МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп’ютерних наук, фізики та математики
Кафедра фізики та методики її навчання

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА КОНСТАНТА ЧИСЛО П У ЗАГАЛЬНОМУ І ТЕОРЕТИЧНОМУ КУРСАХ ФІЗИКИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття рівня вищої освіти «магістр»

Виконав: студент групи 15-211м
Спеціальності 014 Середня освіта (Фізика)
Освітньо-професійної програми
Середня освіта (Фізика)

Бірюк Олександр Миколайович

Керівник:
доктор педагогічних наук,
професор Кузьменков С.Г.

Рецензент:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Бистрянцева А.М.

ХЕРСОН – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Розуміння законів Всесвіту має важливе значення для розвитку та збереження людської цивілізації. З кожним етапом розвитку науки людство натикалось на технологічні та методологічні обмеження дослідження теорій, що безумовно давало поштовх до розвитку як технологій, так і методологічного апарату науки. Така тенденція існує зараз і, більш того, буде існувати завжди протягом усього періоду існування розумної істоти у Всесвіті.

На сучасному етапі розвитку науки ученим вдалось створити послідовну теорію будови нашого Всесвіту. Основні поняття щодо розуміння природи мають свою сферу існування, всередині якої вони ефективно описують усі відповідні явища.

Проте є найбільш фундаментальні поняття в науковому підході до розуміння природи, які описують найбільш загальні властивості Всесвіту та його компонентів. Такими поняттями, на думку І. Розенталя, О. Спірідонова, К. Томіліна, С. Каршенбойма, Ж.-Ф. Узана, Х. Фрітцша, В. Рубакова, Л. Окуня, О. Жукова та інших є фундаментальні константи фізики та математики, які знаходять своє відображення у всіх наукових галузях. Звичайно, що математичний апарат глибоко вкорінений в структуру теорій, що описують природу. Проте глибинний зв'язок математичних розрахунків структури природи і їх експериментального підтвердження потребує детального дослідження для розуміння єдності і водночас різноманітності нашого Всесвіту.

Тому тема нашого дослідження: «Фундаментальна математична константа число π у загальному і теоретичному курсах фізики» має важливе методологічне і практичне значення і є актуальною.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дипломна робота виконувалась відповідно до тематичного плану наукових досліджень кафедри фізики та методики її навчання:

«Інноваційні освітні технології навчання фізики та астрономії у закладах освіти різних рівнів» (реєстраційний номер No0119U101144 від 19.03.2019).

Мета дослідження: дослідити застосування математичної константи π для вираження деяких законів загального і теоретичного курсів фізики.

Для реалізації мети дослідження було поставлено такі завдання:

1. Опрацювати літературу з досліджуваної теми;
2. Розглянути поняття фундаментальної константи;
3. Розглянути означення і історію фундаментальної математичної константи π;
4. Розглянути застосування числа π у математиці та зв'язок з фізичними константами;
5. Дослідити число π в основних співвідношеннях електростатики;
6. Дослідити застосування π у фотометрії;
7. Дослідити значення математичної константи π для законів обертального руху тіла.
8. Дослідити застосування числа π в електродинаміці та квантовій механіці.
9. Дослідити застосування числа π у статистичній фізиці та у космології.

Об'єкт дослідження– фундаментальні константи.

Предмет дослідження – фундаментальна математична константа π.

Методи дослідження: теоретичний аналіз науково-методичної літератури, синтез, порівняння, математичні розрахунки на основі фізичних моделей.

Наукова новизна одержаних результатів – встановлення причин появи числа π у законах загального і теоретичного курсів фізики.

Практичне значення одержаних результатів – результати дослідження можуть бути використані для формування цілісної природничо-наукової картини світу у майбутніх вчителів математики, фізики і астрономії.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Список використаних джерел становить 47 найменувань.

РОЗДІЛ 1
МАТЕМАТИЧНА СУТНІСТЬ ЧИСЛА π

1.1. Поняття фундаментальної константи

Константи грають важливу роль у фізиці, оскільки вони встановлюють порядок величини явищ, дають змогу створювати нові концепції та характеризують область дій теорій, в яких вони з’являються. Вони також грають центральну роль в космології та астрофізиці. Їх значення фіксує частоту локальних годинників (наприклад, швидкість радіоактивного розпаду, атомні переходи і т. д.), які дають змогу виконувати датування геофізичних, геологічних, археологічних і астрономічних об’єктів і явищ. Фундаментальні константи є ключем до реконструкції історії нашого Всесвіту.

Під поняттям «фундаментальні константи» К. Томілін розуміє «метрологічно незалежні сталі, що є природними одиницями фізичних величин, кількість яких необхідна і достатня для еталонування одиниць усіх фізичних величин і однозначної фіксації числових значень усіх інших констант» [32, с. 18].

Згідно з Енциклопедією фізики і техніки «фундаментальні фізичні константи – сталі, що входять в рівняння, які описують фундаментальні закони природи і властивості матерії [43].

О. Спірідонов чітко розмежовує поняття «фізична константа» та «фундаментальна фізична стала», порівнюючи такі константи як густина води, молярний об’єм ідеального газу за нормальних умов та швидкість світла. Зрозуміло, що густина води є константою, але ця величина характеризує лише будову однієї речовини в одному з агрегатних станів, хоч і дуже поширеної та важливої для утворення життя. Тому густина води не може претендувати на фундаментальну роль у науці. Так само і молярний об’єм ідеального газу V_m має стале значення лише за певних умов, на відміну від швидкості світла у вакуумі *c*, значення якої не змінюється за жодних умов і має фундаментальне значення для нашого світу. Науковець детально аналізує поняття фундаментальної фізичної константи і серед великої кількості фізичних сталих виокремлює саме фундаментальні. Так, «фундаментальні фізичні сталі – це константи, які дають інформацію про найбільш загальні, стрижневі властивості матерії» [31].

К. Томілін приводить наступні властивості фундаментальних фізичних констант:

1) універсальні параметри, які зберігають своє значення в будь-якій точці Всесвіту;

2) описують властивості елементарних частинок;

3) є коефіцієнтами пропорційності в фундаментальних фізичних законах;

4) визначають межі застосування різних фізичних теорій;

5) є коефіцієнтами, що установлюють зв'язок між різними теоріями;

6) відображають принцип відповідності та співвідношення граничного переходу між класичними і некласичними теоріями [32].

Фундаментальні константи не визначаються теоріями, в яких вони з’являються. Їх можна лише виміряти, що насправді є їх найважливішою властивістю. Це пояснює, чому метрологія зайнялась пошуком вимірювання фізичних констант з надзвичайно високою точністю, яка глибоко пов’язана з покращенням визначення еталонів одиниць [47].

Отже, фундаментальну константу можна визначити як «будь-який параметр, який не визначається теоріями, в яких він з'являється», який підкреслює, що константи та теорії не можна розглядати окремо. Дійсно, ці параметри слід вважати сталими з двох причин. По-перше, з теоретичної точки зору, ми не маємо для них рівняння еволюції, і їх не можна виразити через інші більш фундаментальні величини. По-друге, з експериментальної точки зору, в режимах, в яких ці теорії були визначені, їхні константи мають бути сталими з точністю експериментів, щоб забезпечити їх відтворюваність. Це означає, що тестування на незмінність цих параметрів є тестом теорій, в яких вони з’являються, і дає змогу нам розширити знання про їх область існування.

До таких констант учений відносить G, c, e, h, m_e і пояснює, що саме ці сталі величини описують фундаментальні властивості матерії. Гравітаційна стала G – кількісна характеристика тяжіння, взаємодії, що властива абсолютно всім об’єктам. Швидкість світла c – максимально можлива швидкість поширення будь-яких взаємодій у природі. Елементарний електричний заряд e – мінімально можливе значення електричного заряду у вільному стані в природі (кварки існують у вільному стані лише у кварк-глюонній плазмі). Стала Планка h відіграє фундаментальну роль у фізиці мікросвіту і визначає мінімальну зміну фізичної величини. Маса електрона m_e – міра інертності найлегшої стабільної зарядженої елементарної частинки.

А. Зельманов [9] ще в 60-ті роки XX століття зобразив «куб фізичних теорій», з трьома ортогональними осями $1/c$, G, $\hbar$ (рис. 1.1). Перехід у площину відбувається при перетворення однієї з одиниць в нуль. Ці три фундаментальні фізичні константи ще називають суперконстантами.

Таблиця 1.1

Фундаментальні фізичні константи

Назва	Позначення	Значення	Одиниці вимірювання в СІ
Гравітаційна стала	G	$6{,}6725985 \cdot 10^{-11}$	$м^3 \cdot кг^{-1} \cdot с^{-2}$
Швидкість світла у вакуумі	c	299792458	$м \cdot с^{-1}$

Елементарний електричний заряд	e	$1{,}6021773 \cdot 10^{-19}$	Кл
Стала Планка	h	$6{,}6260755 \cdot 10^{-34}$	Дж·с
Маса електрона	m_e	$9{,}1093897 \cdot 10^{-31}$	кг

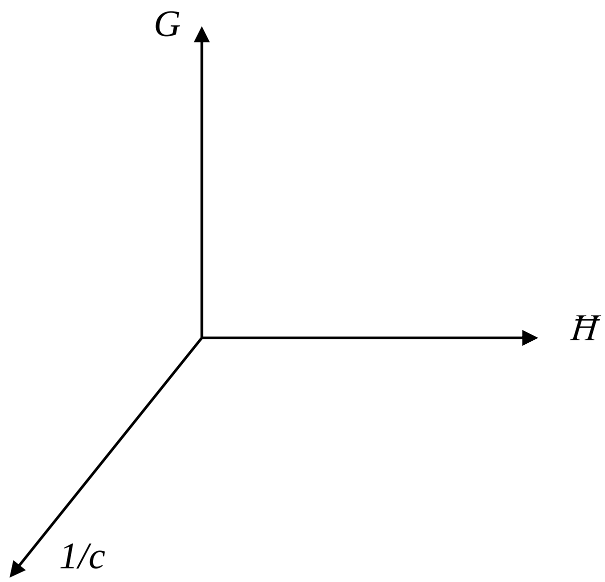


Рис. 1.1. Осі кубу фізичних теорій

На рис. 1.2. зображений куб фізичних теорій, на початку координат розташована ньютонівська механіка (НМ). Над нею – нерелятивістська гравітація (НГ), справа – квантова механіка (КМ), попереду – спеціальна теорія відносності (СТВ). Синтез СТВ і КМ дає квантову теорію поля (КТП). Синтез НГ и СТВ дає загальну теорію відносності (ЗТВ). Синтез КМ і НГ дає нерелятивістську квантову гравітацію (НКГ). А синтез усіх теорій в приводить до теорії всього (ТВ). Англійський акронім – TOE («Theory of Everything») (Окунь Л.) [20].

