МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ У КУРСІ АЛГЕБРИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконав: студент 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: викладач математики
Бииков Микола

Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Савченко О.Г.
Рецензент доктор фізико-математичних наук,
професор Львов М.С.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Послідовності та ряди – це один з найбільш вживаних апаратів розв'язування задач, один з найбільш сильних засобів класичного та сучасного аналізу. Послідовності, з якими доводиться мати справу при розв'язуванні як теоретичних питань, так і задач прикладного характеру, можуть бути як збіжними, так і розбіжними. Підсумовування послідовностей знаходить широке застосування в теорії наближень, при побудові аналітичного продовження та інших питаннях, тому дослідження в цій галузі проводяться досить інтенсивно. Завдяки широкому застосуванню методів підсумовування послідовностей як в математиці, так і в її прикладеннях, питання стосовно знаходження сум скінчених послідовностей залишаються актуальними і в наш час.

У загальному випадку задача на підсумовування послідовностей формулюється досить просто: задано числову послідовність

$$(a_n): a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Треба для довільного n знайти суму S_n перших n її членів. Класичними прикладами задач такого типу є задачі на знаходження суми членів арифметичної та геометричної прогресії або задача на підсумовування степенів натуральних чисел. При цьому складність задачі підсумовування послідовності визначається властивостями функції, яка цю послідовність породжує

Прогресії є однією з найцікавіших тем математики, що стосується числових послідовностей. У перекладі з латинської слово прогресія означає рух уперед. Прогресії відомі здавна, а тому не можна сказати, хто їх відкрив. Оскільки навіть натуральний ряд 1, 2, 3, 4, … – це арифметична прогресія. Про те, як давно була відома геометрична прогресія, свідчить легенда про історію винайдення шахів [16]. Задачі на прогресії зустрічаються в одній з найдавніших пам'яток права – «Руській правді», укладеній ще за київського князя Ярослава Мудрого (XI ст.). Ця давня пам'ятка історії містить статтю, присвячену обчисленню приплоду від 22 овець за 12 років за умови, що кожна вівця щорічно приносить 1 вівцю і 2 барани [41]. Значна кількість задач на прогресії є й в «Арифметиці» Л. Магницького (1703), що була основним математичним підручником у Росії протягом майже півстоліття [50]. Прогресії є відображенням світу, що нас оточує. Вони застосовуються в таких науках, як: фізика (під час вивчення тіл, що вільно падають чи рухаються з рівним прискоренням); економіка та банківська справа (під час виплати відсотків та надання кредитів); у техніці (під час виготовлення обладнання).

Сучасна шкільна програма пропонує розгляд поняття числових послідовностей та прогресій, зокрема, у 9-му класі. При цьому передбачається спочатку дати загальне поняття послідовності, а вже потім детальніше розглянути арифметичну і геометричну прогресії. Оскільки тенденція стосовно програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики передбачає наявність задач на арифметичну та геометричну прогресії, то обрана тема дослідження є актуальною і в наш час.

Метою роботи є розгляд питання про поняття числової послідовності в курсі алгебри.

Об'єктом дослідження є методика навчання алгебри. ***Предметом*** дослідження є особливості вивчення послідовностей та прогресій, зокрема, в курсі алгебри основної школи.

Гіпотеза дослідження полягає у наступному: розв'язування задач на прогресії сприятиме формуванню в учнів їх математичної компетентності.

Відповідно до мети дослідження визначені такі ***завдання***:

1. Розглянути основні теоретичні положення, що стосуються числових послідовностей та основних методів їх підсумовування.

2. Розкрити методичні особливості навчання учнів розв'язуванню задач на арифметичну та геометричну прогресії під час викладання алгебри в основній школі.

3. Визначити значення задач на прогресії для формування математичної

компетентності учнів та експериментально перевірити гіпотезу дослідження.

Основні ***методи***, що використовувалися в дослідженні – теоретичні – системний та порівняльний аналіз навчально-методичної літератури з проблем дослідження; емпіричні – спостереження за процесом навчання учнів, бесіди з вчителями та учнями, аналіз й узагальнення передового досвіду вчителів та методистів.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що було систематизовано та узагальнено основні відомості, які стосуються числових послідовностей в курсі алгебри. ***Практичне значення*** роботи полягає у розробці елективного курсу, що може бути впроваджений в процес навчання в ході вивчення теми «Арифметична та геометрична прогресія».

Робота складається з трьох основних розділів. Перший розділ присвячено теоретичним основам проблеми дослідження. В ньому наведено історичний аспект проблеми дослідження, а також деякі теоретичні відомості з теорії числових послідовностей. В другому розділі розглянуто основні теоретичні положення, що стосуються арифметичної та геометричної прогресії, а також методичні особливості навчання учнів розв’язуванню задач на прогресії під час викладання алгебри в основній школі. В третьому розділі описано етапи організації та проведення педагогічного експерименту, в ході якого було визначено вплив процесу розв'язання задач на прогресії на формування в учнів математичної компетентності та статистично оброблено і узагальнено одержані результатів експериментального дослідження.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та вчителями загальноосвітніх шкіл.

РОЗДІЛ 1
ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ З ТЕОРІЇ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1. Історичний аспект проблеми дослідження

Поняття числової послідовності та числового ряду цікавило стародавніх народів ще за часів античності.

Поняття математичної нескінченості, на думку дослідників історії розвитку математики, з’явилося в давньогрецькій або еллінській культурі в VIII – VI ст. до н.е., як принципово новий елемент мислення. Проте, точну дату виникнення рядів дати неможливо [26]. Але відомо, що в Стародавньому Єгипті мали певні уявлення про теорію рядів. Відомо, що єгипетська ієрогліфічна нумерація була число адитивною.

Крім позначень цілих чисел, єгиптяни мали також спеціальні позначення для дробових чисел, над якими ставився знак ○ (рот – «частина»). Загальними раціональними дробами єгиптяни не оперували, проте мали певні уявлення [8].

Велику увагу єгипетські мудреці приділяли складанню задач розважального характеру або прикладних задач. Однією із найвідоміших задач, була задача на геометричну прогресію – «задача-мандрівниця» [11]. В задачі мова йде про 7 кішок в кожному із 7 будинків, кожна кішка з’їла по 7 мишок, кожна з яких з’їла по 7 колосків ячменю, кожний колос міг дати 7 буханок хліба. В подальшому задача зустрічалась в різні епохи у різних народів з незначними відмінностями.

Нескінченні ряди також використовували в грецькій математиці, хоча вони намагалися представляти їх, як скінченні суми. Так, уявлення про арифметичну прогресію зустрічається в папірусі Райнда [7]. Більш широкі уявлення про арифметичну та геометричну прогресії були у Стародавньому Вавилоні. Навіть задачі про розподіл срібла між братами розв'язувались шляхом використання арифметичної прогресії та пропорційної залежності [13]. Вавилоняни знали правило підсумовування членів арифметичної прогресії за даними першим та останнім членами.

Також у Стародавньому Вавилоні знали формули для деяких скінчених сум. В давніх текстах є задачі на підсумовування членів геометричної прогресії. Також було відомо правило підсумовування скінченого ряду натуральних квадратів: $12 + 22 + \cdots + 102$.

Питаннями підсумовування рядів займалися і китайські математики [12]. Шень Ко (9 ст. до н.е.) в «Рассуждениях Мэн-си» підрахував кількість предметів, які складають шарову ступінчату усічену піраміду, в якій стороні прямокутних шарів послідовно збільшуються на одиницю. В XIII ст. Чжу Ши-цзе підсумовує ряди, які виникли при множенні натуральних, трикутних та квадратних чисел з членами зростаючої або спадної прогресій [15]. В творі, написаним китайським математиком в 1303 р., зустрічається наступна таблиця чисел:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Арифметичний трикутник

Формальний розвиток теорії рядів починається з початку XVII століття. І одним із прикладів дослідження геометричної інтерпретації рядів є відкриття італійського математика П'єтро Менгорі (1626 –1686) [11], який наглядно продемонстрував, за допомогою геометричного розкладання, що ряд: $1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots = 1$. Математик розглядав квадрат зі стороною 1 і, відповідно площею, яка дорівнює 1. Він поділив площу квадрата навпіл, потім одну з половин знову поділив навпіл і т.д., і отримав нескінчену кількість прямокутників з площами, які утворюють геометричну прогресію.

Треба відзначити, що П'єтро Менголі отримав важливі результати в області дослідження рядів, зокрема, довів розбіжність гармонічного ряду [8]. Термін «гармонічний ряд» запропонував у 1668 р. математик У. Броункер (1620-1684). Свою назву гармонійний ряд отримав з того факту, що кожний його член, починаючи з другого, є середнім гармонійним суміжних членів [16].

Вчення про послідовність та ряди більшою мірою посилилось через потребу знайти для деяких функцій раціональні вирази, які дозволяли б здійснювати інтегрування. При обчисленні таких функцій для окремих значень змінних відчувалась необхідність в дослідженні їх на збіжність. Проте, при намаганні зберегти застосовність ряду для всіх значень змінної, це відчуття було втрачене шляхом виникнення парадоксів та метафізичних міркувань. Серед небагатьох вчених, які займали строгу математичну позицію, був П. Варіньйон (1654-1722). В 1715 р. саме він звернув увагу на те, що члени придатного для використання ряду повинні безперервно зменшуватись, і остача ряду повинна ставати як завгодно малою [8].

Одним із найважливіших методів, який був запропонований в XVII ст. для розкладу функції в ряд, був винайдений Тейлором (1685-1731), який фактично використав інтерполяційну формулу Ньютона, яку він представив у своїх «Началах» [9]. В цей час, перші відкриття, в теорії рядів були зроблені видатним Ейлером, який встановив, деякі ряди, суми яких виражаються визначеними інтегралами, та паралельно вивів формулу для їх підсумовування.

1.2. Поняття числової послідовності

Якщо кожному натуральному числу поставлено у відповідність дійсне число x_n, то множина дійсних чисел $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ x_n \ldots$ називається *числовою послідовністю* або просто *послідовністю*. Числа $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ x_n$ називаються *елементами* (членами) послідовності, символ x_n – *загальним елементом (членом) послідовності*, а n – номером елемента. Коротко послідовність позначають символом $\{x_n\}$.

Послідовності $\{x_n+y_n\}, \{x_n-y_n\}, \{x_n*y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ $y\neq 0$, називаються відповідно сумою, різницею, добутком та часткою двох послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

Приклад. Задана формула загального елемента послідовності $x_n = \frac{n}{n+1}$. Виписати п'ять перших елементів послідовності.

Розв'язання. Покладаючи послідовно n =1, 2, 3, 4, 5 в загальному елементі x_n, одержуємо $x_1=1/2$, $x_2=2/3$, $x_3=3/4$, $x_4=4/5$, $x_5=5/6$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо вона обмежена і зверху, і знизу, тобто існують такі числа M і m, що $m \le x_n \le M$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *необмеженою*, якщо для довільного додатного числа A існує елемент x_n цієї послідовності, який задовольняє нерівність $|x_n| > A$.

Приклад. Послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ обмежена, оскільки $0 \le x_n \le 1 \quad (m=0,\ M=1)$.

Послідовність -1, 2, -3, 4, -5, …, $(-1)^n n$, … – необмежена, оскільки для довільного числа A > 0 існує елемент цієї послідовності, який задовольняє нерівність $|x_n| > A$ (тобто або $x_n > A$, або $x_n < -A$).

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо для довільного додатного числа A снує номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо для довільного додатного числа *A* снує номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Теорема 1.1. Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, $x_n \neq 0$, то послідовність $\{\alpha_n\}=\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала, та, обернено, якщо $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність, $\alpha_n \neq 0$, то послідовність $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ нескінченно велика.

Приклади нескінченно малих послідовностей: $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{2n}{n^2+12}\right\}$ [5].

Число *a* називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, $\lim\limits_{lin\to\infty m} x_n = a$ або $x_n \to a \quad при \quad n \to \infty$, якщо для довільного додатного числа ε, яким би малим воно не було, існує такий номер N, що для всіх x_n з номерами $n > N$ справедлива нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

При цьому послідовність $\{x_n\}$ називається *збіжною*, в противному випадку – *розбіжною*.

Приклад. Використовуючи означення границі, довести, що $\lim\limits_{\ln\to\infty im} \frac{n}{n+1} = 1$

Розв'язання. Візьмемо довільне число ε > 0. Оскільки

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1},$$

то для знаходження значень *n*, які задовольняють $|x_n - 1| < \varepsilon$, достатньо розв'язати нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, звідки отримаємо $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Приклад. Довести, що послідовність $1; \frac{5}{7}; \frac{7}{11}; \cdots; \frac{2n+1}{4n-1}; \cdots$ має границю, яка дорівнює $\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ в означенні границі буде мати вигляд

$\left|\frac{2n+1}{4n-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, або $\left|\frac{4n+2-4n+1}{2(4n-1)}\right|<\varepsilon$, звідки $\left|\frac{3}{2(4n-1)}\right|<\varepsilon$. Враховуючи, що $n\in N$, тобто $\frac{3}{2(4n-1)}>0$, маємо $\frac{3}{2(4n-1)}<\varepsilon$, звідки

$$4n-1>\frac{3}{2\varepsilon} \text{ та } n>\frac{3}{8\varepsilon}+\frac{1}{4}.$$

Нехай $\varepsilon=0{,}03$, тоді $n>12{,}75 \quad (N=13)$, якщо $\varepsilon=0{,}006$, $\quad n>250{,}25\,(N=251)$. Тобто для довільного ε знайдеться $N(\varepsilon)$, починаючи з якого буде виконуватися нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$; це означає, що шукана послідовність має границю, яка дорівнює $\frac{1}{2}$.

Зауваження. Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика, то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Якщо при цьому, починаючи з деякого номера n усі элементи додатні (від'ємні), то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty(-\infty)$. Кажуть, що нескінченно велика послідовність має нескінченну границю.

Властивості збіжних послідовностей

Теорема 1.2. Збіжна послідовність обмежена.

Теорема 1.3. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b,\ \lim_{n\to\infty}(x_n*y_n)=a*b \quad\text{та}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{a}{b}\ (b\neq 0).$$

Теорема 1.4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ та для всіх n виконуються нерівності $x_n\le y_n\le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

Теорема 1.5. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ та послідовність $\{y_n\}$ – обмежена, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n*y_n)=0$ (добуток нескінченно малої на нескінченно велику є нескінченно мала).

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n!)}{n}$.

Розв'язання. Шукану границя можна записати у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n!)\cdot\frac{1}{n})$.

Послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ є нескінченно малою, послідовність $\{\sin(n!)\}$ складається із значень обмеженої функції $y=\sin x$; $-1\le\sin x\le 1$, тобто є обмеженою, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n!)}{n}=0$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *зростаючою*, якщо $x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots$; *неспадною*, якщо $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le x_{n+1}\le\cdots$; *спадною*, якщо $x_1>x_2>\cdots>x_n>x_{n+1}>\cdots$; *незростаючою*, якщо $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge x_{n+1}\ge\cdots$;

Усі такі послідовності називаються *монотонними*. Зростаючі та спадні називаються *строго монотонними* [7].

Теорема 1.6. Монотонна обмежена послідовність має границю.

1.3. Деякі методи підсумовування послідовностей

Нехай S – деяке фіксоване натуральне число. *Степенева послідовність* (k^s) є послідовністю, породженою простим многочленом $f_s(x)=x^s$. Задача на підсумовування цієї послідовності, тобто знаходження сум виду

$$1^s+2^s+\cdots+n^s, \tag{1.1}$$

є більш складною, ніж задача на підсумовування факторіальної послідовності. У цьому параграфі ми викладемо метод зведення даної задачі до задачі на підсумовування факторіальної послідовності, розкладаючи x^s за факторіальними многочленами [13].

Спочатку розглянемо рекурентний спосіб обчислення сум виду (1.1). Символом S_n^m позначатимемо суму *m*-*x* степенів перших n натуральних чисел

$$S_n^m=1^m+2^m+\cdots+n^m.$$

Очевидно, $S_n^0=n$. Щоб знайти S_n^1, підставимо послідовно у формулу $(x+1)^2=x^2+2x+1$ натуральні значення від 1 до n і утворені вирази підсумуємо:

$$2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$3^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1$$

$$4^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\overline{2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + 2(1 + 2 + \cdots + n) + n}$$

Звівши тепер подібні члени та позначивши вираз $1 + 2 + .. + n$ через S_n^1 матимемо

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_n^1 + n\,,$$

звідки

$$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для того щоб знайти S_n^2, підставимо натуральні значення від 1 до n у формулу

$$(x+1)^2 = x^2 + 3x^2 + 3x + 1$$

і утворені вирази підсумуємо. Тоді матимемо:

$$(n+1)^2 = 1 + 3S_n^2 + 3S_n^1 + n,$$

звідки, підставивши значення S_n^1, дістаємо:

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тим самим способом, що для 1 і 2, використовуючи для довільного k формулу

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k + C_{k+1}^2 x^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^k x + 1$$

та підсумовуючи її значення при $x = 1, 2, \ldots, n$, дістанемо формулу

$$C_{k+1}^1 S_n^k + C_{k+1}^2 S_n^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^{k-1} S_n^2 + C_{k+1}^k S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^{k+1} - 1.$$

Отже, щоб знайти значення S_n^k, треба розв'язати таку систему лінійних рівнянь з невідомими $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^k$:

$$C_{k+1}^1 S_n^k + C_{k+1}^2 S_n^{k-1} + C_{k+1}^3 S_n^{k-2} + \cdots + C_{k+1}^k S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^{k+1} - 1$$

$$C_k^1 S_n^{k-1} + C_k^2 S_n^{k-2} + \cdots + C_k^{k-1} S_n^1 + S_n^0 = (n+1)^k - 1$$

$$C_{k-1}^{1}S_n^{k-2}+\cdots+C_{k-1}^{k-2}S_n^1+S_n^0=(n+1)^{k-1}-1$$

……………………………………………

$$C_2^1S_n^1+S_n^0=(n+1)^2-1$$

$$S_n^0=(n+1)-1. \qquad (1.2)$$

Розв'язавши цю систему, матимемо, що для довільного k сума S_n^k виразиться певним многочленом від змінної *n*. Цей многочлен буде многочленом степеня k + 1 без вільного члена. Наведемо кілька перших з цих многочленів:

$$S_n^0=n;$$

$$S_n^1=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n;(1.3)$$

$$S_n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n;$$

$$S_n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Розглянемо цікаву послідовність чисел, які широко застосовуються в різних розділах математики (комбінаторний аналіз, теорія рядів тощо). Це так звані *числа Бернуллі*, чи бернуллієві *ч*исла. Їхня назва пов'язана з іменем відомого швейцарського математика Якова Бернуллі (1654-1705), який вперше застосував їх при розв'язанні однієї астрономічної задачі [14]. Числами Бернуллі B_k називають коефіцієнти при перших степенях многочленів $S_{n-1}^k(k=0,1,2,\dots)$. Так, з виразів (1.3) маємо:

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0.$$

Ці числа можна також визначити (при *k>1*) за допомогою виразу

$$(B+1)^k-B^k=0,$$

де $(B+1)^k$ розкладається як біном, але означає не *i*-тий степінь, а *i*-те число Бернуллі, тобто $B^i=B_i$. Наприклад, при *k* = 2:

$$(B+1)^2-B^2=0;\ B^2+2B^1+1-B^2=0;\ 2B^1=-1;\ B^1=B_1=-\frac{1}{2}.$$

Аналогічно при *k* = 3:

$$(B+1)^3-B^3=0;\ B^3+3B^2+3B^1+1-B^3=0;\ 3B^2+3B^1=-1;$$

$$B^2 = B_2 = \frac{-1-3B_1}{3} = \frac{-1+3\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}.$$

Наведемо перші 18 значень чисел Бернуллі:

$$B_1 = -\frac{1}{2};\ B_2 = \frac{1}{6};\ B_3 = 0;\ B_4 = -\frac{1}{30};\ B_5 = 0;\ B_6 = \frac{1}{42};\ B_7 = 0;$$

$$B_8 = -\frac{1}{30};\ B_9 = 0;\ B_{10} = \frac{5}{66};\ B_{11} = 0;\ B_{12} = -\frac{691}{2730};\ B_{13} = 0;$$

$$B_{14} = \frac{7}{6};\ B_{15} = 0;\ B_{16} = -\frac{3617}{510};\ B_{17} = 0;\ B_{18} = \frac{43867}{798}.$$

Ми тут не спинятимемося на всіх властивостях та застосуваннях чисел Бернуллі, а вкажемо тільки на зв'язок цих чисел із знаменитою проблемою Ферма. Відомий французький математик П. Ферма (1601-1665) сформулював твердження, що пізніше дістало назву *великої теореми Ферма*, яка ще й досі ніким не доведена і не спростована: при всіх натуральних $n > 2$ рівняння $x^n + y^n = z^n$, не має розв'язків у цілих числах, відмінних від нуля [26].

