МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ПОСЛІДОВНОСТІ ШТЕРНА-БРОКО ТА ФАРЕЯ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала студентка 2 курсу
Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Гриндій Ірина Леонідівна
Керівник кандидат фізико-математичних наук, доцент
Котова Ольга Володимирівна
Рецензент доктор фізико-математичних наук професор Львов Михайло Сергійович

ХЕРСОН 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми

Апарат ланцюгових дробів є одним з найважливіших інструментів аналізу в теорії діафантових наближень. Задачі пов'язанні з поданням дійсних чисел ланцюговими дробами є класичними. Основи сучасної теорії ланцюгових дробів беруть свій початок у роботах таких математиків як Ейлер, Лагранж, Лежандр, Гаус.

Систематичний виклад теорії можна знайти наприклад в книгах Перрона та Хінчина [1, 4]. Іншим класичним прикладом теорії чисел, пов'язаним з ланцюговими дробами, є ряди Фарея. Вперше вони згадуються в 1816 році у роботах Фарея [11]. На початку ХХ сторіччя було встановлено зв'язок між розподілом рядів Фарея та складними задачами аналітичної теорії чисел [3]. Менш відомими є послідовності Штерна-Броко. Вперше вони згадуються в 1858 році у роботах Штерна та у 1860 році в роботах Броко [2]. Ці послідовності повязані з послідовностями Фарея та функцією Мінковського [10, 15, 18]. Послідовності Фарея є цікавим об'єктом для математичних досліджень. Вони являють собою сімейство скінченних підмножин множини раціональних чисел. Послідовності Фарея володіють безліччю власних цікавих властивостей. Однак найбільш очевидним є їх зв'язок з деревом Штерна-Броко.

Зв'язок з науковими погромами, планами, темами

Роботу виконано в рамках досліджень наукового гуртка кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу (гурток з алгебри та геометрії, алгебри та теорії чисел, числових систем).

Мета роботи полягає в ознайомленні з конструктивним способом побудови множини всіх невід'ємних нескоротних раціональних чисел, який приводить до виникнення бінарного дерева Штерна-Броко; розгляді його піддерева – дерева Фарея; дослідженні властивостей вище вказаних об’єктів, їх взаємозв’язків (з ланцюговими дробами, числами Фібоначчі, функцією Мінковського тощо) та з’ясуванні можливих застосувань.

Поставлена мета передбачає розв’язання наступних *завдань:*

1) З’ясувати історичні аспекти виникнення послідовностей Штерна-Броко та Фарея;
2) Описати процес побудови та дослідити властивості вище вказаних послідовностей, виявити їх спільні властивості;
3) Обґрунтувати можливість представлення довільного раціонального числа, в так званій, системі числення Штерна-Броко;
4) Навести приклади застосування послідовностей Штерна-Броко в елементарній математиці, а саме до розв’язання діофантових рівнянь та наближення дійсних чисел;
5) Встановити зв'язок послідовностей Штерна-Броко з послідовностями Фарея, числами Фібоначчі, ланцюговими дробами, золотим відношенням та функцією Мінковського.

Об’єктами дослідження є послідовності Штерна-Броко та Фарея.

Предметом дослідження є властивості вище вказаних послідовностей і їх взаємозв’язки з числами Фібоначчі, двосимвольним кодуванням чисел, ланцюговими дробами, функцією Мінковського та теорією наближень дійсних чисел раціональними.

Методи дослідження. У роботі використовувались методи теорії чисел, метричної теорії чисел, математичного аналізу, теорії графів та теорії континуант.