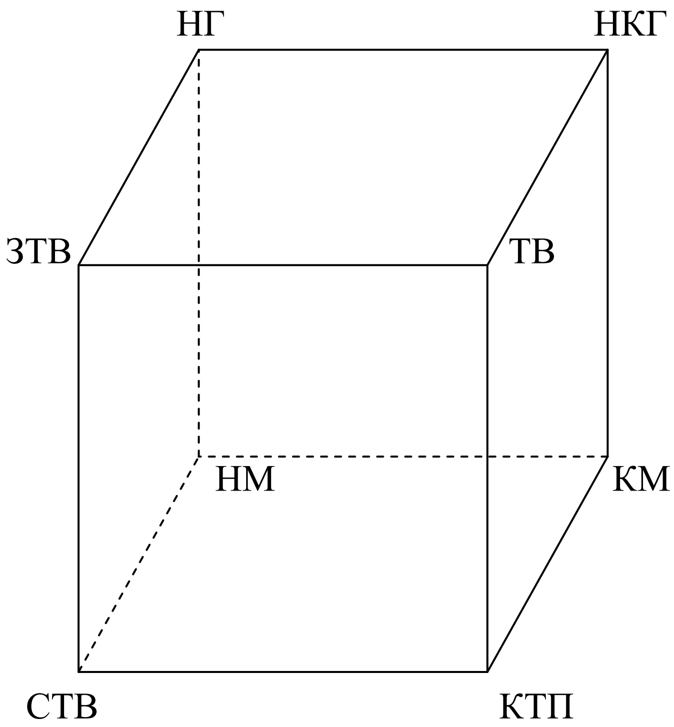


Рис. 1.2. Куб фізичних теорій

К. Томілін зазначає, що усі фізичні сталі можна розділити на три класи (рис. 1.3).

До фундаментальних сталих учений включив сталу Больцмана, k – одиницю ентропії і теплоємності, фундаментальне значення якої полягає у тому, що вона з'єднує макро- та мікросвіт.

Кожну розмірну сталу можна визначити за допомогою єдиної рівності: добуток безрозмірної сталої на комбінацію фундаментальних сталих.

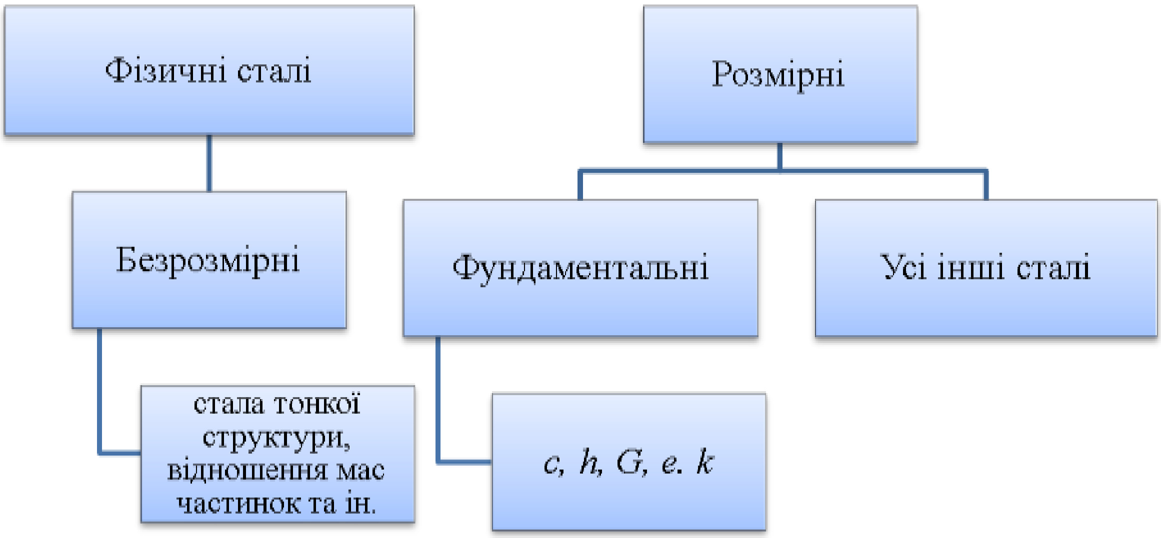


Рис. 1.3. Класифікація сталих за К. Томіліним

Безрозмірними константами є відношення мас елементарних частинок, відношення різних магнітних моментів та безрозмірні константи фундаментальних взаємодій. За допомогою останніх можна порівняти фундаментальні взаємодії між собою та оцінити швидкість перетворення одних частинок в інші, а найголовніше розробити єдиний теоретичний опис усіх фізичних процесів.

Вважаємо доцільним привести значення цих констант:

- безрозмірна стала електромагнітної взаємодії (стала тонкої структури) $\alpha_e = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$;
- безрозмірна стала сильної взаємодії $\alpha_s \approx 1$;
- безрозмірна стала слабкої взаємодії $\alpha_w = \frac{g_F m_p c^2}{\hbar^3} \approx 10^{-5}$ ($g_F \approx 10^{-61}$Дж·м^3 – стала Фермі для слабких взаємодій);
- безрозмірна стала гравітаційної взаємодії $\alpha_g = \frac{G m_p{}^2}{\hbar c} \approx 10^{-39}$.

У математиці термін «константа» має декілька значень:

- деяка стала величина (на відміну від змінних величин);
- стала величина, що має конкретне значення (Томілін К.) [32].

Таких математичних констант декілька десятків, всі вони безрозмірні і визначені без фізичних вимірювань. Проте серед них є сталі, які мають фундаментальне значення – основа натурального логарифма *e* та число π. Ці константи використовують не лише в багатьох розділах математики, а й в природничих науках для пояснення фундаментальних властивостей Всесвіту. Означення та історію відкриття константи π розглянемо у наступному підрозділі.

1.2. Означення та історія фундаментальної математичної константи числа π

Загальноприйняте означення числа π – відношення довжини кола до його діаметру. Зрозуміло, що неможливо встановити, хто першим відкрив цю фундаментальну закономірність.

Насправді означення числа π натикається на «підводний» камінь у вигляді значення довжини кола. Визначенням цієї величини почали займатись з часів давнього Вавилону (III-II тис. до н.е.). Давні вавилоняни користувались співвідношенням $S = \frac{C^2}{12}$ (*S* – площа кола, *C* – довжина кола) (Жуков О.) [8]. З чого видно, що вони приймали значення π=3.

Довжина кола – це довжина дуги по периметру кола (Apostol T.) [44].

У 1841 році Карл Вейєрштрасс запропонував визначати π як інтеграл, за допомогою якого можна визначити довжину дуги півкола одиничного кола, заданого рівнянням $x^2+y^2=1$ в декартових координатах:

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.1}$$

Річард Бальцер та Едмунд Ландау запропонували наступне означення числа π – найменше додатне число, функція косинуса половини якого дорівнює 0 (Walter R.) [49].

У таблиці 1.2 вказані наближені значення π у давні часи. Як видно з таблиці, визначенням значення числа π займались з давніх часів та у багатьох країнах. Найбільш точне його значення було отримане у V ст. китайським математиком Цзу Чун-чжи, як відношення чисел $\frac{355}{113} = 3{,}1415929...$

Таблиця 1.2

Наближені значення числа π у давнину

№	Країна	Дата	Наближене значення π
1	Міжріччя	II тис. до н.е.	3
2	Давній Єгипет	II тис. до н.е.	3,16
3	Давній Китай	XII ст. до н.е.	3
4	Давня Іудея	X-V ст. до н.е.	3
5	Китай	I ст. до н.е. (Лю Сінь)	3,1547
6	Італія	14 р. до н.е. (Вітрувій)	$3\frac{1}{8} = 3{,}125$
7	Китай	II ст. (Чжан Хен)	$\sqrt{10} = 3{,}162...$
8	Китай	V ст. (Цзу Чун-чжи)	$\frac{355}{113} = 3{,}1415929...$
9	Індія	598 р. (Брахмагупта)	$\sqrt{10} = 3{,}162...$

Одним з перших запропонував метод обчислення довжини кола давньогрецький філософ Антифон у V ст. до н.е. Цей метод базувався на обчисленні периметру вписаного в коло багатокутника з якомога більшою кількістю сторін (рис. 1.4 а). Пізніше піфагорієць Бризон запропонував знаходити довжину кола, як середнє значення між периметрами вписаного в коло та описаного навколо нього багатокутників (рис. 1.4 б).

Наближене значення π у вигляді відношення $\frac{22}{7}$ знайшов Архімед (287-212 рр. до н.е.). Учений користувався методом вписаних та описаних багатокутників, а його арифметичні розрахунки були дуже точними для того часу.

Клавдій Птолемей (87-125) для 720-кутника отримав значення $\pi \approx \frac{377}{120} \approx 3{,}14166$. Поступово арифметичні розрахунки вчених різних країн привели до визначення числа π з точністю до 20 десяткових знаків за допомогою 32512254720-кутника. Довготривалі розрахунки провів професор математичних наук Лейденського університету Лудольф ван Цейлен у 1596 році. Згодом він продовжив розрахунки і визначив число π з точністю до 35 знаків (Кимпан Ф.) [14].

Метод вписаних та описаних багатокутників у коло активно використовували вчені до XVII ст. поки голландські вчені Веллеброд Снеллій та Християн Гюйгенс довели кілька теорем про співвідношення між довжинами хорд і дуг, що їх стягують. Це їм дало змогу розраховувати значення π з більшою точністю, але для багатокутників з меншою кількістю кутів.