Окремі випадки цієї теореми можна довести, використовуючи числа Бернуллі. Німецький математик Е. Куммер (1810-1893) запропонував називати просте число $p \geq 3$ *регулярним*, якщо жоден з чисельників бернуллієвих чисел не ділиться на p без остачі. Він довів теорему про те, що велика теорема Ферма справедлива, якщо показник степеня n є регулярним числом. Отже, досить довести, що деяке просте число є регулярним, щоб мати змогу стверджувати, що для даного показника степеня справджується теорема Ферма [18].

Числа 3, 5, 7, 11, 13 є регулярними. Проте не всі прості числа є регулярними, наприклад, число 37 не є регулярним. Про регулярні числа відомо небагато, невідомо навіть їх скінченна чи нескінченна кількість.

Повернемося тепер до основної теми цього підрозділу – знаходження сум S_n^k послідовностей (n^k). При великих значеннях k розв'язування системи (1.3) дуже громіздке, тому потрібні інші методи, за якими S_n^k можна знаходити простіше [15].

Звернемося до методу *скінченних різниць*. Його можна було б застосувати, якби ми могли розв'язати таку задачу: знайти многочлен $\varphi_s(x)$

такий, що для довільного $x \in R$:

$$\varphi_s(x+1) - \varphi_s(x) = x^s \tag{1.4}$$

Такий многочлен $\varphi_s(x)$ називається s-м *многочленом Бернуллі*. Звичайно, треба ще довести, що задача справді має розв'язок і при довільному $s = 1, 2, 3, \ldots$ цим розв'язком є певний многочлен $\varphi_s(x)$. Випишемо п'ять перших многочленів Бернуллі:

$$\varphi_0(x) = x;$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x;$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x;$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2;$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

Звернемо увагу на те, що:

1) степінь многочлена Бернуллі $\varphi_s(x)$ дорівнює $s+1$, тобто на 1 більший від його індексу;

2) старший коефіцієнт многочлена $\varphi_s(x)$ дорівнює $\frac{1}{s+1}$;

3) $\varphi_s(0) = 0$, тобто многочлени Бернуллі не мають вільного члена;

4) $\varphi_s(1) = 0$ при $s \geq 1$, тобто сума коефіцієнтів многочленів Бернуллі дорівнює нулю.

Числа Бернуллі використовуються також при побудові многочленів Бернуллі. Знаючи бернуллієві числа, можна обчислити коефіцієнти довільного многочлена Бернуллі[19].

Нехай $\varphi_s(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^{s+1-i}$ – s-й многочлен Бернуллі. Тоді

$$b_0 = \frac{1}{s+1};$$

$$b_1 = B_1 = -\frac{1}{2};$$

$$b_2 = \frac{s}{1*2}B_2 = \frac{C_S^1}{2}B_2; \tag{1.5}$$

$$b_3 = \frac{s(s-1)}{1*2*3}B_3 = \frac{C_s^2}{3}B_3;$$

....

$$b_s = \frac{C_s^{s-1}}{s}B_s = B_s.$$

Для того, щоб показати, як користуватися формулами (1.5), поповнимо наведену вище таблицю бернуллієвих многочленів, обчисливши многочлен $\varphi_s(x)$. Знаходимо:

$$b_0 = \frac{1}{6};\; b_1 = B_1 = -\frac{1}{2};\; b_2 = \frac{C_s^1}{2}B_2 = \frac{5}{12};\; b_3 = \frac{C_s^2}{3}B_3 = 0;$$

$$b_4 = \frac{C_s^3}{4}B_4 = -\frac{1}{12};\; b_5 = B_5 = 0.$$

Отже,

$$\varphi_5(x) = \tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2.$$

У подальшому нас цікавитимуть не бернуллієві числа, а многочлени Бернуллі. Розглянемо метод безпосереднього обчислення коефіцієнтів цих многочленів, не застосовуючи бернуллієвих чисел [16].

На основі означення s-го многочлена Бернуллі випливає, що породжена ним послідовність буде первісною для степеневої послідовності (k^s). Отже, справедлива формула

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k^s = \varphi_s(n+1) - \varphi_s(1) \tag{1.6}$$

Випадок $s = 0$ тривіальний. Тому вважатимемо, що $s > 0$, проте при $s \geq 1$, як зазначалося вище, $\varphi_s(1) = 0$. Тому формула (1.6) набуває вигляду

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k^s = \varphi_s(n+1) \tag{1.7}$$

Таким чином, сума s-х степенів $(s \geq 1)$ перших n натуральних чисел дорівнює значенню s-го многочлена Бернуллі при $x = n + 1$.

Розглянемо задачі на підсумовування послідовностей, які розв'язуються за допомогою перетворення, введеного Н. Абелем [5].

Нехай задано послідовність виду

$$\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_n\beta_n, \dots \qquad (1.8)$$

яку можна розглядати як добуток двох послідовностей (α_k) і (β_k).

Треба для довільного *n* знайти суму

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k \qquad (1.9)$$

Припустимо, що для однієї з цих послідовностей, наприклад другої, відомо первісну послідовність (b_k), тобто

$$\beta_k = b_{k+1} - b_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(1.10)

Тоді перетворення Абеля характеризується формулою

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = (b_{n+1}a_{n+1} - b_1a_1) - \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)b_{k+1}$$

(1.11)

Зміст цього перетворення полягає в тому, що воно зводить обчислення суми (1.9) до знаходження первісної послідовності (b_k) та обчислення суми

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)b_{k+1},$$

що у багатьох випадках може виявитися більш простою задачею. Формулу (1.11) часто називають *формулою підсумовування частинами* [13].

Виведемо формулу (1.11). Для довільного $k = 1, 2, \dots$ можна записати рівність

$$a_{k+1}b_{k+1} - a_kb_k = (b_{k+1} - b_k)\alpha_k + (\alpha_{k+1} - \alpha_k)b_{k+1}$$

Підсумовуючи ці рівності для $k = 1, 2, \dots, n$ дістаємо:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k)\alpha_k + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)b_{k+1} = a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1$$

Різницю $b_{k+1} - b_k$ можна замінити на (β_k), $k = 1, 2, \dots$ після чого внаслідок перенесення відповідних членів з однієї частини рівності в другу матимемо формулу (1.11) [7].

Формулою підсумовування частинами зручно користуватися при знаходженні сум виду

$$\sum_{k=1}^{n} P(k)q^{k-1}; \ \sum_{k=1}^{n} P(k)cosk\alpha; \ \sum_{k=1}^{n} P(k)sink\alpha; \ \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}sink\alpha;$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} cosk\alpha,$$

де *P(x)* — многочлен.

Зазначимо, що із зростанням степеня многочлена *P(x)* формули стають дедалі більш громіздкими і доводиться багато разів застосовувати формули підсумовування частинами. Тому ми не захоплюватимемося надмірною загальністю формул, а наведених нижче прикладів буде досить для того, щоб з'ясувати загальну ідею [20].

Щоб показати, як обчислюються суми наведеного вище виду, введемо спочатку одне співвідношення. Розглянемо суму виду

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m-1)^{m}\beta_k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+m-1)\beta_k, \tag{1.12}$$

де β_k — члени деякої послідовності (β_k). Припустимо, що для послідовності відомо первісну послідовність (b_k). Беручи

$$a_k = k(k+1)\dots(k+m-1),$$

маємо:

$$a_{k+1} - a_k = [(k+1)(k+2)\dots(k+m)] - [k(k+1)\dots(k+m-1)] =$$
$$(k+1)(k+2)\dots(k+m-1)[(k+m)-k] = m(k+m-1)^{m-1}.$$

Скориставшись формулою (1.11), дістаємо:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m-1)^{m}\beta_k = (m+n)^{m} b_{n+1} - b_1 m! -$$
$$m\sum_{k=1}^{n}(k+m-1)^{m-1} b_{k+1}.$$

Крім того,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m-1)^{m-1} b_{k+1} =$$
$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)\dots(k+m-1) b_{k+1} =$$
$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)\dots(k+m-2) b_k - (m-1)!\, b_1 =$$
$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+m-2)^{m-1} b_k - (m-1)!\, b_1.$$

Тому остаточно формула набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m-1)^{m}\beta_k = (n+m)^{m} b_{n+1} - m\sum_{k=1}^{n+1}(k+m-2)^{m-1} b_k \tag{1.13}$$

Тепер розглянемо окремі випадки сум, утворених за допомогою формули (1.11).

Нехай маємо суму

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m-1)^{m}q^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\dots(k+m-1)q^{k-1},$$
$$(q\neq 1,\ \ m=1,2,3,\dots).$$

Ця сума є сумою виду (1.11) при $\beta_k=q^{k-1},\ \ k=1,2,3,\dots$

Первісною для послідовності (q^{k-1}), як відомо [21], є послідовність

$$b_k=\frac{q^{k-1}}{q-1},\quad (k=1,2,3,\dots).$$

Тому у нашому випадку формула (1.12) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{n}(k+m-1)^{m}q^{k-1}=(m+n)^{m}\frac{q^{n}}{q-1}-$$
$$-\frac{1}{q-1}\sum_{k=1}^{n+1}q^{k-1}=(n+1)\frac{q^{n}}{q-1}-\frac{q^{n+1}-1}{(q-1)^{2}} \qquad (1.14)$$

При m = 2 маємо:

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)q^{k-1}=(n+1)(n+2)\frac{q^{n}}{q-1}-\frac{2}{q-1}\sum_{k=1}^{n+1}kq^{k-1}.$$

Застосувавши формулу (1.14), знаходимо

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)q^{k-1}=(n+1)(n+2)\frac{q^{n}}{q-1}-2(n+2)\frac{q^{n+1}}{(q-1)^{2}}+2\frac{q^{n+2}-1}{(q-1)^{2}}$$

Застосовуючи потім виведені формули, матимемо суму $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)q^{k-1}$ і т.д.

Основна задача на підсумовування послідовностей формулюється так: задана послідовність дійсних чисел

$$(a_n): a_1,a_2,\dots,a_n,\dots \qquad (1.15)$$

Треба для довільного n знайти суму $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ перших n членів послідовності (1.15) [32].

Суть задачі, очевидно, полягає не в тому, щоб для даного конкретного значення n обчислити значення суми S_n (таке обчислення, хоч і громіздке для великих n, принципових труднощів не створює), а в тому, щоб виразити S_n як функцію від n та заданої послідовності. Можна розглядати задачу на знаходження не точного, а наближеного виразу для S_n або досліджувати поведінку S_n при $n\to\infty$ [11].

Припустимо, що для послідовності (1.15) можна вказати таку послідовність

$$(b_n): b_1, b_2, \dots, b_n, \tag{1.16}$$

що для довільного k = 1, 2, 3, ... справджуються рівності

$$a_k = b_{k+1} - b_k. \tag{1.17}$$

Підсумовуючи ці рівності, знаходимо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \tag{1.18}$$

З (1.18) випливає, що знаючи послідовність (1.16), маємо ефективний метод підсумовування послідовності (1.15), а саме: для довільного n = 1, 2, 3, ... сума перших n членів послідовності (1.15) дорівнює різниці між (n+1)-м та першим членом послідовності (1.16) [28].

Якщо послідовність (1.16) задано певною формулою, то тоді можна дістати формулу для S_n послідовності (1.15). В основу цього методу покладено ідею зображення членів послідовності (1.15) у вигляді різниць членів послідовності (1.16). Називатимемо такий метод *методом скінчених різниць*. Послідовність (1.16), для якої виконуються умови (1.17), називатимемо *первісною послідовністю* для послідовності (1.15) [29].

Використовуючи метод скінченних різниць, необхідно насамперед вміти знаходити для заданої послідовності її первісну послідовність. Зазначимо, що для кожної послідовності існує первісна послідовність. Справді, яка б не була послідовність

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \tag{1.19}$$

Послідовність

$$1, 1 + a_1, 1 + a_1 + a_2, \dots, 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots \tag{1.20}$$

є для неї первісною. Проте, якщо послідовність (1.19) породжується функцією, вираженою певною скінченою формулою, то послідовність (1.20) може бути такою, що функція, яка її породжує, жодною скінченою формулою не виражається [16].

Існують систематичні методи знаходження первісних послідовностей. Перш ніж розглянути їх, введемо такі операції над послідовностями: додавання двох послідовностей, множення послідовності на число та виконання лінійної комбінації з двома послідовностями [12].

1. *Сумою* двох послідовностей (a_n) та (a_n) називають послідовність

$$(a_n + a_n): a_1 + a_1, a_2 + a_2, \dots, a_n + a_n, \dots,$$

тобто послідовність, члени якої є сумами відповідних (з однаковими номерами) членів послідовностей (a_n) та (a_n).

2. *Добутком* послідовності (a_n) на число α є послідовність $(\alpha a_n): \alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n, \dots$, тобто при множенні послідовності (a_n) на число α всі її члени множать на це число.

3. *Лінійною комбінацією* послідовностей з коефіцієнтами α і β називають послідовність

$$(\alpha a_n + \beta a_n): \alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \dots, \alpha a_n + \beta a_n, \dots$$

Наведемо тепер ряд теорем, які полегшують знаходження первісних послідовностей.

Зазначимо, що коли послідовність (b_n) є первісною для послідовності (a_n), то послідовність $(b_n + c)$, де $c \in R$ - константа, також є первісною для (a_n). Отже, первісна послідовність визначається з точністю до константи (константної послідовності). Очевидно, для задачі на підсумовування послідовності (a_n) можна скористатися довільною її первісною послідовністю [13].

Теорема 1.7. Первісна послідовність суми двох послідовностей дорівнює сумі їх первісних послідовностей.

Доведення.

Справді, нехай (a_n) і (a'_n) - деякі послідовності, а (b_n) і (b'_n) – їхні первісні послідовності, тобто

$$b_{k+1} - b_k = a_k$$
$$b'_{k+1} - b'_k = a'_k \qquad (1.21)$$

Розглянемо послідовності $(a_n + a'_n)$ і $(b_n + b'_n)$. Для довільного k = 1, 2, 3, ... на основі (1.21) маємо:

$$(b_{k+1}+b'_{k+1})-(b_k+b'_k)=(b_{k+1}-b_k)+(b'_{k+1}-b'_k)=a_k+a'_k.$$

Це означає, що послідовність $(b_n+b'_n)$ є первісною для послідовності $(a_n+a'_n)$.

Теорема 1.8. При множенні послідовності на число її первісна послідовність помножається на це саме число.

Теорема 1.9. Первісна послідовність лінійної комбінації послідовностей дорівнює тій самій (з тими самими коефіцієнтами) лінійній комбінації їх первісних послідовностей.

Доведення випливає з теорем 1.7 і 1.8.

Розглянемо многочлен m-го степеня

$$y(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1).$$

У теорії скінчених різниць [23] цей многочлен називається m-м *факторіальним многочленом* і позначається x^m. Отже,

$$x^{[1]}=x;$$

$$x^{[2]}=x(x-1);$$

$$x^{[3]}=x(x-1)(x-2);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Нехай за означенням $x^{[0]}\equiv 1$. При $x=k$ значення многочлена $x^{[m]}$ (позначатимемо його $k^{[m]}$) дорівнює 0, якщо $k<m$ і $k(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)$, якщо $k\geq m$. Назва «факторіальний многочлен» пов'язана з тим, що значення многочлена $x^{[m]}$ при $x=m$ дорівнює $m!$ $(m^{[m]}=m!)$ [10].

Послідовність $(k^{[m]})$ також називатимемо *факторіальною*, оскільки вона є послідовністю, породженою m-м факторіальним многочленом.

Основна властивість факторіальних многочленів. Для довільного $m=1,2,3,\ldots$ і довільного $x\in R$ справедлива формула

$$(x+1)^{[m+1]}-x^{[m+1]}=(m+1)x^{[m]}$$

Дійсно, з означення факторіальних многочленів випливає, що

$$(1+x)^{[m+1]}-x^{m+1}=(x+1)x(x-1)\ldots(x-m+1)-x(x-1)\ldots(x-m)=$$

$$=x(x-1)\ldots(x-m+1)[(x+1)-(x-m)]=(m+1)x^{[m]} \quad (1.22)$$

Запишемо тотожність (1.22) у вигляді

$$\frac{1}{m+1}\left((x+1)^{[m+1]} - x^{[m]}\right) = x^{[m]}. \qquad (1.23)$$

Звідси випливає, що послідовність

$$b_k = \frac{1}{m+1} k^{[m+1]}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \qquad (1.24)$$

є первісною для послідовності $(a_k) = \left(k^{[m]}\right)$. Отже, для довільного n можна знайти суму

$$\sum_{k=1}^{n} k^{[m]} \qquad (1.25)$$

Оскільки, як вже зазначалося, при $m \geq 1$

$$k^{[m]} = k(k-1)\dots(k-m+1),$$

то перші m – 1 членів послідовності $\left(k^{[m]}\right)$ дорівнюють нулю. Тому доцільно розглядати суму (1.25) тільки для $n \geq m$, тобто, де $v = 1, 2, 3, \dots$ Тоді

$$\sum_{k=1}^{m+v-1} k^{[m]} = \sum_{k=m}^{m+v-1} k^{[m]} = 1 * 2 * \dots * m + 2 * 3 * \dots + (m+1) + \dots +$$
$$+ v(v+1)\dots(m+v-1) = \frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \dots + \frac{(m+v-1)!}{(v-1)!}.$$

Тепер, беручи до уваги формулу (1.24), можна скористатися методом скінчених різниць. Припускаючи, що $m \geq 1$, маємо:

$$\sum_{k=1}^{m+v-1} k^{[m]} = \sum_{k=1}^{v} \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} = b_{m+v} - b_1 = \frac{1}{m+1}(m+v)^{[m+1]} -$$
$$\frac{1}{m+1} 1^{[m+1]} = \frac{1}{m+1} \frac{(m+v)!}{(v-1)!}.$$

Отже, остаточно

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{1}{m+1} \frac{(m+v)!}{(v-1)!} \qquad (1.26)$$

РОЗДІЛ 2
ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ
В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

2.1. Арифметична та геометрична прогресії

Арифметичною прогресією називається числова послідовність, яку можна задати за допомогою рекурентної формули $a_{n+1} = a_n + d \quad (d \neq 0)$, де d – *різниця арифметичної прогресії*.

