножин. На множині X існують топології, які містять S. Це, наприклад, дискретна топологія. Перетин всіх топологій, які містять S, по теоремі 1.1 також будуть топологією на X. Ця топологія містить S та міститься в будь-якій іншій топології, що включає в себе S, т.я є мінімальною топологією, яка містить S. Мінімальна топологію на X, яка містить S, називають топологією, породженою сімейством S.

Означення 1.10. *Околом довільної точки* x *топологічного простору* (X, τ) *називають будь-яку відкриту множину (елемент топології* τ*), який містить* x.

Відзначимо, що інколи окіл точки x визначають як будь-яку множину, яка містить разом з x та деяку відкриту множину.

Теорема 1.2. *Множина топологічного простору відкрита тоді і тільки тоді, коли разом з кожною точкою вона містить і деякий її окіл.*

Розглядають поняття замкнутості множини точок топологічного простору.

Означення 1.11. *Множину* A *топологічного простору* (X, τ) *називають замкненою, якщо її доповнення* $CA = X \setminus A$ *– відкрито, т.я.* $CA \in \tau$.

Справджуються наступні властивості множини точок метричного простору. Якщо множина B відкрита, то її доповнення CA – замкнене, так як множина $C(CB) = B$ – відкрита. Якщо CB замкнене, то його доповнення $C(CB) = B$ – відкрите. Таким чинном, множина в топологічному просторі відкрита тоді і тільки тоді, коли його доповнення замкнене.

Теорема 1.3. *Перетин довільної сукупності і об'єднання будь-якою скінченої сукупності замкнених множин є замкненою множиною.*

Теорема 1.4. *Нехай X – довільна множина і $\lambda -$ родина підмножини X, що володіє наступними властивостями:*

1^0. $\emptyset, X \in \lambda$;

2^0. Перетин будь-якої сукупності множини з λ входить до λ;

3^0. Об'єднання будь-якої скінченої сукупності множини з λ входить до λ.

Позначимо через τ родину доповнення до все можливих множин з λ. Тоді τ – топологія на X, а $\lambda -$ замкнених множин топологічного простору (X, τ).

Означення 1. 13. *Нехай (X, τ)- топологічний простір та A – деяка його множина. Точку $x \in X$ називають граничною точкою множини A, якщо будь-який її окіл містить хоча б одну точку A, відмінну від x.*

Позначимо множину всіх граничних точок множини A через A' та назвемо її похідною множиною. Зрозуміло, що гранична точка множини може їй як належати, так і не належати.

Означення 1.14. *Точка множини, яка не є його граничною точкою, називають ізольованою. Точку $x \in X$ називають точкою дотику* *множини A, якщо будь-який окіл x містить хоча б одну точку множини A. Кожна точка дотику множини A – це або ізольована точка A, або його гранична точка.*

Теорема 1.5. *Множина топологічного простору замкнена тоді і тільки тоді, коли вона містить всі свої граничні точки.*

Теорема 1.6. *Якщо до довільної множини топологічного простору приєднати всі його граничні точки, то отримана множина буде замкненою.*

Означення 1.15. *Нехай (X,τ) та (Y,μ)- топологічні простори та $f: X \longrightarrow Y$ – відображення X в Y. Відображення f називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо для будь-якого околу υ точки y_0, де $y_0 = f(x_0)$, існує такий окіл u точки x_0, що $f(u) \subset \upsilon$. Відображення f називають неперервним, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$.*

Для метричних просторів, зокрема евклідових, наведене визначення можна виразити в термінах відстані. Очевидно, відображення f метричного простору (M_1, ρ_1) в метричний простір (M_2, ρ_2) неперервне в точці $x_0 \in M_1$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що $\rho_2\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$, якщо $\rho_1(x, x_0) < \delta$. Тому визначення неперервності відображення одного топологічного простору в інше представляє собою узагальнення класичного визначення неперервності числової функції.

Неперервне відображення топологічного простору X в числову пряму, тобто в простір $\mathbb{R}^1$, часто називають неперервною функцією на X.

Приведене вище означення неперервності відображення f топологічного простору (X,τ) в топологічний простір (Y,μ) несе локальний характер, так як неперервність відображення f на всьому просторі визначається через неперервність в кожній точці. Але поняття неперервності відображення одного топологічного простору в інший можна виразити і в термінах топології цих просторів. Наприклад, справедливі наступні критерії неперервності:

- Відображення f топологічного простору (X, τ) в топологічний простір (Y, μ) неперервне тоді і тільки тоді, коли при цьому відображенні прообразом кожної відкритої множини є відкрита множина.
- Відображення f топологічного простору (X, τ) в топологічний простір (Y, μ) неперервне тоді і тільки тоді, коли при цьому відображенні прообразом кожної замкненої множини є замкнена множина.
- Відображення $f: X \longrightarrow Y$ топологічного простору (X, τ) в топологічний простір (Y, μ)неперервне тоді і тільки тоді, коли образ замикання довільної множини A простору X міститься в замикані образу цієї множини, т. $f(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.
- Якщо відображення $f: X \longrightarrow Y$ топологічного простору (X, τ) в топологічний простір (Y, μ) неперервне і $A \subset X$, то звуження $f|_A$ відображення f на множину A є неперервним відображенням простору(A, τ_A) в простір (Y, μ).
- Якщо A і $B -$ замкнені множини топологічного простору $X, X = A \cup B$ і $f: X \longrightarrow Y$ таке відображення X в топологічний простір Y, що його звуження $f|_A$ і $f|_B$ неперервне, то відображення f непреривне.
- Якщо $f -$ неперервне відображення топологічного простору X в топологічний простір Y , і $\varphi -$ неперервне відображення Y в топологічний простір Z, то композиція $\varphi \cdot f$ є неперервним відображенням X в Z.

1.4 Приклади топологічних просторів

1. Простір Серпінського (двоточковий простір) топологічний простір з топологією $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ та $X = \{a, b\}$(Александрян Р.А)[11];

2. Числова пряма множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ є топологічним простором, якщо , наприклад назвати відкритими множинами довільні (порожні, зчислені або безкінечні) об'єднання скінчених або нескінченних інтервалів. Множина всіх скінчених інтервалів $\{(a, b|a, b \in \mathbb{R})\}$ є базою цієї топології. Це стандартна топологія на прямій. Взагалі на множині дійсних чисел можна ввести різні топології, наприклад, $\mathbb{R}_{\rightarrow}$, пряма з «топологією стрілки», де відкриті множини мають вигляд (a, ∞), або топологія Зариського, в якій будь-яка замкнена множина – це скінченна множина точок (Болтянский В. Г) [24];

3. Евклідові простори $\mathbb{R}^n$ є топологічними просторами. За базу їх стандартної топології можливо зазначити відкриті кулі або ж відкриті куби;

4. Будь-який метричний простір є топологічним простором, базу топології якого складають відкриті кулі. (приклад: функціональний аналіз – безкінечно вимірні простори функцій) (Александрян Р.А)[11];

5. Розглянемо множину $C(X, Y)$ неперервних відображень топологічного простору X в топологічний простір Y . Вона є топологічним простором відносно наступної топології, яка називається компактно-відкритою. Задамо передбазу множинам $C(K, U)$, яка складається з відображень, при яких образ компакту K в X лежить у відкритій множині з U в Y(Александрян Р.А.)[11];

6. Довільну множину X можна зробити топологічним простором, якщо назвати всі відкриті його підмножини, така

топологія зветься – дискретною, у ній будь-які множини – відкриті. Інший граничний випадок – відкрита мінімально можлива кількість підмножин X , а саме, ввести тривіальну топологію – в ній відкритими є тільки пуста множина і самий простір X [24].

РОЗДІЛ 2
НЕЕВКЛІДОВІ ГЕОМЕТРІЇ

2.1 Геометрія Лобачевського

Геометрія Лобачевського, одна з неевклідових геометрій, заснована на тих же посиланнях, що і звичайна – евклідова геометрія, за винятком аксіоми паралельності.

Означення 2.1. (Аксіома Евкліда).

Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить не більше ніж одна пряма, яка лежить з даної прямої в одній площині і не перетинає її. (на ці прямі говорять, паралельні)

Означення 2.2. (Аксіома Лобачевського)

Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить принаймні дві прямі, які лежать з даної прямої в одній площині і не перетинаються в ній.

Початок Геометрії Лобачевського було покладеноМ.І.Лобачевським, який вперше повідомив її в 1826 р.Дещо пізніше цю теорію запропонував *Я.* Бойяї; тому «Лобачевську геометрія» іноді називають геометрією Лобачевького-Бойяі.

Історичне значення цієї геометрії полягає в тому, що її побудовою Лобачевський показав можливість існування геометрії, відмінної від евклідової, що саме і знаменувало епоху в розвитку геометрії та математики взагалі (Лобачевский М.І)[60].

Сутність Геометрії Лобачевського можна проілюструвати наступним чинном. Вся площина – круг скінченного радіуса, пряма – хорда круга, а точка – точка відкритого круга. (рис. 2.1)

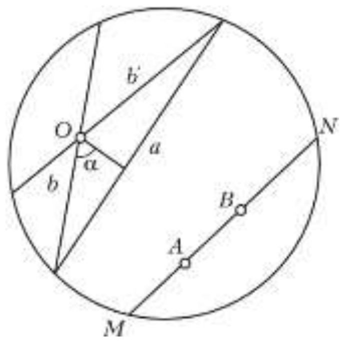

Рис.2.1 Внутрішність кола, за ГеометрієюЛобачевського – площина

Виявляється, що будь-який геометричний факт, описаний такою мовою, являє теорему або аксіому Лобачевської геометрії. Евклідова аксіома про паралельність, тут не виконується, тобто через точку O, яка не лежить на даній хорді a, проходить безліч хорд, які її не перетинають.

Геометрія Лобачевського вивчає властивості площини Лобачевського в планіметрії та просторі Лобачевського в стереометрії. Площина Лобачевського – це площина (множина точок), в якій визначені прямі лінії (рух фігур, відстань, кути і т д), які підпорядковуються всім аксіомам евклідової геометрії, за винятком аксіоми про паралельність, яку замінюють сформульованою вище аксіомою Лобачевського.

М.І. Лобачевський будував свою геометрію, спираючись на основні геометричні поняття і теореми дово геометричним методом, подібно до того як це робиться в геометрії Евкліда (Каган В. Ф.)[41].

За основу була взята теорія паралельних ліній, тобто з цього і починається різниця між геометрією Евкліда та геометрією Лобачевського.

Всі теореми, які не залежать від аксіом про паралельність, загальні для двох геометрій, утворюють так звану абсолютну геометрію, до якої відносять, наприклад, теореми про рівність трикутників. Слідом за теорією паралельних будувались і наступні розділи, які містили в собі тригонометрію і початки аналітичної та диференціальної геометрії.

Деякі факти геометрії Лобачевського , які мають відмінність від геометрії Евкліда[41,60,61,85]:

1. В геометрії Лобачевського не існує подібних, але нерівних трикутників; трикутники рівні, якщо їх кути рівні. Тому існує абсолютна одиниця довжини, тобто відрізок, виокремлений по своїм властивостям, подібний як прямий кут до свої властивостей. Такий відрізок може слугувати, наприклад, сторонами правильного трикутника із заданною сумою кутів;
2. Сума кутів будь-якого трикутника менше π і може бути скільки завгодно наближатись до 0;
3. Через точку 0 , яка не лежить на даній прямій a , проходить безкінечно багато прямих, які не перетинаються (a) і не знаходяться з нею в одній площині; серед них є дві крайні b і b', які називаються паралельними прямими до прямой a;
4. Якщо прямі мають спільний перпендикуляр, то вони безкінечно розходяться в будь-які сторони від нього. До будь-якої з них можливо поставити перпендикуляри, які не доторкатимуться інншої прямої;
5. Лінія рівних відстаней від прямої не є прямою, а особливою кривою, яка називається еквідистантою або гіперциклом;
6. Границя безкінечно зростаючих околів є не прямою, а особливою кривою, яка називається граничним околом або орициклом;
7. Границя сфер безкінечно збільшую чого радіуса є не площиною, а особливою поверхність – граничною сферою, або

орисферою ; на ній є місце евклідовій геометрії, що дало поштовх М.І.Лобачевському для виведення тригонометричних формул;

8. Довжина окружності не пропорційна радіусу, а збільшується швидше , чим радіус;

9. Чим менша область в просторі або на площині Лобачевського, тим менше метричне відношення в цій області, яке відрізняється від відношення евклідової геометрії. Збільшення області формально рівносильне збільшенню одиниці довжини , тому при безграничному збільшенні одиниці довжини, формули геометрії Лобачевського переходять в формули евклідової геометрії. Евклідова геометрія в цьому випадку «граничний» випадок геометрії Лобачевського.

2.2 Проективна геометрія

Проективна геометрія—розділ геометрії, який вивчає проективний простір та проєктивні площини, інакшими словами, говорять «… розділ, де вивчають властивості фігур, що не змінюються при проективних перетвореннях, тобто перетвореннях, при яких прямі переходять у прямі» (Четверухін М. Ф.) [83]. Проективна геометріяреалізується в евклідовому просторі, доповненому нескінченно віддаленими елементами (Четверухін М. Ф.) [83].

Головна особливість проективної геометрії – принцип подвійності.

Основним інваріантом проективних перетворень є подвійне відношення. Гармонічне розміщення точок на прямій, зберігається, при проективному перетворенні. Тому кожне проективне перетворення площини зводиться до перспективи її на другу площину і до суміщення цих площин.

Паралельність і перпендикулярність прямих, рівність відрізків і кутів не є інваріантами проективних перетворень (Конотоп К. А.) [49].

Проетивна геометрія надає прості та влучні рішення для багатьох завдань, хоча ускладнює їх паралельними прямими, тобто проективна геометрія доповнює Евклідову геометрію. Проетивна геометрія опирається на важливі теореми, як:

- теорема Бріаншона;
- Дезарга теорема;
- Паскаля теорема;
- Теорема Паппа.[31].

Незалежна аксіоматизація, доповнення Евклідової геометрії та структура над полем – це три головні підходи проективної геометрії [82].

Існує кілька систем аксіом для задання проективного простору як сукупності точок, прямих і площин, зв'язаних відношеннями належності та порядку.

З виникненням і розвитком графів теорії та комбінаторного аналізу значного розвитку набула теорія скінченних геометрій; зокрема, триває вивчення властивостей скінченних проективних площин, тобто площин, що складаються зі скінченної кількості точок і прямих(Конотоп К. А.)[44,49]

Основоположниками сучасної класичної проективної геометрії є Ж. Дезарга, Б. Паскаля і Ж. Понселе. Значний внесок у її розвиток внесли Е. Картан, А. Келі, Ф. Клейн, А. Ф. Мебіус, М. Шаль, К. О. Андрєєв та ін.[44,49].

2.3. Аксіоматика Гільберта

Аксіоматика Гільберта – це аксіоматика евклідової геометрії. Аксіоматика Гільберта більш розширена, аніж система аксіом Евкліда.

Основними поняттями в система аксіом Гільберта виступають об’єкти: точка,прямі та площини та відношення між ними (лежати між (точки); належати (точка і пряма, точка і площина, пряма і площина); конгруентність (геометрична рівність)).