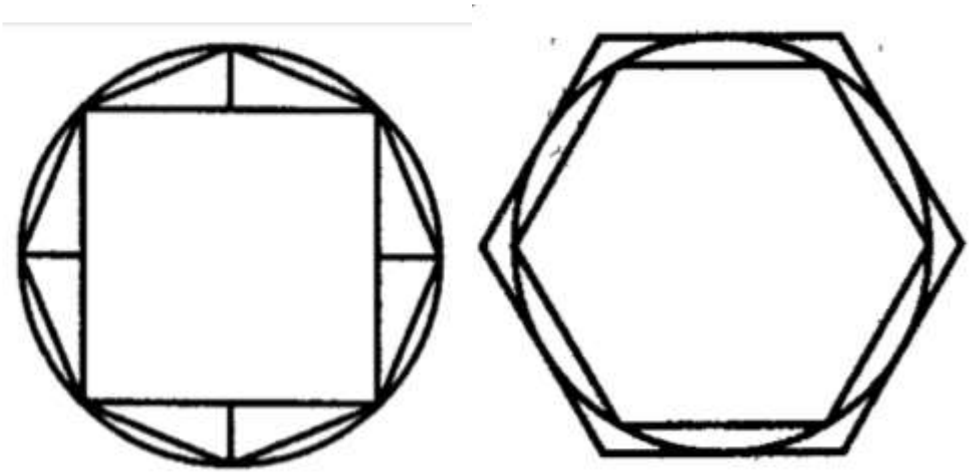
Загалом для числа π було виведено досить багато формул з нескінченим виконанням операцій для обчислення його значення. Наведемо деякі з них.

Формула Вієтта:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots \tag{1.2}$$

Формула визначення π як нескінченного добутку була виведена Джоном Уоллісом у 1655 р. [40] методом послідовної інтерполяції.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\ldots \qquad (1.3)$$



а) б)

Рис. 1.4.
а) визначення довжини кола методом вписаного багатокутника;
б) визначення довжини кола методом вписаного та описаного багатокутників.

Наприкінці XVIII на початку XIX століть Іоганн Генріх Ламберт та Адріан Марія Лежандр за допомогою властивостей ланцюгових дробів змогли представити число π у вигляді:

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\ldots}}}} \qquad (1.4)$$

У роки розвитку математичного аналізу число π вдалось представити у вигляді ряду Лейбниця:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots \qquad (1.5)$$

Сьогодні існує досить багато представлень числа π у вигляді різних рядів.

Вважають, що перше позначення цієї величини літерою π з’явилось у 1706 році у праці Вільяма Джонса «Synopsis Palmoriorum Matheseos». Справжнього поширення константа π у сучасному її позначенні набула після публікації праць Леонарда Ейлера (1707–1783) (Томілін К.) [32].

Відтак, протягом трьохсот років різними методами було виведено багато співвідношень з визначення числового значення математичної константи π: за допомогою рядів (Лейбниця, обернених квадратів та ін.), границь, інтегралів тощо.

Поява електронно-обчислювальної техніки дала змогу швидко та точно обчислювати значення π. Так у 1949 р. Джон фон Нейман обчислив значення π до 2037 знаків на одній з перших обчислювальних машин. Зараз розрахунок значення π не є проблемою. Учені тепер намагаються створити якнайшвидші та найефективніші алгоритми розрахунку. Наразі числове значення π=3,14159265359….. обчислене до 31,4 трильйонів знаків після коми [40].

1.3. Число π у математиці

У теорії чисел π вважають ірраціональним та трансцендентним.

Адріан Марія Лежандр довів, що число π ірраціональне. Ірраціональне число – число, значення якого не можна представити у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m і n цілі числа, а $n \neq 0$ (1.2). Тобто π може бути представлене лише у вигляді нескінченого неперіодичного десяткового дробу.

Трансцендентними називають числа, які не можуть бути коренями алгебраїчного багаточлену з раціональними коефіцієнтами (раціональні числа – множина нескоротних дробів із цілим чисельником і натуральним знаменником).

Жозеф Ліувілль встановив, що число e не може бути коренем рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де коефіцієнти a, b, c – раціональні числа.

Пізніше Фердинанд Ліндеман довів теорему, що якщо $a_0, a_1, \ldots, a_n$ не рівні нулю алгебраїчні числа, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – попарно різні алгебраїчні числа, то рівність $a_0 e^{\lambda_0} + a_1 e^{\lambda_1} + a_2 e^{\lambda_2} + \ldots + a_n e^{\lambda_n} = 0$ не можлива (алгебраїчне число – підмножина комплексних чисел, кожне з яких є коренем хоча б одного багаточлена певного степеню з раціональними коефіцієнтами).

З доведенням трансцендентності числа e пов'язане і доведення цієї властивості для числа π. У тотожності Ейлера $1 + e^{i\pi} = 0$ добуток $i\pi$ не може бути алгебраїчним, відтак алгебраїчним не може бути число π, тобто воно трансцендентне (Айерлэнд К., Роузен М.) [1].

Число π використовують для вимірювання кутів. Кутова міра у 180° рівна π радіан. $1° = \dfrac{\pi}{180}$ радіан. Повне коло охоплює кут у 2π радіан.

Радіан – стандартна одиниця виміру дуги і кута. Довжина дуги кола, на якій вміщується її радіус і є радіаном. Центральний кут на колі охоплює дугу s_{AB}, довжина якої дорівнює радіусу r (рис. 1.5):

$$1 рад = \frac{s_{AB}}{r}.$$

Радіан – для пласких кутів і стерадіан – для об'ємних кутів є одними з додаткових одиниць в СІ.

Будь-який кут φ, утворений двома радіусами, виміряний у радіанах, дорівнює довжині дуги між двома променями s_{AX}, поділений на радіус r. Отже, повний кут φ (360˚):

$$\varphi = \frac{s_{AD}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ рад}. \tag{1.6}$$

Необхідно розрізняти вживання константи π у двох контекстах: з одного боку, це величина, що визначається як відношення довжини кола ($2\pi r$) до його діаметра ($d = 2r$).

З іншого боку, згідно з визначенням радіана та за допомогою рівняння (1.6), величина π – кут. З огляду на вищезазначене константа π знаходить своє відображення у тригонометрії.

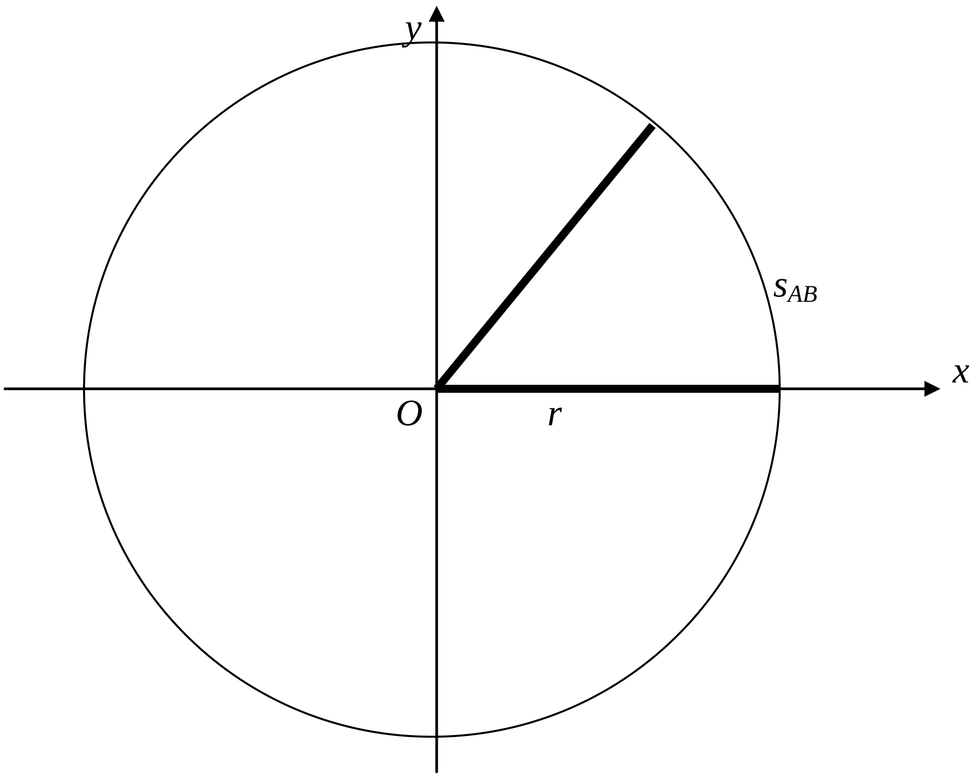


Рис. 1.5. До означення радіана

Періоди тригонометричних функцій кратні π: синус і косинус мають період 2π (рис. 1.6).

Цю математичну константу також використовують для обчислення багатьох виразів. Наведемо деякі з них, згідно з джерелами [1, 7, 18].

З числом π пов’язано багато нерівностей. Наприклад, ізопериметрична нерівність, яка пов’язує площу та периметр будь-якої плоскої фігури: $4\pi S \le p^2$.

Константа π є параметром у перетворенні Фур’є:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \tag{1.7}$$

Константа π також з'являється і у виразах проективної геометрії, топології, векторних розрахунках, у деяких відомих інтегралах. Наприклад, у інтегралі Гаусса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \tag{1.8}$$

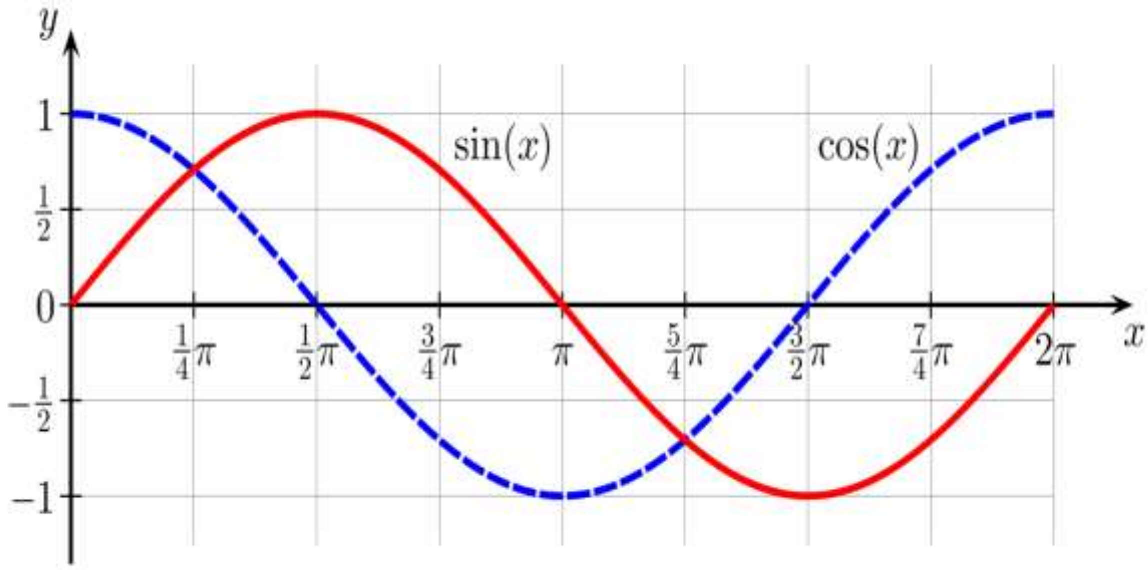


Рис.1.6. Графіки тригонометричних функцій синуса і косинуса.