Наукова новизна. Знайдено рекурентну та загальну формули для підрахунку кількості дробів n-ої послідовності Штерна-Броко. Доведено, що для кожного довільного дробу (окрім $\frac{1}{1}$) завжди знайдеться обернений до нього дріб на будь-якому кроці побудови дерева Штерна-Броко. Встановлено, що взаємно обернені дроби послідовностей дерева

Штерна-Броко симетричні відносно дробу $\frac{1}{1}$. Знайдено рекурентну та загальну формули для обчислення суми чисельників дробів дерева Штерна-Броко, отриманих на n-му кроці побудови. Встановлено, що сума чисельників дробів, одержаних на деякому кроці побудови дерева Штерна-Броко, дорівнює сумі їх знаменників. Знайдено формулу зв'язку дробів дерева Штерна-Броко з класичною послідовністю Фібоначчі.

Практичне значення полягає в тому, що в магістерській роботі зібраний та систематизований теоретичний матеріал по темі, наведено доведення існуючих властивостей вище вказаних об'єктів дослідження та доведено нові, встановлено зв'язок з послідовностями Фарея, Фібоначчі та функцією Мінковського. Вказано на практичні застосування.

Апробація. Результати дослідження докладались на засіданнях наукового гуртка кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу (гурток з алгебри та геометрії, алгебри та теорії чисел, числових систем).

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Огляд літератури за темою дослідження

У теорії чисел виділяються і розглядаються в першу чергу ті проблеми, які глибоко і безпосередньо пов'язані з досліджуваними об'єктами і важливі для побудови математики в цілому. Деякі теоретико-числові задачі виникають ще в рамках шкільного курсу арифметики. Історично теорія чисел виникла як продовження розвитку арифметики.

Сьогодні до теорії чисел включають широке коло задач, які значно виходять за межі вивчення натуральних чисел. Наприклад, теорія діофантових наближень, важливим інструментом якої є апарат ланцюгових дробів.

Існує багато класичних задач, пов'язаних з розкладом раціональних чисел в ланцюгові дроби. Іншим класичним об'єктом теорії чисел, напряму пов'язаним з ланцюговими дробами, є *послідовності* (*ряди*) *Фарея*. Джон Фарей – англійський геолог початку XIX століття, автор близько 60 наукових статей, єдиним внеском якого у математику були дроби, названі його іменем.

1816 року Дж. Фарей опублікував у «Філософському журналі» статтю «Про цікаву властивість звичайних дробів» [11].

В ній він зауважує, що помітив деяку закономірність при вивченні таблиці Генрі Гудвіна «Повні десяткові коефіцієнти». Фарей повністю описує алгоритм побудови послідовностей і зазначає, що йому не відомо чи хтось раніше звертав увагу на наявність таких закономірностей та хотів би дізнатись думку тематичних читачів.

Одним з читачів цього журналу, як потім з'ясувалося, був О.Л. Коші, який пізніше надав необхідні доведення, що були помилковими у Фарея.

Менш відомим математичним об’єктом є *послідовності* (*дерево*) *Штерна-Броко*.

Дерево Штерна-Броко відкрили незалежно один від одного німецький математик М. Штерн (Moritz Stern) у 1858 році і французький годинникар А. Броко (Achille Brocot) у 1860 році [4, 9, 10].

У дійсності цей спосіб розташування невід’ємних нескоротних дробів у вершинах нескінченного двійкового дерева започаткували два давньогрецькі математики Нікомах Геразький та Теон Смирнський (ІІ ст.н.е.). Незважаючи на те, що ці два математики працювали окремо, в їх діяльності прослідковуються однакові напрацювання.

Наприклад, «Виклад математичних речей, корисних при читанні Платона» написаний Смирнським і «Введення» Нікомаха, містять у своїй арифметичній частині приблизно той же самий матеріал, викладений в однаковому стилі. В цих роботах згадується про дерево Штерна-Броко, але описане під назвою «Породження всіх стосунків з відношення рівності як із матері та кореня» [9], де і описуються початкові відомості та деякі властивості.

Геразький в своїх творах наводить детальний опис правила, в результаті якого і утворюється дерево Штерна-Броко, але при цьому він не наводить доведень, тільки зауважує, що його механізм — «це стрункий і необхідний шлях до пізнання природи Всесвітом» [10].