Теорема 2.1. Кожний член арифметичної прогресії можна визначити за допомогою формули

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad (2.1)$$

Доведення.

$$a_2 = a_1 + d\,,\;\; a_3 = a_2 + d\,,\;\ldots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + d\,,\; a_n = a_{n-1} + d\,.$$

Додамо почленно усі $n-1$ рівностей, тоді дістанемо:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + d(n-1),$$

звідки $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формула (2.1) називається *формулою загального члена арифметичної прогресії* [17].

Теорема 2.2 (*характеристична властивість арифметичної прогресії*). Кожен член арифметичної прогресії, розпочинаючи з другого, є середнім арифметичним двох членів, рівновіддалених від нього:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \;\; (n > k) \qquad (2.2)$$

Доведення.

$$a_{n-k} + a_{n+k} = a_1 + (n-k-1)d + a_1 + (n+k-1)d = 2a_1 + 2(n-1)d = 2(a_1 + d(n-1)) = 2a_n\,.$$

Наслідок. Кожен член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх із ним членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n > 1) \tag{2.3}$$

Теорема 2.3. В скінченній арифметичній прогресії сума двох членів, які знаходяться на однаковій відстані від крайніх членів, є величина постійна, що дорівнює сумі крайніх членів.

Доведення.

Нехай дано арифметичну прогресію $a_1, a_2, ..., a_n$. Знайдемо суму k-го від кінця і k-го від початку членів прогресії $(k < n)$.

Маємо:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(n-k) = a_1 + a_1 + d(n-1) = a_1 + a_n.$$

Теорема 2.4. Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Доведення.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1;$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n) \cdot n;$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n.$$

Використовуючи формулу (2.2), останню формулу можна подати у вигляді:

$$S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n.$$

Геометричною прогресією називається числова послідовність, яку можна задати за допомогою рекурентної формули $b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (q \neq 0, q \neq 1)$, де q *– знаменник геометричної прогресії.*

Теорема 2.5. Кожен член геометричної прогресії можна визначити за формулою

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \tag{2.4}$$

Доведення.

$$b_2 = b_1 \cdot q\,,\; b_3 = b_2 \cdot q\,,\; b_4 = b_3 \cdot q\,,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .,$$

$$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q\,,\; b_n = b_{n-1} \cdot q\,.$$

Якщо помножити почленно усі рівності, то отримаємо:

$$b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1},$$

звідси $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула (2.4) називається *формулою загального члена геометричної прогресії* [5].

Теорема 2.6 (*характеристична властивість геометричної прогресії*). Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, розпочинаючи з другого, дорівнює добутку членів, рівновіддалених від нього:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k} \quad (n > k) \tag{2.5}$$

Доведення.

$$b_{n-k} \cdot b_{n+k} = b_1 \cdot q^{n-k-1} \cdot b_1 \cdot q^{n+k-1} = b_1^2 \cdot q^{2n-2} = (b_1 \cdot q^{n-1})^2 = b_n^2\,.$$

Наслідок. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, розпочинаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх із ним членів:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}\,, \quad n \geq 2 \tag{2.6}$$

Якщо члени геометричної прогресії додатні, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ – тобто є середнім геометричним попереднього та наступного членів [22].

Теорема 2.7. В скінченній геометричній прогресії добуток двох членів, які рівновіддалені від кінців прогресії, дорівнює добутку крайніх членів.

Доведення.

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-k} = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot b_n\,.$$

Теорема 2.8. Сума n перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1 \tag{2.7}$$

Доведення.

$$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n \,,$$

$$q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + ... + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q \,.$$

Якщо відняти почленно ці рівності, то отримаємо:

$$S_n \cdot (1-q) = b_1 - b_n \cdot q \,; \; S_n \cdot (1-q) = b_1 - b_1 \cdot q^n \,.$$

Звідси

$$S_n = \frac{b_1 - b_1 \cdot q^n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \,.$$

Нескінченна геометрична прогресія, в якій знаменник прогресії $|q|<1$, називається *нескінченно спадною геометричною прогресією.*

Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називається границя суми n перших її членів при $n \to \infty$, тобто:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \,.$$

Теорема 2.9. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює $\frac{b_1}{1-q}$, тобто:

$$S = \frac{b_1}{1-q} \qquad (2.8)$$

Доведення.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - b_1 \cdot q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{1-q} - b_n \cdot \frac{q}{1-q}\right) = \frac{b_1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \cdot 0 = \frac{b_1}{1-q} \,.$$

Розглянемо деякі приклади застосування арифметичної та геометрично прогресій.

Задача 2.1. Знайти арифметичну прогресію, для якої сума будь-якого числа членів, починаючи з першого, в 4 рази більша за квадрат числа членів.

Розв'язання.

Арифметичну прогресію можна визначити двома величинами a_1 і d. За умовою $S_n = 4n^2$. Тому

$$a_1 = S_1 = 4 \cdot 1^2 = 4.$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 \cdot 2^2 = 16.$$

Звідси

$$a_2 = S_2 - a_1 = 16 - 4 = 12.$$

Але $a_2 = a_1 + d$. Тому

$$d = a_2 - a_1 = 12 - 4 = 8.$$

Утворюємо прогресію: 4, 12, 20, 28, … , $4 + 8n$, … .

Безпосередньою перевіркою переконуємося у правильності розв’язку.

Відповідь: 4, 12, 20, 28, … , $4 + 8n$, … .

Задача 2.2. Знайти числа, що утворюють арифметичну прогресію, якщо відомо, що сума перших чотирьох членів дорівнює 68, сума останніх чотирьох членів дорівнює – 36, а сума усіх членів дорівнює 68.

Розв’язання.

Як відомо, сума останніх чотирьох членів арифметичної прогресії a_1, a_2, … , a_n з різницею d дорівнює сумі перших чотирьох членів прогресії a_n, a_{n-1}, … , a_2, a_1 з різницею $-d$. Тоді за умовою задачі маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 68 \\ \dfrac{2a_n - 3d}{2} \cdot 4 = -36 \\ \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 68 \end{cases}$$

Додамо перші два рівняння системи, тоді знайдемо, що $a_1 + a_n = 8$. Далі з третього рівняння випливає, що $n = 17$. З системи:

$$\begin{cases} 2a_1 + 3d = 34 \\ 2a_1 + 29d = -18 \end{cases}$$

одержуємо $a_1 = 20$, $d = 2$. Таким чином, шукана арифметична прогресія має вигляд:

$$20, 18, 16, 14, \ldots$$

Відповідь: 20, 18, 16, 14, …

Задача 2.3. Знайти сторони трикутника, що виражаються цілими числами, якщо вони утворюють арифметичну прогресію, а периметр трикутника дорівнює 15.

Розв’язання.

Позначимо сторони трикутника як: $a - d$, a, $a + d$, ($d \geq 0$, $a > d$). Тоді з умови задачі маємо:

$$a - d + a + a + d = 15,$$

тобто $a = 5$.

Оскільки, які відомо [16], в трикутнику

$$a - d < (a - d) + a$$

то $d < \frac{a}{2}$, тобто $d < 2{,}5$ і ціле. Тому $d = 0, d = 1, d = 2$.

Отримаємо три можливі розв'язки: 5, 5, 5; 4, 5, 6; 3, 5, 7.

Відповідь: 5, 5, 5; 4, 5, 6; 3, 5, 7.

Задача 2.4. Числа x, y та z утворюють арифметичну прогресію. Довести, що якщо x, y, z – цілі розв'язки рівняння $x^2 + y^2 = z^2, x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то x ділиться на 3, y – на 4, а z – на 5 .

Доведення.

Нехай x – перший член арифметичної прогресії. Тоді маємо:

$$y = x + d,\ z = x + 2d,\ |x| < |y| < |z|.$$

Підставимо отримані значення в рівняння, що міститься в умові задачі, одержимо:

$$x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2,$$

або після розкриття дужок та зведення подібних:

$$x^2 - 2xd - 3d^2 = 0.$$

Останнє рівняння має два корені: $3d$ та $-d$.

Якщо $x = 3d$, то $y = x + d = 3d + d = 4d$, $z = x + 2d = 3d + 2d = 5d$, що і треба було довести.

Якщо ж $x = -d$, то $y = x + d = -d + d = 0$, що суперечить умові $y \neq 0$.

Задача 2.5. Дана геометрична прогресія з першим членом b_1 та знаменником q. Довести, що послідовність k-тих степенів членів цієї прогресії також утворює геометричну прогресію, та знайти перший член та знаменник цієї прогресії.

Доведення.

Нехай b_1, b_2, b_3 – геометрична прогресія із знаменником q. Тоді розглянемо послідовність k-тих степенів цієї прогресії, вона матиме вигляд:

$$b_1^k, b_2^k, \dots, b_n^k, \dots$$

Знайдемо відношення наступного члена цієї послідовності до попереднього її члена:

$$\frac{b_{n+1}^k}{b_n^k} = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^k = q^k .$$

Як видно, це відношення є сталою величиною q^k, яка не залежить від номера члена послідовності, тому ця послідовність утворює геометричну прогресію із знаменником $q_1 = q^k$ та першим членом b_1^k.

Задача 2.6. У геометричній прогресії сума перших n членів виражається за допомогою формули $S_n = 2{,}5 \cdot (3^n - 1)$. Знайти знаменник прогресії.

Розв'язання.

За означенням геометричної прогресії маємо: $q = \dfrac{b_2}{b_1}$. Очевидно, що $S_1 = b_1$ $S_2 = b_1 + b_2$, тому

$$b_1 = S_1 = 2{,}5 \cdot (3^1 - 1) = 2{,}5 \cdot 2 = 5;$$

$$b_2 = S_2 - b_1 = 2{,}5 \cdot (3^2 - 1) - 5 = 2{,}5 \cdot 8 - 5 = 20 - 5 = 15 .$$

Отже, $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{15}{5} = 3$.

Відповідь: 3.

Задача 2.7. Знайти тризначне число, цифри якого утворюють геометричну прогресію, причому відомо, що якщо це число зменшити на 594, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але в оберненому порядку.

Розв'язання.

Нехай b_1, b_2, b_3 – геометрична прогресія, яку утворюють цифри даного тризначного числа. Тоді саме число можна записати у вигляді $100b_3 + 10b_2 + b_1$. Число, яке записане тими самими цифрами, але в оберненому порядку, має вигляд $100b_1+10b_2+b_3$. За умовою задачі різниця між ними рівна 594, тобто

$$100b_3+10b_2+b_1-(100b_1+10b_2+b_3)=594 \Rightarrow 99b_3-99b_1=594 \Rightarrow b_3-b_1=6.$$

За формулою загального члена геометричної прогресії $b_3=b_1q^2$, тому останнє рівняння можна записати у вигляді

$$b_1q^2-b_1=6 \Rightarrow b_1(q-1)(q+1)=6 \Rightarrow (q-1)b_1(q+1)=1\cdot 2\cdot 3,$$

тобто $b_1=2$, $q=2$ і шуканим є число 842.

Відповідь: 842.

Задача 2.8. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 3, а сума кубів всіх її членів дорівнює $\frac{108}{13}$. Знайдіть прогресію.

Розв'язання.

Для визначення b_1 і q маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=3, \\ \dfrac{b_1^3}{1-q^3}=\dfrac{108}{3}. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $q_1 = \frac{1}{3}$ і $q_2 = 3$ (як видно, значення $q_2 = 3$ не задовольняє умову $q < 1$). Підставивши $q = \frac{1}{3}$ в перше рівняння системи, отримаємо $b_1 = 2$.

Шукана геометрична прогресія має вигляд:

$$2;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{9};\ \ldots$$

Відповідь: 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; … .

Задача 2.9. Перший член нескінченної спадної геометричної прогресії дорівнює 1, а сума прогресії дорівнює *S*. З квадратів членів цієї прогресії утворено нову нескінченно спадну геометричну прогресію. Знайти її суму.

Розв'язання.

За умовою задачі $b_1=1$, $|q|<1$. Тому за формулою суми нескінченної спадної геометричної прогресії маємо:

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-q},$$

звідки $q=\frac{S-1}{S}$.

Сума нової прогресії b_1^2, b_2^2, $b_3^2,\ldots$ дорівнює $b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots=\mathrm{S}^*$.

Скориставшись формулою загального члена геометричної прогресії, маємо:

$$\mathrm{S}^*=b_1^2+b_1^2q^2+b_1^2q^4+\ldots=b_1^2(1+q^2+q^4+\ldots).$$

Вираз в дужках, в свою чергу, також є сумою нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом 1 та знаменником q^2, тому дорівнює $\frac{1}{1-q^2}$.

Таким чином,

$$\mathrm{S}^*=b_1^2\cdot\frac{1}{1-q^2}=1\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{S-1}{S}\right)^2}=\frac{1}{\frac{S^2-(S-1)^2}{S^2}}=\frac{S^2}{S^2-S^2+2S-1}=\frac{S^2}{2S-1}.$$

Відповідь: $\frac{S^2}{2S-1}$.

2.2. Деякі методичні особливості введення поняття послідовності в курсі алгебри

Зараз числові послідовності вивчаються в 9 класі. Основні питання програми з математики, що стосуються даної теми, та перелік знань та умінь учнів наведено у таблиці 2.1:

Таблиця 2.1

Тема 3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ (*10 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** числової	Числові послідовності.

послідовності; арифметичної та геометричної прогресій; **формулює** означення і властивості арифметичної та геометричної прогресій; **записує і пояснює:** · *формули*: n-го члена арифметичної та геометричної прогресій, суми перших *n* членів цих прогресій; · *властивості* арифметичної та геометричної прогресій **розв'язує вправи, що передбачають:** обчислення членів прогресії; задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших *n* членів арифметичної й геометричної прогресій; використання формул загальних членів і сум прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій	Арифметична та геометрична прогресії, їх властивості. Формули *n*-го члена арифметичної та геометричної прогресій. Формули суми перших *n* членів арифметичної та геометричної прогресій

На уроках геометрії, як правило, надають означення поняття числової послідовності, а в курсі алгебри та елементарних функцій вивчають арифметичну і геометричну прогресії. Передбачається спочатку дати загальне означення послідовності, а вже потім більш детально зупинитися на арифметичній та геометричній прогресіях.

Як правило, послідовність визначають наступним чином:

”Послідовністю називається функція від натурального аргументу” [23]. Проте починати пояснювати краще не з означення, а з конкретних прикладів.

Так, можна запропонувати записати натуральні числа в порядку їх зростання:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

Це послідовність натуральних чисел. Після того можна навести ще декілька прикладів:

2, 4, 6, 8, 10, 12, - послідовність парних чисел;

1, 3, 5, 7, 9, 11, - послідовність непарних чисел;

2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, – послідовність простих чисел;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, - послідовність чисел, обернених до натуральних.

Числа, які належать до послідовності, називаються її членами.

Наприклад, в послідовності парних чисел першим членом є число 2, другим членом – число 4, десятим членом – число 20 і т. д. Членами числової послідовності можуть бути довільні числа: цілі, дробові, додатні та від’ємні, раціональні та ірраціональні.

Приблизно в такому руслі можна надати поняття числової послідовності. Варто зауважити, що послідовності бувають нескінченні та скінченні, зростаючі та спадні.

Зростаючою називається послідовність, кожний член якої, окрім першого, більший за попередній [26].

Якщо кожний член числової послідовності, за винятком першого, не менший за попередній, то таку послідовність називають неспадною. Зростаюча послідовність є окремим видом неспадної. Аналогічно можна означити спадну та незростаючу послідовності.

Обов’язково слід ввести поняття загального члена числової послідовності. При цьому це поняття краще пояснити на конкретних прикладах.

Можна запропонувати розглянути ще раз послідовність парних чисел: 2, 4, б, 8, 10, 12, ... Її перший член дорівнює 2, другий – 4, третій – 6 і т. д.

При цьому їх позначають: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. Виникає питання: а чому дорівнює *n-й* член цієї послідовності? Оскільки кожний член послідовності парних чисел вдвічі більший за свій порядковий номер, то *n-й* член дорівнює $2n$. Позначають: $a_n = 2n$.

n-й член послідовності називають її загальним членом.

Слід звернути увагу учнів на те, що якщо відомий загальний член послідовності, то можна написати скільки завгодно її членів. Для цього потрібно замість букви *n*, що входить до загального члена, підставляти послідовно натуральні числа – номери членів. Нехай, наприклад, потірбно знайти кілька перших членів послідовності із загальним членом $a_n = n^2 + 2$. Надаючи *n* значень 1, 2, 3, 4, 5, ... , дістанемо послідовні члени послідовності:

3, 6, 11, 18, 27, …

Значно важче розв'язувати обернену задачу: за даними першими членами послідовності написати її загальний член. Проте лише у найпростіших випадках вдається порівняно швидко розв'язати цю задачу. В загальному ж випадку знаходження загального члена послідовності пов'язане із значними труднощами. Крім того, можна звернути увагу учнів на те, що є й такі послідовності, загальні члени яких ще нікому не відомі [15]. Такою, наприклад, є послідовність простих чисел

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,... .

Якщо ж відомі лише кілька перших членів послідовності, то її загальний член взагалі не можна визначити однозначно. Наприклад, для послідовності:

1, 3, 5, 7, 9, …

загальним членом може бути

$a_n = 2n - 1$ або $a_n = 2n - 1 + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$ і т. п.

Існує нескінченна множина різних числових послідовностей, перші п'ять членів яких дорівнюють 1, 3, 5, 7, 9. Тому вчитель повинен знати, що для того, щоб задати послідовність, не досить вказати кілька її перших членів.