У інтегральній формулі Коші бачимо:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{1.9}$$

Деякі відомі математичні функції також виражають з використанням константи π. Наприклад, для нецілого значення x значення гамма-функції задовольняє функціональну рівність:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{1.10}$$

Будь-яке комплексне число, скажімо z, може бути виражене за допомогою пари дійсних чисел. У полярній системі координат одне число (радіус або r) використовується для відображення відстані z від початку координат комплексної площини, а друге (кут або φ) обертання проти годинникової стрілки від позитивної дійсної лінії:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.11}$$

де i – уявна одиниця, що задовольняє рівності $i^2 = -1$. Часта поява π в комплексному аналізі може бути пов'язана з поведінкою експоненціальної функції комплексної змінної, описаною формулою Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.12}$$

де константа e – основа натуральних логарифмів. Ця формула встановлює відповідність між уявними степенями e та точками на одиничному колі з центром у початку координатної площини. Встановлення φ = π у формулі Ейлера призводить до рівності Ейлера, що відзначається в математиці завдяки тому, що вона містить п'ять найважливіших математичних констант:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{1.13}$$

Існує n різних комплексних чисел z, що задовольняють $z^n = 1$, і вони задаються формулою:

$$e^{2\pi ik/n} \tag{1.14}$$

Означення числа π пов'язане з колом, тому логічно, що його використовують у формулах з геометрії та тригонометрії для обчислення параметрів різних тіл обертання.

Наприклад, довжина кола радіусом R: $l=2\pi R$.

Площа круга радіусом R: $S=\pi R^2$.

Об'єм сфери радіусом R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Площа поверхні сфери радіусом R: $S=4\pi R^2$.

Коло і сфера доволі складні геометричні об'єкти. Насправді, точні визначення їх характеристик потребують застосування понять математичного аналізу. Проте ці складні математичні об’єкти у той же час виступають найпростішими моделями багатьох об’єктів і явищ у фізиці.

Отже, математична константа π використовується у різних розділах математики. Її поява у різних виразах говорить про її фундаментальне значення. Далі докладно розглянемо використання фундаментальної математичної константи π у законах, що описують будову нашого світу.

РОЗДІЛ 2
ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА КОНСТАНТА ЧИСЛО π У ЗАГАЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ

2.1. Число π та фізичні константи

Продовжуючи тему математичних констант, зазначимо, що число π поєднують у співвідношення разом з константами *e* та Φ (число золотого перетину, було запроваджене Піфагором, як доказ симбіозу математики та мистецтва):

$$\pi = e \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{\Phi \cdot \sqrt{3}}} . \tag{2.1}$$

Нагадаємо, що константа *e* – ірраціональне трансцендентне число, значення якого *e* = 2,71828182….

Константа Φ – золотий перетин, утворений двома величинами *a* і *b*, якщо:

$$\Phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803399... \tag{2.2}$$

Комбінації цих трьох математичних констант дають наступні співвідношення (Жуков О., Шуміхін С.) [8, 42]:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\alpha_e} \approx \frac{256e}{\pi\Phi}, \\ \frac{1}{\alpha_e} = \frac{3}{5}\pi^2 e^{\pi}, \\ \alpha_e^{20} = \sqrt[13]{\pi\Phi^{14}} \cdot 10^{-43}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

де α_e – безрозмірна константа тонкої структури – кількісна характеристика електромагнітної взаємодії і виражається через інші фундаментальні фізичні константи:

$$\alpha_e = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \qquad (2.4)$$

Відношення двох фізичних констант маси протона до маси електрона дорівнює:

$$\frac{m_\text{p}}{m_\text{e}} = 1836{,}15...$$

Це відношення можна виразити через математичну константу π:

$$\frac{m_\text{p}}{m_\text{e}} = 4\pi(4\pi - \frac{1}{\pi})(4\pi - \frac{2}{\pi}) = 1836{,}15...$$

Проте ми погоджуємось з думкою О. Жукова [8], що вираз даного відношення через π жодного фізичного змісту не має.

Важливим є інше співвідношення. Відомо, що швидкість світла у вакуумі можна визначити як $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, де μ_0 і ε_0 – магнітна і електрична сталі вакууму відповідно. Оскільки $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$, то і швидкість світла у вакуумі можна виразити через число π.

Важливою для фізики є також теорема про розмірності, згідно з якої будь-яке співвідношення між *n*-розмірними величинами, для вимірювання яких використано *k* основних одиниць вимірювання, можна представити у вигляді співвідношень між *n*-*k* безрозмірними комбінаціями цих величин.

Розглянемо задачу із знаходження формули для визначення циклічної частоти коливань струни ω. Відомо, що розмірність цієї величини $\left[\frac{1}{\text{с}}\right]$. Очевидно, що частота коливань залежить від довжини струни l розмірності [м], її маси m розмірності [кг] і сили натягу струни F розмірності $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right]$. Для вимірювання цих величин використовують три основних одиниці: метр, кілограм, секунда. Відповідно співвідношення між чотирма величинами ω, *l, m* та *F* можна представити у вигляді однієї безрозмірної комбінації $\frac{F}{\omega^2 lm}$. Звідси

$$\omega = k\sqrt{\frac{F}{lm}}\,, \tag{2.5}$$

де *k* – безрозмірний коефіцієнт. Згідно з [8] для коливання основного тону струни *k*=π.

Розглянемо більш точно розрахунки коефіцієнту. Для цього знайдемо розв'язок хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.6}$$

Рівняння (2.6) має задовольняти початковим умовам:

$$u(x,0)=f(x),$$

$$u'(x,0)=g(x).$$

А також граничним умовам:

$$u(0,t)=0,$$

$$u(l,t)=0,$$

де *t* та *x* – час та координата точки струни у положенні рівноваги, *u*(*x,t*) – функція, яка виражає відхилення точки струни від положення рівноваги, *a* – коефіцієнт пропорційності, що характеризує пружні властивості струни:

$$a^2 = \frac{Fl}{m}\,.$$

де *m* – маса струни.

Розв'язок цієї задачі має вигляд:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)\,, \tag{2.7}$$

де

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{l}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right),$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

З (2.7) слідує, що основний тон $u_1(x,t)$ струни має частоту коливань

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \pi\sqrt{\frac{F}{lm}}. \tag{2.8}$$

Отже, число π виникає під час оцінки об’єму чи площі різних тіл, під час розрахунку потоку світла від точкового джерела, під час оцінки квантових станів атому, обчисленні параметрів гармонічних осциляторів. Розглянемо вищезазначені положення детальніше у наступних підрозділах.

2.2. Число π в основних співвідношеннях електростатики

Електростатика – це розділ фізики, який вивчає взаємодію нерухомих відносно певної системи відліку електрично заряджених тіл і властивості полів, створених цими тілами.

Фундаментальним законом електростатики є закон Кулона: сила взаємодії двох точкових заряджених тіл прямо пропорційна добутку величин їх зарядів, обернено пропорційна квадратові відстані між ними і залежить від властивостей середовища (Савельєв І.) [25]. В СІ закон Кулона записують наступним чином:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}. \tag{2.9}$$

Вираз $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – коефіцієнт пропорційності для системи СІ, де ε_0 – електрична стала, ε – діелектрична проникність середовища. У інших системах одиниць цей коефіцієнт набуває іншого значення.

Запис закону Кулона у вигляді (2.9) та інших формул з цим коефіцієнтом називають раціоналізованим. Системи одиниць, побудовані на використанні раціоналізованих формул, також називають раціоналізованими. До таких систем належить система СІ (Сивухін Д.) [30].

Фізичний зміст коефіцієнта пропорційності полягає в наступному: його значення дорівнює значенню сили взаємодії між двома точковими зарядами по 1 Кл кожний на відстані 1 м у вакуумі.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}. \qquad (2.10)$$

Це значення було визначене дослідним шляхом. У курсі Фейнманівських лекцій з фізики [36] множник $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ визначають як 10^{-7} від квадрату швидкості світла:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = c^2 \cdot 10^{-7}. \qquad (2.11)$$

З наведених вище міркувань можна знайти значення електричної сталої:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \, \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

Зрозуміло, що цей коефіцієнт також присутній і у інших співвідношеннях електростатики. Наприклад, напруженість поля точкового заряду $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$, потенціал поля точкового заряду $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ тощо.

У багатьох посібниках пояснюється, що коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ з’являється в законі Кулона і похідних від нього формулах під час переходу у систему СІ для спрощення інших формул електростатики. Спробуємо пояснити наявність 4π у знаменнику цього дробу.

Розглянемо, наприклад, теорему Гаусса для напруженості електростатичного поля у вакуумі. Потік напруженості електростатичного поля через замкнену поверхню пропорційний електричному заряду замкненому цією поверхнею:

$$\Phi = \oint E_n dS, \quad E_n = \sum E_{ni}. \tag{2.12}$$

У системі СГС (сантиметр-грам-секунда), оскільки $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$, то $\Phi = 4\pi \sum q_i$. У системі СІ, врахувавши, що $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$, отримаємо $\Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$.

Отже, поява математичної константи π у основних рівняннях електростатики зумовлена ізотропністю простору. Щоб визначити напруженість електростатичного поля на відстані *r* від точкового заряду, слід його величину розділити на площу сфери радіуса *r*, яка охоплює цей заряд.