Аксіоматика Гільберта складається з 20 аксіом, які в свою чергу розбиті на 5 груп.

- Аксіоми належності [76] встановлюють належність між введенними вище поняттями – точки, прямою і площини.
- Аксіоми групи порядку визначаються поняттям «між» і дають можливість на основі цього поняття встановити порядок точок на прямій, в площині і в просторі.
- Аксіоми групи конгруентності визначають поняття конгруентності і разом з цим поняття руху.
- Аксіома паралельності витікає з теореми Евкліда, по якій зовнішній кут трикутника завжди більше внутрішнього кута, не суміжного з ним. Аксіома палельності говорить:

***(Аксіома Евкліда)**. Нехай **a** – довільна пряма та точка **A** цієї прямої тоді в площині, визначенною точкою **A** та прямою **a**, можна провести не більше однієї прямої, проходячої через **A** та не перетинаючи **a**.*

- Аксіоми неперервності.

Всі поняття евклідової геометрії визначаються за допомогою основних понять аксіоматики Гільберта, а всі інші припущення про властивості геометричних фігур, які не містяться в системі аксіом Гільберта, повинні бути доведені логічним висновком з цих аксіом [29].

Гільбертова система аксіом має властивість повноти; вона несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика дійсних чисел. Якщо в Рімановій системі аксіом замінити аксіому паралельності запереченням, то отримаємо нову систему аксіом, яка теж несуперечлива (система аксіом геометрії Лобачевського), таким чинном, аксіома паралельності не залежить від інших аксіом Гільбертової системи аксіом.

Можна встановити незалежність деяких інших аксіом Г. с. а. від інших аксіом цієї системи [76].

Аксіоматика Гільберта є першою системою, яка обгунтувала евклідову геометрію.

2.4. Геометрія Рімана.

Проаналізувавши літературу [8,9,12,23,33,48,69,84], можемо сказати що, геометрія Рімана (еліптична геометрія) – одна з неевклідових геометрій постійної кривизни. Якщо геометрія Евкліда утворюється в просторі з нульовою гаусовою кривизною, Лобачевського – з від'ємною, то геометрія Рімана утворюється в просторі з постійною додатною кривизною [34].

Вчений, Ефимов Н.В, зазначив «…В геометрії Рімана пряма визначається двома точками, площина – трьома, дві площини перетинаються по прямій і т д, але в геометрії Рімана немає паралельних прямих» [34]. В геометрії Рімана, як і в сферичній геометрії, справедливе твердження:

Твердження 2.3. *Сума кутів трикутника більше двох прямих кутів, має місце формула* $\sum = \pi + \frac{S}{R^2}$*, де* $\sum$*–сума кутів трикутника,* $R -$ *радіус сфери, на якій утворена геометрія* [47].

Двовимірна геометрія Рімана схожа на сферичну геометрію, але має відмінність в тому, що будь-які дві «прямі» мають не дві, як в сферичній, а тільки одну точку перетину. При узагальнені протилежних точок сфери отримаємо проективну площину, геометрія якої задовольняє аксіомам геометрії Рімана [52].

Для більш детального розуміння, розглянемо як подається ототожнення протилежних точок сфери в геометрії Рімана. В своїх працях вчені [12] та [22] говорячи про ототожнення протилежних точок, розглядають сферу Sз центром в точці O в трьохвимірному просторі $E.$ Говорячи, що «…кожна точка $A \in S$ разом із центром сфери O визначає деяку пряму $l \subset E$, тобто в деяку точку A, проективної площини П. Співставимо $A \to A_*$, визначаючи відображення $S \to$ П, великі кола на S переходять в прямі на проективній площині П, при цьому в одну точку $A_* \in$ П переходять рівно дві точки сфери : разом з точкою $A \in S$ і діаметрально протилежна їй точка $A' \in S$.

Евклідовий рух простору E, який переводить сферу S в себе, задають деякими окремими перетвореннями проективної площини П, які є рухами геометрії Рімана. В геометрії Ріамана будь-які прямі перетинаються, оскільки це слугує закономірністю для проективної геометрії, і таким чинном, в ній немає паралельних прямих….»[12, 22]. З вище зазначеного бачимо, що евклідова геометрія та геометрія Лобачевського,різниться від геометрії Рімана лише тим , що в ній немає природнього поняття «точка C лежить між точками A і B».

Тому доцільно говорити «…на пряму проективної площини П відображається велике коло на сфері S, причому дві діаметрально протилежні точки сфери A і A' переходять в точку $A_* \in \Pi$. Аналогічно, точки B і B'переходять в точку $B_* \in \Pi$, і точки C і C'переходять в точку $C_* \in \Pi$.Таким чинном, з рівними основами можна вважати, що точка C_* лежить між A_* та B_* і в той час вона не лежить між ними» [12, 22].

РОЗДІЛ 3
ОСНОВИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1 Основні поняття метричної геометрії

З другої половини XIX сторіччя розпочинається стрімкий розвиток неевклідових геометрій, спричинений побудовою Миколою Івановичем Лобачевським (1792–1856) нової геометрії, яка базувалась на запереченні п'ятого постулату геометрії Евкліда. У 1906 році французький математик Моріс Рене Фреше (1878–1973) увів у розгляд поняття метричного простору, що базувалось на понятті відстані між двома точками (метрики простору).З цього часу розпочинається розвиток метричної геометрії – геометричних структур та співвідношень між ними, що базуються лише на понятті відстані між точками метричного простору. Таким чином, метрична геометрія у значній мірі носить аналітичний характер, і у меншій мірі пов'язана з інтуїтивним сприйняттям таких основних геометричних понять як точка, пряма, площина, кут і т. п. З іншого боку, метрична геометрія розвивається як узагальнення геометрії Евкліда, і тому основні факти геометрії Евкліда можна отримати як частинні випадки відповідних фактів метричної геометрії. Це дає можливість застосувати метричний підхід до вивчення основних понять геометрії Евкліда, відійшовши від їх інтуїтивного сприйняття.У свою чергу, такий підхід дає можливість адекватно сприйняти особливості неевклідових геометрій, не вступаючи у логічні протиріччя з геометрією Евкліда та інтуїтивним розумінням її основних понять. Слід відзначити достатньо прості аналітичні перетворення при встановленні елементарних фактів метричної геометрії, оскільки вони базуються на зрозумілих аксіомах відстані між точками метричного простору. За висловленням авторів курсу метричної геометрії «…метрична геометрія залишається, можливо, одним із самих «елементарних» математичних методів» [26].

Інше трактування поняття було приведено [1] **«…метри́чна геоме́трія** – це галузь науки , що вивчає множину точок тільки на основі заданих значень відстані між членами парами».

У зв’язку з відкриттям 28.02.1826 р. Миколою Івановичем Лобачевським (01.12.1792 – 24.02.1856) не евклідової геометрії (у цей день на зборах фізико-математичного факультету Казанського університету ним був представлений рукопис роботи «Короткий виклад начал геометрії») особливо гостро постало питання обґрунтування основ геометрії. Цими питаннями займались такі визначні математики як Карл Фрідріх Гаусс (30.04.1777 – 23.02.1855), Георг Фрідріх БернхардРіман (17.09.1826 – 30.07.1866), Герман Людвіг ФердінандГельмгольц (31.08.1821 – 08.09.1894), Давид Гільберт (23.01.1862 -14.02.1943), Фелікс ХрістіанКлейн (25.04.1849 – 22.06.1925), СофусМаріус Лі (17.12.1842 – 18.02.1899), Джузеппе Пеано (27.08.1858 – 20.04.1932), Герман Клаус Хуго Вейль (09.11.1885 – 08.12.1955) та інші.

Основоположниками метричної геометрії вважають англійського математика Артура Келі (1821–1895) та австрійсько-американського математика Карла Менгера (1903–1985). Значний вклад у розвиток метричної геометрії зробив російський математик О. Д. Александров (1912–1999). Останнім часом метрична геометрія знайшла свої застосування у найрізноманітніших сучасних дослідженнях з біології, астрономії, ядерної фізики, комп’ютерних наук (комбінаторна оптимізація), архітектури та інженерії. Зокрема, геометрія Фінслера (Пауль Фінслер (1894–1970) – швейцарський математик та астроном), яка є природним узагальненням метричної геометрії, застосовується для опису фізичних взаємодій та наслідків з них у мікросвіті. З основними положеннями метричної геометрії можна ознайомитись як по підручнику [26], так і по монографіях відомих математиків Герберта Буземана [25] та Марселя Берже [22].

До математиків, які внесли значний вклад у розвиток метричної геометрії слід віднести також Веніаміна Федоровича Кагана (1869–1953), який значну частину своєї наукової діяльності провів на фізико-математичному факультеті Одеського університету.У 1902 році В. Ф. Каган, обґрунтовуючи основи геометрії Евкліда, побудував геометричну систему, у якій незалежно від М. Р. Фреше використовував поняття точки, що не означується, та на основі якого означаються інші геометричні образи, що розглядаються як сукупності точок.Він увів поняття «відстані» між точками, що не змінюється при русі у просторі. Це дозволяє побудувати геометрію Евкліда не спираючись на інтуїтивне сприйняття її основних понять [40]. В. Ф. Каган побудував вичерпну теорію прямої лінії, встановивши ізоморфізм множини дійсних чисел і точок прямої [42]. При побудові теорії В. Ф. Каган використовував поняття «прямолінійної розміщеності» точок [44]. Це поняття буде головним при викладенні основного матеріалу даної роботи.

У недавніх роботах з метричної геометрії активно досліджувались питання прямолінійного та плоского розміщення точок метричного простору [53-57]. Слід зазначити, що ці дослідження використовують специфічне означення кута, утвореного трьома точками метричного простору, та кутової характеристики.

3.2 Прямолінійне розміщення точок метричного простору

Відомий математик, В.Ф.Каган , займався вивченням прямолінійності в метричних просторах [43]. Каган В.Ф., покладаючись на систему постулатів, розбитих на чотири групи, детально описав пряму лінію. Ця система постулатів, фактично, встановлює ізоморфізм між точками прямої лінії та множиною дійсних чисел. На множині дійсних чисел, п’ять перших постулатів, - постулати розміщення. Вони мають на меті, встановлення упорядкованості точок прямої лінії (їх прямолінійне розміщення). Каган В.Ф. ставив за мету , розробити обчислювальну методику для визначення властивостей прямолінійного розміщення точок довільного метричного простору, з використання лише відстані між точками простору, але при спробі перевірити цю властивість на практиці, необхідно ввести поняття кута між трьома точками простору.

Особливістю метричної геометрії є те, що на відміну від класичної геометрії Евкліда у розпорядженні дослідника є лише один інструмент – віддаль між точками множини. Це поняття є основним у теорії метричних просторів. На даний час існує багато його видів і означень. У нашій роботі, ми будемо використовувати класичне означення відстані між двома точками множини, а саме:

Означення 3.1. *Якщо кожній парі точок* x *і* y *множини* X *за певним правилом* ρ *поставлено у відповідність єдине дійсне число* $\rho(x, y)$*, що задовольняє наступним трьом умовам:*

а)$\rho(x, y) \geq 0$*, причому* $\rho(x, y) = 0$ *тоді і лише тоді, коли точки*x *і* y *співпадають (невід'ємність відстані);*

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$*(комутативність,або симетричність відстані);*

в) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *для будь-якої точки* z *множини* X *(нерівність трикутника),*

то множину X *називають метричним простором, правило* ρ *називають метрикою простору* X*, а число* $\rho(x, y)$*– відстанню між точками* x *і* y *у метричному просторі* X*. Метричний простір* X *з метрикою* ρ *позначають* (X, ρ)[45].

У роботі [10] введено поняття такого кута, як упорядкованої трійки точок метричного простору.

Означення 3.2. *Нехай* a, b, c *– три різні точки множини* X. *Упорядковану трійку* (a, b, c) *цих точок будимо називати кутом з* *вершиною у точці b, і позначати $\angle(a,b,c)$. Пари точок $(a,b,)i(b,c)$, при цьому, будемо називати сторонами цього кута.*

З метою порівняння кутів між собою введено поняття числової характеристики кута, яке основане на класичній теоремі косинусів. На можливість такого підходу вказав О.Д. Александров [10].

Означення 3.3. *Нехай a,b,c - три різні точки простору (X,ρ). Характеристикою кута $\angle(a,b,c)$ (або кутовою характеристикою) будемо називати дійсне число $\varphi(a,b,c)$, що знаходиться за формулою*

$$\varphi(a,b,c) = \frac{\rho^2(a,b)+\rho^2(b,c)-\rho^2(a,c)}{2\rho(a,b)(b,c)}. \tag{3.1}$$

З формули (3.1) та властивостей метрики ρ легко отримуються наступні властивості характеристики кута: $\varphi(a,b,c) = \varphi(c,b,a)$, і $-1 \leq \varphi(a,b,c) \leq 1$.

Такі означення кута та його характеристики дають можливість, по аналогії з геометрією Евкліда, ввести у довільному метричному просторі поняття прямолінійного розміщення точок простору [40].

Означення 3.4. *Будемо казати, що точки a,b,c простору (X,ρ,φ) прямолінійно розміщені, якщо $\varphi(a,b,c) = \pm 1$.*

3.3 Плоске розміщення точок метричного простору

Наведені вище означення дають можливість ввести поняття плоского розміщення точок метричного простору.

Означення 3.4. *Будемо казати, що точки a,b,c,d простору (X,ρ,φ) плоско розміщені, якщо виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки b).

Для множини точок природно ввести наступне означення плоского розміщення її точок.

Означення 3.5. *Будемо казати, що множина точок простору* (X, ρ, φ) *плоско розміщена, якщо будь-які її чотири точки плоско розміщені.*

Із рівності (3.2) можна отримати еквівалентну їй рівність, яка теж дає критерій плоского розміщення чотирьох точок простору (X, ρ, φ)[59].

Теорема 3.1. *Для того, щоб точки* a, b, c, d *простору*(X, ρ, φ) *були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a, b, c) = \varphi(a, b, d)\varphi(c, b, d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a, b, d))(1-\varphi^2(c, b, d))} \quad (3.3)$$

хоча б для однієї з цих точок (наприклад, для точки b*).*

Рівність (3.3) для довільного метричного простору є аналогом формули косинуса суми та різниці двох кутів у геометрії Евкліда.

Говорячи за аналог формули косинуса суми та різниці двох кутів можемо і звернутися до аналога формули Юнгіуса про об’єм тетраедра. Загальновідомою умовою побудови трикутника за трьома відрізками є : довжина кожного з трьох відрізків менша від суми довжин двох інших (інакше, нерівність трикутника), то з цих відрізків можна побудувати трикутник, і навпаки, довжина кожної сторони трикутника менша від суми довжин інших сторін трикутника. Іншим аналогом такої умови може бути умова існування відмінної від нуля площі трикутника, обчисленої за довжинами трьох його сторін (площу можна обчислити за формулою Герона, в ході роботи з цією формулою буде видно, що необхідно і достатньо, щоб кожна з його сторін була менша за суму двох інших). Підійдемо до тетраедра (трикутної піраміди) з іншою умовою, де довжини ребер авторам невідомі, а умова існування відмінна від нуля об’єму тетраедра, ребрами якого є шість заданих відрізків. Формула Юнгіуса легко отримується при використані змішаного векторного добутку[72] , але він не міг використовувати це поняття при виведенні формули. Більш за все, було використано класичну формулу об’єму тетраедра. В статті [58] було детально описано отримання формули об’єм тетраедра лише за теоремою Піфагора та теореми косинусів, та описано роботу програмного засобу «Калькулятор», за допомогою якого можна побудувати тетраедр за його ребрами та обчислити його об’єм (програмний засіб: http://ksuonline.kspu.edu/mod/page/view.php?id=2645

РОЗДІЛ 4
ЕЛЕМЕНТИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

4.1 Формування понять точки, відстані між точками та прямолінійності їх розміщення у шкільному курсі математики

Програма шкільного курсу математики за останні півстоліття зазнала значних змін, обумовлених широким застосуванням новітніх математичних методів досліджень. Так, у курсі геометрії значна частина матеріалу вивчається із застосуванням векторів та граничного переходу,у курсі алгебри і початків аналізувивчаються елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики, похідна функції, невизначений та визначений інтеграл.