Смирнський у своїй книзі описує правило побудови по тій же схемі, але більш коротко. Це пояснюється тим, що Теон, на відміну від Нікомаха, завжди називав авторів, матеріалами яких користувався. Насамперед, це виклади Адраста (І ст.н.е) та Ератосфена (ІІІ ст.до н.е). Також, він зауважує, що Ератосфен Кіренський багато доведень «опустив». Цей факт наштовхує на думку, що саме опрацюваннями Ератосфена користувався Н. Геразський.

1.2. Основні поняття теорії графів

Перша робота з теорії графів з'явилася у 1736 році і належить Л. Єйлеру. Наведем означення основних понять теорії графів, які будуть використані в роботі.

Означення 1.1. *Графом* називають не порожню множину точок і множину відрізків, кінці яких належать заданій множині точок. Відрізки називаються *ребрами* графа, а їх кінці — *вершинами*.

Означення 1.2. *Шляхом* від вершини A_1 до вершини A_n в графі називається послідовність ребер, що ведуть від A_1 до A_n, причому кожні два сусідні ребра шляху мають спільну вершину, і ніяке ребро не зустрічається двічі.

Означення 1.3. *Циклом* називається шлях в якому перша і остання вершини співпадають.

Означення 1.4. Дві вершини A і B графа називаються *зв'язними,* якщо в графі існує шлях з кінцями A і B. Граф, у якого всі вершини зв'язні називається *зв'язним.*

Означення 1.5. *Деревом* називається зв'язний граф, що не містить циклів (ациклічний).

На рис.1 зображені приклади дерев.

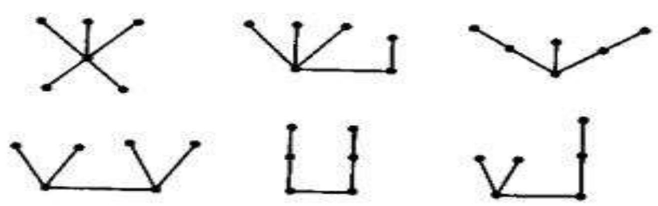


Рис. 1.

Клас дерев займає в теорії графів особливе місце. З одного боку, це досить прості за побудовою графи, але за допомогою них розв'язується багато складних задач. З іншого боку, використання дерев часто зустрічається в областях, які на перший погляд не мають відношення до теорії графів. Дерева проявляють себе носіями такої властивості як «зв'язність».

<u>*Означення 1.6*</u>. Ребро зв'язного графа, вилучення якого призводить до втрати зв'язності називається *мостом.*

Отже, *дерево* — це зв'язний граф, кожне ребро якого є мостом.

<u>*Означення 1.7*</u>. *Піддеревом* називається будь-яка відокремлена частина дерева.

<u>*Означення 1.8*</u>. *Степенем* вершини називається кількість ребер, що належить до даної вершини.

<u>*Означення 1.9*</u>. Якщо в дереві виділити одну з вершин, назвавши її *коренем*, то отримаємо *кореневе дерево* або *дерево з коренем*.

<u>*Означення 1.10*</u>. Нехай X — будь-яка вершина кореневого дерева з коренем K. Існує єдиний шлях від кореня K до вершини X. Всі вершини, які знаходяться на цьому шляху, назвемо *предками вершини* X.

<u>*Означення 1.11*</u>. Якщо вершина Y є предком вершини X, то вершина X називається *нащадком* вершини Y. Кожну вершину ми вважаємо своїм предком і нащадком.

Приклад кореневого дерева, коренем якого є вершина 9, наведено на рисунку 2. Кореневе дерево має висоту 4; корінь зображений зверху і має глибину 0, сусідні з ним вершини (з номерами 3, 10, 4) зображені під коренем і мають висоту 1, вершини наступного рівня (з номерами 8, 12, 11, 2) зображені під вершинами першого рівня і мають глибину 2, і т.д.