2.3. Число π у фотометрії

Фотометрія – розділ оптики, що вивчає методи і засоби вимірювання променевої енергії (Чолпан П.) [41, с.197]. Променева енергія обумовлює дію світла на той чи інший приймач світла. Для спрощення розрахунків джерела світла зводять до точкових джерел, тобто таких джерел, розміри яких значно менші порівняно з відстанями до спостерігача. Точкові джерела світла ізотропні, тобто такі, світловий потік яких поширюється у всіх напрямках однаково. Напрямки поширення світлових променів складають сферу, що зумовлює появу математичної константи π у основних співвідношеннях фотометрії.

Ключовим поняттям у поширеності світла від джерела є тілесний кут Ω – відношення площі поверхні *S*, вирізаної на сфері конусом з вершиною в її центрі до квадрата радіуса *r* цієї сфери (рис. 2.1):

$$\Omega = \frac{S}{r^2}. \tag{2.13}$$

Оскільки площа сфери $S=4\pi r^2$, то повний тілесний кут, який охоплює весь простір навколо ізотропного джерела світла становитиме $\Omega = 4\pi$.

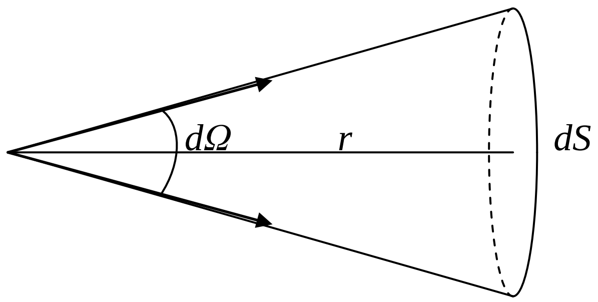


Рис. 2.1. Тілесний кут

Основними фізичними величинами у фотометрії є світловий потік Ф, сила світла *I*, освітленість *E*.

Світловий потік Ф – потік променевої енергії в тілесний кут Ω:

$$\Phi = \int I d\Omega. \tag{2.14}$$

Сила світла *I* – величина світлового потоку, розрахована на одиничний тілесний кут:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \tag{2.15}$$

Одиницею тілесного кута є стерадіан – тілесний кут, якому відповідає поверхня площини на сфері з одиничним радіусом.

Освітленість – величина світлового потоку, розрахована на одиницю площини, зорієнтованої нормально до падаючого на неї світлового потоку (рис. 2.2) (Сивухін Д.) [28]:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}. \tag{2.16}$$

Врахувавши наведені вище співвідношення, запишемо:

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha. \tag{2.17}$$

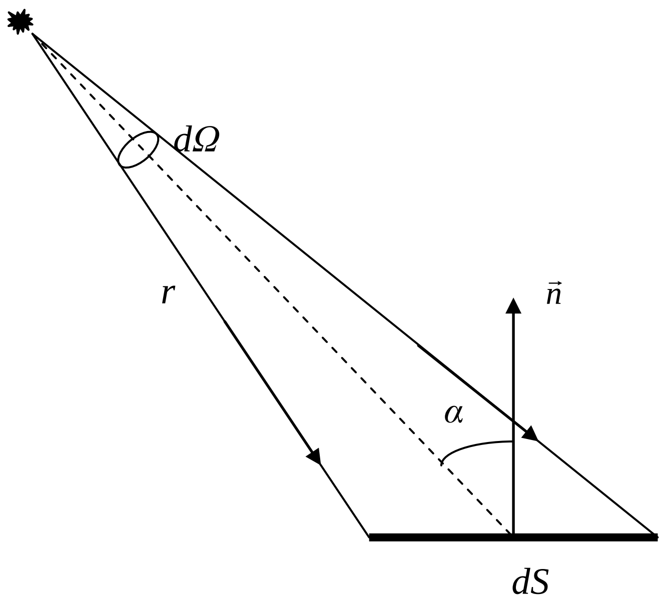


Рис. 2.2. Світловий потік від точкового джерела, що падає на площину *dS*

Освітленості площин, розміщених на різних відстанях від точкового джерела, порівнюють згідно з законом обернених квадратів:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \tag{2.18}$$

Розглянемо задачу. Посередині між двома паралельними дзеркалами на відстані *a* одне від одного розмістили свічку (рис. 2.3).

Освітленість E в точці O за сили світла свічки I через багаторазові відображення в дзеркалах дорівнюватиме:

$$E = \frac{I}{a^2} + \frac{I}{(3a)^2} + \frac{I}{(5a)^2} + \frac{I}{(7a)^2} + ... = \frac{I}{a^2}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...) . \quad (2.19)$$

Вираз для визначення освітленості світла представляє собою ряд обернених квадратів, значення якого:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... \quad (2.20)$$

Отже, освітленість в т. O:

$$E = \frac{I}{a^2}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ...) = \frac{\pi^2 I}{8a^2} . \quad (2.21)$$

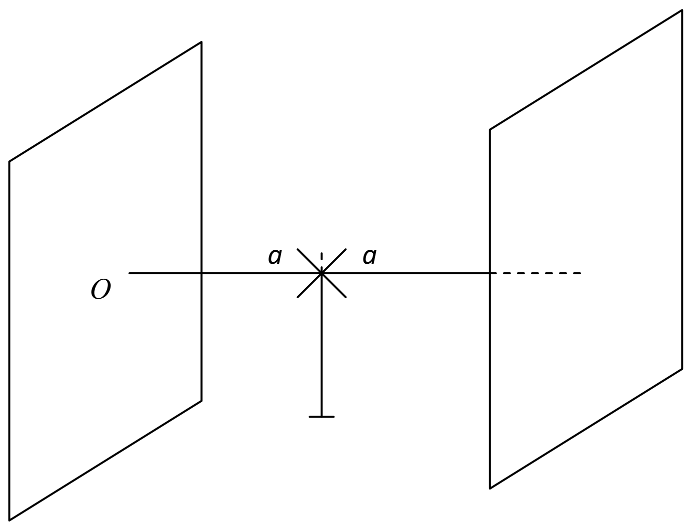


Рис. 2.3. Свічка між двома дзеркалами

Протяжне джерело світла характеризується такою фізично величиною як світність. Світність L – кількість енергії (світловий потік), що її випромінює одиниця поверхні джерела в усіх напрямках.

У астрономії під поняттям світність розуміють повну кількість енергії, що її випромінює тіло (зоря) з усієї поверхні за одиницю часу:

$$L = 4\pi r^2 E . \quad (2.22)$$

r – відстань до тіла (зорі), E – освітленість, яку створює тіло (зоря) (Андрієвський С., Кузьменков С., Захожай В., Климишин І.) [2].

Спробуємо розв’язати астрономічну задачу за допомогою фотометричних величин.

Відомо, що Місяць відбиває в середньому близько 7% сонячного світла, що на нього падає. Визначимо у скільки разів Місяць освітлює Землю слабкіше, ніж Сонце (Кузьменков С., Сокол І.) [13].

Введемо позначення: E_1 – освітленість Землі Місяцем, E_2 – освітленість Землі Сонцем, A – альбедо (коефіцієнт відбивання сонячного світла Місяцем), L – світність Місяця, r – відстань від Землі до Місяця, R – радіус Місяця.

Очевидно, що Земля освітлюватиметься не повним потоком світла з Місяця, а лише половиною, тому з (2.22) освітленість Землі Місяцем дорівнює:

$$E_1 = \frac{L}{2\pi r^2}. \qquad (2.23)$$

Світність Місяця визначимо як світловий потік, що випромінюється диском повного Місяця в напрямку Землі, врахувавши, що він світить відбитим від Сонця світлом з коефіцієнтом відбивання A. Освітленість Місяця Сонцем приблизно рівна освітленості Землі Сонцем, через невелику відстань між Землею і Місяцем порівняно з відстанню до Сонця:

$$L = A\pi R^2 E_2. \qquad (2.24)$$

Отже,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A\pi R^2}{2\pi r^2} = \frac{A}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \approx 7\cdot 10^{-7}. \qquad (2.25)$$

Незважаючи на те, що Місяць відбиває 7% сонячного світла від своєї поверхні, він освітлює Землю у сотні тисяч разів слабкіше, ніж Сонце.

Отже, у фотометрії константа π з’являється переважно в результаті використання формул площі сфери чи кола, а також як розв’язок ряду обернених квадратів.

РОЗДІЛ 3
ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА КОНСТАНТА ЧИСЛО π У ТЕОРЕТИЧНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ

3.1. Закони обертального руху тіла та число π

У попередньому розділі ми описували фізичні явища за допомогою співвідношень, у яких з'являється математична константа π переважно в результаті аналізу сферичних поверхонь. Розглянемо обертальний рух тіла. Для опису такого руху сформулюємо наступні положення: 1) крізь тіло проходить уявна нерухома лінія – вісь, навколо якої обертається тіло; 2) на тілі (але не на його осі) відмічено точку, за рухом якої спостерігають з плином часу (рис. 3.1). Для опису положення цієї точки необхідно знати кут, який опише радіус-вектор проведений від осі до даної точки. Отже, вивчення обертального руху тіла полягає у вивченні зміни кута з часом.

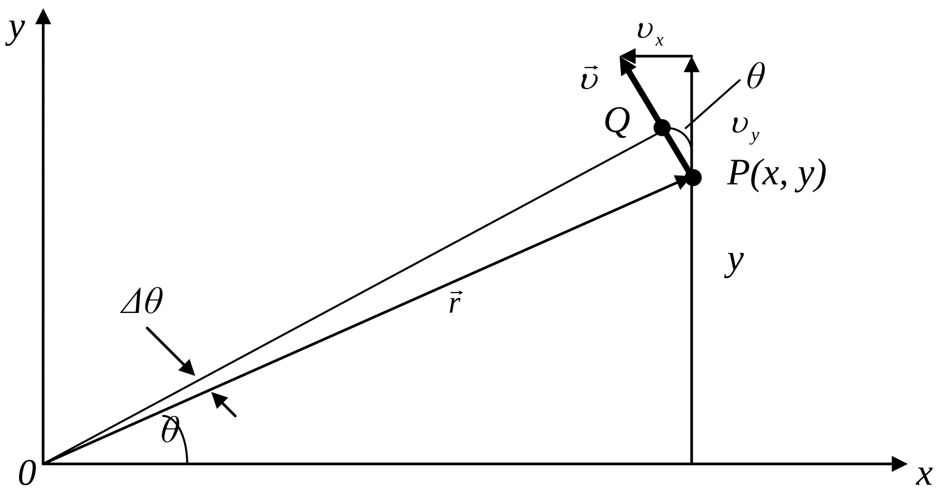


Рис. 3.1. Обертальний рух плоского тіла.