Як правило, вперше майбутні вчителі математики знайомляться з метричними просторами у курсі математичного аналізу, під час вивченняфункцій декількох змінних. При введенні поняття n–вимірного евклідового простору дається узагальнене поняття відстані між двома точками цього простору. Воно узагальнює поняття відстані між двома точками на числовій осі, відстані між двома точками на координатній площині, та відстані між двома точками трьох вимірного координатного простору, з якими студенти знайомі зі шкільного курсу математики. Загальне означення метричного простору, та детальне вивчення конкретних метричних просторів пропонується у курсі функціонального аналізу. Наведемо основні означення, що стосуються метричних просторів.

Означення 4.1. *Метричним простором називається сукупність непорожньої множини X елементів якої завгодно природи й однозначної дійсної невід'ємної функції $\rho(x; y)$означеної для будь-яких елементів x і y з X і яка задовольняє такі умови:*

1) $\rho(x;y) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x = y$*,*

2) $\rho(x;y) = \rho(y;x)$*(аксіома симетрії),*

3) для будь-яких трьох елементів x, y *і* z *виконується нерівність*

$\rho(x;y) \leq \rho(x;z) + \rho(z;y)$*(аксіома трикутника)*

(ись, наприклад, [32]).

При цьому елементи множини X називають точками метричного простору, функцію ρ – метрикою простору X , а числове значення функції $\rho(x;y)$ – відстанню між елементами (точками) x і y. Метричний простір X з метрикою ρпозначають $(X;\rho)$.Умови 1), 2) і 3) Означення 4.1 ще називають аксіомами відстані.

Зрозуміло, що утакому вигляді, як це наведено у Означенні 4.1, знайомити учнів з поняттям метрики і метричного простору недоцільно, оскільки при цьому використовується поняття функції двох змінних, а якщо точніше, то функціоналу, оскільки точками простору X можуть бути не лише числа.

Звернемо увагу на те, що у Означенні 4.1 елементи множини X можуть мати будь-яку природу. Евклід описував точку наступним чином: «Точка є те, що не має частин» [70], у Герона – «точка те, що не має величини (протяжності)» [70]. Це узгоджується з описом точки у шкільнихпідручниках: «Точка найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини» [68]; «Точка не має ані довжини, ані ширини, її форму ми не можемо визначити» [14]. Інколи точку описують за допомогою графічного її представлення: «Якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем, то залишиться слід, який дає уявлення про точку» [28]; «Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку – добре загостреним шматком крейди»[39], або простіше: «Найпростіша геометрична фігура - точка» [21].

На наш погляд, поняття точки можна було б описати більш детальніше, вказавши, що точкою можна вважати будь-який об’єкт у тих випадках, коли не використовуються його структура, форма, властивості і т.п. Наприклад, у випадку коли потрібно порахувати кількість будівель на певній території та встановити відстані між ними, не враховуючи при цьому розміри, форму, кількість поверхів та приміщень цих будівель, хоча кожна з будівель має ці характеристики і вони можуть використовуватись у подальшому. При знайомстві з поняттям множини слід наголосити, що це сукупність об’єктів (елементів) об’єднаних між собою за певною ознакою: множина *учнів одного класу*, множина *парних чисел* і т. п. Усі елементи (точки) множини рівноправні між собою, однак при операціях з ними необхідно перевіряти точки на виконання ознаки, за якою вони належать до множини, а також можна використовувати цю ознаку при операціях з точками множини. Таке поняття точки дещо ширше від поняття точки у геометрії Евкліда, однак воно точніше відображає сучасний погляд на точку, як елемент множини. Запропонований опис точки повністю узгоджується з Означенням 4.1, і готує учнів до узагальненого сприйняття понять точки та відстані між точками у конкретних метричних просторах.

Перше знайомство з поняттям відстані між двома точками на рівні означення відбувається у сьомому класі при знайомстві з основними геометричними поняттями: «Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB. Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю» [68]; «Відстань між двома точками – це довжина відрізка з кінцями в цих точках» [14]; «Довжину відрізка AB називають також відстанню між точками A і B» [28]. На цьому етапі вивчення математики, на наш погляд, ще рано говорити про інші означення відстані між точками, хоча можна звернути увагу учнів на те, що при русі по місту найменша відстань, яку вони повинні подолати між двома об'єктами, не завжди вимірюється довжиною відрізка що з'єднує ці об'єкти, а може її перевищувати.Більше того, таких шляхів (геодезичних ліній) може бути декілька. Це може стати першим прикладом неоднозначності (відносності) поняття відстані між двома точками, крім того, це допоможе підготувати учнів до сприйняття у подальшому нерівності трикутника (умова 3) Означення 4.1). З цією нерівністю учні знайомляться теж у 7 класі: «Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін…» [14, 21,28,39,68].

У зв'язку з нерівністю трикутника, як правило, робиться висновок про характеристичну властивість трьох точок, що належать одній прямій, та вводиться поняття «точка B міститься між точками A і C», що є ознакою «прямолінійного розміщення» [44] точок A, B, C: «якщо для трьох точок A, B і C виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB» [68]; «Якщо для трьох точок A, B, C виконується рівність $AB + BC = AC$, то ці точки лежать на одній прямій і точка B міститься між точками A і C» [14]; «…якщо точка C лежить між точками A і B…, то правильні такі співвідношення:$AB = BC + CA$, $BC < CA + AB$,$CA < AB + BC$»[21]. Ці факти повністю узгоджуються з аксіомами розміщення, запропонованими В. Ф. Каганом при побудові теорії прямої лінії [42].

Цілеспрямоване і більш детальне знайомство учнів з елементами метричної геометрії слід розпочати, на наш погляд, у дев'ятому класі. У курсі геометрії дев'ятого класу вивчається такий базовий для елементів метричної геометрії матеріал, як елементи тригонометрії, теорема косинусів, теорема синусів, нерівність трикутника, розв'язування трикутників, декартові координати на площині, скалярний добуток векторів.Крім того, паралельне вивчення у курсі алгебри властивостей функцій дає можливість розпочати вивчення конкретних метричних просторів, наприклад, простору лінійних (або квадратичних) функцій, означених на відрізку. Досвідчений вчитель, у відповідності до наявного часу на вивчення математики, легко зможе поділити окремі факти з метричної геометрії на ті, що можна вивчати у класі, і на ті, що слід вивчати у позаурочний час.

Матеріал з метричної геометрії може значно збагатити палітру геометричних та алгебраїчних задач, що пропонуються учням для самостійного опрацювання. Більше того, учні, користуючись відомостями з геометрії Евкліда, самі можуть формулювати та перевіряти достовірність аналогічних фактів у інших метричних просторах, будувати в них фігури, що є аналогами відповідних фігур у геометрії Евкліда та встановлювати їхні властивості. Цей процес можна порівняти з конструктором, у якому з окремих частин можна зібрати цілий об'єкт. Якнайкраще це характеризують слова відомого угорського математика, одного з перших творців неевклідової геометрії, ЯношаБольяі (1802-1860): «Я створив ний новий світ з нічого!»

Тепер перейдемо до фактичного матеріалу, який пропонується для вивчення. Спочатку сформулюємо дещо спрощене,але більш об'ємне,означення метричного простору та відстані між його точками. Це означення використовує поняття множини та її елементів, щосформовані у восьмому класі [69].

Означення 4.2. *Непорожню множину X елементів якої завгодно природи будемо називати метричним простором, якщо кожній парі* $(x; y)$*різних елементів цієї множини за певним правилом* ρ *поставлене у відповідність єдине додатне число* $\rho(x; y)$*, що називається відстанню між елементами* x *і* y*, і яке задовольняє умовам:*

1) для будь-яких двох різних елементів x і yвідстань між елементами x і y дорівнює відстані між елементами y і x, тобто виконується рівність $\rho(x;y) = \rho(y;x)$ (умова симетрії),

2) для будь-яких трьох різних елементів x, y, z відстань між елементами x і y не більша ніж сума відстаней між елементамиx і z та між елементами z і y, тобто виконується нерівність

$\rho(x;y) \leq \rho(x;z) + \rho(z;y)$*(нерівність трикутника).*

При виконанні умов Означення 4.2 елементи множини будемо називати точками метричного простору, правило ρ – метрикою простору. Метричний простірX з метрикою ρ будемо позначати (X, ρ).

Слід звернути увагу на те, що це означення нагадує означення функції, яке подається у курсі алгебри у дев’ятому класі [65]. Однак, є декілька суттєвих відмінностей: елементами множини можуть бути не лише числа, число ставиться у відповідність двом елементам множини і це число повинно бути лише додатнім, потрібно перевіряти виконання умови симетрії та нерівність трикутника для усіх пар елементів множини.

Означення 4.2 метричного простору,у такій формі як воно записане, слід подавати у старших класах, а у дев’ятому класі його доцільно подати (як і означення функції) у описовій формі, використовуючи достатню кількість прикладів. При цьому, можна розділити формулювання умов 1) і 2) означення на словесну і аналітичну форми.

Вкажемо декілька найпростіших прикладів метричних просторів, доступних для легкого засвоєння учнями.

Приклад 1. Найпростішим прикладом метричного простору є множина усіх точок числової осі. Такий простір називають одновимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^1. Як відомо [67], відстань між двома точками x і y числової осі знаходять як абсолютну величину (модуль) різниці відповідних чисел x іy:$\rho(x;y) = |x-y|$.

Це значення завжди додатне для різних значень x і y, що слідує із означення модуля числа. Умова симетрії слідує з рівностей:

$$\rho(x;y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = \rho(y;x).$$

Виконання нерівності трикутника перевіряти завжди найважче, оскільки це пов’язано з доведенням нерівностей – достатньо складною задачею. Для цього випадку нерівність трикутника має вигляд:

$$\rho(x;y) = |x-y| \leq |x-z| + |z-y| = \rho(x;z) + \rho(z;y). \qquad (4.1)$$

При її доведенні використовується нерівність для модуля суми двох чисел [23]:

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \qquad (4.2)$$

Якщо у нерівності (4.2) покласти: $a = x - z,$ b$= z - y$, то отримуємо нерівність (4.1).

У випадку, коли нерівність (2) не розглядалась, то її легко довести користуючись властивостями нерівностей і означенням модуля числа. Дійсно, якщо додати почленно дві очевидні подвійні нерівності: $-|a| \leq a \leq |a|$ і $-|b| \leq b \leq |b|$, то в результаті отримаємо подвійну нерівність: $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$, або подвійну нерівність: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$, яка рівносильна нерівності (4.2).

Оскільки виконані усі умови Означення 4.2, то розглянутий простір R^1 є метричним.

Таке доведення нерівності (4.1) може бути проведене у дев'ятому класі. Однак, користуючись числовою прямою, можна спробувати довести її навіть у сьомому класі. Для цього доведеться розглянути шість різних можливих випадків розміщення точок $x,\ y,\ z$на числовій осі.Велику кількість аналітичних перетворень можна компенсувати графічним зображенням точок на числовій осі, це полегшить розуміння таких перетворень.

1. Нехай, наприклад, точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $x < z < y$ (рис.4.1).

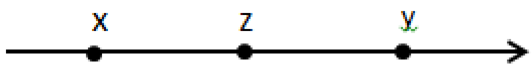

Рис.4.1.

Тоді матимемо:

$$\rho(x; y) = |x - y| = -(x - y);\ \rho(x; z) = |x - z| = -(x - z);$$

$$\rho(z; y) = |z - y| = -(z - y).$$

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$$\rho(x; z) + \rho(z; y) = -(x - z) - (z - y) = -x + z - z + y =$$

$$= -(x - y) = \rho(x; y).$$

2. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $x < y < z$(рис.4.2).

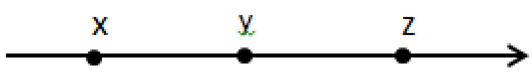

Рис. 4.2.

Тоді матимемо:

$$\rho(x; y) = |x - y| = -(x - y);\ \rho(x; z) = |x - z| = -(x - z);$$

$$\rho(z; y) = |z - y| = z - y.$$

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$$\rho(x; z) + \rho(z; y) = -(x - z) + (z - y) = -x + z + z - y =$$

$$= -x + y + 2z - 2y = -(x - y) + 2(z - y) = \rho(x; y) + 2(z - y) > \rho(x; y).$$

3. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $y < x < z$ (рис.4.3).

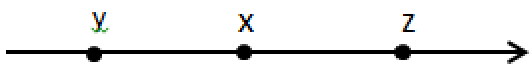

Рис.4.3.

Тоді матимемо:

$$\rho(x; y) = |x - y| = x - y; \rho(x; z) = |x - z| = -(x - z);$$

$$\rho(z; y) = |z - y| = z - y.$$

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$$\rho(x; z) + \rho(z; y) = -(x - z) + (z - y) = -x + z + z - y =$$

$$= x - y - 2x + 2z = (x - y) + 2(z - x) = \rho(x; y) + 2(z - x) > \rho(x; y).$$

4. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $y < z < x$(рис.4.4).

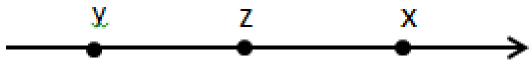

Рис.4.4.

Тоді матимемо:

$$\rho(x; y) = |x - y| = x - y; \rho(x; z) = |x - z| = x - z;$$

$$\rho(z;y) = |z - y| = z - y.$$

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$$\rho(x;z) + \rho(z;y) = (x - z) + (z - y) = x - z + z - y = x - y = \rho(x;y).$$

5. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $z < x < y$(рис.4.5).

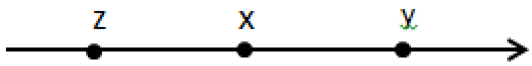

Рис.4.5.

Тоді матимемо:

$$\rho(x;y) = |x - y| = -(x - y); \rho(x;z) = |x - z| = x - z;$$

$$\rho(z;y) = |z - y| = -(z - y).$$

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$$\rho(x;z) + \rho(z;y) = (x - z) - (z - y) = x - z - z + y =$$

$$= -x + y + 2x - 2z = -(x - y) + 2(x - z) = \rho(x;y) + 2(x - z) > \rho(x;y).$$

6. Нехай точки x, y, z розміщені на числовій прямій у наступному порядку: $z < y < x$(рис.4.6).

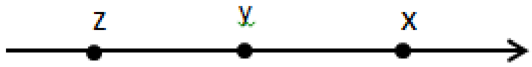

Рис.4.6.