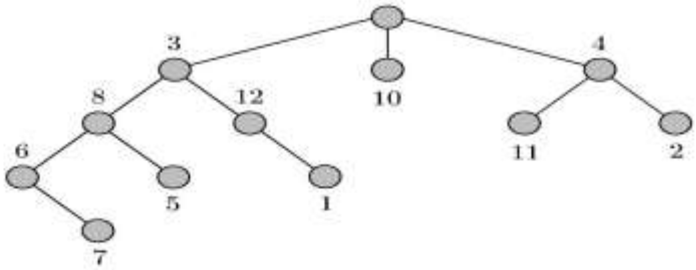


Рис. 2.

<u>*Означення 1.12*</u>. Якщо (Y, X) — останнє ребро на шляху *з кореня до вершини* X, то вершина Y називається *батьком вершини* X, а вершина X — *нащадком вершини* Y.

Корінь дерева – єдина вершина без батьків.

<u>*Означення 1.13*</u>. Вершина кореневого дерева, яка не має нащадків, називається *листком*, а вершина, яка має нащадків, *внутрішньою.*

<u>*Означення 1.14*</u>. Довжина шляху від кореня до довільної вершини X називається *глибиною вершини* X.

<u>*Означення 1.15*</u>. Максимальна глибина вершин дерева X називається *висотою* цього дерева.

Важливим класом дерев з точки зору застосування є двійкові (бінарні) дерева. Двійкове дерево найпростіше означити рекурсивно.

<u>*Означення 1.16*</u>. *Бінарним деревом* називається скінченний набір вершин, який

1) або порожній (без вершин);
2) або розбитий на три частини, які не перетинаються: вершину (корінь дерева), ліве піддерево кореня та праве піддерево кореня.

Також має місце наступне означення бінарного дерева.

<u>*Означення 1.17*</u>. *Двійковим* (*бінарним*) *деревом* називають дерево, кожна вершина якого має не більше двох нащадків і одного батька.

На рис. 3 зображено приклади бінарних дерев. Пусті місця в таких деревах часто заповнюють фіктивними листками. Після цього у кожної старої вершини є двоє дітей (рис. 3а). Добавлені листя зображені квадратиками (рис. 3б).

Поняття бінарного дерева можна узагальними для дерев степені $S > 2$.

<u>*Означення 1.18*</u>. *Позиційним деревом* називається кореневе дерево, в якому діти будь-якої вершини позначені натуральними числами — номерами. При цьому у кожної вершини є вакансії для дітей номер 1, 2, 3 і т.д., з яких деякі заповнені, деякі — ні.

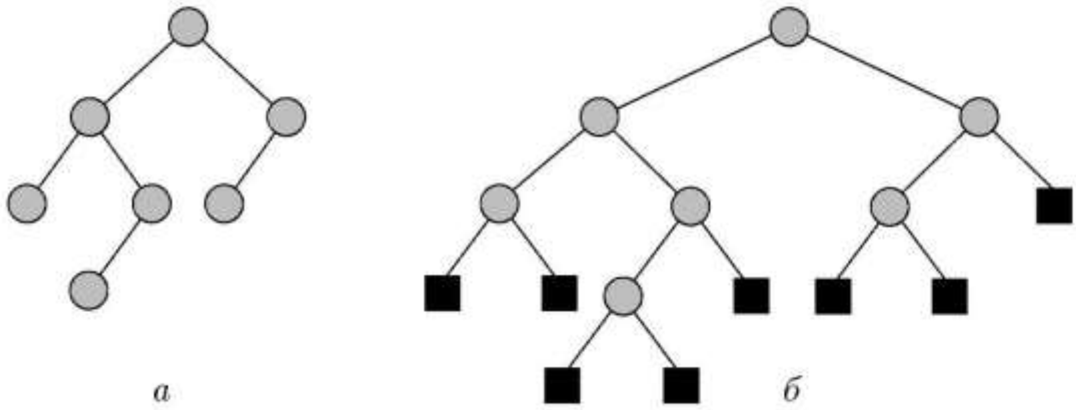


Рис. 3.