Але як все ж таки визначити загальний член хоча б однієї з послідовностей, якщо задані перші члени? Учням жодних правил для цього можна не давати, але й важких вправ на визначення загального члена послідовності також їм не слід пропонувати.

Але вчителеві треба знати загальний спосіб розв'язування таких вправ. Нехай, наприклад, потрібно визначити загальний член числової послідовності

6, 9, 14, 21, 30, 41,...

Щоб розв'язати задачу, учень змушений підбирати різні формули та перевіряти їх. Не виключено, що він так і не зможе знайти потрібну формулу. Вчитель може діяти більш цілеспрямовано. Потрібно записати послідовність різниць двох суміжних членів даної послідовності, а потім другу послідовність різниць і т. д., доки не отримаємо послідовність різниць з однаковими членами. Як бачимо, всі члени

6 9 14 21 30 41

3 5 7 9 11

2 2 2 2

другої послідовності різниць однакові. Це свідчить про те, що загальний член послідовності (найпростіший) є многочленом другого степеня [28]. Запишемо цей загальний член з невизначеними коефіцієнтами:

$$U_n = an^2 + bn + c$$

Залишається визначити лише коефіцієнти *a, b, c.* Це можна зробити наступним чином. Підставляючи в цю формулу замість *n* числа 1,2, 3, ми маємо дістати відповідно значення 6, 9, 14 (перші члени даної послідовності), тоді одержуємо систему

a+b+c=6,

4a + 2b+c= 9,

9a+3b+c=14,

Розв'язавши її, дістанемо *a* = 1, 6 = 0, c = 5.

Таким чином, найпростіший загальний член даної послідовності має вигляд $U_n = n^2 + 5$.

Лише після того, як учні добре зрозуміють, що таке числова послідовність, її загальний член, можна розповісти їм про різні способи завдання послідовностей. При цьому бажано підвести їх до функціонального трактування цього поняття [7].

– Пригадаємо означення функції. Як відомо, функцією називається відповідність, при якій кожному елементу однієї множини ставиться у відповідність один елемент другої множини.

А в числовій послідовності кожному члену ставиться у відповідність його номер – натуральне число. Так, коли перший, другий, третій і т. д. члени послідовності дорівнюють 6, 9, 14, 21, 30, 41, ... , то цю послідовність можна розглядати як відповідність:

1	2	3	4	5	6
6	9	14	21	30	41

Таким чином, нескінченну числову послідовність можна розглядати як функцію, яка задана на множині всіх натуральних чисел. Як відомо, функцію можна задати аналітично, таблично, графічно [16]. Аналогічними способами можна задавати і послідовності.

Наприклад, можна сказати: “послідовність, загальний член якої $a_n = 2n - 1$”. Цим самим можна задати послідовність. Такий спосіб завдання послідовності за допомогою конкретної формули загального члена називається аналітичним способом. Цю саму послідовність можна задати і за допомогою таблиці. Щоправда, без верхнього рядка (значень аргументу *n)* тут можна обійтись, бо ці значення збігаються з порядковими номерами членів послідовності. Можна записати це простіше:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, …

Нова програма вимагає ознайомити учнів також із завданням числових послідовностей за допомогою рекурентних формул, які дають можливість визначати будь-який член цієї послідовності через попередні її члени [31]. Наприклад, рекурентна формула $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ визначає послідовність, в якої кожний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. При цьому таких послідовностей є нескінченна множина, наприклад:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29

1, -1, 0, -1, -1, -2, -3, ...

Якщо ми, окрім формули $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ зазначимо ще й два перших члени послідовності, то цим самим послідовність буде визначена однозначно. Ця формула, як відомо, разом з додатковою умовою $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ визначає так звану послідовність Фібоначчі [13]:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Рекурентна формула $u_n=u_{n-1}+2n$ при $u_1=3$ визначає послідовність

3, 7, 13, 21, 31, 43, n^2+n+1, …

Рекурентна формула $u_n=u_{n-1}+2n$ при $u_1= -1$ визначає послідовність

-1, 3, 9, 17, 27, $n^2 + n -3$,…

Часто учням пояснюють, що «арифметичною прогресією називається такий ряд чисел, в якому кожне число, починаючи з другого, дорівнює поперед ньому, до якого додається однакове, постійне для цього ряду, число (додатне або від'ємне)» [9]. Це означення слід вважати застарілим, бо слово «ряд» тепер не є синонімом «послідовності». Краще надати наступне означення: арифметичною прогресією називається кожна числова послідовність, задана рекурентною формулою

$$a_n=a_{n-1} +d,$$

де d – стале число. Це число називається різницею прогресії.

Якщо є бажання зробити наголос на функціональному трактуванні арифметичної прогресії, тоді слід починати пояснення так:

– Ми знаємо з означення числової послідовності, що це функція, яка задана на множині натуральних чисел. Але функції бувають різні: лінійні, квадратичні тощо. Зараз ми детально розглянемо лінійну функцію, яка задана на множині натуральних чисел.

Відомо [26], що лінійною називають функцію, задану рівністю

$$y = ax + b.$$

Якщо ж в цій формулі аргумент x пробігає лише множину натуральних чисел, то значення функції утворюють арифметичну прогресію. Щоправда, аргумент функції, яка задана на множині натуральних чисел, найчастіше позначають буквою n, а не x. Тому можна сказати і так: послідовність, задана формулою $y = an + b$, де a *і* b – задані числа, а n – змінна, яка може набувати лише натуральних значень, називається арифметичною прогресією.

Наприклад, формула $y = 3n+ 2$ визначає таку арифметичну прогресію:

$$5, 8, 11, 14, 17, \dots$$

Тоді вже після цього можна ввести поняття різниці арифметичної прогресії, а також записати арифметичну прогресію у вигляді

$$a_1, a_1+d, , a_1+2d, a_1+3d,$$

звідки індуктивно [8] дістати формулу загального члена послідовності.

Але можна вивести формулу загального члена також з рекурентної формули $a_n = a_{n-1} + d$. Для цього потрібно записати формулу для $n = 2, 3,..., n$ та додати $n – 1$ рівностей, як було розглянуто вище.

Нагадуємо, що кілька перших членів послідовності не визначають її однозначно. Тому, коли написано, наприклад,

$$3, \ 11, \ 19, \ 27, \ 35, \ 43, \dots$$

це ще не означає, що задана арифметична прогресія.

Формулу суми перших членів арифметичної прогресії виводять однаково (як було наведено вище). Спочатку показують, що сума двох членів скінченої прогресії, які рівновіддалені від початку та кінця, дорівнює сумі першого та останнього членів. При цьому перед цим краще розглянути конкретний приклад.

– Нехай потрібно знайти суму членів такої скінченної арифметичної прогресії:

$$3, 5, 7, 9, \ 11, \ 13, \ 15, \ 17.$$

Це можна зробити безпосереднім послідовним додаванням. Проте краще згрупувати ці числа: перше з останнім, друге з передостаннім і т. д.

$$S = (3+17) + (5+15) + (7+13) + (9+11) = 20 * 4 = 80.$$

Як видно з прикладу, в цій арифметичній прогресії суми членів, рівновіддалених від початку і кінця, рівні між собою. Це і дало можливість спростити обчислення. Таку властивість має кожна арифметична прогресія.

Після цього можна навести й загальні міркування.

Доведення даного твердження учням дається нелегко, тому в слабких класах можна замість нього провести міркування за індукцією.

– Запишемо *n* перших членів, довільної арифметичної прогресії

$$a_1,\ a_1+d,\ ,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\quad a_1+(k-1)d+\ a_1+(n-k)d,\quad a_1+(n-1)d,$$

Тоді звідси можна визначити формулу для знаходження суми перших *n* членів арифметичної прогресії.

Що стосується поняття геометричної прогресії, то його можна ввести у 9 класі наступним чином:

Досі ми розглядали арифметичну прогресію, тобто числову послідовність, в якої різниця між кожними двома сусідніми членами, окрім першого, однакова. А тепер ми розглянемо таку числову послідовність, у якої частка від ділення кожного члена, крім першого, на попередній однакова. Такі послідовності називаються геометричними прогресіями.

Для кращого сприйняття можна навести приклади геометричних прогресій, ввести поняття знаменника прогресії тощо [9]. Означення можна надати наступне: геометричною прогресією називається числова послідовність, яку можна задати рекурентною формулою

$$b_n = b_{n-1}/q,$$

де q – стале число.

Треба домогтися того, щоб учні вільно записували будь-яку геометричну прогресію у вигляді

$$b_{1,}\ b_1q_{,}\ b_1q^2{}_{,}\ b_1q^3{}_{,}\quad ,b_1q^{n-1},$$

Загальний член цієї прогресії можна дістати, здійснюючи міркування за індукцією, або розписати рекурентну формулу

$$b_n = b_{n-1}/q \text{ для } n = 2, 3, ..., n$$

та помножити знайдені формули.

Варто звернути увагу учнів на те, що геометричну прогресію, як і кожну числову послідовність, можна задати не лише рекурентною формулою і загальним членом, але і таблично або графічно [12].

Зробимо кілька зауважень стосовно розподілу геометричних прогресій на зростаючі та спадні. Не всі математики однаково трактують ці поняття

$\frac{1}{2}$, -1/2,-1,-2,-4, - спадна,

-8,-2, -1/2,-1/8, - зростаюча.

А в деяких посібниках наведено наступне означення: «Геометрична прогресія називається зростаючою, якщо | q\ > 1, і спадною, якщо |q\< 1». Це означення не можна вважати вдалим, оскільки, згідно з ним, спадну послідовність –1/2, -1, -2, -4, … доведеться називати зростаючою прогресією, а зростаючу послідовність -8, -2, -1/2,… – спадною прогресією. Це, зрозуміло, незручно. Автори посібників наводять таке трактування поняття зростаючих та спадних геометричних прогресій з тією метою, щоб пізніше можна було виправдати термін «нескінченно-спадна геометрична прогресія». Але замість нього краще вживати інший термія: «збіжна геометрична прогресія». Проте у основній школі окремо такі геометричні прогресії не слід. Отже, ми вважаємо, що учням краще пояснити так:

– Геометрична прогресія із знаменником q>1 – зростаюча, із знаменником $0 < q < 1$ – спадна, якщо $b_1 > 0$, і обернено, якщо $b_1 < 0$.

Також слід звернути увагу учнів на те, що знаменник геометричної прогресії не може дорівнювати нулю. Наприклад, послідовність 3, 0, 0, 0, ... не є геометричною прогресією.

Під час вивчення прогресій учням бажано пропонувати розв'язувати багато задач і вправ, аналогічних прикладам, розглянутих в 2.1.

РОЗДІЛ 3
ОРГАНІЗАЦІЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА АНАЛІЗ ЙОГО РЕЗУЛЬТАТІВ

Курс математики основної школи логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, як здатності учня застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, повноцінно брати участь в житті суспільства, нести відповідальність за свої дії. Навчання математики в основній школі передбачає формування предметної математичної компетентності, формування якої підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти [28].

Для формування предметної математичної компетентності учнів в рамках виконання дослідження було впроваджено елективний курс з теми «Арифметична та геометрична прогресії». Метою впровадження даної розробки є: максимальний розвиток логічного мислення учнів на високому рівні, формування математичної компетентності, формування інтересу до математики. Запропонована схема повністю охоплює процес формування вмінь учнів основної школи розв’язувати задачі, пов’язані із арифметичною та геометричною прогресіями. Вона передбачає розв’язування такого типу задач під час роботи учнів на уроці, виконання домашніх завдань, позакласних занять тощо.

Для розвитку вмінь розв’язувати задачі на прогресію рекомендуємо використовувати різні форми та методи організації навчальної діяльності учнів. Під методами розв'язання задач розуміємо сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій, за допомогою яких розв'язується велика кількість задач. Крім того, методика розв'язування задач на прогресії активно використовує словесні методи навчання, до яких належить розповідь, пояснення, бесіда тощо.

Рекомендуємо широко використовувати групову та індивідуальну форми навчання. Групова форма досить ефективна, оскільки вона виховує потребу в спілкуванні і взаємодопомозі; формує уміння аргументувати свої дії, що сприяє осмисленню і міцному засвоєнню навчального матеріалу. Однією з різновидностей групової форми навчання є робота учнів парами. Такий вид навчальної діяльності, згідно схеми, використовується під час роботи учнів на уроках та на заняттях елективного курсу.

Індивідуальна форма роботи реалізується під час самостійного вивчення теоретичного матеріалу, ознайомлення з етапами розв'язування задач на прогресії. Дана форма роботи найактивніше використовується в запропонованій схемі в процесі виконання учнями індивідуальних робіт, запланованих у розділі елективного курсу.

Контроль знань рекомендуємо організувати за допомогою різних форм. Зокрема, під час вивчення задач на прогресії можна використовувати наступні форми контролю:

1) *усна контрольна робота*. Вона дає можливість вчителеві встановити, чи сформовані теоретичні знання. Таку роботу можна проводити на початку уроку з наступним обговоренням;

2) *самостійна робота учнів*, коли кожен має свій варіант роботи. Перевірка може здійснюватися як вчителем, так і однокласником, з яким учень працює в парі, можлива також самоперевірка. Використовується варіант самостійної роботи для всього класу за кількома варіантами. В таку роботу включають завдання з урахуванням обов'язкових результатів навчання.

Методичне забезпечення містить необхідні засоби для навчання (дошка, підручник, зошит тощо). Важливим елементом методичного забезпечення є інтерактивна дошка для демонстрації прикладів.

Використання мультимедійних технологій можна розглядати як пояснювально-ілюстративний метод навчання – успішне сприйняття навчального матеріалу посилюється під час підключення зорової пам'яті.

Позакласна робота з математики – це заняття, які проводяться в позаурочний час, ґрунтуються на принципі добровільної участі, мають на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета за рахунок поглиблення і розширення базового змісту програми. В позаурочний час учні розвивають мислення, вчаться аналізувати, порівнювати і заставляти, узагальнювати, конкретизувати, абстрагувати від часткового, робити умовиводи. Є такі форми проведення позакласної роботи з математики: олімпіада, математичний гурток, факультативний курс. Одним з видів факультативних занять є елективний курс. Елективний курс покликаний активізувати та індивідуалізувати процес навчання. Як правило, такі заняття дають більш глибокі знання, які неможливо почерпнути із стандартної програми.

Елективний курс виконує декілька функцій. По-перше, в тому випадку, якщо він містить поглиблені знання з профільної дисципліни, то навчальний заклад, де він практикується, стає спеціалізованим. По-друге, якщо курс спрямований на закріплення і розвиток базисної освітньої програми, то учень отримує додаткову підготовку. Це дає йому впевненість і підвищує конкурентну здатність під час складання ЗНО. По-третє, якщо учень отримує поглиблені знання з однієї дисципліни, але при цьому хоче вдосконалюватися і в іншій, елективний курс допоможе в цьому. В рамках нашого дослідження було розроблено елективний курс з арифметичної та геометричної прогресії для розвитку загальної математичної компетентності учнів.

Під час проведення дослідження, об’єктом якого є процес навчання алгебри, а предметом – методика навчання розв’язувати задачі на прогресії, була висунута робоча *гіпотеза*: застосування елективного курсу «Арифметична та геометрична прогресія» сприятиме розвитку в учнів абстрактного мислення, уявлення, вміння мислити, що сприятиме формуванню їх математичної компетентності.

Для підтвердження гіпотези дослідження стосовно того було здійснено педагогічний експеримент. Базою практики був Новопавлівський НВК імені В.Д. Реута, а участь в експерименті узяли учні двох 9-их класів, один з яких визначив контрольну групу, а інший – експериментальну групу.

На першому етапі дослідження було проведено констатуючий експеримент, завданнями якого було: вивчити досвід вчителів навчання розв'язання задач на прогресії, проаналізувати рівень навчальних досягнень та мотивації самостійної навчальної та навчально-пізнавальної діяльності учнів з алгебри, виявити актуальні проблеми щодо організації навчання алгебри та контролю його результатів.

На цьому етапі експерименту були використані методи дослідження: аналіз державних документів, галузевих стандартів, навчальних програм з алгебри; психолого-педагогічної та навчально-методичної літератури з проблеми дослідження; спостереження за процесом навчання, самостійної навчальної та науково-дослідної роботи учнів, використання комп'ютерних технологій навчання, контролю у вищих навчальних закладах; анкетування та бесіди з учнями та вчителями, вивчення та аналіз педагогічного досвіду вчителів.

В процесі *формувального* етапу педагогічного експерименту відбувалося впровадження елективного курсу «Арифметична та геометрична прогресія». До експериментальної групи (ЕГ) входило 32 учні 8-А курсу, а до контрольної групи (КГ) входило 28 учнів 8-Б класу.

Однорідність та репрезентативність цих груп забезпечується тим, що в якості досліджуваних брали участь усі учні груп, незалежно від їх успішності, інтересів, здібностей тощо. Інтелектуальний рівень учнів в контрольній та експериментальній групах схожий, що встановив нульовий контроль знань учнів з геометрії. Результати нульового контролю наведено у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Результати нульового контролю знань з алгебри

Група	Кількість учнів	Оцінки з нульового контролю знань				Якість знань, %	Абсолютна успішність, %
		5	4	3	2		
ЕГ	32	5	8	19	–	41	100
КГ	28	4	7	17	–	39	100

Графічна інтерпретація результатів нульового контролю дає змогу зробити висновок про практичний збіг рівня залишкових знань з алгебри в контрольній та експериментальній групах:

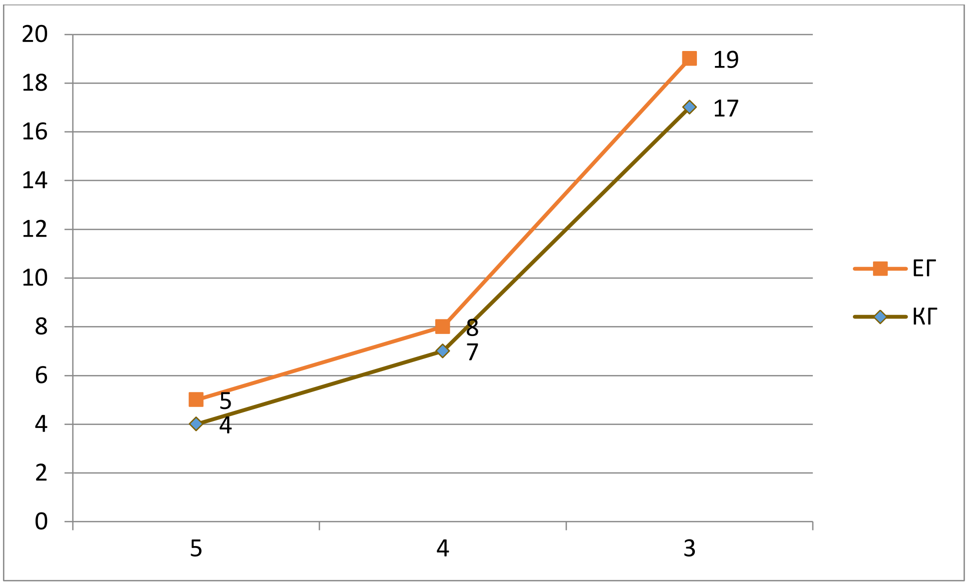


Рис. 3.1. *Результати нульового контролю знань з алгебри*

На другому етапі експерименту було впроваджено елективний курс «Арифметична та геометрична прогресія» для учнів ЕГ. Метою елективного курсу є формування математичної компетентності учнів шляхом розв’язування задач на прогресії. Зміст елективного курсу з математики «Арифметична та геометрична прогресія» наведено у додатку А.