Тоді матимемо:

$$\rho(x;y) = |x - y| = x - y; \rho(x;z) = |x - z| = x - z;$$

$$\rho(z;y) = |z - y| = -(z - y).$$

Додавши почленно останні дві рівності будемо мати:

$$\rho(x;z) + \rho(z;y) = (x - z) - (z - y) = x - z - z + y =$$

$$= x - y + 2y - 2z = (x - y) + 2(y - z) = \rho(x;y) + 2(y - z) > \rho(x;y).$$

Приклад 2. Прикладом метричного простору є множина точок координатної площини, яка детально вивчається у курсі геометрії для дев'ятого класу [13,20,27,38,67]. Такий простір називають двовимірним арифметичним евклідовим простором, і позначають R^2.

За відстань між двома точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ простору R^2 беруть довжину відрізка M_1M_2 , що знаходиться за формулою [13,20,27,38,67]:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Для двох різних точок координатної площини ця відстань додатна і має властивість симетрії:

$$\rho(M_1;M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(M_2;M_1).$$

Доведення нерівності трикутника дещо складніше. Однак, воно полегшується при використанні нерівності Коші-Буняковського [65]. Для випадку довільних чотирьох значень: a_1, a_2, b_1, b_2її можна записати у вигляді: $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$. Цю нерівність легко довести виконавши піднесення до квадрату у її лівій частині і перемноживши вирази у дужках у правій частині нерівності. Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то добувши з них квадратний корінь отримаємо нерівність:

$$a_1b_1 + a_2b_2 \le \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}. \qquad (4.3)$$

Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ має вигляд:

$$\rho(M_1; M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} =$$

$$= \rho(M_1; M_3) + \rho(M_3; M_2).$$

Позначимо: $x_1 - x_3 = a_1$, $x_3 - x_2 = b_1$, $y_1 - y_3 = a_2$, $y_3 - y_2 = b_2$. Ці значення підставимо у нерівність трикутника:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні їх до квадрату отримаємо тотожну нерівність:

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2. \quad (4.4)$$

Перетворимо ліву частину нерівності (4.4) і використаємо нерівність (4.3):

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_2^2 =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + b_1^2 + b_2^2 \leq$$

$$\leq a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2.$$

Отримали нерівність (4.4). От же, нерівність трикутника виконується.

Оскільки виконані усі умови Означення 4.2, то розглянутий простір R^2 є метричним.

На координатній площині можна вибрати іншу метрику і таким чином точки площини будуть утворювати інший метричний простір, відмінний від простору R^2.

Приклад 3. Візьмемо у якості відстані між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини число: $\rho(M_1; M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Це число для двох різних точок є додатнім. Виконання умови симетрії очевидне внаслідок властивостей модуля числа. Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_1(x_1; y_1)$ має вигляд:

$$\rho(M_1; M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq$$

$$\leq (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) =$$

$$= \rho(M_1; M_3) + \rho(M_3; M_2).$$

Виконання цієї нерівності очевидне, оскільки кожен з модулів у лівій частині нерівності не перевищує суми модулівсвоїх доданків.

Виконані усіумови Означення 4.2, отже розглянутий простір є метричним. Цей простір позначають R_1^2.

ПростірR_1^2 цікавий тим, що його суть легко пояснити навіть учням сьомого класу. За цією метрикою на координатній площині найменшу відстань між точками M_1 і M_2 можна подолати йдучи паралельно координатним осям (по катетах прямокутного трикутника, для якого відрізок M_1M_2 є гіпотенузою). Подібна ситуація виникає у місті з прямокутним розташуванням вулиць. Це один із прикладів, де поняття відстані між точками не співпадає з класичним, як довжини відрізка, що з'єднує ці точки.

Приклад 4. Візьмемо у якості відстані між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини число: $\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}$. Це число для двох різних точок є додатнім. Виконання умови симетрії очевидне внаслідок властивостей модуля числа. Нерівність трикутника для трьох точок $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_1(x_1; y_1)$ має вигляд:

$$\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|;\ |y_1 - y_2|\} \leq max\{|x_1 - x_3|;\ |y_1 - y_3|\} +$$
$$+max\{|x_3 - x_2|;\ |y_3 - y_2|\} = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_3; M_2).$$

Використовуючи нерівність для модуля суми двох чисел отримуємо:

$$|x_1 - x_2| = |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq$$

$$\leq max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\}.$$

Аналогічно отримуємо нерівність:

$$|y_1 - y_2| = |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \leq |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq$$

$$\leq max\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + max\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\}.$$

Порівнюючи обидві отримані нерівності, остаточно отримуємо:

$$\rho(M_1; M_2) = max\{|x_1 - x_2|;\ |y_1 - y_2|\} \leq$$

$$\leq ma\,x\{|x_1 - x_3|; |y_1 - y_3|\} + ma\,x\{|x_3 - x_2|; |y_3 - y_2|\} =$$

$$= \rho(M_1; M_3) + \rho(M_3; M_2).$$

Таким чином, виконані усі умови Означення 4.2, тому розглянутий простір є метричним, його позначають R_0^2. Інколи такий простір є зручнішим ніж простір R^2.

Простір R_0^2 теж може бути прикладом простору, у якому відстань між точками не завжди є довжиною відрізка, що з’єднує ці точки.

Приклад 5. Розглянемо упросторі R_0^2 чотири точки: $M_1(0; 1)$, $M_2(0; -1)$, $M_3(-1; 0)$, $M_4(1; 0)$. Знайдемо за метрикою простору відстані між цими точками: $\rho(M_1; M_2) = 2$, $\rho(M_1; M_3) = 1$, $\rho(M_1; M_4) = 1$, $\rho(M_2; M_3) = 1$, $\rho(M_2; M_4) = 1$, $\rho(M_3; M_4) = 2$.

Слід звернути увагу на рівності, які при цьому виконуються:

$$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_2; M_3) = 1 + 1 = 2;$$

$$\rho(M_1; M_2) = \rho(M_1; M_4) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2;$$

$$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_1; M_3) + \rho(M_1; M_4) = 1 + 1 = 2;$$

$$\rho(M_3; M_4) = \rho(M_2; M_3) + \rho(M_2; M_4) = 1 + 1 = 2.$$

Геометрично, на координатній площині, точки M_1, M_2, M_3, M_4 є вершинами квадрата, довжина сторони якого дорівнює $\sqrt{2}$. У геометрії Евкліда довжина діагоналі квадрата менша за суму довжин двох його сторін, а у цьому прикладі вони виявляються рівними. Більше того, з кожної із отриманих чотирьох рівностей у геометрії Евкліда слідує, що усі три точки, які беруть участь у рівності, повинні лежати на одній прямій.

Цей приклад наочно демонструє відмінність понять відстані між точками однієї і тієї ж множини при різному їх означенні. Крім того, цей приклад вказує на неоднозначність (відносність) поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору.

Поняття прямої лінії є одним із основних (первісних) понять у класичній геометрії Евкліда (приблизно 365 – 300 роки до нашої ери). У своїх «Началах» він означав пряму лінію як лінію «…що рівно розміщена по відношенню до точок на ній». Саму ж лінію він означав як «довжину без ширини» [70]. Інші давньогрецькі вчені – Архімед (приблизно 287 – 212 роки до нашої ери) та ГеронАлександрійський (приблизно І-е століття нашої ери) характеризували пряму лінію, як найкоротшу з усіх ліній, що мають однакові кінці [64]. Існували інші описи прямої лінії. Одне з них приписують давньогрецькому філософу Платону (427 – 347 роки до нашої ери). Пряму лінію він розглядав як лінію, що не змінює свого положення при обертальному русі із закріпленими двома кінцями. Такого ж опису притримувався грецький філософ Прокл Діадох (приблизно 410 – 485 роки нашої ери), а також німецький математик Лейбніц (01.07.1646 – 14.11.1716), вважаючи, що пряма в цілому має ті ж властивості що і будь-яка її частина. У XIX столітті інколи наводилось означення прямої лінії французького математика Луї Бертрана (1731 – 1812). Він характеризував пряму лінію як таку, що розділяє площину на дві частини, що мають абсолютно однакові властивості по відношенню до цієї прямої [70]. Д. Гільберт у своїй аксіоматиці, на відміну від Евкліда, не давав конкретних означень основних геометричних понять: точки, прямої, площини, а лише описував їх властивості через співвідношення між ними [30].

Розглянемо більш детально поняття прямолінійного розміщення точок метричного простору. Воно є частинним випадком Означення 4.2 у випадку коли нерівність трикутника перетворюється у рівність.

Означення 4.3. *Будемо казати, що точки* x, y, z *метричного простору* (X, ρ) *розміщені прямолінійно у цьому просторі, якщо виконується рівність*

$$\rho(x; y) = \rho(x; z) + \rho(z; y) \tag{4.5}$$

([44]).

При виконанні рівності (4.5) природно казати, що точка z «лежить між» точками x і y,або називати її «внутрішньою» для точок x, y, z. Одночасно, про точку x (точку y) можна казати, що вона «лежить поза» точками y і z (точками x і z),або називати її «крайньою» для точок x,y,z(порівняйте [68]).

Можна звернути увагу учнів на те, що рівність (4.5) повинна виконуватись для деяких двох точок із трьох заданих (наприклад, для точок x іy). Для інших пар точок при цьому буде виконуватись рівність $\rho(x;z) = \rho(x;y) - \rho(z;y)$ або рівність $\rho(z;y) = \rho(x;y) - \rho(x;z)$, які теж можуть указувати на прямолінійне розміщення точок x,y,z.

Можна дати означення прямолінійного розміщення множини точок метричного простору. Для цього слід вимагати прямолінійного розміщення будь-яких трьох точок цієї множини.

Означення 4.4. *Будемо казати, що множина точок метричного простору прямолінійно розміщена, якщо будь-які три точки цієї множини прямолінійно розміщені*([44]).

Означення 4.3 і 4.4 дають можливість вивчати окремі властивості прямолінійності без використання означення прямої лінії та без введення аксіом для прямої лінії. Їх можна використати для побудови прямолінійно розміщених множин точок довільного метричного простору. Властивості таких множин значною мірою будуть залежати від способу задання метрики у відповідному просторі.

Тепер розглянемо декілька прикладів прямолінійного розміщення точок у різних метричних просторах.

Приклад 6. Найпростішим прикладом прямолінійно розміщеної множини є простір R^1. Дійсно, з властивостей множини дійсних (натуральних, цілих, раціональних) слідує, що з трьох різних чисел x, y, z одне з них буде найменшим, друге – найбільшим, а третє – проміжним. Нехай, наприклад, виконується подвійна нерівність: $x < z < y$. Як і у Прикладі 1, за метрикою простору R^1, знайдемо відстані: $\rho(x;y) = |x - y| = y - x$, $\rho(x;z) = |x - z| = z - x$, $\rho(z;y) = |z - y| = y - z$. Оскільки виконується рівність: $\rho(x;y) = y - x = (z - x) + (y - z) = \rho(x;z) + \rho(z;y)$, то за Означенням 3точки x, y, z прямолінійно розміщені у просторі R^1. Ці точки були довільні, тому виконується Означення 4.4 і увесь простір R^1 є прямолінійно розміщеним.

Приклад 7. Наведемо більш складніший приклад прямолінійно розміщеної множини. Для цього розглянемо множину лінійних функцій $y = kx$, означених на відрізку $x \in [0; 1]$. Графіками цих функцій є прямі лінії, що проходять через початок координат. На відрізку $[0; 1]$графіками будуть відрізки цих прямих. Досить ґрунтовно з властивостями функцій учні знайомляться у дев'ятому класі [18, 37,51,67,77]. Однак, з окремими елементарними функціями та їх найпростішими властивостями, зокрема з лінійною функцією, знайомство розпочинається ще із сьомого класу [17,36,50,62,66,78]. Зауважимо, що дві функції,означені на деякому проміжку, ми будемо вважати різними, якщо хоча б в одній точці цього проміжку вони мають різні значення. При умові неперервності цих функційна проміжку, вони матимуть різні значення на деякому проміжку.

Уведемо метрику у цій множині, вибравши за відстань між двома різними її елементами $y = k_1x$ і $y = k_2x$ число: $\rho(k_1x; k_2x) = max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_2x|$.Покажемо, що при такому виборі відстані між елементами множина функцій $y = kx$ є метричним простором. У подальшому, для зручності, будемо користуватись позначеннями: $k_ix = y_i$, $\rho\left(k_ix; k_jx\right) = \rho\left(y_i; y_j\right) = \rho_{ij}$ $(i, j = 1,2,3, \dots)$.

Для двох різних функцій відстань ρ_{12} є додатною внаслідок означення модуля числа. Якщо припустити, що ця відстань дорівнює нулю, то у кожній точці відрізка $[0; 1]$ значення обох функцій повинні бути однаковими, тобто функції повинніспівпадати.

Із властивостей модуля числа слідує властивість симетрії відстані: $\rho(y_1; y_2) = max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_2x| = max_{x\in[0;1]}|k_2x - k_1x| = \rho(y_2; y_1)$.

Розглянемо на відрізку $[0;1]$ три функції: $y_1 = k_1x$, $y_2 = k_2x$, $y_3 = k_3x$, де k_1, k_2, k_3 – різні числа. Нехай, наприклад, виконуються нерівності: $k_1 < k_2 < k_3$. Знайдемо відстані між функціями:

$$\rho_{12} = max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_2x| = max_{x\in[0;1]}|k_1 - k_2||x| = k_2 - k_1,$$

$$\rho_{13} = max_{x\in[0;1]}|k_1x - k_3x| = max_{x\in[0;1]}|k_1 - k_3||x| = k_3 - k_1,$$

$$\rho_{23} = max_{x\in[0;1]}|k_2x - k_3x| = max_{x\in[0;1]}|k_2 - k_3||x| = k_3 - k_2$$

(рис.4.7).

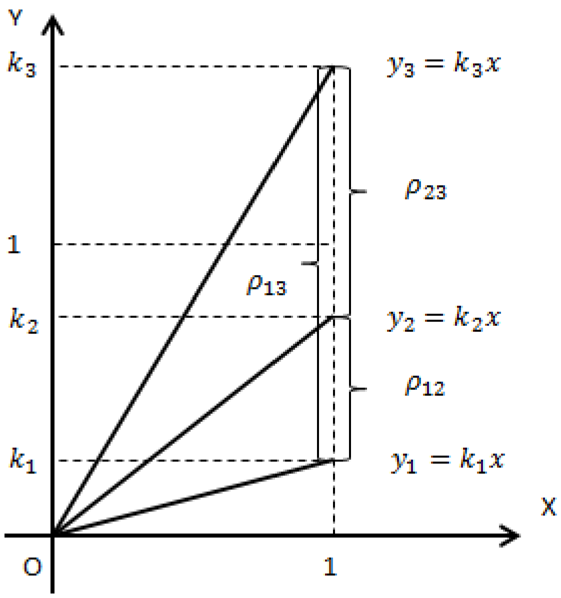

Рис.4.7. Прямолінійно розміщені функції$y_1 = k_1x$, $y_2 = k_2x$, $y_3 = k_3x$.