<u>*Означення 1.19*</u>. S*-ковим деревом* називається позиційне дерево, яке не має вершин з номерами більше чим S.

<u>*Означення 1.20*</u>. *Повним* S*-ковим деревом* називається S*-ков*е дерево, в якому всі листя мають однакову глибину степені S.

Таким чином, структура повного S*-кового* дерева повністю визначається його висотою. Приклад повного двійкого дерева приведений на рис. 4. Це повне двійкове дерево висотою 3, воно має 8 листків і 7 внутрішніх вершин.

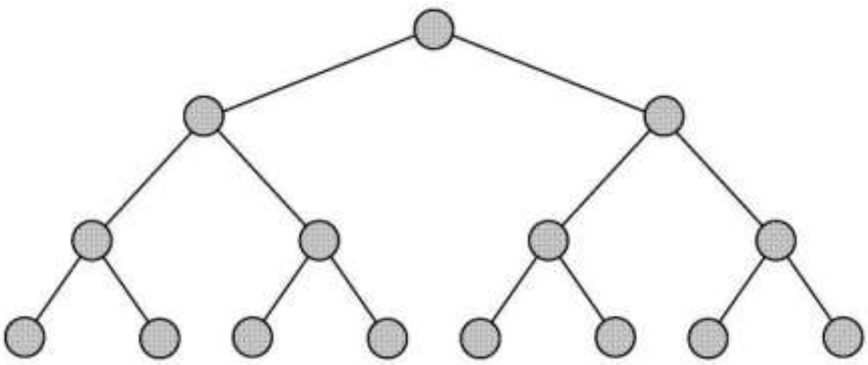


Рис.4.

Підрахуємо, скільки листків має повне S-*кове* дерево висоти h. Корінь є єдиною вершиною глибою в 0, його S нащадків є вершинами глибини 1, їх нащадками є S^2вершин глибини S і так далі до S^hлистків глибини h. Можна доповнити, що висота S-*кового* дерева з n листками рівна $\log_S n$(таке дерево існує при умові, що логарифм ціле число). Число внутрішніх вершин повного S-*кового* дерева висотою h рівна

$$1+s+s^2+\ldots+s^{h-1}=\frac{s^h-1}{s-1}.$$

Тобто, у випадку повного бінарного дерева число внутрішніх вершин на одиницю менше числа листків.

Більшість задач, які розв'язуються за допомогою графів, побудовані на визначені компоненту зв'язності, пошуку маршрутів, відстаней і т.д. При розв'язанні реальних задач, графи, які їм відповідають, досить великі і їх аналіз можливий лише при використанні сучасної обчислювальної техніки. Для складання відповідних ефективних алгоритмів необхідно добре уявляти різноманіття графів, знати визначення і властивості кожного виду дерев.

1.3. Означення та побудова дерева Штерна-Броко

Дерево Штерна-Броко (послідовності Штерна-Броко) — це конструкція, яка дозволяє побудувати множину всіх невід'ємних нескоротних раціональних дробів у вигляді впорядкованого нескінченного двійкового дерева.

Існує два способи побудови цього двійкового дерева.

Перший спосіб побудови дерева

Нехай на початковому етапі побудови маємо міститься два дроби $\frac{1}{0}$ і $\frac{0}{1}$. Зрозуміло, що значення першого дробу дорівнює 0, а другий, строго кажучи, дробом не є, а лише позначає нескінченність. Кожен наступний дріб утворюємо шляхом медіантого додавання дробів.

<u>*Означення 1.21*</u>. *Медіантою* (від ново лат. *mediante*, від лат. *medius* – серединний) двох невід'ємних дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ називається дріб, знаменник якого дорівнює сумі знаменників цих двох дробів, а чисельник — сумі чисельників.