Для встановлення відмінностей сформованості графічної компетентності між контрольною та експериментальною групами скористаємося критерієм Стьюдента [31]. Дані для розрахунку критерію наведено у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Дані для розрахунку критерія Стьюдента для груп

Експериментальна група ($\bar{x} = 3{,}594$)				
Оцінка x_i	Частота n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
5	6	1,406	1,978	11,865
4	9	0,406	0,165	1,485
3	15	– 0,594	0,353	5,288
2	2	– 1,594	2,54	5,08
Разом	32			23,719
				$D_x = 0{,}741$
Контрольна група ($\bar{y} = 3{,}071$)				
Оцінка y_i	Частота n_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2 n_i$
5	2	1,929	3,719	7,439
4	6	0,929	0,862	3,449
3	14	– 0,071	0,005	0,082
2	6	– 1,071	1,148	6,888
Разом	28			17,857
				D_y = 0,638

Формула для розрахунку критерію:

$$T_c = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}},$$

де

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D_x = \frac{32}{32-1} \cdot 0{,}741 = 0{,}765,$$

$$S_y^2 = \frac{m}{m-1} D_y = \frac{28}{28-1} \cdot 0{,}638 = 0{,}661 -$$

виправлені вибіркові дисперсії.

Маємо: n = 32, m = 28, тоді обчислюємо:

$$T_c = \frac{3{,}594 - 3{,}071}{\sqrt{(32-1)0{,}765 + (28-1)0{,}661}} \sqrt{\frac{32 \cdot 28(32+28-2)}{32+28}} = 2{,}384.$$

Для правостороннього критерію та 32 + 28 – 2 = 58 ступенів вільності знаходимо в таблиці значущості при α = 0,05 значення критерію $T_{кр}$ = 2,002. Одержані результати свідчать, що T_c > $T_{кр}$, тому нульова гіпотеза відхиляється з ризиком α = 0,05. Отже, можна стверджувати, що з надійністю 0,95 між експериментальною та контрольною групами є значні відмінності в сформованості математичної компетентності після проведення експерименту.

ВИСНОВКИ

Провівши дослідження ми можемо зробити наступні висновки.

Числова послідовність – це набір елементів деякої множини:

- для кожного натурального числа можна вказати елемент даної множини;
- це число є номером елемента і позначає позицію даного елемента в послідовності;
- для будь-якого елемента (члена) послідовності можна вказати наступний за ним елемент послідовності.

Таким чином, послідовність виявляється результатом послідовного вибору елементів заданої множини. І, якщо будь-який набір елементів є скінченним, то кажуть про вибірку скінченного обсягу. Послідовність за своєю природою - відображення, тому його не слід змішувати з безліччю, яке «пробігає» послідовність.

В математиці розглядається нескінченна множина різних послідовностей: тимчасові ряди як числової, так і не числової природи; послідовності елементів метричного простору, послідовності елементів функціонального простору, послідовності станів систем управління і автоматів тощо. Проте основною метою вивчення довільних послідовностей є пошук закономірностей, прогноз майбутніх станів і генерація послідовностей.

На уроках геометрії, як правило, надають означення поняття числової послідовності, а в курсі алгебри та елементарних функцій вивчають арифметичну і геометричну прогресії. При цьому передбачається спочатку дати загальне означення послідовності, а вже потім більш детально зупинитися на арифметичній та геометричній прогресіях. Обов’язково слід ввести поняття загального члена числової послідовності. При цьому це поняття краще пояснити на конкретних прикладах. Слід звернути увагу учнів на те, що якщо відомий загальний член послідовності, то можна написати скільки завгодно її членів. Значно важче розв'язувати обернену задачу: за даними першими членами послідовності написати її загальний член. Проте лише у найпростіших випадках вдається порівняно швидко розв'язати цю задачу. Нова програма вимагає ознайомити учнів також із завданням числових послідовностей за допомогою рекурентних формул, які дають можливість визначати будь-який член цієї послідовності через попередні її члени.

Навчання математики в основній школі передбачає формування предметної математичної компетентності, формування якої підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти. Розв’язування задач на прогресії розвиває абстрактне мислення, уявлення, вміння аналізувати та висловлювати свої думки, бачити та передавати інформацію, уміння мислити образами, що є передумовою формування математичної компетентності учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, значений : Словарь – справочник / Н. В. Александрова. – 3- е изд., испр. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2008. – 248 с.
2. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – М. : Высшая школа, 2000. – 694 с.
3. Барон С. Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости / С. Барон // Изв. АН ЭстССр. Сер. техн. и физ.-матем. наук. – 1960. – № 1. – С. 47-68.
4. Бекишев Г.А. Суммирование последовательностей / Г.А. Бекишев, М.И. Кратко. – К. : Вища школа, 1981. – 364 с.
5. Белешко Д. А. Комбинаторика (часть 2) / Д.А. Белешко. – СПб. : ГУ ИТМ, 2002. – 583 с.
6. Белый Е. К. Математика не для ЕГЭ. Прогрессии : учеб. пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Е. К. Белый. – Петрозаводск : ПетрГУ, 2016. – 132 с.
7. Берс Л. Математический анализ (в двух томах). / Л. Берс. – М. : Высшая школа, 1975. – 520 с.
8. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Генрих Вилейтнер ; пер. с нем. А. П. Юшкевич. – Москва Гос. изд-тво физ-мат. лит-ры, 1960. – 469 с.
9. Власова Е. А. Ряды / Е. А. Власова. – 3-е изд., испр. – Москва : МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2006. – 616 с.
10. Волков И.К. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Учеб. для вузов. 2-е изд.] / И.К. Волков, А.Н. Канатников. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.
11. Воробьев Н. Н. Теория рядов / Н. Н. Воробьев. – 4-е изд., перераб. и доп.. – Москва : Наука, 1979. – 408 с.

12. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М. : Наука, 1967. – 376 с.

13. Горячев А. П. Числовые и функциональные ряды / А. П. Горячев. – Москва : МИФИ, 2007. – 264 с.

14. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3-х ч. / М.О. Давидов. – К. : Вища школа, 1991. – 648 с.

15. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.

16. Жалдак М. І. Математичний аналіз функції : навч. посібник / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – Київ : НПУ, 2007. – 429 с.

17. Заболоцький М.В. Математичний аналіз / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 424 с.

18. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.

19. Ильин В.А. Основы математического анализа. Часть II / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1980. – 448 с.

20. Ильин В.А. Математический анализ / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х Сендов. – М. : Наука, 1979. – 720 с.

21. Істер О. С. Алгебра : підручник для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / О. С. Істер . – Київ: Генеза, 2017. – 264 с.

22. Камынин Л.И. Курс математического анализа. В 2-х томах / Л.И. Камынин. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – 423 с.

23. Кратко М. А. Підсумовування степенів натуральних чисел. Многочлен Бернуллі / М.А. Кратко // Математика в школі. – 2010.– № 6. – С.11-14.

24. Крюков М. М. До історії розвитку і становлення теорії нескінченних числових рядів / М. М. Крюков, Т. С. Клецька // Математичне моделювання. – 2013. – № 6. – С. 117 – 120.

25. Кузьмина С. С. Числовые ряды : учебн. пособие / С. С. Кузьмина, О. Я. Шевалдина. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2005. – 161 с.

26. Кудрявцев В.А. Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли / В.А. Кудрявцев. – М.-Л. : ОНТИ, 1936. – 72 с.

27. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Том 2 / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1970. – 420 с.

28. Ласунский А.В. Некоторые методы суммирования числовых последовательностей / А.В. Ласунский // Математика в высшем образовании. – № 11. – 2013. – С. 16-22.

29. Матяш В. И. Ряды. Курс лекций : учебн. пособие / В. И. Матяш. – 2-е изд., испр. и дополн. – Москва : МГТУ «МАМИ», 2007. – 150 с.

30. Никольский С.М. Курс математического анализа. Том 1 / С.М. Никольский. – М. : Наука, 1983. – 384 с.

31. Никонорова С. П. Числовые и функциональные ряды : учеб. пособие / С. П. Никонорова. – Ульяновск : УВАУ ГА(И), 2010. – 78 с.

32. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч 2. / П.П. Овчинников. – К. : Техніка, 2000. – 792 с.

33. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2008. – 608 с.

34. Реймерс Э. Новые общие методы суммирования / Э. Реймерс // Уч. зап. Тарктуск. ун-та. – 1962. – № 129. – С. 119-154.

35. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа / Ю.Г. Решетняк. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. – 246 с.

36. Рудик О.Д. Числа Бернуллі / О.Д. Рудик// Математика в школі. – № 2, 1998. – С. 22-25.

37. Рудин Уолтер. Основы математического анализа / Рудин Уолтер. – М. : Мир, 1976. – 321 с.

38. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А.В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 364с.

39. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1984. – 529 с.

40. Сігал А.В. Конкретна математика: Навчальний посібник / А.В. Сігал, Л.Ф. Яценко. – Сімферополь : ДІАЙПІ, 2012. – 742 с.

41. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2 / В.И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – 656 с.

42. Суконник Я. Арифметико-геометрическая прогрессия / Я. Суконник // Квант. – 1975. – №1. – С. 36 – 39

43. Тер-Крикоров А.М. Курс математического анализа [Учеб. пособие для вузов] / А.М. Тер-Киркоров, М.И. Шабунин. – 3-е изд., исправл. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.

44. Числовые и функциональные ряды : учебное пособие / Т. Н. Титова, Т. А. Мацеевич, Е. Е. Ассеева, А. Н. Серова. – Москва : Изд-во Моск. гос. строит. ун-т, 2016. – 123 с.

45. Шилов Г. Е. Математический анализ / Г.Е. Шилов. – М. : Наука, 1960. – 340 с.

46. Шипачев В.С. Курс высшей математики / В.С. Шипачев. – М. : Оникс, 2009. – 608 с.

47. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Частина I / М.І. Шкіль. – К. : Вища школа, 1978. – 384 с.

48. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Частина II / М.І. Шкіль. – К. : Вища школа, 1981. – 456 с.

49. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. Краткий курс. [Учебное пособие для втузов] / Р.Я. Шостак. – М. : Высшая школа, 1972. – 280 с.

50. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3 т. Т. 1 / Андрей Павлович Юшкевич. – Москва : Наука, 1970. – 353 с.

Додаток А

Тема: Числові послідовності. Арифметична прогресія.

Мета: закріплення знань; формування вміння використовувати означення і формули n-го члена та суми n перших членів арифметичної прогресії під час розв'язування вправ; розвиток логічного мислення.

Тип уроку. Урок формування вмінь і навичок.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

Учитель повідомляє тему і мету уроку та здійснює мотивацію навчально-пізнавальної діяльності учнів.

II. Перевірка домашнього завдання.

1. *(1-й варіант)*

Знайдіть суму п'ятнадцяти перших членів арифметичної-прогресії, якщо її третій член дорівнює -5, а шостий дорівнює 2,2.

Розв'язання

1) $a_6 = a_3 + 3d$, $3d = a_6 - a_3$,

$d = \frac{a_6 - a_3}{3}$, $d = 2{,}4$;

2) $a_3 = a_1 + 2d$, $a_1 = a_3 - 2d$,

$a_1 = -5 - 4{,}8 = -9{,}8$.

3) $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$,

$S_{15} = \frac{2 \cdot (-9{,}8) + 2{,}4 \cdot 14}{2} \cdot 15 = 105$.

Відповідь. $S_{15} = 105$.

2. *(2-й варіант).* Скільки від'ємних членів має арифметична прогресія —28; —25; —22; ...?

Розв'язання

1) $d = a_2 - a_1$, $d = -25 - (-28) = 3$;

2) $a_n = a_1 + d(n-1)$,

$a_n = -28 + 3(n-1)$;

3) $a_n < 0$,

$-28 + 3(n - 1) < 0$,

$3(n - 1) < 28$,

$3n - 3 < 28$,

$3n < 31$,

$n < 10\frac{1}{3}$.

Оскільки $n \in N$, то $n = 10$.

Відповідь. $n = 10$.

3. *(3-й варіант).*

Знайдіть перший член арифметичної прогресії, різниця якої дорівнює 15, а сума її перших тринадцяти членів дорівнює 1326.

Розв'язання

$$S_{13} = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13,$$

$$1326 = \frac{2a_1 + 12 \cdot 15}{2} \cdot 13,$$

$102 = a_1 + 6\ 15$,

$a_1 = 102-90$, $a_1 = 12$.

Відповідь, $a_1 = 12$.

III. Індивідуальна робота за картками.

1. Дано арифметичну прогресію —22,5; —21; ... Знайти 11-й член і різницю прогресії.

Розв'язання

1) $a_1 = -22{,}5$, $a_2 = -21$, $d = a_г - a_1$,

$d = -21 - (-22{,}5) = 1{,}5$;

2) $a_{11} = a_1 + 10d$,

$a_{11} = -22{,}5 + 10 \cdot 1{,}5 = -22{,}5 + 15 = -7{,}5$.

Відповідь: $d = 1{,}5$, $a_{11} = -7{,}5$.

2. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо

$a_4 = 1,8$, $a_7 = 0,6$.

Розв'язання

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_4 = a_1 + 3d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6 = a_1 + 6d, \\ 1,8 = a_1 + 3d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,6 = -a_1 - 6d, \\ 1,8 = a_1 + 3d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,2 = -3d, \\ 0,6 = a_1 + 6d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -0,4, \\ 0,6 = a_1 + 6 \cdot (-0,4); \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -0,4, \\ a_1 = 0,6 + 2,4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -0,4, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Відповідь. $d = -0,4$, $a_1 = 3$.

IV. Гра «Хто сильніший».

Учням пропонується дати відповіді на теоретичні та практичні запитання. Якщо учень відповідає на запитання неправильно, то воно переходить до наступного учня. Учні мають змогу збільшити кількість балів протягом уроку. Така гра стимулює учнів до своєчасного вивчення теоретичного матеріалу та подальшої активної роботи на уроці.

Запитання

1. Сформулювати означення арифметичної прогресії.
2. Що називають різницею арифметичної прогресії?
3. Які бувають арифметичні прогресії?
4. Яка арифметична прогресія є спадною?
5. Яка арифметична прогресія є зростаючою?
6. Назвіть формулу n-го члена арифметичної прогресії.

7. Що потрібно знати, щоб знайти суму 10 перших членів арифметичної прогресії?

8. Запишіть формули суми *n* перших членів арифметичної прогресії:

9. Які з наведених нижче послідовностей є арифметичними прогресіями:

1) 17; 17; 17; ...

2) 100; 101; 104; ...

3) -7; -8; -9; ...

4) -5; 10; -15; ... ?

10. Знайдіть різницю арифметичних прогресій з попереднього пункту.

11. Знайдіть чотири перших члени арифметичної прогресії, у якої $a_1 = 5$, $d = 2$.

12. Чи можуть члени арифметичної прогресії 1000; 1000,1; 1000,2; ... стати:

1) меншими ніж —3001;

2) більшими ніж 3001?

13. Як знайти суму членів даної арифметичної професії з п'ятого по десятий

члени?

V. Гра «Мовчанка».

Перевірку вміння застосовувати теоретичний матеріал на практиці можна провести у формі гри «Мовчанка». На дошці записано початок твердження і кілька варіантів відповідей. Учитель почергово вказує на різні варіанти твердження (наприклад, 1а, 1б, 1в тощо), а учні, які вважають його хибним, повинні підняти руку. Це дозволяє перевірити засвоєння матеріалу всіма учнями класу та сприяє його більшій організованості.

Запитання

1. Дано скінченну послідовність 1; 3; 4; 5; 6.

а) Другий член даної послідовності дорівнює 4;

б) різниця між другим і першим членом цієї послідовності дорівнює 2;

в) кожний наступний член даної послідовності можна одержати з попереднього, додавши до нього число 2;

г) дані числа є послідовними членами деякої арифметичної прогресії.

2. Відомо, що в арифметичній прогресії $a_1 = 5$, а різниця $d = 3$.

а) другий член даної прогресії дорівнює 5;

б) третій член даної прогресії дорівнює 18;

в) третій член даної прогресії дорівнює 11;

г) a_3-a_2=5

3. Формула n-го члена арифметичної прогресії:

а) $a_n = a_1 + dn$;

б) $a_n = a_1 + d(n-1)$;

в) $a_n = a_1 + d(n+1)$;

г) $a_n = 2a + d(n-1)$.

4. Формула суми n-го члена арифметичної прогресії:

а) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$;

б) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}$;

в) $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

г) $S_n = \frac{2a + d}{2} \cdot n$.

5. (a_n) — арифметична прогресія, $a_1 = 7$, $a_2 = 16$. Різниця дорівнює:

а) 9; б) —9;
в) 4,5; г) —4,5.

6. (a_n) — арифметична прогресія, $a_1 = -24$, $d = 5$. a_{10} дорівнює:

а) 24; б) 21;
в) 22; г) 23.

7. (a_n) — арифметична прогресія, $a_9 = 1{,}8$, $a_{10} = 1{,}6$. Різниця дорівнює:

а) —0,2; б) 0,2;
в) —0,1; г) 0,1.

8. Записана послідовність є арифметичною прогресією:

а) 2; 4; 6; ...;
б) 3; 9; 27; ...;

VI. Розв'язування вправ.

1.Перший член арифметичної прогресії дорівнює 2, а її різниця дорівнює 5.

Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їх сума дорівнювала 156?

Розв'язання

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

$$156 = \frac{4 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n,$$

$$312 = (4 + 5n - 5)n,$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 5 \cdot 4 \cdot 312}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{6241}}{10} = \frac{1 \pm 79}{10},$$

$n_1 = 8$, $n_2 = -7{,}8$ — не задовольняє умову $n \in N$.

Відповідь. $n = 8$.

2. Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії

—5,2; —4,8; —4,4; ...

Розв'язання

1) $d = a_2 - a_1$, $d = -4{,}8 - (-5{,}2) = 0{,}4$;

2) $a_n = a_1 + d(n-1)$;

3) $a_n < 0$,

$-5{,}2 + 0{,}4(n - 1) < 0$,

$0{,}4n < 5{,}6$,

$n < 14$.

Оскільки $n \in N$, то $n = 13$.

4) $S_{13} = \frac{2a_1 + d \cdot 12}{2} \cdot 13 = (a_1 + 6d) \cdot 13$,

$S_{13} = (-5{,}2 + 6 \cdot 0{,}4) \cdot 13 = -36{,}4$.