Із отриманих значень слідує справедливість рівності:

$$\rho_{13} = k_3 - k_1 = (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) = \rho_{12} + \rho_{23}. \quad (4.6)$$

Отже нерівність трикутника для точок y_1, y_2, y_3 виконується. Таким чином, вибрана відстань є метрикою а множина функцій $y = kx$, означених на відрізку $x \in [0;1]$, є метричним простором.

Оскільки для точок y_1, y_2, y_3виконується рівність (4.5), а точки ми вибрали довільно, то з рівності (4.6), за Означенням 4, слідує прямолінійне розміщення усієї множини функцій.

Приклад 8. Простір R^1, розглянутий у Прикладі 1, а також простір R_1^2 , розглянутий у Прикладі 3, є частинними випадками більш загального метричного простору – R_1^n . Цей простір складається з упорядкованих груп n дійсних чисел: $x(x_1, \dots, x_n)$. Відстань між двома точками $x(x_1, \dots, x_n)$ і $y(y_1, \dots, y_n)$ простору знаходиться за формулою:

$$\rho(x; y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|. \tag{4.7}$$

Виконання усіх аксіом відстані для такого задання метрики проводиться аналогічно, як і у Прикладі 3.

Розглянемо множину P точок простору R_1^n таку, що для довільних трьох точок $x(x_1, \dots, x_n)$, $y(y_1, \dots, y_n)$ і $z(z_1, \dots, z_n)$ виконуються нерівності: $x_k \le y_k \le z_k$для усіх значень$k = 1,2, \dots, n$. Така множина є прямолінійно розміщеною у просторі R_1^n[38]. Дійсно, використовуючи рівність (4.7) будемо мати:

$$\rho(x; z) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k) = \sum_{k=1}^{n} ((z_k - y_k) + (y_k - x_k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k) + \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) = \sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| =$$

$$= \rho(z; y) + \rho(y; x) = \rho(x; y) + \rho(y; z).$$

Отже, для точок x, y, z виконується рівність (4.5), тому за Означенням 3 вони прямолінійно розміщені у просторі R_1^n. Оскільки ці точки ми взяли довільно з множини P, то за Означенням 4.4 ця множина прямолінійно розміщена у просторі R_1^n.

Прямолінійне розміщення точок у Прикладах 6–8 може інтуїтивно асоціюватись з прямолінійністю розміщення точок у геометрії Евкліда, однак, це не завжди вірно. Наступний приклад демонструє цю своєрідність прямолінійного розміщення точок у метричному просторі.

Приклад 9. У Прикладі 5 ми встановили, що для будь-яких трьох точок, із розглянутих чотирьох M_1, M_2, M_3, M_4 у цьому прикладі, виконується рівність (4.5), і тому кожні три точки за Означенням 4.3 розміщені прямолінійно, а отже, за Означенням 4.4, усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі R_0^2. Цей результат дещо відрізняється від інтуїтивного сприйняття поняття прямої лінії у геометрії Евкліда, оскільки ці чотири точки, як відзначалось вище, на координатній площині є вершинами квадрата (рис.4. 8).

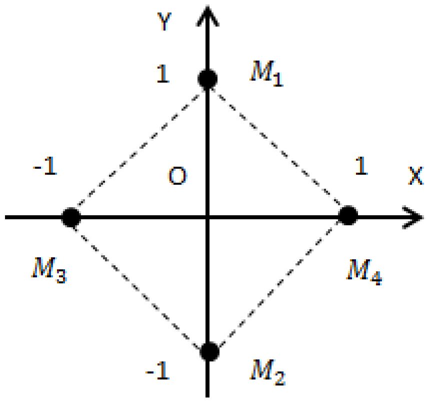

Рис.4.8. Прямолінійно розміщені у просторі R_0^2 точки M_1, M_2, M_3, M_4.

Ми розглянули декілька основних понять метричної геометрії та декілька найпростіших метричних просторів, з якими можна познайомити учнів середніх класів. Вчитель може на власний розсуд вибрати рівень обґрунтованості результатів – інтуїтивний, графічний або строгий аналітичний. У старших класах можна розглянути більш складніші метричні простори, що потребують понять неперервності, диференційованості та інтегрованості функції.

Можливості використання елементів метричної геометрії у старших класах значно зростають. Це зумовлено більш детальним та ґрунтовним вивченням властивостей функцій, зокрема на основі диференціального та інтегрального числення. Наприклад, знайомство з властивостями функцій неперервних на відрізку дає можливість розглянути відповідний метричний простір. Слід зазначити, що у старших класах подібний матеріал доцільно розглядати лише при умові вивчення математики на поглибленому рівні.

Після знайомства з неперервними функціями, їх властивостями та другою теоремою Вейєрштрасса [63] про існування найбільшого та найменшого значень функції неперервної на відрізку, можна розглянути метричний простір $C_{[a;b]}$ – множину функцій неперервних на відрізку $[a;b]$, для яких відстань між функціями $f(x)$ і $g(x)$ множини визначається за формулою:

$$\rho(f;g) = max_{x\in[a;b]}|f(x) - g(x)|. \qquad (4.8)$$

При такому виборі метрики множина функцій стає метричним простором, оскільки виконуються усі аксіоми відстані (. Приклад 7). По перше, права частина рівності завжди невід’ємна. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ хоча б у одній точці відрізка $[a;b]$ мають різні значення (тобто, ці функції різні), то права частина рівності (4.8) додатна. Властивість симетрії виконується внаслідок властивості модуля числа: $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$.Виконання нерівності трикутника слідує з очевидних нерівностей:

$$|f(x) - g(x)| = |(f(x) - h(x)) + (h(x) - f(x))| \leq$$
$$\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq$$

$$\le max_{x\in[a;b]}(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)\le$$
$$\le max_{x\in[a;b]}|f(x)-h(x)|+max_{x\in[a;b]}|h(x)-g(x)|=\rho(f;h)+\rho(h;g).$$

Так як ці нерівності виконуються для довільного значення x з відрізка $[a;b]$, то остаточно отримуємо нерівність:

$$\rho(f;g)=max_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|\le$$
$$\le max_{x\in[a;b]}|f(x)-h(x)|+max_{x\in[a;b]}|h(x)-g(x)|=\rho(f;h)+\rho(h;g).$$

Слід зазначити, що усі максимуми, які входять до складу нерівностей, існують внаслідок неперервності на відрізку $[a;b]$відповідних функцій [63].

Оскільки усі основні елементарні функції що вивчаються у шкільному курсі математики є неперервними у своїх областях визначення, то метрику (4.8) можна використовувати, як для вивчення однойменних функцій (лінійних, квадратичних, степеневих, тригонометричних), так і для встановлення метричних співвідношень між різнойменними функціями. При цьому можна використовувати властивості монотонних функцій [67]: «*якщо функція f зростає на відрізку $[a;b]$, то $min_{x\in[a;b]}f(x)=f(a)$, $max_{x\in[a;b]}f(x)=f(b)$; якщо функція f спадає на відрізку $[a;b]$, то $min_{x\in[a;b]}f(x)=f(b)$, $max_{x\in[a;b]}f(x)=f(a)$*». Ці дві властивості можна об’єднати у одну і сформулювати більш загально: «*монотонна на відрізку функція приймає свої найменше і найбільше значення на кінцях цього відрізка*». Таке формулювання може дещо полегшити пошук екстремальних значень функції на відрізку.

Наведемо приклад знаходження відстані між двома лінійними функціями у просторі $C_{[a;b]}$.

Приклад 10. Розглянемо дві точки y_1 і y_2 простору $C_{[a;b]}$, що є лінійними функціями: $y_1=k_1x+b_1$ і $y_2=k_2x+b_2$. Знайдемо відстань між цими точками за метрикою простору $C_{[a;b]}$.У Прикладі 7 ми вже розглядали окремий випадок лінійних функцій: $y = kx$. Внаслідок відсутності вільного члена у правій частині рівності відстань між такими функціями знаходилась достатньо легко (. Рис. 7). У нашому випадку розглянемо функцію:

$$y = |y_1 - y_2| = |(k_1x + b_1) - (k_2x + b_2)| = |(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)|.$$

Можливі наступні випадки взаємного розміщення графіків функцій $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

Нехай виконуються рівності: $k_1 = k_2 = 0$. У цьому випадку графіки обох функцій паралельні осі OX. Тоді за рівністю (8) матимемо:

$$\rho(y_1; y_2) = max_{x\in[a;b]}|y_1 - y_2| = max_{x\in[a;b]}|(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)| =$$
$$= max_{x\in[a;b]}|(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)| = max_{x\in[a;b]}|b_1 - b_2| = |b_1 - b_2|$$

Нагадаємо, що ми розглядаємо різні точки простору, отже $b_1 \neq b_2$ (рис.4.9).

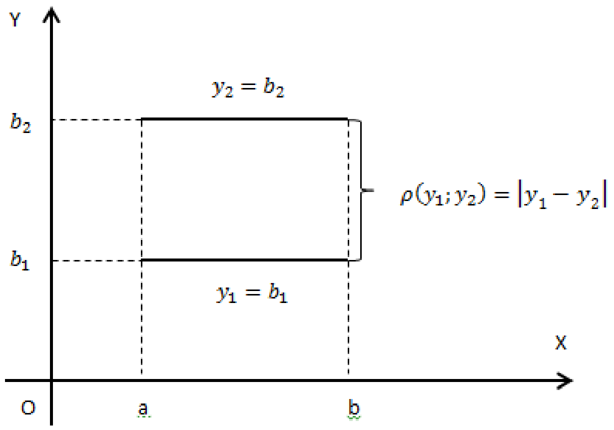

Рис.4.9. Відстань між функціями y_1 і y_2 при $k_1 = k_2 = 0$.

Нехай тепер хоча б одне з чисел k_1 або k_2 відмінне від нуля, наприклад, $k_1 \neq 0$. Припустимо, що графіки функцій y_1 і y_2 на відрізку $[a; b]$ не перетинаються. У цьому випадку один з них розміщений вище ніж інший у кожній точці відрізка. Нехай, наприклад, виконується нерівність $y_1 > y_2$ у кожній точці відрізка $[a; b]$, тоді матимемо:

$$y = |y_1 - y_2| = y_1 - y_2 = (k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2).$$

Оскільки функція $y = (k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)$ є лінійною, а отже монотонною, то своїх найменшого і найбільшого значень вона набуває на кінцях відрізка. Тому матимемо:

$$\rho(y_1; y_2) = max_{x\in[a;b]}|y_1 - y_2| = max_{x\in[a;b]}((k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)) =$$
$$= max\{(k_1 - k_2)a + (b_1 - b_2);\ (k_1 - k_2)b + (b_1 - b_2)\}.$$

Цей максимум може досягатись не лише на кінці відрізка. Зокрема, якщо виконується рівність $k_1 = k_2$, то максимум досягається у кожній точці відрізка $[a; b]$, у цьому випадку графіки функцій паралельні між собою.

На Рисунку 4.10 зображено випадок, коли виконується, наприклад, рівність: $\rho(y_1; y_2) = (k_1 - k_2)b + (b_1 - b_2)$.

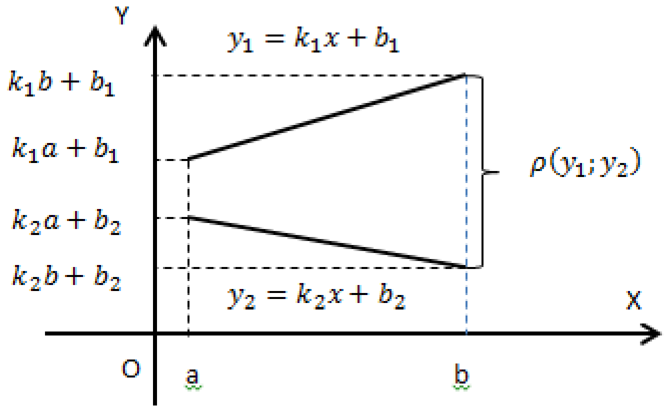

Рис.4.10. Випадок, коли графіки функцій y_1 і y_2 не перетинаються.

Тепер розглянемо випадок, коли графіки обох функцій перетинаються. Це буде означати, щофункція$y = (k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)$ перетинає вісь OX (або дотикається до неї) у точці x_0 відрізка $[a; b]$, $x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$.Один із таких можливих випадків зображений на Рисунку 4.11.

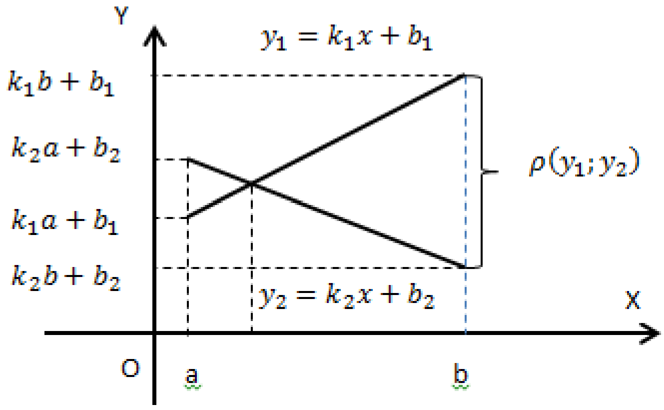

Рис.4.11. Випадок, коли графіки функцій y_1 і y_2 перетинаються.

У цьому випадку функція $y = |(k_1 - k_2)x + (b_1 - b_2)|$ буде приймати невід'ємні значення на відрізку $[a; b]$, буде монотонною на кожному з відрізків $[a; x_0]$ та $[x_0; b]$і буде дорівнювати нулю у точці x_0. Отже, найбільше значення вона може прийняти лише на кінцях відрізка $[a; b]$ (рис.4.12).

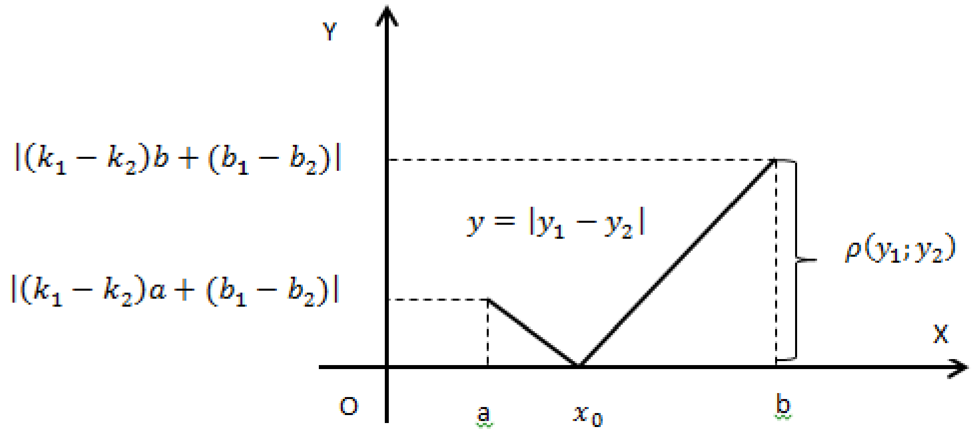

Рис.4.12. Графік функції $y = |y_1 - y_2|$.

Оскільки ми розглянули усі можливі випадки взаємного розміщення обох функцій, то можна зробити висновок про те, що відстань між двома лінійними функціями за метрикою простору $C_{[a;b]}$ дорівнює більшій з абсолютних величин різниць значень обох функцій на кінцях відрізка $[a; b]$.