Тобто,

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

<u>*Означення 1.22.*</u> n*-им кроком* (*етапом*) побудови дерева Штерна-Броко будемо називати дію, при якій для послідовності дробів, отриманих на (n - 1) кроці побудови будемо знаходити медіанту двох сусідніх дробів.

Розглянемо декілька кроків вище описаного правила побудови дерева (послідовностей) Штерна-Броко:

$$S_0 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{0}\right\};\ S_1 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{0}\right\};$$

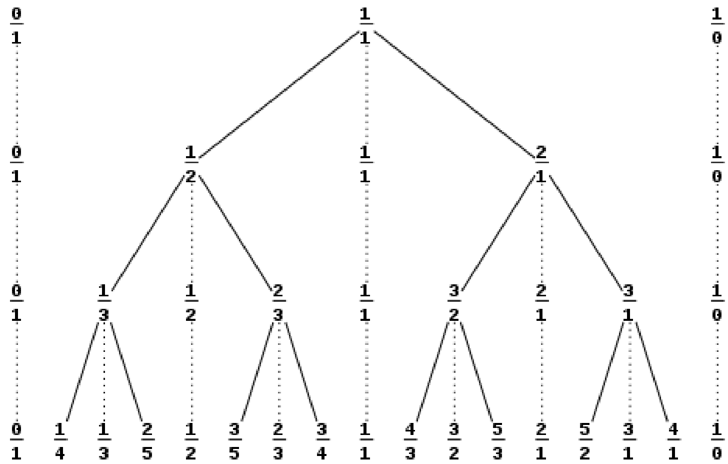
$$S_2 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{0}\right\};$$

$$S_3 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{1}{0}\right\}.$$

Зауважимо, що кожна з множин S_n, $n \in N \cup \{0\}$, називається *послідовністю Штерна-Броко n-го порядку.*

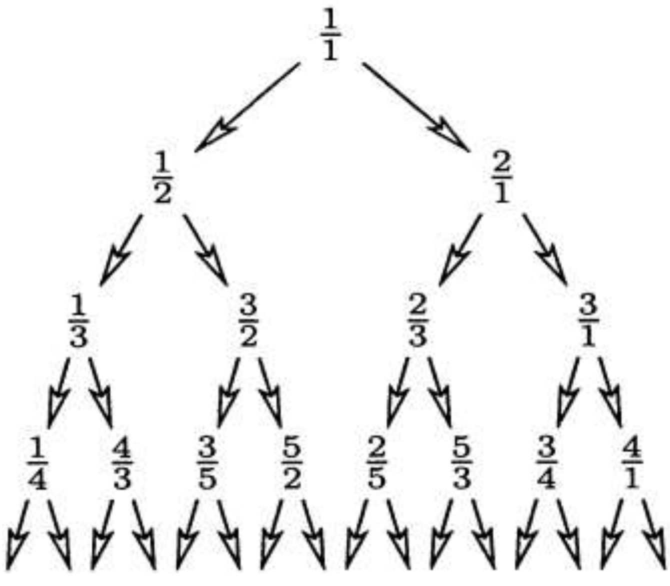
Саме тому, досить часто, терміни «дерево Штерна-Броко» та «послідовності Штерна-Броко» ототожнюють.

Всю цю множину невід'ємних, нескоротних дробів можна представити у вигляді самого «дерева». Після перших трьох кроків побудови конструкція виглядає так:



Другий спосіб побудови дерева

Існує [3] ще один спосіб побудови такого дерева, в якому не використовуються дроби $\frac{1}{0}$ і $\frac{0}{1}$. Але зберігається дріб $\frac{1}{1}$, який і в цьому випадку є центральним. Кожен дріб $\frac{a}{b}$ має двох нащадків, де $\frac{a}{b+a}$ — лівий, і $\frac{b+a}{b}$ — правий. Після перших трьох кроків побудови дерева за другим правилом, воно виглядає наступним чином:



Продовжуючи процес далі, до нескінченності, ми отримаємо множину всіх невід'ємних нескоротних дробів.