Відповідь. $S_{13} = -36{,}4$.

3. При будь-якому n сума n перших членів деякої арифметичної прогресії

$S_n = 3n^2 + 5n$. Знайдіть три перших члени цієї прогресії.

Розв'язання

Перший спосіб

1) $a_1 = S_1 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$;

2) $S_2 = 3 \cdot 4 + 10 = 22$;

3) $a_2 = S_2 - a_1$, $a_2 = 22 - 8 = 14$;

4) $d = a_2 - a_1$, $d = 14 - 8 = 6$;

5) $a_3 = a_2 + d$, $a_3 = 14 + 6 = 20$.

Другий спосіб

1) $a_1 = S_1 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8$;

2) $S_2 = 3 \cdot 4 + 10 = 22$;

3) $a_2 = S_2 - a_1$, $a_2 = 22 - 8 = 14$;

4) $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, $a_3 = 2a_2 - a_1$,

$a_3 = 2 \cdot 14 - 8 = 20$.

Відповідь. $a_1 = 8$, $a_2 = 14$, $a_3 = 20$.

VII. Індивідуальні додаткові завдання.

1. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, менших від 700, які кратні 8.

Розв'язання

1) $a_1 = 8$, $d = 8$, $a_n = 8 + 8 \cdot (n-1)$;

2) $a_n < 700$,
$8n < 700$,
$n < 700 : 8$,
$n < 87{,}5$.
Оскільки $n \in N$, то $n = 87$;

3) $S_{87} = (a_1 + 43d) \cdot 87$,

$S_{87} = (8 + 344) \cdot 87 = 352 \cdot 87 = 30\ 624$.

Відповідь. $S_{87} = 30\ 624$.

2. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює —16, а сума її перших сімнадцяти членів дорівнює 544.

Розв'язання

1) $S_{17} = \frac{2a_1 + 16d}{2} \cdot 17 = (a_1 + 8d) \cdot 17$;

2) $544 = (-16 + 8d) \cdot 17$,

$-16 + 8d = 32$,

$8d = 48$,

$d = 6$.

Відповідь. $d = 6$.

VIII. Самостійна робота.

1. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії

(a_n), якщо $a_n = 3n - 2$.

Розв'язання

1) $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1$;

2) $a_{10} = 3 \cdot 10 - 2 = 30 - 2 = 28$;

3) $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1 + a_{10}) \cdot 5$,

$S_{10} = (1 + 28) \cdot 5 = 29 \cdot 5 = 145$.

Відповідь. $S_{10} = 145$.

2. Знайдіть суму восьми перших членів арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_3 = -4$, $x_5 = 2$.

Розв'язання

1) $x_5 = x_3 + 2d$, $2d = x_5 - x_3$, $d = \frac{2+4}{2} = 3$;

2) $x_3 = x_1 + 2d$, $x_1 = x_3 - 2d$, $x_1 = -4 - 2 \cdot 3 = -10$;

3) $S_8 = \frac{2x_1 + 7d}{2} \cdot 8 = (2x_1 + 7d) \cdot 4$,

$S_8 = (2 \cdot (-10) + 7 \cdot 3) \cdot 4 = (-20 + 21) \cdot 4 = 4$.

Відповідь. $S_8 = 4$.

IX. Гра «Розшифруй слово».

На кожну парту роздаються картки із запитаннями. Учням пропонується вибрати, під якою буквою знаходиться правильне твердження і з послідовності вибраних букв утворити слово. (Це буде слово «теорема».)

1. Означення арифметичної прогресії.

т) арифметичною прогресією називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додається одне й те саме число.

о) арифметичною прогресією називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число.

2. Відомо, що в арифметичній прогресії перший член дорівнює $a_1 =7$, а різниця $d=2$.

ж) Різниця між третім і другим членами даної прогресії дорівнює 5;

е) третій член даної прогресії дорівнює 11.

3. Дано арифметичну прогресію з першим членом 5 і другим членом 10.

м) Різниця даної прогресії *й* = — 5; о) сума чотирьох перших членів цієї прогресії

дорівнює 50.

4. Дано зростаючу послідовність усіх двоцифрових чисел, кратних 7.

р) Дані числа утворюють арифметичну прогресію з різницею 7;

є) у даній послідовності перший член дорівнює 7, третій член дорівнює 21.

5. Між числами 5 і 105 слід вставити три числа так, щоб вони разом з даними числами утворювали зростаючу арифметичну прогресію.

д) Число 80 буде третім членом цієї прогресії;

е) число 80 буде четвертим членом прогресії.

6. Формула *n*-го члена арифметичної професії:

л) $a_n = a_1 + dn$;

м) $a_n = a_1 + d(n-1)$.

7. Формула суми *n* перших членів арифметичної

прогресії:

X. Домашнє завдання.

а) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$;

б) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Тема. Арифметична прогресія. Розв'язування вправ.

Мета: повторити відомості про арифметичну прогресію; розвивати навички використання відомих формул до розв'язування вправ, уміння висувати та захищати ідеї, вирішувати поставлені проблеми.

Хід уроку

I. Оголошення теми і мети уроку.

II. Актуалізація опорних знань.

1. Усне опитування учнів.

1. Яку послідовність називають арифметичною прогресією?
2. Як називають стале число d для такої послідовності?
3. Чому дорівнює число d ?
4. Якою є арифметична прогресія, якщо $d < 0$, $d > 0$, $d = 0$?
5. За якою формулою можна знайти будь-який член арифметичної прогресії?
6. Як записується властивість трьох послідовних членів арифметичної прогресії?
7. Як перевірити, чи є послідовність арифметичною прогресією?
8. Що можна знайти в арифметичній прогресії, знаючи d та a_1 ?
9. Які бувають арифметичні прогресії?

2. Робота з карткою формул.

Кожному учневі пропонують картку для перевірки знання формул. Учні вписують на картці своє прізвище та серед запропонованих формул вибирають правильні, які обводять кружечком.

Картка формул

1. $a_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}$.
2. $d = a_{n+1} - a_{n-1}$.
3. $a_n = \frac{a_1 + (n-1)d}{2}$.
4. $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.
5. $d = a_n - a_{n-1}$.
6. $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$.
7. $S_n = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot n$.
8. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{n} \cdot 2$.
9. $d = a_{n+1} - a_n$.
10. $a_n = a_1 + (n-1)d$.
11. $S_n = \frac{a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.
12. $a_1 = a_n - d(n-1)$.

Після виконання роботи аркуші здають учителю. Бали виставляють за кількістю правильних відповідей (кожна правильна відповідь — 1 бал).

3. Усне розв'язування задач.

1. Чи є послідовність арифметичною прогресією?

а) 4; 3; 2; 1; 0; ...

б) -3; -1; 1; 4.

2. Назвіть три наступні члени послідовності, у якої a_1 =-10, d = 4.

3. Обчисліть 11 -й член арифметичної прогресії, якщо a_1 = 6, d = -2 .

4. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, якщо a_1 =28, a_{11}=4.

III. Розв'язування задач і вправ.

Учні працюватимуть, об'єднавшись у п'ять груп (по 2 - 3 учні). Їм треба показати вміння використовувати теоретичні відомості про арифметичну прогресію під час розв'язування задач. Обговорення питань, що виникатимуть, відбуватиметься шляхом колективного обдумування — «мозкового штурму», який можна провести так:

1. Умова завдання записується на дошці, щоб під час обдумування та пошуку розв'язання її бачили учні.

2. Усі учасники «штурму» мають право висувати свої ідеї щодо

розв'язування завдання.

3. Коли учасники групи з'ясовують, що ідей (пропозицій) достатньо, їх висування припиняється.

4. Подані ідеї аналізуються (обговорюються) у групах.

5. Після обговорення група зупиняється на одному зі способів розв'язування — раціональнішому з їх точки зору.

6. Якщо окремий учень групи не погоджується, що обраний спосіб найдоцільніший, то він може розв'язати задачу своїм.

Під час «мозкового штурму» найефективнішими правилами поведінки є такі:

• Намагайтеся вислухати (а отже, зібрати) якомога більше ідей щодо розв'язування задачі.

• Активізуйте свою уяву; не відкидайте ніяку ідею тільки тому, що вона суперечить загальноприйнятій думці.

• Можете подавати скільки завгодно ідей або розвивати ідеї інших учасників.

• Не обговорюйте, не критикуйте висловлювання інших, не намагайтеся давати оцінку запропонованих ідей.

Задача 1. Чи є число 106 членом арифметичної прогресії (a_n): 10; 14;... . Якщо так, то вкажіть його порядковий номер. *Вказівка щодо організації роботи.* Учні, працюючи у групах, висувають пропозиції щодо розв'язування задачі (чим більше пропозицій — тим краще). Вони вільно виражають свої думки, колективно обговорюють їх. У процесі колективного обговорення знаходять раціональний спосіб розв'язування. Якщо деякі запропоновані способи хибні, то їх треба відкинути і вказати, в чому полягає їх помилковість.

Розв'язання

Як відомо,

$$a_n = a_1 + (n-1)d\ ,\ \ d = a_2 - a_1\ ,\ \ d = 4.$$

Тоді

$$n-1 = \frac{a_n - a_1}{d}\ ,$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1\ ,\ \ n = \frac{106-10}{4} + 1\ ,$$

$$n = \frac{96}{4} + 1\ ,\ \ n = 24 + 1\ ,\ \ n = 25\ ,\ \ n \in N\ .$$

Відповідь. Число 106 є 25-м членом арифметичної прогресії.

Задача 2. Знайти суму шести перших членів арифметичної прогресії, якщо x_4 =19, x_8 =35.

Вказівка щодо організації роботи.

Висуваються всі можливі ідеї розв'язування задачі. Обговорення проходить у групах: кожна група вибирає свій спосіб розв'язування. Біля дошки після виконання завдання працюють одночасно по одному учневі від кожної групи. Кожна група захищає свій спосіб розв'язувані учні обирають найраціональніший.

Розв'язання

1-й спосіб

Легко побачити, що

$$4d = x_8 - x_4\ ,$$

звідки

$$d = \frac{x_8 - x_4}{4}\ ,\ \ d = 4\ .$$

Тоді

$$x_4 = x_1 + 3d\ ,$$

$$x_1 = x_4 - 3d\ ,$$

$$x_1 = 7\ .$$

Використовуючи формулу суми n перших член арифметичної прогресії, маємо:

$$S_6 = \frac{2x_1 + 5d}{2} \cdot 6\ ,$$

$$S_6 = (2x_1 + 5d) \cdot 3\ ,$$

$$S_6 = (14 + 20) \cdot 3\ ,$$

$$S_6 = 102\ .$$

2-й спосіб

За умовою задачі складемо та розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + 3d, \\ x_8 = x_1 + 7d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19 = x_1 + 3d, \\ 35 = x_1 + 7d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 = -4d, \\ 19 = x_1 + 3d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 4, \\ x_1 = 7. \end{cases}$$

Тоді

$$S_6 = \frac{2x_1 + 5d}{2} \cdot 6,$$

$$S_6 = \frac{2 \cdot 7 + 5 \cdot 4}{2} \cdot 6,$$

$$S_6 = 102.$$

Відповідь. $S_6 = 102$.

Задача 3. У скінченній арифметичній прогресії a_1; 8,3; a_3; 9,5 не відомі деякі члени. Знайдіть їх.

Вказівка щодо організації роботи. Учні працюють у групах, обговорюють ідеї розв'язування; шляхом колективного обдумування обирають два найраціональніші способи.

Розв'язання

1-й спосіб

Використаємо формулу, яка пов'язує три послідовних члени арифметичної прогресії:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2};$$

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}, \quad a_3 = 8,9;$$

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad a_1 = 2a_2 - a_3, \quad a_1 = 7,7.$$

2-й спосіб

Легко побачити, що

$$d = \frac{a_4 - a_2}{2}, \quad d = 0,6.$$

Тоді

$$a_1 = a_2 - d, \quad a_1 = 7,7;$$

$$a_3 = a_2 + d, \quad a_3 = 8,9.$$

Відповідь. $a_1 = 7,7$, $a_3 = 8,9$.

Задача 4. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з десятого по двадцять п'ятий включно, якщо $a_1 = 8$, $d = 4$.

Вказівка щодо організації роботи. Кожен учені самостійно шукає способи розв'язування. Не радячись з групою, самостійно обирає найраціональніший. Після розв'язування вчитель просить учнів передавати по колу свій зошит членам своєї групи, поки кожен не отримає свій зошит назад. У результаті кожен учень може знати, чи правильне він розв'язав задачу і скільки разів зустрівся його спосіб, тобто може зробити висновок щодо вдалості обраного способу та правильності розв'язання.

Далі в групі обговорюються різні способи розв'язування і колективно з'ясовується, який найдоцільніший. Потім цей спосіб пропонується іншим учням класу.

Розв'язання

$$S_{25} = \frac{2a_1 + 24d}{2} \cdot 25 ;$$

$$S_{25} = \frac{16 + 4 \cdot 24}{2} \cdot 25 , \quad S_{25} = 56 \cdot 25 , \quad S_{25} = 1400 .$$

$$S_9 = \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 , \quad S_9 = (a_1 + 4d) \cdot 9 ;$$

$$S_9 = (8 + 16) \cdot 9 , \quad S_9 = 216 .$$

Тоді обчислимо суму S членів арифметичної прогресії з десятого по двадцять п'ятий включно:

$S = S_{25} - S_9 = 1400 - 216 = 1184$. Відповідь. 1184.

<u>Задача 5.</u> Між числами 3 і 24 вставте три числа так, щоб утворилась арифметична прогресія.

Вказівка щодо організації роботи. Завдання кожен учень виконує самостійно, спосіб розв'язування не оголошується, наприкінці перевіряється відповідь.

Розв'язання

За умовою прогресія містить п'ять членів, тому $a_1 = 3$, $a_5 = 24$. За відомими формулами:

$$d = \frac{a_5 - a_1}{4}, \quad d = \frac{21}{4} \qquad d = 5{,}25$$

Тоді

$a_2=a_1+d, \quad a_2=8,25;$

$o_3=a_2+d, \quad a_3=13,25;$

$a_4—a_3+d, \quad a_4= 18,75.$

Відповідь. $a_2=8,25;$ $a_3=13,25;$ $a_4= 18,75.$

IV. Підсумок уроку.

Тема: Сума *n* перших членів геометричної прогресії.

Мета: ознайомити учнів з формулою для обчислення суми *n* перших членів геометричної прогресії; формувати навички й уміння застосовувати формулу для розв'язування задач; розвивати логічне мислення, обчислювальні навички учнів; виховувати інтерес до предмета; показати зв'язок математики з життям.

Обладнання: таблиця значень степенів чисел 2 і 3, таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99.

Хід уроку

I. Актуалізація опорних знань.

1. Дати означення геометричної прогресії. *(Слід звернути увагу учнів на те, що це послідовність відмінних від нуля чисел.)*

2. Як можна задати геометричну прогресію?

3. Відомі перший член геометричної прогресії і знаменник. Як знайти десятий член?

4. Відомі будь-які два послідовні члени геометричної прогресії. Як знайти знаменник?

5. Чи є послідовність геометричною прогресією:

а) 3; 3; 3; 3 ...;

б) 2; 0; 0; 0 ...;

в) 3; 6; 12; 24; 48...?

6. Відомо, що числа a_1, a_2, a_3... утворюють геометричну прогресію. Чи

є геометричною прогресією послідовність $3a_1$, $3a_2$,$3a_3$ ...?

II. Повідомлення теми, мети, завдань уроку.

III. Вивчення нового матеріалу.

Учитель. Щоб зрозуміти ідею виведення формули для обчислення суми *n* перших членів геометричної прогресії, спочатку поговоримо про шахи. Не дивуйтесь цьому.

Шахи — одна з найдавніших ігор. Вона існує багато віків, і не дивно, що з нею пов'язані різні перекази, правдивість яких через давність часу неможливо перевірити.

З однією з таких легенд ми сьогодні й ознайомимося. Щоб зрозуміти її, зовсім не треба вміти грати у шахи: досить знати, що гра відбувається на дошці, поділеній на 64 клітинки (чорні і білі).

Шахову гру було придумано в Індії, і коли індуський цар Шерам ознайомився з нею, він був у захопленні.

Довідавшись, що її винайшов один з його підданих, цар наказав покликати його, щоб особисте нагородити за вдалу видумку.

Винахідник, його звали Сета, з'явився перед троном повелителя. Це був скромно одягнений учений, який заробляв на життя, навчаючи інших.

(Далі легенда переказується у вигляді сценки, підготовленої учнями класу. Діючі особи: цар Шерам, винахідник Сета, слуги, старшина придворних математиків.)

Цар Шерам. Я бажаю гідно нагородити тебе, Сето, за чудову гру, яку ти придумав.

(Мудрець вклонився.)

Цар. Я досить багатий, щоб виконати найсміливіше твоє бажання. Назви нагороду, яка тебе задовольнить, і ти одержиш її.

(Сета мовчить.)

Цар. Не бійся, вислови своє бажання. Я не пошкодую нічого, щоб виконати його.

Сета. Велика добрість твоя, повелителю. Але дай строк обміркувати відповідь. Завтра я повідомлю тобі моє прохання.

Учитель. На другий день Сета знову з'явився в палаці.

Сета. Повелителю! Накажи видати мені за першу клітинку шахівниці одну пшеничну зернину.

Цар (здивовано). Просте пшеничне зерно?

Сета. Так, повелителю. За другу клітинку накажи видати дві зернини, за третю — чотири, за четверту — вісім, за п'яту — шістнадцять...

Цар (роздратовано перебиває Сету). Досить. Ти одержиш свої зерна за всі 64 клітинки дошки, як бажаєш: за кожну вдвоє більше від попередньої. Але знай, що прохання твоє недостойне моєї щедрості. Просячи таку мізерну нагороду, ти нехтуєш моєю милістю. Воістину, як учитель ти міг би показати кращий приклад поваги до милості й щедрості свого повелителя. Іди. Слуги мої винесуть тобі твій мішок з пшеницею.

(Сета посміхнувся і покинув замок.)

Учитель. Після обіду цар згадав про винахідника шахів і надіслав слугу дізнатися, чи виніс нерозсудливий Сета свою мізерну нагороду.

Цар. Чи отримав Сета свій мішок з зерном?

Слуга. Повелителю! Наказ твій виконується. Придворні математики підраховують кількість належних зерен.

(Слуга виходить.)

Учитель. Цар нахмурився, він не звик, щоб його повеління виконувалися так повільно. Увечері, ідучи спати, цар ще раз звернувся до придворних.

Цар. Чи давно Сета зі своїм мішком пшениці покинув палац?

Слуга. Повелителю! Математики твої невтомно працюють і сподіваються ще до світанку закінчити підрахунок.

Цар. Чому зволікають з цією справою? Завтра, до того, коли я прокинуся, все до останньої зернини повинно бути видано Сеті. Я двічі не наказую!