Зауважимо, що узагальнити Приклад 10 на випадок довільних двох монотонних, і навіть неперервних на відрізку функцій, не можна (рис.4.13).

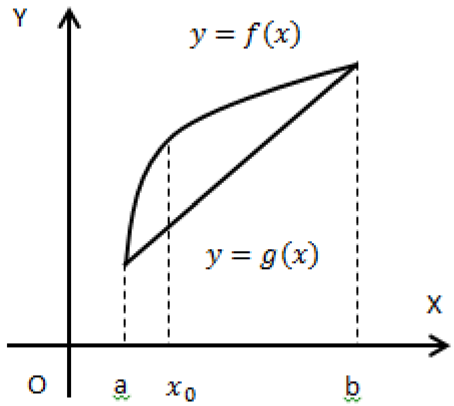

Рис.4.13. Максимальне значення різниці функцій у внутрішній точці x_0.

Приклади 6–8 можуть навести на думку, що для прямолінійного розміщення точок метричного простору необхідна певна «монотонність» розміщення цих точок. Однак, це не завжди вірно.

Приклад 11. На відрізку $[0;1]$ розглянемо функції: $y_1 = x$, $y_2 = -x$, $y_3 = -x + 1$, $y_4 = x - 1$ (рис.4.14).

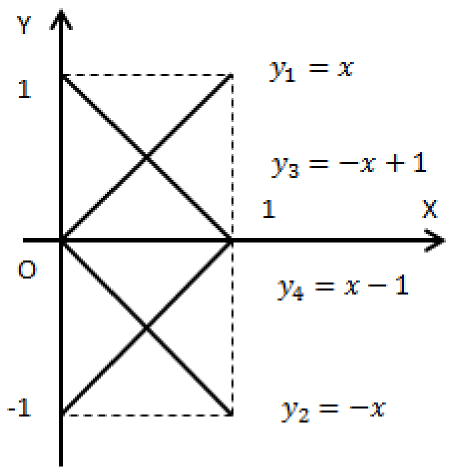

Рис.4.14. Прямолінійно розміщені у просторі $C_{[a;b]}$ функції y_1, y_2, y_3, y_4.

З Рисунку 4.14 видно, що графіки функцій y_1, y_2, y_3, y_4 важко назвати «монотонно» розміщеними. Покажемо, що у просторі $C_{[a;b]}$ ці функції прямолінійно розміщені. Для цього знайдемо за метрикою простору $C_{[a;b]}$ відстані між цими функціями (точками). За формулою (4.8) будемо мати:

$$\rho_{12} = 2; \rho_{13} = 1; \rho_{14} = 1; \rho_{23} = 1; \rho_{24} = 1; \rho_{34} = 2.$$

Оскільки виконується рівність: $\rho_{12} = 2 = 1 + 1 = \rho_{13} + \rho_{23}$, то точки y_1 , y_2 , y_3 розміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$, причому, точка y_3 лежить між точками y_1 і y_2, тобто є внутрішньою для точок y_1, y_2 , y_3 . Аналогічно, з рівності $\rho_{12} = 2 = 1 + 1 = \rho_{14} + \rho_{24}$ слідує що точки y_1, y_2, y_4 теж розміщені прямолінійно і точка y_4 є внутрішньою для них.

З іншого боку, рівність $\rho_{34} = 2 = 1 + 1 = \rho_{13} + \rho_{14}$ свідчить про те, що точки y_1, y_3, y_4 розміщені прямолінійно, і точка y_1 лежить між точками y_3 і y_4 . Крім того, з рівності $\rho_{34} = 2 = 1 + 1 = \rho_{23} + \rho_{24}$ отримуємо, що точки y_2, y_3, y_4 теж розміщені прямолінійно і точка y_2 є для них внутрішньою.

Оскільки ми перебрали усі можливі трійки точок і вони виявились прямолінійно розміщеними, то за Означенням 4.4 усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$.

Звернемо увагу на те, що кожна з чотирьох точок лежить між деякими двома з них, тобто, серед цих точок немає крайніх точок. Такої ситуації не може бути у геометрії Евкліда. Там з чотирьох точок, що лежать на прямій лінії, дві будуть крайніми, а дві – внутрішніми для цих точок. Отже у цьому прикладі,як і у Прикладах 5 і 9, ми маємо справу з елементами неевклідової геометрії.

Особливість розміщення точок y_1 , y_2 , y_3 , y_4 можна пояснити, якщо відійти від інтуїтивного сприйняття прямолінійності. Його можна проілюструвати на прикладі простору точок одиничного кола. Якщо за відстань між двома точками кола взяти довжину меншої з двох дуг кола що сполучає ці точки, то легко впевнитись, що простір стає метричним. У цьому випадку, точки y_1 , y_2 , y_4 , y_3 будуть кінцями двох взаємно перпендикулярних діаметрів кола (рис.4.15).

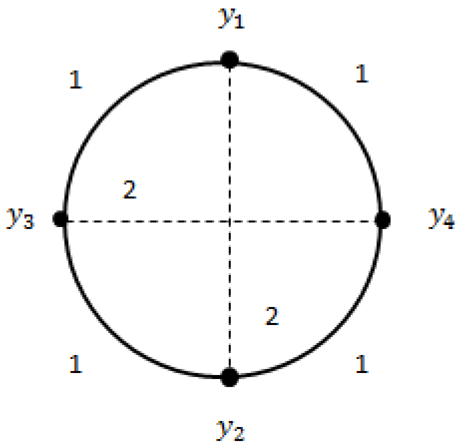

Рис.4.15. Неевклідова інтерпретація прямолінійного розміщення точок y_1, y_2,y_4, y_3 у просторі $C_{[a;b]}$.

Поняття прямолінійності у метричному просторі є неоднозначне. У геометрії Евкліда дві точки визначають єдину пряму, що містить ці точки, цей факт встановлюється відповідною аксіомою [30]. У метричному просторі інша ситуація. Продемонструємо на прикладі лінійних функцій неоднозначність поняття прямолінійного розміщення точок у просторі $C_{[a;b]}$ [38].

Приклад 12.Розглянемо функції: $y_1 = x + 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x - 2$, $y_4 = -x$, що означені на відрізку $[0; 1]$ (рис.4.16).

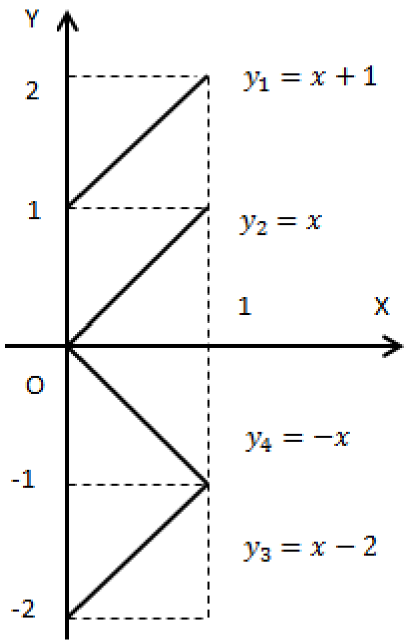

Рис.4.16. Графіки функцій y_1, y_2, y_3, y_4 у декартовій системі координат.

Знайдемо відстані між цими функціями за формулою (4.8), враховуючи при цьому результати Прикладу 10:

$$\rho_{12} = 1; \rho_{13} = 3; \rho_{14} = 3; \rho_{23} = 2; \rho_{24} = 2; \rho_{34} = 2.$$

З отриманих рівностей слідує, що точки (функції) y_1 , y_2 , y_3 розміщені прямолінійно, оскільки виконується рівність: $\rho_{13} = 3 = 1 + 2 = \rho_{12} + \rho_{23}$. При цьому, точка y_2 лежить між точками y_1, y_3.

З іншого боку, точки y_1 , y_2 , y_4 теж розміщені прямолінійно, оскільки виконується рівність: $\rho_{14} = 3 = 1 + 2 = \rho_{12} + \rho_{24}$. При цьому, точка y_2 лежить також між точками y_1, y_4.

Оскільки у обох випадках точки y_1 , y_2 присутні у кожній з рівностей, то у геометрії Евкліда усі чотири точки y_1, y_2, y_3, y_4 повинні належати одній прямій лінії. Однак, з отриманих значень відстаней між ними слідує, що точки y_2 , y_3 , y_4 не можуть бути прямолінійно розміщеними, оскільки між ними однакові відстані (вони утворюють рівносторонній трикутник, довжини сторін якого дорівнюють 2). У той же час, з Рисунку 4.16 видно, що графіки функцій розміщені один під одним, тобто у кожній точці відрізка [0; 1] виконуються нерівності:

$$y_1 \geq y_2 \geq y_4 \geq y_3. \tag{4.9}$$

Цей факт свідчить про те, що у просторі $C_{[a;b]}$ поняття прямолінійності відрізняється своїми властивостями від поняття прямолінійності у геометрії Евкліда. Нижче ми покажемо, що при зміні метрики простору властивість монотонності розміщення можна зберегти.

Отримані результати можна пояснити тим, що властивості прямолінійного розміщення точок у геометрії Евкліда закріплені відповідними постулатами (аксіомами) [30,42]. У метричному просторі є лише аксіоми відстані між точками, і тому можлива певна неоднозначність поняття прямолінійності.

Якщо припустити дещо іншу інтерпретацію прямолінійності, то отримані результати легко зрозуміти. Наприклад, рухаючись по земній кулі ніби прямолінійно, ми усе ж таки рухаємось по колу, центр якого знаходиться у центрі Землі. Тому наклавши певні обмеження на шлях по якому можна рухатись від точки до точки,а за відстань між точками взявши найменшу довжину шляху між точками, можна отримати неевклідову інтерпретацію прямолінійності розміщення точок. На Рисунку 4.17 наведено інтерпретацію результатів Прикладу 12 для випадку, коли за відстань між двома точками вибрано довжину дуги певної лінії (коло, парабола, гіпербола і таке інше) що з'єднує ці точки.

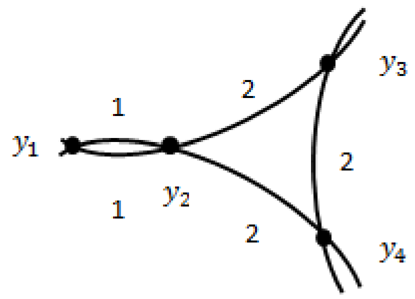

Рис. 4.17. Неоднозначність прямолінійного розміщення точок.

Розглянемо ще один приклад, що демонструє іншу особливість простору $C_{[a;b]}$. Якщо на прямій лінії, у геометрії Евкліда, розмістити три точки, і одну з двох крайніх точок рухати вздовж цієї прямої у напрямі інших двох точок, то рухаючись неперервно, ця точка спочатку суміститься з однією з двох інших точок (внутрішньою), а потім і з другою (іншою зовнішньою) точкою, після чого буде продовжувати рух по цій прямій. У просторі $C_{[a;b]}$ це не завжди виконується. Інколи дві точки простору при прямолінійному русі не можна сумістити одна з одною.

Приклад 13. Розглянемо функції: $y_1 = 0$, $y_2 = x$, $y_3 = C$, де C – деяка константа. У Прикладі 6 ми показали, що усі точки простору R^1

прямолінійно розміщені, тому змінюючи константу C ми рухаємо цю точку прямолінійно, причому як у цьому просторі, так і у просторі $C_{[a;b]}$ (Приклад 10, рис.4.9).

Спочатку розглянемо випадок, коли константа C задовольняє нерівність: $0 < C \leq 0{,}5$. У цьому випадку, відстані між точками (функціями) y_1 , y_2 , y_3 знаходимо за формулою (4.8), будемо мати(.рис.4.18): $\rho_{12} = 1$; $\rho_{13} = C = |C|$; $\rho_{23} = 1 - C = 1 - |C|$.Оскільки виконується рівність:

$$\rho_{12} = 1 = |C| + (1 - |C|) = \rho_{13} + \rho_{23},$$

то точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$.

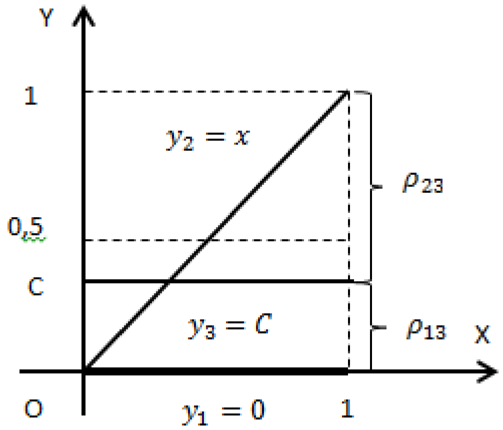

Рис. 4.18. Прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3 при $0 < C \leq 0,5$.

На Рисунку 4.19 зображено випадок, коли константа C задовольняє нерівність: $C < 0$. У цьому випадку, відстані між точками (функціями) y_1, y_2, y_3 будуть: $\rho_{12} = 1$; $\rho_{13} = -C = |C|$; $\rho_{23} = 1 - C = 1 + |C|$(Рис. 16). Оскільки виконується рівність:

$$\rho_{23} = 1 + |C| = \rho_{12} + \rho_{13},$$

то точки y_1, y_2, y_3і у цьому випадкурозміщені прямолінійно у просторі $C_{[a;b]}$.

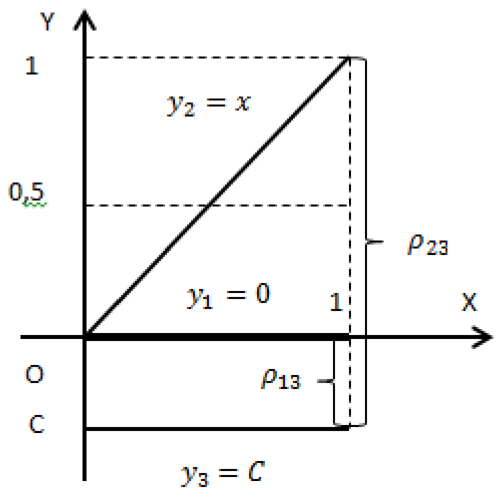

Рис.4.19. Прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3 при $C < 0$.

Нехай тепер константа C задовольняє нерівність: $C > 0{,}5$ (рис. 20).

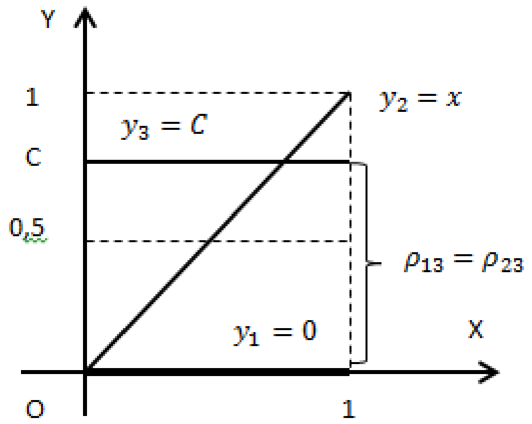

Рис.4.20. Не прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3 при $C > 0{,}5$.