Проведемо декілька аналогій між обертальним та лінійним рухом тіла. Кут θ, який вказує на скільки повернулось тіло, відповідає пройденій точкою відстані *s*. Кутова швидкість $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, яка показує з якою швидкістю змінюється кут, відповідає швидкості $\upsilon = \frac{ds}{dt}$, що описує швидкість зміни положення тіла. Якщо продиференціювати кутову швидкість за часом, то можна отримати кутове прискорення $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, що є аналогом прискорення $a = \frac{d\upsilon}{dt}$.

Для опису руху твердого тіла введемо нерухому систему координат *XYZ*. Та рухому систему координат, жорстко пов'язану з тілом, початок координат якої розташований в центрі інерції тіла O (рис. 3.2) (Ландау Л., Лифшиц Е.) [15].

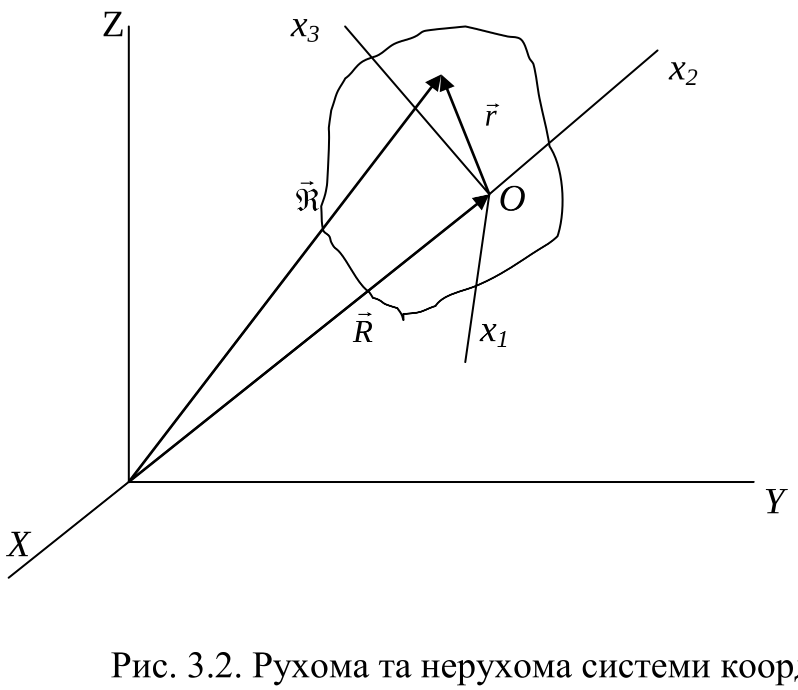


Рис. 3.2. Рухома та нерухома системи координат

Радіус-вектор довільної точки твердого тіла в рухомій системі координат $\vec{r}$, радіус-вектор цієї точки у нерухомій системі $\vec{\mathfrak{R}}$. Нескінченно мале переміщення $d\vec{\mathfrak{R}}$ точки складається з переміщення

$d\vec{R}$ разом з центром інерції і переміщення $\left[d\vec{\varphi}\cdot\vec{r}\right]$ у результаті повороту на нескінченно малий кут. Введемо для переміщень відповідні швидкості і отримаємо співвідношення між ними:

$$\vec{\upsilon}=\vec{Y}+\left[\vec{\omega}\vec{r}\right], \qquad (3.1)$$

де $\vec{\upsilon}$ – швидкість будь-якої точки тіла. $\vec{Y}$ – швидкість поступального руху центра інерції твердого тіла. $\vec{\omega}$ – кутова швидкість обертання тіла, напрямок якої збігається з напрямком осі обертання. Відтак, швидкість будь-якої точки тіла може бути виражена через поступальну швидкість тіла і кутову швидкість його обертання.

Пригадаємо, що

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu\,. \qquad (3.2)$$

Розглянемо задачу поступального руху тіла, приведену у книзі О. Жукова [8].

Гладкою кригою зі швидкістю υ_0 ковзають санки масою m і довжиною l. На своєму шляху санчата частково заїжджають на асфальт, різко гальмують і зупиняються. Знайти час t_0 від початку гальмування до повної зупинки санчат. Коефіцієнт тертя об асфальт μ.

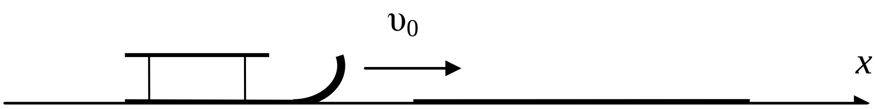


Рис. 3.3. Поступальний рух санчат

Виберемо напрямок осі координат (рис. 3.3) і згідно з другим закону Ньютона запишемо:

$$\vec{F}_{mep}=m_1\vec{a}\,, \qquad (3.3)$$

де $F_{\text{тер}}$ – сила тертя, яка діє на санчата на асфальті, x – довжина переміщення санчат на асфальті, m_1 – маса санчат на асфальті. Очевидно, що $m_1 = \frac{mx}{l}$, отже проєкція сили тертя на вісь x:

$$F_{тер} = -\mu g \frac{mx}{l}. \tag{3.4}$$

Відтак

$$mx'' + \mu g \frac{mx}{l} = 0. \tag{3.5}$$

Отримали диференціальне рівняння. Його розв'язок можна знайти у вигляді $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$, причому $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$. У момент часу $t = 0$ координата $x(0) = 0$, а $\upsilon_0 = x'(0)$, отже

$$\begin{cases} x_0 \sin\varphi = 0, \\ x_0 \omega \cos\varphi = \upsilon_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Звідси $\varphi = 0$, $x_0 = \frac{\upsilon_0}{\omega}$.

Підставимо відповідні сталі:

$$x(t) = \upsilon_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\, t. \tag{3.7}$$

Час t_0 від початку гальмування до повної зупинки саней – це час, за якого швидкість дорівнюватиме 0: $x'(t_0) = 0$, отже, $\upsilon_0 \cos\omega t_0 = 0$. Отже,

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}. \tag{3.8}$$

Відтак, математична константа π з'являється для вираження гальмівного шляху під час прямолінійного руху.

3.2. Число π в електродинаміці.

Система рівнянь Максвелла – система фундаментальних рівнянь електродинаміки. Якщо магнітне поле породжується електричним полем, то й електричне поле, в свою чергу, може бути спричинене не безпосередньо зарядами, а переміщенням і зміною магнітного поля (Чолпан П.) [41].

У системі СІ рівняння Максвелла мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\oint_L \vec{H}dl = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \\
&\oint_L \vec{E}dl = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \\
&\oint_S \left(\vec{D}d\vec{S} \right) = \int \rho dV, \\
&\oint_S \left(\vec{B}d\vec{S} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \\
\vec{B} &= \mu\mu_0 \vec{H}, \\
\vec{j} &= \gamma \vec{E},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

де H та B – напруженість та індукція магнітного поля, E та D – напруженість та індукція електричного поля, j – густина електричного струму, ρ – об’ємна густина електричного заряду.

У підрозділі 2.2 зазначалось, що коефіцієнт пропорційності $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ з’являється в законі Кулона і похідних від нього формулах під час переходу у систему СІ для спрощення інших формул електростатики, зокрема рівнянь Максвелла. Так, у системі Гауса система рівнянь Максвелла в інтегральній формі має вигляд:

$$\oint_L \vec{H}dl = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E}dl = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \tag{3.11}$$

$$\oint_s \left(\vec{D}d\vec{S}\right) = 4\pi\int \rho dV,$$

$$\oint_s \left(\vec{B}d\vec{S}\right) = 0.$$

Розв’язки цих рівнянь наступні:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

$$\varphi(1,t) = \int \frac{\rho\left(2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} dV_2,$$

$$\vec{A}(1,t) = \int \frac{\vec{j}\left(2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2, \tag{3.13}$$

де φ та $\vec{A}$ – скалярний та векторний потенціали поля, у виразах для визначення яких знов з’являється множник $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.) [37].

Таким чином, електричне і магнітне поле – окремі випадки більш загального електромагнітного поля. Нерозривна єдність електричного і магнітного полів має глибокий філософський зміст. Ці види матерії здійснюють електричну, магнітну та електромагнітну взаємодію, зі скінченою швидкість $c = 299793\frac{км}{с}$.

3.3. Число π у квантовій механіці.

Фундаментальна фізична константа h є однією з основних величин у квантовій механіці. Напівкласична теорія атома Гідрогену Н. Бора зумовлює наявність у математичному апараті квантової механіки константи π. Пам'ятаємо, що довжина кола $l = 2\pi R$. Згідно з міркуваннями Н. Бора момент кількості руху електрона для стаціонарних орбіт кратний $\frac{h}{2\pi}$.

Розглянемо з іншого боку появу математичної константи π під час опису атома Гідрогену.

Відомо, що формула визначення π як нескінченного добутку була виведена Джоном Уоллісом раніше, ще у 1655 р. [40] методом послідовної інтерполяції.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\ldots \tag{3.14}$$

Останніми десятиліттями кілька математичних доказів цієї формули були здійснені з використанням ймовірності, комбінаторики, геометричних засобів, тригонометрії та тригонометричних інтегралів. Проте в літературі до останнього часу не було виведене рівняння (3.14), що бере свій початок у фізиці, зокрема в квантовій механіці (Friedmann T., Hagen C) [46].

Тамар Фрідманн та Карл Хаген з університету Рочестера отримали формулу (3.14), розглядаючи будову атома Гідрогену.

Як відомо, атом Гідрогену має один електрон. Для опису енергії електрона вчені застосували варіаційний принцип, який зазвичай використовують для опису енергій атомів з більшою кількістю електронів.

Оцінки верхньої межі енергії порівнювали з точними значеннями енергії кожної орбіталі. Було встановлено, що оцінені енергії наближаються до точних значень для більш високих енергетичних орбіт. На менших енергетичних орбітах шлях електрона нечіткий і розподілений. У більш збуджених станах їх орбіти стають більш чітко визначеними, а невизначеність радіуса зменшується.