Учитель. Уранці цареві доповіли, що старшина придворних математиків просить вислухати важливе донесення. Цар наказав йому зайти.

Цар. Перед тим, як ти казатимеш про інші справи, я бажаю почути, чи видано, нарешті, Сеті ту мізерну нагороду, яку він собі сам призначив.

Старшина придворних математиків. Заради цього я і насмілився з'явитися до тебе у таку ранню годину. Ми сумлінно полічили кількість зерен, яку бажає одержати Сета. Число це таке велике...

Цар (гордовито перебиває). Яке велике воно не було б, житниці мої не збідніють. Нагороду обіцяно і її треба видати...

Старшина придворних математиків. Ти не можеш, повелителю, виконати таке бажання. У всіх коморах твоїх немає такої кількості зерен, яку зажадав Сета. Немає його і в житницях цілого царства. Не знайдеться стільки зерна і на всьому просторі Землі. І якщо бажаєш неодмінно видати обіцяну нагороду, то накажи перетворити всі земні царства на поля, накажи осушити моря й океани, накажи розтопити лід і сніги, що вкривають далекі північні пустелі. Нехай увесь земний простір буде засіяно пшеницею. І все те, що виросте на цих полях, накажи віддати Сеті. Тоді він одержить свою нагороду.

Цар (після паузи роздумливо). Назви ж мені це дивовижне число...

Старшина придворних математиків. 18 квінтильйонів 446 квадрильйонів 844 трильйони 73 більйони 709 мільйонів 551 тисяча 615, о повелителю!

Учитель. Така легенда. Чи справді було те, про що тут розповідалося, невідомо, але нагорода, про яку йшлося, мала бути саме такою.

Як швидше обчислити це число? Кількість зернин, про які йдеться, є сумою 64 членів геометричної прогресії, перший член якої

$b_1 = 1$, а знаменник $q = 2$. Позначимо цю суму через S:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на знаменник прогресії, одержимо:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Маса такої кількості зерен більша за масу пшениці, зібраної людством

$$S = (2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}),$$

$$S = 2^{64} - 1.$$

Індуський цар не міг видати таку нагороду, але якби він знав математику, то легко міг би звільнитися від такого обтяжливого боргу. Для цього потрібно було лише запропонувати Сеті самому відлічити собі зернину за зерниною всю належну йому пшеницю.

Виведемо формулу суми *n* перших членів довільної геометричної прогресії. Скористаємося тим самим способом, за допомогою якого було обчислено суму зерен.

Нехай b_n — геометрична прогресія. Позначимо суму *n* перших її членів через S_n:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Помножимо обидві частини рівності на *q*:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Враховуючи, що $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, ..., $b_{n-1} q = b_n$, маємо:

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q. \qquad (2)$$

Віднімемо почленно від рівності (2) рівність (1):

$$S_n q - S_n = (b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q) -$$

$$-(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n),$$

$$S_n (q-1) = b_n q - b_1.$$

Отже, якщо $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}.$$

Якщо врахувати, що $b_n = b_1 q^{n-1}$, то дістанемо ще одну формулу для обчислення суми *n* перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q-1},$$

якщо $q \neq 1$.

IV. Формування навичок і вмінь.

(Номери завдань вказано за підручником: Бевз Г.П. Алгебра: Проб, підруч. для 7—9 кл. серед, шк. — 2-ге вид. — К.: Освіта, 1997.)

№ 255 (а). Знайти суму 15 перших членів геометричної прогресії 1, 2, 4, 8, ...

Розв'язання

За умовою $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 15$. Тоді

$$S_{15} = \frac{1 \cdot (2^{15} - 1)}{2-1} = 32\,767.$$

Розв'язання

$$S_8 = \frac{81\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^8-1\right)}{\frac{1}{3}-1} = 121\frac{13}{27}.$$

Відповідь. $121\frac{13}{27}$.

№ 260. Було це майже 100 років тому. Селянин продавав 20 овець за 200 крб. Коли один з покупців став надто довго торгуватися, селянин запропонував: «Дай за першу вівцю одну копійку, за другу — 2 к., за третю — 4 к. і далі за кожну вівцю вдвічі більше копійок, ніж за попередню». Покупець погодився. Скільки він заплатив за тих 20 овець?

Розв'язання

Вартість овець, про які йдеться в задачі, є сумою 20 членів геометричної прогресії, перший член

якої $в_1 = 1$, а знаменник $q = 2$. Тоді

$$S_{20} = \frac{1\cdot(2^{20}-1)}{2-1} = 1\,048\,575 \ \text{(к.)}$$

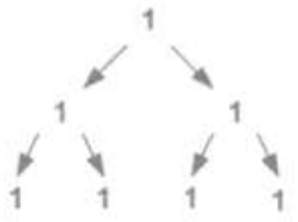
1 048 575 к. = 10 485 крб. 75 к.

Відповідь. 10 485 крб. 75 к.

№ 261. Бактерія, потрапивши в організм, до кінця двадцятої хвилини ділиться на дві, кожна з них до кінця двадцятої хвилини знову ділиться на дві і т.д. Скільки бактерій стане в організмі через добу?

Розв'язання

Проілюструвати задачу можна таким малюнком:



Очевидно, що за одну годину поділ бактерій пройде тричі, за 24 год (тобто за добу) поділ бактерій відбудеться 3 • 24 = 72 (рази).

Отже,

$$S_{72} = \frac{1 \cdot (2^{72} - 1)}{2 - 1} = 2^{72} - 1.$$

Відповідь. $2^{72} - 1$.

V. Підсумок уроку.

VI. Домашнє завдання.

§ 61, № 255 (в), 257 (а, б), 263 (додатково).

Урок КВВМ

Підготовка до гри КВВМ (клуб веселих, винахідливих математиків) розпочинається з формування команд. Максимальна кількість її учасників — 10 учнів. У виборі членів команди бере участь весь клас. Враховуються знання учнями математики, їх винахідливість, уміння прийти на допомогу.

Команда обирає капітана, назву команди, емблему, девіз, готує привітання і домашнє завдання.

На стінах залу, де проходитиме КВВМ, вивішуються плакати з висловленнями про математику, наприклад висловлення Н.Вінера: «Найвище призначення математики — знаходити порядок у хаосі, який нас оточує».

Девіз гри КВВМ:

«Сім раз подумай, один — розв'яжи».

І. Вступ.

Ведуча 1. Всім, хто навчає Математики!

Всім, хто вивчає Математику!

Всім, хто любить Математику!

Всім, хто ще не знає, що може любити Математику!

Присвячується наше свято.

Ведуча 2. Чому урочисто навколо?

Чуєте, як швидко стихли розмови?

Арифметичній і геометричній прогресіям

Ми присвячуємо КВВМ.

Ведуча 1. На КВВМ, на КВВМ

Ми вас запрошуємо всіх.

Сьогодні він незвичний,

Бо він — математичний!

Ведуча 2. Ширше двері відчиняйте

Розуму й кмітливості.

Ви старанність проявляйте.

Й максимум сміливості!

Ведуча 1. А щоб змагання було чесним,

Ми вибрали журі почесне.

Погляньмо разом з вами, друзі,

Хто буде в цім почеснім крузі.

Ведуча 2. Внести капелюхи правосуддя. *(Дівчатка, одягнені в «математичні» костюми, вносять капелюхи правосуддя.)* Усіх членів журі прошу покласти праву долоню на капелюх і повторювати за мною слова клятви.

«Я, член журі КВВМ, клянусь бути чесним і принциповим, оцінювати розум, винахідливість, кмітливість учасників гри, бути справедливим, суворим і непідкупним, не враховувати особисті симпатії і родинні зв'язки! Клянусь! Якщо порушу цю клятву, нехай накаже мене зневага математиків, їх важкий математичний натиск». (*Члени журі одягають капелюхи і займають свої місця.)* На столі перед кожним членом журі лежать картки з цифрами від 1 до 7 — це бали, якими члени журі будуть оцінювати гру команд. Журі також слідкуватиме за поведінкою уболівальників.

Ведуча 1. Зустрічайте команди «ПУПС» і «Прогресивчики».

(Команди входять до залу під звуки пісні «Ми починаємо КВВ».)

II. Привітання.

Ведуча 2. Перше традиційне конкурсне завдання — привітання команд. Конкурс оцінюється у 7 балів. Члени журі будуть оцінювати зовнішній вигляд гравців, емблему, девіз, представлення команди, привітання суперникам, уболівальникам і журі, висловлення команд про готовність фати коректно, весело і за правилами. *(Йде представлення команд.)*

Ведуча 1. Поки журі оцінює результати першого конкурсу, пропонуємо музичну паузу. *(Для музичної паузи уболівальники заздалегідь готують номери.)*

Ведуча 2. Вельмишановне журі! Оголосіть, будь-ласка, результати конкурсу «Привітання».

(Журі оголошує результати конкурсу.)

III. Розминка.

Ведуча 1. Змагання команд лише розпочалося. Попереду ще багато труднощів і хвилювань. Щоб підготувати гравців до важких випробувань, ми проведемо розумову розминку.

Ведуча 2. Увага! Я буду пропонувати командам запитання, а вони повинні дати відповіді на них. Про готовність команд відповідати капітани повідомляють дзвіночком. Кожна правильна відповідь оцінюється 1 балом.

Запитання

1. Яка професія називається арифметичною?

(Числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додається одне і те саме число, називається арифметичною професією.)

2. Сходи, що ведуть на веранду, мають 8 східців. Перша сходинка — бетонна плита заввишки 10 см, усі інші східці мають висоту 15 см. На якій висоті від землі знаходиться підлога веранди?

(Оскільки $a_1 = 10$, $d = 15$, то

$a_8 = a_1 + 7d = 10 + 7 \cdot 15 = 115$.

Отже, підлога веранди знаходиться на висоті 115 см від землі.)

3. Як швидко знайти суму цілих чисел від 1 до 100?

($a_1 = 1$, $a_{100} = 100$. Тоді

$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \bullet 100 = 50(a_1 + a_{100}) = 50(1 + 100) = 5050$

4. Яка професія називається геометричною?

(Послідовність чисел, у якій перший член відмінний від нуля, а кожний наступний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число, відмінне від нуля, називається геометричною професією.)

5. У геометричній прогресії $b_6 = 12$, $b_8 = 3$. Як знайти b_7?

(За властивістю геометричної прогресії $b_7 = \sqrt{b_6 b_8} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$.)

Ведуча 1. Поки журі підбиває підсумки конкурсу «Розминка», пропонуємо послухати гумореску.

—Чуєш, татку, а що таке арифметична професія? — запитує син у тата.

—Знав колись, тепер — не знаю, — каже тато.

—Татку, а що таке геометрична прогресія?

—Та забув уже, на жаль, — відповідає тато.

—Усе питання задаєш, таткові навіть у неділю не даєш відпочити! — сердиться мати на сина.

—Хай питає, чого не знає. А то виросте дурнем, — каже тато.

Ведуча 2. Вельмишановне журі! Оголосіть, будь-ласка, результати конкурсу «Розминка». *{Журі оголошує результати конкурсу.)*

IV. Конкурс художників.

Ведуча 1. Для участі у цьому конкурсі потрібно по два гравці від кожної команди. Оскільки КВВМ присвячений арифметичній і геометричній прогресіям, а це — *числові* послідовності, тому витвір художників може складатися лише з чисел, а кожне число можна записати за допомогою цифр. Конкурс оцінюється 5 балами. Будь-ласка, творіть! *(Художники беруть чисті аркуші паперу, олівці, маркери, сідають окремо за столи і малюють.)*

V. Конкурс «Юні поети».

Ведуча 2. Поетам кожної з команд пропоную прочитати свого вірша про арифметичну або геометричну прогресію, який вони написали заздалегідь.

(Учасники-поети читають написані ними вірші.)

Ведуча 1. Поки журі підбиває підсумки конкурсу «Юні поети», пропонуємо послухати «Пісню про математику» (слова М.Студецького, музика О.Гавелі).

Сила точної науки,
Що створив наш геній,
Дала зброю людям в руки
В праці їх щоденній.

Приспів

Найдавніша на планеті
Між наук цариця,
Математика — ти наша
Вірна помічниця.

Чи будинок зводиш, друже,
Чи пливеш морями, —
Скрізь вона тобі послужить,
Всюди вона з нами.

На заводі і в друкарні,
В відкритті галактик,
Навіть лікар у лікарні
Мусить її знати.

Приспів

Любі числа, теореми,

Формули чудові, —

Ви професій незліченних

Друзі і основа.

Приспів

Гей, науку цю вивчати

Кожному не пізно, —

Ми із нею, друже-брате,

Не будем блукати.

Приспів

VI. Конкурс капітанів.

(Звучить мелодія «Капітан, капітан, посміхнися».)

Ведуча 1. Капітан, капітан, зосередься,

Тому що в команді ти перший ерудит.

Капітан, капітан, посміхнися —

Лише веселий перемагає в КВВМ.

Запрошуємо капітанів команд взяти участь у конкурсі.

Ведуча 2. Шановні капітани! Ваше завдання — захистити честь своєї команди і принести їй бажані бали. Капітани мають дзвіночки, якими подаватимуть сигнал готовності відповідати на запитання. Кожна правильна відповідь на запитання приносить команді 1 бал. Конкурс складається з трьох завдань.

Завдання для капітанів

1. Знайти третій член арифметичної прогресії, якщо $a_2 = 4$, $a_4 = 10$.

(Оскільки $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$, то $a_3 = \frac{4 + 10}{2} = 7$.)

2. Знайти номер n-го члена геометричної прогресії, якщо $b_1 = 2$, $q = 0,1$, $b_n = 0,002$.

(Оскільки $b_n = b_1 q^{n-1}$, то

$0,002 = 2 \cdot 0,1^{n-1}$,

$2 \cdot (0,1)^3 = 2 \cdot 0,1^{n-1}$,

$3 = n - 1$, $n = 4$.)

3. В арифметичній прогресії перший член дорівнює 1,7, а різниця 0,3. Знайти номер члена арифметичної прогресії, який дорівнює 46,7.

(Оскільки $a_n = a_1 + d(n-1)$, $a_1 = 1,7$, $d = 0,3$,

$a_n = 46,7$, то

$$46,7 = 1,7 + 0,3(n - 1),$$
$$0,3(n - 1) = 46,7 - 1,7,$$
$$0,3(n - 1) = 45,$$
$$n - 1 = 45 : 0,3,$$
$$n - 1 = 150,$$
$$n = 151.)$$

Ведуча 1. Поки капітани виконують завдання, пропонуємо послухати вірш-жарт «Едик-математик». Хоч сідай та гірко плач — Не люблю отих задач! Через них одні невдачі. Ох! Замучили задачі.

Чи задачник непутящий, Чи такий я безталанний? Та усіх я обдурю — В книжці відповідь знайду!

Ви учіться, хто бажає,

Я б здоров'я не втрачав.

На умову не зважаю!

Раз — помножив, два — додав.

Скільки чашок, скільки ложок —

Це ж простеньке завдання.

Ти додав слона до кішок,

Перемножив на коня.

Справді, нескладна наука —

Була б відповідь, як слід —

Вийшло: дід молодший внука

Аж на 49 літ.

До Свердловська місто Сочі

Ближчим є за Камишов.

А один індійський хлопчик

Ніл за вечір обійшов.

А друкарські дві машини

Косять жито вісім днів.

Проїжджають щохвилини

Три десятих поїзди.

А до Марса — метрів 300.

Мудра в хлопця голова!

Півхлоп'яти йде у місто,

З ним — півмами. Ну й дива!

Що ж ми Едику поставим

За подібні чудеса?

Ведуча 2. Скільки балів ми поставимо Едику за «чудове» знання математики? А чи є такі горе-учні у нашому класі?

Капітанам пропоную здати розв'язання задач членам журі для перевірки правильності їх виконання. Сподіваємося, що ваші знання з математики набагато кращі, ніж Едика.

VI. Конкурс уболівальників.

Ведуча 1. Панове уболівальники! Прийшов час і вам взяти участь у змаганнях і допомогти своїм командам отримати додаткові бали. Ви можете прочитати вірш або проспівати куплет пісні, де зустрічаються числа, які утворюють числову послідовність, наприклад 1, 2, З, ..., і тим самим принести своїй команді додаткові бали.

(Уболівальники за бажанням беруть участь у конкурсі.)

Ведуча 2. Вельмишановне журі! Надаємо вам слово для оголошення балів, що отримали команди після конкурсів капітанів і уболівальників, а також назвіть загальну кількість балів.

Ведуча 1. Настав час для художників ознайомити нас зі своїми витворами. Кожна команда повинна коротко охарактеризувати те, що вона намалювала, а журі підбиває підсумки цього конкурсу.

VII. Конкурс «Рибалка».

Ведуча 2. Запрошуємо по одному гравцю від кожної команди — рибалок, які повинні за допомогою вудочки виловити рибку. До кожної рибки прикріплена задача, яку потрібно розв'язати. Якщо задача буде розв'язана правильно, то команда отримує 2 бали. Якщо рибалка не може розв'язати задачі, то він має право звернутися за допомогою до команди або до уболівальників.

VIII. Конкурс на уважність.

Ведуча 1. Конкурс «Рибалка», сподіваюся, вас розвеселив, а тому пропоную всім заспокоїтись і вислухати індуську притчу.

Ведуча 2. Легенда розповідає, що правитель Мага раджа захотів вибрати собі міністра. Він оголосив, що візьме на цю посаду того, хто пройде збудованою стіною навкруг міста з глечиком, по вінця наповненим молоком, і не виллє ні краплини. Багато людей пробувало але на шляху їх відволікали і вони розливали молоко Аж ось спробував ще один чоловік. Навколо нього кричали, стріляли, відвертали його увагу. Та він не вилив ні краплини.

— Ти чув крики, постріли? Ти бачив, як тебе лякали? — запитав його Магараджа.

— Ні повелителю, я дивився тільки на молоко.

Ведуча 1. Не чути і не бачити нічого стороннього -

уміння, яке дуже часто потрібне у житті. А ще важливим є уміння бути зосередженим та уважним. Пере віримо увагу гравців команд. У кожному конкурсі беруть участь по одному учаснику від команди. Перемог; приносить команді 1 бал.

Ведуча 2. Конкурс «Слухай одночасно кількох». Двоє уболівальників одночасно говорять два різних слова,; представники команд повинні визначити, хто яке слово назвав. Потім говоритимуть одночасно три різню слова, далі — чотири і т.д. Виграє той учасник, який визначить більшу кількість слів.

Ведуча 1. Конкурс «Кожній руці — своя робота».

Гравцям на аркушах паперу слід лівою рукою накреслити 3 трикутники, а правою — три кола. Оцінюється швидкість і правильність виконання.

Ведуча 2. Конкурс «Крокуй і думай». У цьому конкурсі учасники гри стають поруч з ведучим. Усі роблять перший крок, і в цей час ведучий називає будь-яке число, наприклад 3. Далі гравцям слід називати числа кратні трьом при кожному кроці. Я йтиму з вами, не даючи сповільнити рух. Якщо хтось помилився, він зупиняється. Перемагає та команда, учасник якої залишить позаду інших гравців.