У цьому випадку, відстані між точками (функціями) y_1, y_2, y_3 будуть: $\rho_{12} = 1$; $\rho_{13} = \rho_{23} = C$. При цих значеннях відстаней, точки y_1, y_2, y_3 утворюють рівнобедрений трикутник з довжиною основи, що дорівнює ρ_{12} і бічними сторонами, довжини яких дорівнюють C (константа C перевищує 0,5). Таким чином, для точок y_1, y_2, y_3 порушилась прямолінійність розміщення у просторі $C_{[a;b]}$, хоча точка y_3 рухалась прямолінійно.

Приклад 13 свідчить про те, що не зважаючи на рівноправність усіх точок метричного простору, у конкретних просторах не лише метрика, а і внутрішні властивості кожної точки (елемента) простору можуть значно впливати на геометричні властивості усього простору.

Після вивчення визначеного інтеграла та його застосувань, можна ознайомити учнів ще з одним метричним простором, пов'язаним з геометричним змістом визначеного інтеграла. Ці теми вивчаються у одинадцятому класі [16,19, 64, 71].

Розглянемо множину неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій. За відстань між двома функціями $f(x)$ і $g(x)$ цієї множини візьмемо число, що знаходиться за формулою:

$$\rho(f;g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (4.10)$$

При такому виборі метрики розглядувана множина функцій стає метричним простором, який позначають C_L.

Для перевірки виконання аксіом відстані у цьому просторі необхідно знати ряд властивостей визначеного інтеграла, які фактично не згадуються у діючих підручниках. Зокрема, не згадується властивість монотонності визначеного інтеграла: «*Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні на відрізку* $[a;b]$, *і в кожній точці цього відрізка виконується нерівність* $f(x) \geq g(x)$, *то виконується також нерівність* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$».Ця властивість достатньо просто отримується у випадку, коли визначений інтеграл означається як границя інтегральної суми [16,19,71]. Таке означення історично виправдане, і робить достатньо простим отримання різноманітних застосувань визначеного інтеграла.Для обчислень визначених інтегралів функцій, що мають первісні, зручніше користуватись формулою Ньютона-Лейбніца.

Слід зазначити, що з властивостей визначеного інтеграла у діючих підручниках з математики згадуються, як правило, лише арифметичні дії над інтегралами, а умові існування інтеграла, фактично не приділяється увага. Тому учням слід наголосити, що будь-яка неперервна на відрізку функція є інтегрованою, тобто неперервність функції на відрізку є достатньою умовою її інтегрованості на цьому відрізку.На наш погляд, це значно посилить важливість вивчення поняття неперервності функції. Умову неперервності підінтегральної функції можна включити при знайомстві з формулою Ньютона-Лейбніца [16,71]. Можна також обмежитись лише неперервними функціями при означенні первісної, вказавши, що для будь-якої неперервної функції існує первісна. У будь-якому випадку, при використанні інтеграла слід завжди згадувати неперервністьпідінтегральної функції, як достатню умову існування інтеграла. Це зробить більш обґрунтованими результати отримані за допомогою інтегрування.

Перейдемо до перевірки аксіом відстані для метрики, заданої формулою (4.10). З неперервності функцій $f(x)$ і $g(x)$ слідує неперервність, а отже і інтегрованість функції $|f(x)-g(x)|$, тому відстань, що визначається формулою (4.10), існує. Будь-яка інтегральна сума, складена для функції $|f(x)-g(x)|$ на відрізку $[a;b]$ є сумою невід'ємних доданків, тому і її границя не може бути від'ємною. Нерівність трикутника для функцій $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, неперервних на відрізку $[a;b]$, отримується з використанням властивості монотонності визначеного інтеграла:

$$\rho(f;g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\int_a^b |(f(x)-h(x))+(h(x)-g(x))|dx \le$$

$$\le \int_a^b (|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)dx =$$

$$=\int_a^b |f(x)-h(x)|dx+\int_a^b |h(x)-g(x)|dx=\rho(f;h)+\rho(h;g).$$

Геометрично, відстань між двома функціями $f(x)$ і $g(x)$ простору C_L означає площу фігури, що обмежують графіки цих функцій на відрізку $[a;b]$ (рис.4.21). У шкільних підручниках користуються менш загальною формулою площі фігури обмеженої графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$, що задовольняють нерівність $f(x)\ge g(x)$ на відрізку $[a;b]$:

$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ [58, с. 261; 65, с. 373-374; 16, с. 236-237; 19, с. 115].

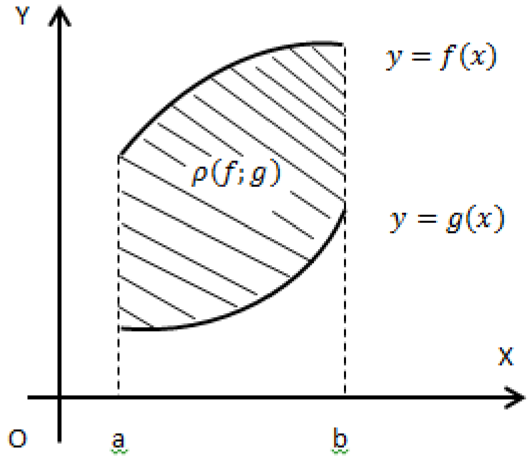

Рис.4.21. Відстань між функціями $f(x)$ і $g(x)$ у просторі C_L.

Метрика визначена формулою (4.10) є менш чутливою до особливостейструктури окремого елемента простору. Про це може свідчити наступний приклад.

Приклад 14. Повернемось доПрикладу 12 і розглянемо функції: $y_1 = x + 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x - 2$, $y_4 = -x$, що означені на відрізку $[0; 1]$ (рис. 16). Раніше ми встановили, що усі чотири функції не є прямолінійно розміщеними у просторі $C_{[a;b]}$. Знайдемо відстані між ними за метрикою простору C_L. За формулою (4.10) будемо мати:

$$\rho_{12} = \int_0^1 |(x+1) - x| dx = \int_0^1 dx = 1 - 0 = 1;$$

$$\rho_{13} = \int_0^1 |(x+1) - (x-2)| dx = \int_0^1 3dx = 3(1-0) = 3;$$

$$\rho_{14} = \int_0^1 |(x+1) - (-x)| dx = \int_0^1 (2x+1) dx = (1^2 - 0^2) + (1-0) = 2;$$

$$\rho_{23} = \int_0^1 |x - (x-2)| dx = \int_0^1 2dx = 2(1-0) = 2;$$

$$\rho_{24} = \int_0^1 |x - (-x)| dx = \int_0^1 2xdx = 1^2 - 0^2 = 1;$$

$$\rho_{34} = \int_0^1 |(x-2) - (-x)| dx = \int_0^1 (2-2x) dx = 2(1-0) - (1^2 - 0^2) = 1.$$

Зауважимо, що ці значення можна обчислити без використання формули (4.10), порахувавши по Рисунку 4.16 площі фігур обмежених графіками відповідних функцій.

Оскільки виконується рівність: $\rho_{13} = 3 = 1 + 2 = \rho_{12} + \rho_{23}$, то точки y_1, y_2, y_3 розміщені прямолінійно у просторі C_L, причому, точка y_2 лежить між точками y_1 і y_3.

З рівності $\rho_{14} = 2 = 1 + 1 = \rho_{12} + \rho_{24}$ слідує, що точки y_1, y_2, y_4 теж розміщені прямолінійно, причому, точка y_2 лежить між точками y_1 і y_4.

Оскільки виконується рівність: $\rho_{13} = 3 = 2 + 1 = \rho_{14} + \rho_{34}$, то точки y_1, y_3, y_4 розміщені прямолінійно у просторі C_L, причому, точка y_4 лежить між точками y_1 і y_3.

З рівності $\rho_{23} = 2 = 1 + 1 = \rho_{24} + \rho_{34}$ слідує, що точки y_2, y_3, y_4 теж розміщені прямолінійно, причому, точка y_4 лежить між точками y_2 і y_3.

Ми розглянули усі чотири можливих трійки точок, і кожна з них виявилась прямолінійно розміщеною. За Означенням 4.4 усі чотири точки розміщені прямолінійно у просторі C_L, причому, точки y_1, y_3 є крайніми, а точки y_2, y_4– внутрішніми для точок y_1, y_2, y_3, y_4. Усі точки розміщені у наступному порядку: y_1, y_2, y_4, y_3 (.рис.4.22).Цей порядок розміщення функцій співпадає з порядком їх розміщення на координатній площині (рис.4.16).

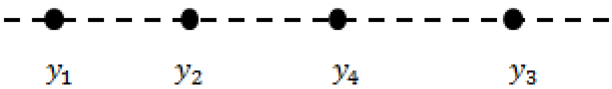

Рис.4.22. Прямолінійне розміщення точок y_1, y_2, y_3, y_4 у просторі C_L.

Приклад 14 є наслідком більш загальної властивості простору C_L. Порівнявши результати Прикладів 12 і 14, можна зробити висновок про те, що метрика простору C_L більш «сильніша» за метрику простору

$C_{[a;b]}$, оскільки навіть «монотонність» розміщення функцій не змогла забезпечити їх прямолінійного розміщення у просторі $C_{[a;b]}$.У просторі C_L, на відміну від простору $C_{[a;b]}$, прямолінійність розміщення точок може забезпечити їх певна «монотонність розміщення», про що свідчить наступний приклад [57]

Приклад 15.Розглянемо множину F функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$, і таких, що для будь-яких функцій $f(x)$ і $g(x)$ цієї множини у кожній точці x відрізка виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$.

Покажемо, що множина F прямолінійно розміщена у просторі C_L. Для цього розглянемо довільні три елементи $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ цієї множини. Нехай для нниху кожній точці x відрізка виконуються, наприклад, нерівності $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$. За формулою (4.10) знайдемо відстані між цими елементами:

$$\rho(f;g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big) dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx;$$

$$\rho(f;h) = \int_a^b |f(x) - h(x)| dx = \int_a^b \big(f(x) - h(x)\big) dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b h(x)dx;$$

$$\rho(g;h) = \int_a^b |g(x) - h(x)| dx = \int_a^b \big(g(x) - h(x)\big) dx =$$

$$= \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx.$$

З отриманих рівностей слідує справедливість рівності

$$\rho(f;h) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b h(x)dx =$$

$$= \left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right) + (\int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx) =$$

$$= \rho(f;g) + \rho(g;h).$$

Отримана рівність означає, що елементи $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ множини F розміщені прямолінійно у просторі C_L. Оскільки елементи ми вибрали довільно, то за Означенням 4.4 уся множина F розміщена прямолінійно у просторі C_L.Тепер результат Прикладу 14, внаслідок нерівності (4.9), стає частинним випадком Прикладу 15.

Наведений у роботі матеріал можна вважати першим знайомством з основами метричної геометрії. За наведеними зразками можна створювати і розв'язувати велику кількість різноманітних задач на взаємне розміщення основних елементарних функцій у різних метричних просторах, будувати і досліджувати різні геометричні образи у цих просторах.

4.2 Узагальнене поняття кута.

Означення 4.5. *Метричним простором називають довільну множину A, для будь-яких двох елементів x і y якої за правилом ρ поставлене у відповідність єдине невід'ємне число $\rho(x;y)$, що задовольняє умовам (для будь-яких різних точок x, y, z множини):*

1)$\rho(x;y) = \rho(y;x)$,

2) $\rho(x;y) \leq \rho(x;z) + \rho(z;y)$.

Елементи множини, при цьому, називають точками простору, правило ρ – метрикою простору, $\rho(x;y)$ – відстань між x і y, а пару (A,ρ) – метричним простором [45].

У метричному просторі можна розглядати, по аналогії з геометрією Евкліда, такі основні геометричні поняття як точка, кут, прямолінійне розміщення точок, плоске розміщення точок і таке інше.

Поняття кута утвореного точками метричного простору, а також поняття прямолінійного образу у метричному просторі розглядалось у роботі [10].

Означення 4.6. *Упорядкована трійка точок* x, y, z *метричного простору* (A, ρ) *називається кутом, утвореним цими точками. Точку* y, *при цьому, називають вершиною кута, а пари точок* (x, y) *і* (y, z) – *сторонами кута.*

Як і у випадку геометрії Евкліда, для кута у метричному просторі можна задати певну його числову характеристику.

Означення 4.7. *Число*

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\rho^2(x, y) + \rho^2(y, z) - \rho^2(x, z)}{2\rho(x, y)\rho(y, z)} \tag{4.11}$$

називають числовою характеристикою кута, утвореного точками x, y, z*метричного простору* (A, ρ), *з вершиною у точці* y.

Рівність (4.11) є аналогом теореми косинусів у геометрії Евкліда. Завдяки такому означенню велику кількість геометричних понять цієї геометрії можна перенести на випадок метричної геометрії. Зокрема, розглянемо поняття прямолінійного розміщення точок довільного метричного простору.

Означення 4.8 *Якщо для довільних трьох різних точок* x, y *і* z*метричного простору* (A, ρ) *виконується рівність*

$$\rho(x; y) = \rho(x; z) + \rho(z; y),$$

то кажуть, що ці точки розміщені прямолінійно у цьому просторі [42].

Це означення можна записати за допомогою кутової характеристики.

Означення 4.9. *Якщо для довільних трьох різних точок* x, y *і* z *метричного простору* (A, ρ) *виконується рівність*

$$\varphi^2(x, y, z) = \pm 1, \tag{4.12}$$

то кажуть, що ці точки розміщені прямолінійно у цьому просторі.

Природно дати наступне означення прямолінійного розміщення деякої множини метричного простору.

Означення 4.10. *Якщо будь-які три різні точки множини X метричного простору* (A, ρ) *прямолінійно розміщені у цьому просторі, то кажуть, що множина X прямолінійно розміщена у просторі* (A, ρ).

Для більш конкретного узагальнення поняття кута у шкільному курсі математики розглянемо приклади:

Приклад 16. Розглянемо у просторі R_0^2 чотири точки: $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$, $M_3(-1;0)$, $M_4(1;0)$. Знайдемо за метрикою простору відстані між цими точками: $\rho(M_1;M_2) = 2$, $\rho(M_1;M_3) = 1$, $\rho(M_1;M_4) = 1, \rho(M_2;M_3) = 1, \rho(M_2;M_4) = 1, \rho(M_3;M_4) = 2$.

Слід звернути увагу на рівності, які при цьому виконуються:

$\rho(M_1;M_2) = \rho(M_1;M_3) + \rho(M_2;M_3) = 1 + 1 = 2;$

$\rho(M_1;M_2) = \rho(M_1;M_4) + \rho(M_2;M_4) = 1 + 1 = 2;$

$\rho(M_3;M_4) = \rho(M_1;M_3) + \rho(M_1;M_4) = 1 + 1 = 2;$

$\rho(M_3;M_4) = \rho(M_2;M_3) + \rho(M_2;M_4) = 1 + 1 = 2.$

Таким чином, як слідує з рівності (4.12), кожні три точки розміщені прямолінійно у просторі R_0^2, а отже, за Означенням 4.10, усі чотири точки прямолінійно розміщені у просторі R_0^2.