Фрідман довів, що для орбіталей, в яких електрон рухається навколо ядра з великим кутовим моментом, співвідношення наближеної та точної енергій можна переписати як співвідношення гамма-функцій. Зі збільшенням кутового моменту відношення гамма-функцій наближається до 1, що пояснює точність наближення. Більше того, одна з цих гамма-функцій дає значення π, тоді як інші можна переписати як добуток співвідношень у формулі Уолліса.

Розглянемо міркування вчених. Рівняння Шрьодінгера для атома Гідрогену задано формулою:

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}\right)\psi = E\psi . \qquad (3.15)$$

Використавши відповідне радіальне рівняння для хвильової функції можна записати вираз для очікуваного значення Гамільтоніана для найнижчого енергетичного стану:

$$\langle H \rangle_{\min}^{l} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{(l+\frac{3}{2})}\left[\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2}}\right]^2 . \qquad (3.16)$$

Добре відомим точним результатом для найнижчого енергетичного рівня Гідрогену є

$$E_{0,l} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{(l+1)^2} . \qquad (3.17)$$

Точність наближення (3.16) відображається у співвідношенні [3]:

$$\frac{\langle H \rangle_{\min}^{l}}{E_{0,l}} = \frac{(l+1)^2}{(l+\frac{3}{2})}\left[\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\right]^2 . \qquad (3.18)$$

Зі збільшенням *l* ця величина наближається до 1. Тому справедливі наступні міркування:

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\langle H\rangle_{\min}^{l}}{E_{0,l}}=\lim_{l\to\infty}\frac{(l+1)^2}{(l+\frac{3}{2})}\left[\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\right]^2=1. \tag{3.19}$$

З цього видно, що це приводить до формули Уолліса для π.

$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$, $\Gamma(\ell+1)=\ell!$, і $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, що приводить рівняння (3.19) до форми:

$$\lim_{l\to\infty}\left[\frac{(l+1)!}{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{2l+1}{2}}\right]^2\frac{1}{l+\frac{3}{2}}=1,$$

або

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{l\to\infty}\prod_{j=1}^{l+1}\frac{(2j)(2j)}{(2j-1)(2j+1)}, \tag{3.20}$$

тобто формули Уолліса для π, заданої рівнянням (3.14) [3].

Отже, отриманий результат не претендує на пояснення квантової теорії, проте виявляє глибинний зв'язок між фундаментальними характеристиками Всесвіту: математичною константою π та теорією квантової механіки.

3.4. Число π у статистичній фізиці

Існує певний якісний і кількісний зв'язок між властивостями сукупності молекул і середнім значенням тих фізичних властивостей, які характеризують поведінку та властивості кожної молекули окремо. Наприклад, температура газу пов’язана з середнім значенням кінетичної енергії молекул. Для встановлення цього зв’язку немає потреби точно знати положення або швидкість кожної окремої молекули, а досить знати ймовірнісні їх значення. Тобто достатньо знати яка ймовірність того, що складова швидкості молекули лежить між υ_x і $\upsilon_x+d\upsilon_x$.

Позначимо цю ймовірність $\varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x$. Величина $\varphi(\upsilon_x)$ – функція розподілу, яка характеризує розподіл молекул лише за проекцією υ_x. Введемо об'ємну функцію розподілу $f(\upsilon)$ – функцію розподілу повної функції:

$$f(\upsilon)= \varphi(\upsilon_x)\, \varphi(\upsilon_y)\, \varphi(\upsilon_z). \qquad (3.21)$$

Додатні та від'ємні напрямки у газі еквівалентні. Доречно дослідити залежність функції φ від υ_x^2. Замість квадрату швидкості зручно для аргументу функції взяти відповідні кінетичні енергії:

$$\varepsilon = \frac{m\upsilon^2}{2} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \qquad (3.22)$$

Запишемо рівняння (3.21) у вигляді:

$$\varphi(\varepsilon_x)\, \varphi(\varepsilon_y)\, \varphi(\varepsilon_z)=f(\varepsilon_x+ \varepsilon_y+ \varepsilon_z). \qquad (3.23)$$

Інтегрування цих функцій дає:

$$f(\varepsilon) = Ae^{-\alpha\varepsilon}. \qquad (3.24)$$

Ця формула виражає закон розподілу швидкостей Максвелла (рис. 3.4) (Ландау Л, Лифшиц Е.) [16].

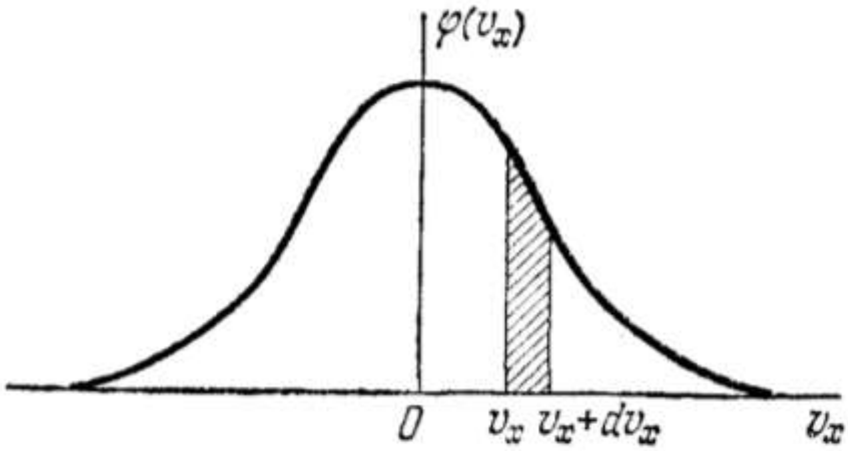


Рис. 3.4. Розподіл швидкостей Максвелла

Площа елементарної смужки, заштрихованої на рис. 3.4, дає ймовірність того, що x – складова швидкості молекули лежить всередині інтервалу (υ_x, $\upsilon_x+d\upsilon_x$), а помножена на N, вона дає ймовірне число молекул зі швидкостями в тому ж інтервалі. Функція $\varphi(\upsilon_x)$ має бути нормована умовою:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\upsilon_x) d\upsilon_x = A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha m \upsilon_x^2}{2}} d\upsilon_x = 1 \qquad (3.25)$$

Як змінну інтегрування введемо величину $\xi = \sqrt{\frac{\alpha m}{2}} \upsilon_x$, тоді

$$A_1 \sqrt{\frac{2}{\alpha m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1. \qquad (3.26)$$

Інтеграл (3.26) – це інтеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}\,. \qquad (3.27)$$

Отже,

$$A_1 = \sqrt{\frac{m\alpha}{2\pi}}\,. \qquad (3.28)$$

Константа $\alpha = \frac{1}{kT}$.

У результаті для функцій розподілу $\varphi(\upsilon_x)$ і $f(\upsilon)$ остаточно отримуємо:

$$\varphi(\upsilon_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}},$$

$$f(\upsilon) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}}. \qquad (3.29)$$

Це і є кінцева формула, яка виражає закон розподілу швидкостей Максвелла. Її застосовують не лише до газів, чи до рідини, а й до твердих тіл в усіх випадках, коли ще можна користуватися класичним способом опису руху.

3.5. Число π у космології

На основі результатів досліджень, проведених у попередніх підрозділах, можна зробити висновок, що математична константа π трапляється практично в усіх розділах загальної та теоретичної фізики.

Число π можна побачити в рівняннях основних космологічних моделей Всесвіту – математичних описах будови і еволюції Всесвіту. Космологічна модель – система рівнянь, які описують зміну з часом густини, температури чи відстані.

Користуючись міркуваннями класичної ньютонівської фізики, Е. Мілн отримав рівняння закону збереження енергії у космології:

$$\varepsilon = \frac{m\upsilon_0^2}{2} - \frac{GMm}{R_0} = \mathrm{const}. \tag{3.30}$$

Врахувавши, що $\upsilon = \frac{dR}{dt}$, а маса $M = \frac{4}{3}\pi R^3$, отримуємо:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} R^2 \rho + 2\varepsilon. \tag{3.31}$$

Як бачимо, у законі збереження енергії у такій формі запису з’являється математична константа π. Врахувавши, що за законом Габбла швидкість роз бігання галактик $\upsilon = HR$ (де H – стала Габбла):

$$\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{3H^2}{8\pi G} - \rho\right) R^2 = 2\varepsilon. \tag{3.32}$$

Вираз $\frac{3H^2}{8\pi G} = \rho_{кр}$ – критичне значення густини Всесвіту (Андрієвський С, Кузьменков С., Захожай В, Климишин І.) [2].

Порівняння значення густини Всесвіту з критичною густиною дало змогу вченим космологам створити різні космологічні моделі, математичний опис яких містить константу π.

Цікавим випадком для нашого дослідження є випадок, коли густина речовини у Всесвіті більша критичної густини: $\rho > \rho_{кр}$.

На основі загальної теорії А. Ейнштейна, досліджуючи просторово-часову динаміку Всесвіту, О. Фрідман отримав співвідношення між радіусом R сфери, в який замкнений Всесвіт та часом t:

$$\begin{cases} R = R_0(1-\cos\eta), \\ t = \dfrac{a}{2}(\eta - \sin\eta). \end{cases} \quad (3.33)$$

Пояснимо позначення: змінна η – певний параметр, дуговий час, R_0 – поточне значення радіусу сфери, a – час, вирахуваний Е. Габблом, a=$13\cdot10^9$ років (Жуков О.) [8].

Ці співвідношення мають вигляд параметричного запису циклоїди. Фрагмент її графіку показаний на рис. 3.5.