1.4. Алгоритм побудови та означення послідовності Фарея

<u>*Означення 1.23.*</u> *Послідовністю Фарея* (Fn) *n-го порядку* називається множина нескоротних раціональних чисел $\frac{a}{b}$ зі знаменником $b \le n$, які належать відрізку [0,1] і розташованих у порядку зростання тобто: $F_n = \left\{ \frac{a_i}{b_i} : 0 \le a_i \le b_i \le n,\ НСД(a_i, b_i) = 1,\ \frac{a_i}{b_i} < \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} \right\}$.

<u>*Означення 1.24*</u>. Член послідовності Фарея довільного порядку називається *дробом Фарея.*

Кожна наступна послідовність Фарея утворюється з попередньої шляхом медіанного додавання двох сусідніх дробів.

Послідовності Фарея *n*-го порядку для $n = 1$, 2, 3 мають наступний вигляд:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\},\ F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\},\ F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Зауваження. Послідовності Фарея іноді називають рядом Фарея (див. наприклад [1]). Аналогічно до послідовностей Штерна-Броко, послідовності Фарея можна представити у вигляді «дерева» (рис.5) і називати деревом Фарея віповідно.

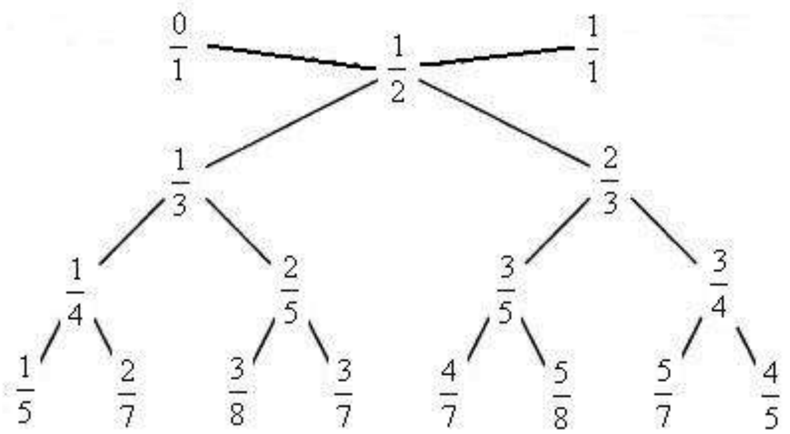


Рис. 5.

Останнім часом дерево Фарея активно використовується в теорії динамічних систем [8].

Теорема 1.1. *Нехай* $\frac{a}{b} \in F_n$, y_0 — *ціле число, таке що* $n-b < y_0 \le n$ *і* $ay_0 \equiv -1(\mathrm{mod}\, b)$, $x_0 = \frac{ay_0+1}{b}$ *тоді дріб* $\frac{x_0}{y_0} \in F_n$ *є наступним дробом за* $\frac{a}{b}$.

Зауваження. Ціле число y_0, таке що $n-b < y_0 \le n$ і $ay_0 \equiv -1(\mathrm{mod}\, b)$ існує, оскільки $(a,b)=1$, і з b послідовних чисел, які належать півінтервалу $(n-b; n]$, лише одне задовольняє конгруенцію $ay_0 \equiv -1(\mathrm{mod}\, b)$.

Доведення. Із $x_0 = \frac{ay_0+1}{b}$ слідує $bx_0 - ay_0 = 1$ і $(x_0, y_0) = 1$оскільки $y_0 \le n$, то $\frac{x_0}{y_0} \in F_n; \frac{x_0}{y_0} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by_0} > \frac{a}{b}$.

Нехай $\frac{c}{d}$ — наступний за $\frac{a}{b}$ дріб із послідовності Фарея.