Крім того, за формулою (4.11) будемо мати:

$$\varphi(M_2;M_1;M_3) = +1, \varphi(M_1;M_3;M_2) = -1, \varphi(M_2;M_3;M_1) = +1,$$

$$\varphi(M_3;M_1;M_2) = 1, \varphi(M_3;M_2;M_1) = +1,$$

$$\varphi(M_1;M_2;M_3) = +1, \varphi(M_3;M_1;M_2) = -1.$$

Геометрично, на координатній площині, точки M_1, M_2, M_3, M_4 є вершинами квадрата, довжина сторони якого дорівнює $\sqrt{2}$. У геометрії Евкліда довжина діагоналі квадрата менша за суму довжин двох його сторін, а у цьому прикладі вони виявляються рівними. Більше того, з кожної із отриманих чотирьох рівностей у геометрії Евкліда слідує, що усі три точки, які беруть участь у рівності, повинні лежати на одній прямій.

Приклад 17. Візьмемо в якості відстані між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ координатної площини число: $\rho(M_1; M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Цей простір є метричним, його позначають R_1^2. Він цікавий тим, що його суть легко пояснити навіть учням сьомого класу. За цією метрикою на координатній площині найменшу відстань між точками M_1і M_2 можна подолати, йдучи паралельно до координатних осей (вздовж катетів прямокутного трикутника, для якого відрізок M_1M_2 є гіпотенузою). Подібна ситуація виникає у місті з прямокутним розташуванням вулиць. Це один із прикладів, де поняття відстані між точками не співпадає з класичним, як довжини відрізка, що з'єднує ці точки.

Данні приклади демонструють відмінність класичного поняття відстані між точками, як довжини відрізка, що з'єднує ці точки. Геометричною інтерпретацією отриманого результату може слугувати метричний простір точок одиничного кола з центром у центрі координат, у якому за відстань між двома різними точками кола вибрано довжину найменшої з двох дуг кола, на які ці точки розбивають його.

ВИСНОВКИ

В результаті проведеної роботи були досліджені окремі геометричні образи в метричному просторі. Теоретично обґрунтовано методичну систему вивчення геометричних образів у метричному просторі.

Для досягнення поставленої мети були виконані наступні завдання:

1. Проаналізовано матеріали шкільного курсу геометрії з формулювання основних геометричних понять, таких як: відстань, точка, пряма, кут і т д.;
2. Наведено узагальнені основні геометричні поняття, подано короткі описи неевклідових геометрій: геометрії Рімана та Лобачевського, проективній геометрії й аксіоматиці Гільберта;
3. Систематизовано матеріал з основ метричної геометрії при прямолінійному і плоскому розміщенні точок метричного простору, при вивченні базових математичних дисциплін;
4. Розглянуто приклади узагальнених основних геометричних понять: точки, відстані між точками та прямолінійності їх розміщення у шкільному курсі математики, саме у конкретних метричних просторах. Розглянуто й наведено приклад узагальненого поняття кута.

На підставі проаналізованої літератури можна зробити наступні висновки:

1. Ознайомлення учнів з основними поняттями неевклідової геометрії слід розпочинати з їх узагальнення;
2. Знайомство з узагальненими геометричними поняттями та об’єктами можна розпочинати з 7 класу;

3. З елементами неевклідових геометрій учнів слід знайомити поступово, використовуючи для цього як навчальні заняття у класі, так і позакласну роботу з математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Blumenthal L.M. (1970). Theory and applications of distance geometry (вид. 2nd). / L.M. Blumenthal. - Bronx, New York: Chelsea Publishing Company. с. 347. ISBN 0-8284-0242-6. LCCN 79113117. (англ.)

2. Crippen G.M. Distance Geometry and Molecular Conformation /G.M.Crippen, T.F.Havel// John Wiley and Sons. – 1988.

3. Crippen, G.M.; (1988)./ Havel, T.F. Distance Geometry and Molecular Conformation. John Wiley & Sons. (англ.)

4. Liberti, L.(2008). A Branch-and-Prune Algorithm for the Molecular Distance GeometryProblem./ Lavor C.; Maculan N. International Transactions in Operational Research 15: 1–17. (англ.)

5. Menger K. Untersuchungen uber allgemeine Metric / K.Menger // Math.Ann. – 1928. – P. 75-163.

6. More, J.J.; Wu, Z. (1999)./ More, J.J.; Wu, Z Distance Geometry Optimization for Protein Structures. Journal of Global Optimization 15: 219–223. (англ.)

7. Mucherino, A. (2009). Comparisons between an Exact and a MetaHeuristic Algorithm for the Molecular Distance Geometry Problem. / Liberti, L.; Lavor, C.; Maculan, N. ACM Conference Proceedings, Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO09): 333–340. (англ.)

8. Александров А. Д.Геометрия/ Нецветаев Н. Ю.— М.: Наука, 1990.

9. Александров П. С. Что такое неэвклидова геометрия. / Александров П. С. — М.: УРСС, 2007.

10. Александров, А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей/ А.Д. Александров, – М.-Л.:Гостехиздат, 1948. – 388с.

11. Александрян Р.А.Общая топология: Учеб.пособие для вузов/ Э.А. Мирзаханян — М. : Высш. школа, 1979. — 336 с.

12. Алексеевский Д. В. Геометрия пространств постоянной кривизны. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. / Э. Б.Винберг, А. С. Солодовников. — М.: ВИНИТИ, 1988. — Т. 29. — С. 1—146.

13. Апостолова Г. В. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г. В. Апостолова.— К.: Генеза, 2015. 216 с.

14. Апостолова Г. В. Геометрія:підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл/ Г. В. Апостолова.— К.: Генеза, 2015. 216 с

15. Атанасян Л.С. Геометрия / В.Т, Базылев. Ч.II. – М.: Просвещение, 1987. – 332 с.

16. Афанасьєва О. М. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. / Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К Сліпенко.— Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. 480 с.

17. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. Закл/ В. Г. Бевз. — К.: Відродження, 2015. 288 с.

18. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл/В. Г. Бевз. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

19. Бевз Г. П. Математика : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту/В. Г. Бевз. — К.: Генеза, 2011. 294 с.

20. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл/ В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова.—К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

21. Бевз Г.П. Геометрія: Підруч. для 7 кл.загальноосвіт.навч.закл / В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова.— К.: Відродження, 2015. 192 с.

22. Берже М.Геометрия. Том 1. ./ М. Берже.— М.: Мир, 1984. 559 с

23. Берже М. Геометрия. — Пер. с франц. — в 2 т./ М. Берже.— М.: Мир, 1984. — Том II, часть V: Внутренняя геометрия сферы, гиперболическая геометрия, пространство сфер.

24. Болтянский В. Г. Наглядная топология випуск 21 серії «Библиотечка квант»/ В. А .Ефремович. — М., Наука, 1982.

25. Буземан Г. Геометрия геодезических./ Г. Буземан.— М.: Физматгиз, 1962. 503 с

26. Бураго Д. Ю. Курс метрической геометрии/ Ю. Д., Бураго , С. В Иванов. —Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 512 с.

27. Бурда М. І. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл/ Н.А Тарасенкова. — К.: УОВЦ «Оріон», 2017. 224 с.

28. Бурда М. І.. Геометрія:підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Н.А Тарасенкова.—К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. 208 с.

29. Гильберт Д. Основания геометрии. Д. Гильберт.— Петроград: Сеятель, 1923.152 с.

30. Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем.,/ Д. Гильберт. —М.-Л., 1948.

31. Глаголев Н. А. Проективная геометрия./ Н. А. Глаголев. —М.. 1963.

32. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. Частина 3. / М.О .Давидов. — К.: Вища школа, 1979. 383 с.

33. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — 7-е изд./ Н.В. Ефимов.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 584 с. — ISBN 5-9221-0267-2.

34. Ефимов Н.В., Высшая геометрия/ Н.В. Ефимов.— Москва, Наука, 1978.

35. Завало С.Т (1972). Елементи аналізу. Алгебра многочленів. / С.Т. Завало. — Київ: Радянська школа.

36. Істер О. Н. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл./ О. Н. Істер. —К.: Генеза, 2015. 256 с.

37. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ О. С. Істер. —К.: Генеза, 2017. 264 с.

38. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. ./ О. С. Істер. — К.: Генеза, 2017. 240 с.

39. Істер О. С.Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. — К.: Генеза, 2015. 184 с.

40. Каган В. Ф. Система посылок, определяющих евклидову геометрию. Зап. матем. отд. О-ва естествознания../ В. Ф. Каган.- Одесса, 1902.№ 20.С. 67-105.

41. Каган В. Ф. Основания геометрии./ В. Ф. Каган.- М.; Л., 1949–1956. Ч. 1–2;

42. Каган В.Ф. Основания геометри.Часть2/В.Ф.Каган – М.-Л.:Гостехиздат,1956.-344с. [розділ XIX, с252-312].

43. Каган В.Ф. Основания геометрии. Часть 2./ В. Ф. Каган.- М.-Л.:Гостехиздат, 1956. 344 с.

44. Каган В.Ф. Очерки по геометрии. ./ В. Ф. Каган.- М.: Издательство Московского университета, 1963. 571 с.].

45. Канторович Л.В. Функциональный анализ/ Г.П. Акилов – М.:Наука, 1977.–742с.

46. Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. Пер. с англ. / Ф. –Картеси. М., 1980.

47. Кирдей І. Персональна сторінка вчителя І.Кирдей [Електронний ресурс] / І. Кирдей. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: http://kirdey.com/geometriya-rimana

48. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — Любое издание.

49. Конотоп К. А. Розробка навчального забезпечення з дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень [Електронний ресурс] / В. Б. Григор'єва // м. Херсон, ХДУ. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: http://ekhsuir.kspu.edu/handle/123456789/11869.

50. Кравчук В. Р. Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл./ М. В Підручна., Г.М Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2015. 224 с.

51. Кравчук В. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл./М. В Підручна., Г.М Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. 264 с.

52. Кравчук О. М. Збірник статей математика "ІНнформаційні технології. Освіта." Стаття "Історія виникнення та розвитку неевклідової геометрії." / І. А. Плахтина. //УДК004.93+004.94+370+387.1+519.6+621+681.3ББК22.1+60.55.373+74.58. – С. 167.]

53. Кузьмич В. І. Геометричні властивості метричних просторів.Укр. мат. журн., 2019. № 3(71).С. 382–399.].

54. Кузьмич В. І. Кутова характеристика у метричному просторі. Algebr.andGeom. MethodsofAnalysis: Int. Sci. Conf.:Abstracts, 2017.С. 11-12.

55. Кузьмич В. І. Плоско розміщені множини точок у метричному просторі.Вісн. Львів. ун-ту. Сер: мех.-мат., 2017.Вип. 83.С. 58-71.

56. Кузьмич В. І. Побудова плоских образів у довільному метричному просторі.Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки, 2017.№ 11.С. 40-46.

57. Кузьмич В. І. Поняття кута при вивченні властивостей метричного простору.Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки, 2016.№ 13.С. 26-32.

58. Кузьмич В.І. Аналоги формули Юнгіуса об’єму тетраедра./ В.І . Кузьмич. –Вісн. Черкас. ун-ту. Пед. науки, 2012.№ 36.С. 55-64.

59. Кузьмич В.І.Кутова характеристика у метричному просторі[Електроннийресурс] //Algebra icand geometric methodsofanalysis:Informationalscientificconference: bookofabstracts/ В.І.Кузьмич. –May 31-June 5,2017, Odessa, Ukraine. – С.11-12. – Режим доступу: https://www.imath.kiev.ua/topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf].

60. Лобачевский и его геометрия. М., 1955; Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей. М., 1956;

61. Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч.: В 5 т./ Н. И. Лобачевский. –М.; Л., 1946–1951;

62. Мальований Ю. І. Алгебра : підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл/ Г.М. Литвиненко, Г.М. Бойко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. 256 с.

63. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2018. 512 с.

64. Мерзляк А. Г. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів : академ. рівень, проф. рівень./ Д.

А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С.Якір. – Х. : Гімназія, 2011. 431 с.

65. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл.загальноосвіт.навч. закладів/ В. Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2017. 416 с.

66. Мерзляк А. Г. Алгебра. Пропедевтика поглибленого вивчення : навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики/В. Б. Полонський, М.С.Якір. –Х.: Гімназія, 2015. 240 с.

67. Мерзляк А. Г. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ В. Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2017. 304 с.

68. Мерзляк А. Г. Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення: навч.посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. В. Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2015. 192 с.

69. Мерзляк А. Г. Алгебра :підруч. Для 8кл. з поглибленим вивченням математики/ В. Б. Полонський, М.С.Якір. –Х.: Гімназія, 2016. 384 с.

70. Начала Евклида. Книги I-VI. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 447 с.

71. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень./ О. Є. Долгова - Х. : Гімназія, 2011. 448 с.

72. Подаева Н.Г.Лекции по основаним геометри/ Д.А. Жук. – Елец.: ЕГУ, 2005.-62с

73. Понарин Я.Д. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т.2:Стереометрия, преобразования пространства/Я.П.Понарин. –

Москва: Московский центр непрерывного математического образования, 2006. – 256с

74. Сверчевська І.А. Методична система вивчення геометричних тіл у загальноосвітній школі : дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М.П.Драгоманова. І.А. Сверчевська — К., 2006. — 325арк. : іл. — Бібліогр.: арк. 187-206.

75. Синюков Н.С. Топология / Т.И. Матвиенко. – К.: Вищашк. Головное изд-во, 1984. – 264 с.

76. Степанов Н. Н. Сферическая тригонометрия./ Н. Н. Степанов.— Л.—М., 1948.

77. Стєганцева П.Г. Основи математики: навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» / М.О.Гречнєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 85 с.

78. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл./ І. М .Богатирьова., О. М. Коломієць., З. О.Сердюк. – К.: УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

79. Тарасенкова Н. А. Математика : підруч. для 7 класузагальноосвіт. навч. закл. ./ І. М .Богатирьова., О. М. Коломієць., З. О.Сердюк. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.

80. Ткаченко І.О. Пошук молодих. Випуск20:Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науковопрактичної конференції «Інноваційні технології навчання природничо-математичних дисциплін у закладах середньої та вищої освіти», (Херсон, 16 червня 2020 року.)/В.І Кузьмич – Херсон: Видавництво ХДУ, 2020. – 63 с.

81. Ткаченко І.О. Пошук молодих. Випуск 21: Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науковопрактичної

конференції «Актуальні проблеми природничо-математичних дисциплін у закладах освіти», (Херсон, 19 вересня 2020 року.)./ – В.І Кузьмич. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2020. – 93 с.

82. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии./ Р. Хартсхорн. – М., 1970.

83. Четверухін М. Ф. Вища геометрія/ М. Ф. Четверухін /- К., 1952;

84. Шафаревич И. Р. Линейная алгебра и геометрия./ А.О Ремизов. — М.: Физматлит, 2009.

85. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского./ П. А. Широков 2-е изд. М., 1983.

86. Шмагло К. С. Методика вивчення тіл обертання в шкільному курсі геометрії (профільний рівень) [Електронний ресурс] / Л.О. Черних // м. Кривий Ріг, КПДУ. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/2828/1/магістерська робота Шмагло Карини Сергіївни 11_12_2018.pdf

Додаток А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Ткаченко Іванна Олександрівна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципівта правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традиційуніверситету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні йполітичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов’язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв’язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участів будь-якій діяльності, пов’язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

- не поширювати неправу та компрометуючуінформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;
- не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг абоздійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальнідомагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базіуніверситету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов’язаних з діяльністюуніверситету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров’ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальностей до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

06.11.2020

Ткаченко Іванна Олександрівна