Ведуча 1. Вельмишановне журі! Оголосіть, будь-ласка, результати конкурсів «Рибалка» та на уважність.

XI. Конкурс «Домашнє завдання».

Ведуча 1. Команди готові до виконання домашнього завдання. Це може бути два оригінальні виступи команд. Бажано, щоб вони стосувалися прогресій, або мали відношення до шкільного життя. (Можна запропонувати вірш, пісню, інсценівку тощо.) Оцінюється конкурс 5 балами.

Ведуча 1. Ми дійшли до фінішу. Змагання закінчилися. Ви показали ваші вміння і знання.

Надаємо слово журі: Чия ж бо першість в нашій грі?

Ведуча 2. Скінчилася гра, скінчилася казка.

За це вам нуликів аж в'язка!

Ще — одиничок на кінець,

А слухав хто, той молодець!

Ведуча 1. До різних наук ми охочі,

Вони ведуть нас до вершин.

Проникаючи в зоряні далі,

В таємниці земної кори,

Математика всіх закликає:

«Ти міркуй, фантазуй і твори».

Урок-ділова гра

Мета. Узагальнення знань учнів з даної теми. Розвивати уміння застосовувати здобуті знання на практиці. Показати учням практичне застосування знань про

прогресії. Виховувати інтерес до предмету.

Тип уроку. Урок узагальнення знань з теми «Прогресії».

Організаційна робота.

Клас ділиться на 4 групи.

1. Історики повідомляють історичні відомості, цікаві факти з даної теми з елементами імпровізації.
2. Теоретики дають обґрунтування даним фактам з наукової точки зору, виводять формули.
3. Практики показують застосування формул в практичних задачах.
4. Експерти вивчають помилки, допущенні під час роботи, дають рекомендації з їх усунення, роблять висновки.

Хід уроку

1. Організація класу.
2. Вступне слово вчителя.

Ми живемо в третьому тисячолітті, але досягнення науки і техніки дають нам можливість з допомогою машини часу повернутись в друге тисячоліття до нової ери. Вже в папірусі, який складений близько 2000 років до н. е., знаходимо задачу про нагородження винахідника шахів (цю легенду ми розглядали на уроці). Наші історики знайшли відомості, що цей папірус переписаний з папіруса, який належав третьому тисячоліттю до н. е. Надаємо слово нашим історикам, які довго вивчали стародавні папіруси і принесли нам нові факти до теми «Прогресії», яку ми щойно вивчили.

Слово «Історику», який розповідає легенду про нагороду полководця Терентія («Жива математика», Перельман).

Легенда в ролях «Вигідна угода»

Зустрічаються мільйонер і незнайомець.

Незнайомець. Бачу, ти багатий чоловік. Давай укладемо з тобою таку угоду. Я буду цілий місяць щодня тобі приносити по 100000 карбованців. Не за даром, звичайно, але плата невелика. У перший день ти заплатиш 1 копійку.

Мільйонер. Що ти говориш, я вухам не вірю. Одну копійку?

Незнайомець. Одну копійку. Другого дня ти заплатиш мені 2 копійки, третього — 4 копійки, четвертого — 8 копійок. І так цілий місяць, кожного дня в двічі більше, ніж за попередній.

Мільйонер. І потім що?

Незнайомець. Все, більше нічого. Тільки чітко дотримуватись угоди. Але раніше, як через місяць, угоду розривати не смій!

Вони розійшлися.

Мільйонер. Оце так удача! І справді, гроші на гроші біжать. Моїй радості не має краю.

(Показати 2-3 дні, як вони обмінюють копійки на пачки по 100000).

Далі ведучий записує на дошці результат угоди.

1-й день 100000	1 коп.
2-й день 100000	2 коп.
3-й день 100000	4 коп.
4-й день 100000	8 коп.
28-й день 100000	1342177 крб. 28 коп.
29-й день 100000	2684354 крб. 56 коп.
30-й день 100000	5368709 крб. 12 коп.
3000000 крб.	10737418 крб. 23 коп.

Вчитель. Багатьом здається, що математика, це така наука, яка немає жодного зв'язку з природою, тваринним світом. Насправді, жива природа теж живе за математичними законами (в ідеалі).

Ми знаємо, наприклад, симетрію, можемо навести багато прикладів симетрії в природі.

Прогресії теж знаходять своє місце в живому світі.

«Історики» продовжують розповідати факти.

1. Швидке розмноження (про маківки і кульбабки). Учні заготували

плакати з розрахунками заздалегідь, щоб наочно продемонструвати розмноження, яке (в ідеальних умовах) відбувається за законами геометричної прогресії (Перельман).

2. «Історики» повідомляють про розмноження тварин: кроликів, лангустів та комах (мух) (та ж література).

Вчитель. Законами геометричної прогресії користуються також шахраї. Розповідаю про розповсюдження так званих «акцій», які зовсім недавно захоплювали наше населення.

«Історики» повідомляють про «Лавину дешевих велосипедів» (там же).

Слово надається теоретикам.

Теоретики виводять формули арифметичної і геометричної прогресій.

1) $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$

$S_n = ((a_1 + a_n)/2) \cdot n$

$S_n = ((2a_1 + d\,(n - 1))/2)\, n$

2) $b_n = b_1 q^{(n-1)}$

$Sn = (b_1(q^n - l))/(q - 1)$

$S = b_1/(l - q)$

Вчитель. Приклади застосування арифметичної прогресії в житті: вартість телеграм, вартість проїзду в таксі та інше.

В дію вступають «практики».

Розповідь про Гаусса (математична шкатулка). Треба підрахувати суму чисел від 1 до 100.

Задача очень не проста

Как сделать, чтобы быстро

От единицы и до ста

Сложить в уме все числа.

Пять первых связок изучи

Найдешь к решению ключи.

Запис на дошці: 1+2 + 3 + 4 + 5 + ... + 96 + 97 + 98 + 99 + 100

1 + 100 = 101

$2 + 99 = 101$

$3 + 98 = 101$

$4 + 97 = 101$

$5 + 96 = 101$

Всього таких пар 50

$S = 101 \times 50 = 5050$

$S = 1 + 100/ 2 \times 100 = 5050$

Давным-давно сказал мудрец,

Что прежде всего надо

Связать начало и конец

У численного ряда.

Наступний «практик» розв'язує рівняння:

$(x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 3x + 5) + ... + (x^2 +20x + 39) = 4500$

Якщо уважно проаналізувати, то можна побачити:

$x^2 + 2x+3-(x^2 + x+1)=x + 2$

$x^2 + 3x + 5 - (x^2 + 2x + 3) = x + 2 ...$

Тобто члени рівняння складають арифметичну прогресію, кількість членів якої дорівнює 20.

$S = ((a_1 + a_n)/2)^* n$

$((x^2 + x + 1 + x^2 + 20x + 39)/2)\ 20 = 4500$

$((2x^2 + 21x + 40)/2)^* 20 = 4500$

$(2x^2 + 21x + 40)^* 10 = 4500$

$2x^2 + 21x + 40 - 450 = O$

$2x^2 + 21x - 410 = O$

$D = 441 + 3280 = 3721$

$x_{1,2} = (-21\pm61)/4$

$x_1 = -20,5;\ x^2 = 10$

Хвилина відпочинку

Задача 1.

За 1 хвилину із однієї бактерії утворюється дві. Одна бактерія разом зі своїм потомством заповнює пробірку за 1 годину. За який час цю ж пробірку заповнять дві бактерії? (59 хвилин)

Задача 2.

Є книга, що містить 16 подвійних аркушів. На якому аркуші сума чисел, якими пронумеровані сторінки, буде найбільшою? (Однакова)

Задача про сто мір хліба (продовжують практики)

Сто мір хліба розділити між п'ятьма людьми те щоб другий одержав на стільки ж більше від першого, на скільки третій одержав більше від другого, четвертий від третього, а п'ятий від четвертого. Крім того, двоє перших мають одержати в 7 разів менше, І трьох інших.

Скільки треба дати кожному?

Нехай a_1 — 1 член прогресії, d — різниця

Одержать:

I-a_1

II — $a_1 + d$

III — $a_1 + 2d$

IV — $a_1 + 3d$

V — $a_1 + 4d$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1+2d + a_1+3d + a_1 + 4d = 100 \\ 7 (a_1 + a_1 + d) = a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_1 + l0d = 100 \\ 14a_1 + 7d = 3a_1 + 9d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 20 \\ 11a_1 - 2d = 0 \end{cases}$$

$12a_1 = 20$

$a_1 = 20/12 = 10/6 = 5/3=1\ 2/3$ (мір хліба)

I 2/3 + 2d = 20

2d = 20 - 1 2/3 2d = 18 1/3

d = 18 1/3 : 2 = 9 1/6 1—12/3

II — 1 2/3 + 9 1/6 = 10 5/6

III — 10 5/6 + 91/6 = 20

IV — 20 + 9 1/6 = 29 1/6

V — 29 1/6 + 9 1/6 = 38 1/3

Продовжують практики.

Задача про купівлю коня.

Чоловік продав коня за 156 крб. Покупець передумав його купувати і повернув назад, сказавши, що дуже висока ціна. Тоді продавець запропонував такі умови.

Якщо для тебе це зависока ціна, то купи тільки цвяхи з його підків, а коня одержиш в додачу безкоштовно.

Цвяхів у кожній підкові 6. Дай мені:

за I цвях — 1/4 копійки

за 2 цвях — 1/2 копійки

за 3 цвях — 1 копійка і т.д.

Покупець дуже зрадів і погодився.

За 24 цвяхи йому довелося заплатити

1/4 + 1/2 + 1 + 2 + 22 + Т + ... + 224-3 копій

S = (2^{21*} 2 - 1/4) / (2 - 1) = 2^{22} - 1/4 = = 4194303 3/4 коп.

Тобто близько 42 тис. крб.

Задача про годівлю курей.

(«Цікава алгебра», cm. 160, Перельман)

Для 31 курки заготована деяка кількість корму із розрахунку по 1 декалітру на тиждень на кожну курку. При цьому передбачалось, що кількість курей змінюватись не буде. Але насправді кількість курей щотижня зменшувалась на 1, тому корму вистачило на подвійний період.

Скільки ж було корму і на скільки часу розраховано?

Розв'язок.

Нехай було заготовлено х декалітрів корму на у тижнів. Корм розрахований на 31 курку по 1 декалітру в тиждень, тоді х = 31 у.

За перший тиждень витратили 31 дл, за другий 30, за третій 29 і так далі до останнього тижня подвоєного періоду було витрачено 31 — 2у + 1 дл

(1 день — 31 дл

2 день — 31 — 1 дл

3 день — 31 - 2 дл

....

2у - х - 31 - (2у - 1) = 31 - 2у + 1 дл)

Отже, весь запас корму:

$x = 31y = 31 + 30 + 29 + ... + (31 - 2y + 1)$

Знайдемо суму 2у членів прогресії, а1 = 31,

а $a_n = 31 - 2y + 1$

$31y = ((31 + 31 - 2y + 1)\ 2y)/2 = (63 - 2y)\ y$, у Ф 0, тому $31 = 63 - 2y$, $y = 16$, звідси

$x = 31^{*}y = 31^{*}16 = 496$

Заготовлено було 496 декалітрів корму на 16 тижнів.

Всі учні одержують завдання на картках на застосування формул прогресій.

1) $a_1 = 12$, $d = -2$. Знайти a_{10}.
2) $a_1 = 3$, $a_{20} = 57$. Знайти S_{20}.
3) $x_1 = 16$, д = 1/2. Знайти x_7.
4) 3; - 6; 12; - 24, ... Знайти S_6.
5) Знайти суму нескінченної геометричної прогресії: 2/3; 4/9; 8/27; ...

Слово надається експертам.

Підсумок уроку

УРОК-ЗАХИСТ УЧНЯМИ ТВОРЧИХ РОБІТ

Тема: Арифметична і геометрична прогресії. Нестандартні задачі

Мета: Формувати уміння; застосовувати здобуті знання у нестандартних умовах; вчити учнів аналізувати та систематизувати ті знання, які вони отримують на уроках і черпають з додаткової літератури.

Напис на дошці: **...** Математика безмежно різноманітна, як світ, і присутня, міститься в усьому.

М. П. Єругін

Хід уроку

І. Актуалізація опорних знань (у формі бесіди).

Запитання для бесіди

1. Сформулювати означення арифметичної прогресії.
2. Яке число називають різницею арифметичної прогресії?
3. Якою формулою можна задати будь-яку арифметичну прогресію?
4. Яка характерна властивість арифметичної прогресії?
5. Сформулювати означення геометричної прогресії.
6. Що називають знаменником геометричної прогресії?
7. Яка характерна властивість геометричної прогресії?
8. Записати формулу *n*-го члена арифметичної прогресії.
9. Записати формулу *n*-го члена геометричної прогресії.
10. Записати формулу суми n перших членів арифметичної прогресії.
11. Записати формулу суми n перших членів геометричної прогресії.
12. Записати формулу суми нескінченної геометричної прогресії, в якої $|q| < 1$

ІІ. Повідомлення теми та мети уроку. Оголошуються прізвища доповідачів та порядок їх виступів.

ІІІ. Творче застосування узагальнених знань, навичок та умінь. Доповідачі виступають зі своїми повідомленнями. У кінці кожного виступу учні задають доповідачу запитання.

Перший виступ. З давніх часів відомі задачі та легенди, в результаті розв'язання яких з'являються числа-гіганти. Зрозуміло, що мова йде про задачі, пов'язані з геометричною прогресією ($q>1$). Одна з найбільш відомих легенд — легенда про винахідника шахів. Індійський цар Шерам закликав до себе винахідника шахів і запропонував, щоб він сам вибрав собі нагороду за свій винахід. Царя вразила скромність прохання: дати за першу клітину шахівниці одну пшеничну зернину, за другу — дві, за третю — ще у два рази більше, тобто чотири, за четверту — ще у два рази більше, і так до 64 клітини. Виникає закономірне запитання: скільки зернин повинен був одержати винахідник шахів?

Ця задача вперше трапляється у хорезмського математика Аль-Біруні (973-1050 р.). Кількість зернин, про які йдеться в задачі, є сумою 64 членів геометричної прогресії, у якої перший член дорівнює 1, а знаменник — 2.

Знайдемо цю суму (S) дещо іншим способом, ніж у шкільному підручнику:

$S = 1 + 2 + 2^2+2^3+... + 2^{62}+2^{63}$;

$S = 1+2(S-2^{63})$; $S = 1 + 2S-2^{64}$;

$S = 2^{64}-1$.

Підраховано, що кількість зернин, які би хотів отримати винахідник шахів, — 18446744073709551615, що приблизно становить 13,8 млрд. 40-тонних вагонів. Ця кількість зерна, розсипана по всій поверхні Землі, утворить шар, в якому на 1 м^2 припадає 4,3 кг зерна.

Аналогічно можна вивести формулу суми п перших членів геометричної прогресії в загальному вигляді: $S = b_1 + b_1q + b_1q^2 +... + b_1q^{n-1}$;

$S = b_1+ q(b_1 + b_1q +... + b_1q^{n-2})$; $S = b_l+q(S-b_1q^{n-1})$;

$S = b_l+qS-b_1q^n$; $qS-S = b_1q^n - b_1$; $S(q-1) = b_1(q^n -1)$;

$$S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, q \neq 1.$$

Приклад 1. Знайти суму

$S = 1-2 + 4-8 + 16-32 + 64-128 + 256-512$;

$S = 1-2(1-2 + 4-... + 256)$; $S = 1-2(S + 512)$;

$3S = -1023$; $S = -341$.

Приклад 2. Знайти суму $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$.

$$S = 1 + \frac{1}{2}\left[S - \frac{1}{2n}\right];\ 2S = 2 + S - \frac{1}{2^n};\ S = 2 - \frac{1}{2^n};$$

Виступ другий.

Задача 1. Довести, що числа виду $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2},$ де n $\in$ N, не утворюють арифметичну прогресію.

Доведення. Припустимо, що для деяких n $\in$ N $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2},$ - арифметична прогресія. Тоді за характерною властивістю арифметичної прогресії $2\sqrt{n+1}, \sqrt{n}+\sqrt{n+2},$ Розв'яжемо отримане рівняння, враховуючи, що n $\in$N: $4(n+1)=n+2\sqrt{n(n+2)}$ $n+1=\sqrt{n^2}+2n$; *$n^2+2n+1=n^2+2n$; $1=0$.* Рівняння коренів не має і, значить, для чисел $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2},$ не існує таких n $\in$ N, щоб вони утворювали арифметичну прогресію.

Задача 2. Розв'язати рівняння

$(x^2 +x+1) + (x^2 +2x + 3) + (x^2 +3x + 5) + ...+ (x^2 +20x + 39) = 4500.$

Доданки $x^2 +x + 1$, $x^2+2x + 3$, $x^2 +3x + 5$,... $x^2 +20x + 39$ утворюють арифметичну прогресію, у якої $d = x + 2$, $n = 20$. Тоді $S_{20}=\frac{(x^2+x+1)+(x^2+20x+39)}{2}\cdot 20.$ З іншого боку S20 = 4500. Отже, $((x^2+x + l) + (x^2+20x + 39))10 = 4500$; $2x^2 +21x - 410 = 0$. Корені цього рівняння, а отже, і початкового: $x_1 = 10$; $x_2 = -20,5$.

Виступ третій.

Задача 1. Розв'язати рівняння

$2x + 1+x^2 -x^3+x^4 -^{x5} +...= \frac{16}{3}$, де |x|<1. Перепишемо дане рівняння так:

2x + 1 + (x2-^+^-;c5 +...)= $\frac{16}{3}$ (*)

У дужках маємо суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, де b_1, = x^2, q = -x. За формулою S = $\frac{b_1}{1-q}$ ця сума дорівнює $\frac{x^2}{1+x}$.

Тому рівняння (*) рівносильне такому рівнянню:

$2x+1+\frac{x^2}{1+x}=\frac{13}{6}$; $18x^2+5x-7=0$

Корені останнього: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{7}{9}$

Задача 2. Розв'язати рівняння

$\frac{1}{x} + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{7}{2}$, де x < 1

Розв'язання аналогічне попередньому:

$\frac{1}{x} + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{7}{2}$, $\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2}$,

$9x^2 - 9x + 2 = 0$; $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

Обговорення виступів. Учні висловлюють свої враження від захисту творчих робіт, аналізують ці роботи (відповідність темі, повнота розробки, краса та логіка викладу), вносять доповнення, роблять поправки.

IV. Підсумок уроку. Вчитель підсумовує учнівські виступи та доповнення до них, вказує на культуру математичного мовлення і мовлення взагалі, на лаконічність та ясність доповідей та відповідей на запитання.

V. Оцінювання. Оцінки виставляються за основні виступи та за доповнення до них (з обов'язковим коментарем).