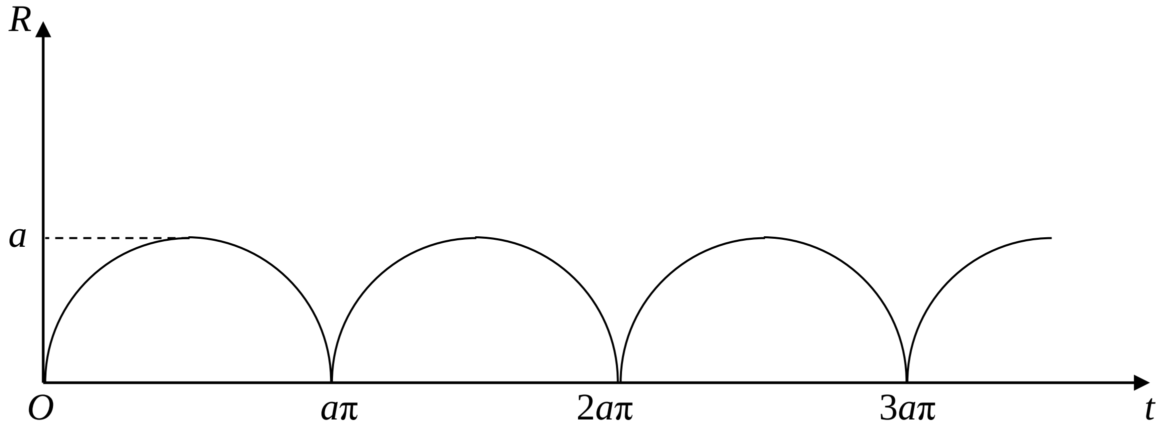


Рис. 3.5. Циклоїда, що описує модель пульсуючого Всесвіту

Згідно припущення, яке можна зробити на основі наведеної вище системи рівнянь – Всесвіт пульсує послідовно то розширюючись, то стискаючись у моменти часу пропорційні π: aπ, 2aπ, 3aπ, ….

Загалом фундаментальна математична константа π відображає ізотропність властивостей пустого простору нашого Всесвіту, їх однаковість у будь-якому напрямку. З ізотропністю простору пов’язаний закон збереження обертального моменту, що і пояснює присутність математичної константи π у багатьох законах, які пояснюють будову нашого світу.

ВИСНОВКИ

1. У математиці термін «константа» має декілька значень:
   деяка стала величина (на відміну від змінних величин);
   стала величина, що має конкретне значення.
2. Таких математичних констант декілька десятків, всі вони безрозмірні і визначені без фізичних вимірювань. Проте серед них є сталі, які мають фундаментальне значення – основа натуральних логарифмів e та число π.
3. Загальноприйняте означення числа π – відношення довжини кола до його діаметру. У теорії чисел π вважають ірраціональним та трансцендентним.
4. Протягом трьохсот років різними методами було виведено багато співвідношень з визначення числового значення математичної константи π: за допомогою рядів (Лейбница, обернених квадратів та ін.), границь, інтегралів тощо. Поява електронно-обчислювальної техніки дала змогу швидко та точно обчислювати значення π.
5. Математична константа π використовується у різних розділах математики, а її поява у різних виразах говорить про фундаментальне її значення.
6. Число π - це математична та фізична константа, яка протягом усієї наукової історії стала значущою у всіх областях математики та фізики: математична теорія чисел, статистика, космологія, термодинаміка, механіка, квантова механіка, електромагнетизм тощо.
7. Найпростішими моделями багатьох об’єктів і явищ у фізиці виступають доволі складні геометричні об’єкти коло і сфера, параметри яких описуються за допомогою π.

8. У космології константа π трапляється у виразі для критичної густини Всесвіту, а також у моделі пульсуючого Всесвіту, згідно з якої Всесвіт пульсує послідовно то розширюючись, то стискаючись у моменти часу пропорційні π: $a\pi$, $2a\pi$, $3a\pi$, ….
9. Загалом число π відображає ізотропність властивостей пустого простору нашого Всесвіту, їх однаковість у будь-якому напрямку. З ізотропністю простору пов'язаний закон збереження моменту імпульсу, що і пояснює присутність математичної константи π у багатьох законах, які описують будову нашого світу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айерлэнд К. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. – М.: Мир, 1987. – 428 с.
2. Андрієвський С.М. Загальна астрономія: підручник/ С.М. Андрієвський, С.Г. Кузьменков, В.А. Захожай, І.А. Климишин. – Харків: ПромАрт, 2019. – 524 с.
3. Берклеевский курс физики. Квантовая физика. Том 4 / Э. Вихман – М.: Наука, 1983. – 391 с.
4. Берклеевский курс физики. Механика. Том 1 / Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. – М.: Наука, 1983. – 479 с.
5. Берклеевский курс физики. Стиатистиченская физика. Том 5 / Ф. Реиф. – М.: Наука, 1983. – 351 с.
6. Берклеевский курс физики. Электричество и магнетизм. Том 2 / Парселл Э. – М.: Наука, 1983. – 479 с.
7. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика / Г. Дэвенпорт. – М.: Наука, 1965. – 176 с.
8. Жуков А. Вездесущее число π / А. Жуков. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 216 с.
9. Зельманов А.Л. // Бесконечность и Вселенная. – М.: Мысль, 1960. – С. 274.
10. Каршенбойм С. Прогресс в уточнении фундаментальных физических констант: рекомендованные значения CODATA 2010 // Успехи физических наук. Т.183. Вып. 9, 2013. – С. 935–962.
11. Каршенбойм С. Фундаментальные физические константы: роль в физике и метрологии и рекомендованные значения // Успехи физических наук. Т.175. Вып. 3, 2005. – С. 271–298.
12. Кузьменков С.Г. Антропний принцип як стрижнева ідея фундаменталізації астрономічної освіти// Фізика та астрономія в школі. – №4 (91), 2001. – С. 20–24.

13. Кузьменков С.Г. Сонячна система: зб. задач/ С.Г. Кузьменков, І.В. Сокол. – К.: Вища школа, 2007. – 167 с.

14. Кымпан Ф. История числа π / Ф. Кымпан. – М.: Наука, 1971. – 216 с.

15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – 5-е изд., стереотип. — М.: Физматлит, 2012. – 224 с.

16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Часть 1: Учебное пособие для вузов. – М.: Физматлит, 2010. – 616 с.

17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – Издание 4-е, стереотипное. – М.: Физматлит, 2005. – 656 с.

18. Ландау Э. Основы анализа / Э. Ландау. – М.: Ленанд, 2016. – 184 с.

19. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – Издание 6-е, исправленное. – М.: Физматлит, 2004. – 800 с.

20. Окунь Л. Фундаментальные константы физики// Успехи физических наук. – Т. 161. Вып. 9, 1991. – С. 177–194.

21. Розенталь И. Физические закономерности и численные значения фундаментальных постоянных // Успехи физических наук. Т. 13. Вып. 2, 1980. – С. 239–256.

22. Рубаков В.А. Иерархии фундаментальных констант// Успехи физических наук. – Т. 177. Вып. 4, 2007. – С. 407–414.

23. Савельев И. Курс общей физики в 3-х тт. Механика. Молекулярная физика. Т.1 / И. Савельев. – М.: Лань, 2006. – 511с.

24. Савельев И. Курс общей физики в 3-х тт. Механика. Оптика, атомная физика, физика атомного ядра и элементарных частиц. Т. 3 / И. Савельев. – М.: Лань, 2006. – 528 с.

25. Савельев И. Курс общей физики в 3-х тт. Электричество. Т. 2 / И. Савельев. – М.: Лань, 2006. – 431с.

26. Сивухин Д. Общий курс физики. Атомная физика. Т. 5. Ч. 1 / Д. Сивухин. – М.: Физ-мат лит, 2005. – 416 с.

27. Сивухин Д. Общий курс физики. Механика. Т. 1 / Д. Сивухин. – М.: Физ-мат лит, 2005. – 520 с.

28. Сивухин Д. Общий курс физики. Оптика. Т. 4 / Д. Сивухин. – М.: Физ-мат лит, 2005. – 752 с.

29. Сивухин Д. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная фізика. Т. 2 / Д. Сивухин. – М.: Физ-мат лит, 2005. – 552 с.

30. Сивухин Д. Общий курс физики. Электричество. Т. 3 / Д. Сивухин. – М.: Физ-мат лит, 2005. – 687 с.

31. Спиридонов О. Фундаментальные физические постоянные/ О. Спиридонов. – М.: Высшая школа, 1991. – 238 с.

32. Томилин К.А. Фундаментальные физические постоянные в историческом и методологическом аспектах / К.А. Томилин. – М.: Физматлит, 2006. – 370 с.

33. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 2. Пространство. Время. Движение (издание 5) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Эдиториал УРСС. – 166 с.

34. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 3: Излучение. Волны. Кванты. Перевод с английского (издание 4) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Эдиториал УРСС. – 235 с.

35. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 4: Кинетика. Теплота. Звук. Перевод с английского (издание 4) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Эдиториал УРСС. – 258 с.

36. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 5: Электричество и магнетизм. Перевод с английского (издание 3) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Эдиториал УРСС. – 292 с.

37. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 6: Электродинамика. Перевод с английского (издание 3) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Эдиториал УРСС. – 340 с.

38. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Тома 8, 9: Квантовая механика. Перевод с английского (издание 3) / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Эдиториал УРСС. – 522 с.

39. Фритцш Х. Фундаментальные физические постоянные // Успехи физических наук. – Т. 179. Вып. 4, 2009. – С. 383–392.

40. Число пі [Электронный ресурс] // Вікіпедія. Вільна енциклопедія: [сайт]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Число_пі. – Назва з екрану.

41. Чолпан П.П. Фізика / П.П. Чолпан. – К.: Вища школа, 1972. – 428 с.

42. Шумихин С. Число π. История длиною в 4000 лет / С. Шумихин, А. Шумихина. – М.: Эксмо, 2001. – 192 с.

43. Энциклопедия физики и техники: [сайт]. – Режим доступу: http://www.femto.com.ua/articles/part_2/4430.html. – Назва з екрану.

44. Apostol T. Calculus/ T. Apostol. Volume 1. – Wiley, 1967. – 529 p.

45. Dictionary: [сайт]. – Режим доступу: https://www.dictionary.com/browse/fundamental-constant. – Назва з екрану.

46. Friedmann T., Hagen C.R. Quantum Mechanical Derivation of the Wallis Formula for π [Электронный ресурс]// Cornell University. Mathematical Physics: [сайт]. – Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1510.07813.pdf. – Назва з екрану.

47. Mohr P.J., Taylor B.N., Newell D.B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010. – Rev. Mod. Phys., 84 (2012). – p. 1527.

48. Uzan J.-P. The stability of fundamental constants // Comptes Rendus Physique, 2015. – №16. – P. 576–585.

49. Walter R. Principles of Mathematical Analysis / R. Walter. – McGraw-Hill, 1976. – 183 p.