Якщо $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{x_0}{y_0}$, і оскільки a, b, c, d — цілі числа, маємо $x_0 d - cy_0 \ge 1$, $cb - ad \ge 1$ і

$$\frac{x_0}{y_0} - \frac{a}{b} = (\frac{x_0}{y_0} - \frac{c}{d}) + (\frac{c}{d} - \frac{a}{b}) = \frac{x_0 d - cy_0}{dy_0} + \frac{cb-ad}{bd} \ge \frac{1}{dy_0} + \frac{1}{bd} = \frac{b+y_0}{bdy_0}.$$

З іншого боку

$$\frac{x_0}{y_0} - \frac{a}{b} = \frac{bx_0 - ay_0}{by_0} = \frac{1}{by_0},$$

звідки слідує

$$\frac{b+y_0}{dby_0} \le \frac{1}{by_0},\ b + y_0 \le d.$$

Оскільки $\frac{a}{b} \in F_n$ і $d \le n$, отримуємо $b + y_0 \le d$, $y_0 \le n - b$, що суперечить умові теореми.

Припустимо, що між $\frac{a}{b}$ і $\frac{x_0}{y_0}$ в послідовності Фарея знаходиться ще один дріб. Прийшли до суперечності, оскільки найближчий дріб — $\frac{x_0}{y_0} \in F_n$. Тобто дріб, наступний за $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d} = \frac{x_0}{y_0}$, і оскільки ці два дроби нескоротні, то $c = x_0, d = y_o$.

Теорему доведено.

Приклад. Знайти наступний дріб за $\frac{3}{7}$ в послідовності F_{10}.

Розв'яжемо рівняння $3y \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 7)$; знаходимо $y \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$, $y_0 = 9$, $x_0 = \frac{3 \cdot 9 + 1}{7} = 4$.

Отже, шуканим дробом є $\frac{4}{9}$.

Теорема 1.2. *Довжина L_n послідовності Фарея n-го порядку обчислюється за формулою*

$$L_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(n) \tag{1.1}$$

або

$$L_n = L_{n-1} + \varphi(n)$$

де $\varphi(n)$ – функція Ейлера.

<u>О з н а ч е н н я 1.25</u>. *Довжиною L_n послідовності Фарея* називається кількість дробів послідовності на n-му кроці побудови.

<u>О з н а ч е н н я 1.26</u>. *Функцією Ейлера $\varphi(n)$* називають числову функцію, яка для кожного $n \in N$ визначає кількість натуральних чисел, що не перевищують n і з ним взаємнопрості.

Якщо $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ — розклад натурального числа n на прості множники, то функція Ейлера $\varphi(n)$ визначається формулою

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_s}).$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції по *n*. Перевіримо правильність рівності (1.1) для $n=1$. Одержимо, $F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ і $L_1 = 1+\varphi(1) = 2$.

З означення послідовності Фарея відомо, що послідовність 2-го порядку отримується з 1-го, шляхом вписування в неї нескоротних звичайних дробів виду де $\frac{a}{2}$, де $0<a<2$ і $НСД(a,2)=1$. Очевидно, що кількість таких дробів $\varphi(2)$. Отже,

$$L_2 = L_1 + \varphi(2) \text{ або } L_2 = 1+\varphi(1)+\varphi(2).$$

Припустимо, що рівність (1.1) правильна для деякого натурального $n=k$: $L_k = 1+\sum_{i=1}^{k}\varphi(i)$.

Згідно з означенням, послідовність Фарея $(k+1)$-го порядку одержується з послідовність Фарея *k*-го порядку шляхом вписування в неї дробів виду $\frac{a}{k+1}$, де $0<a<k+1$ і $НСД(a,k+1)=1$, тому її довжина обчислюється за формулою

$$L_{k+1} = L_k + \varphi(k+1) = 1+\sum_{i=1}^{k+1}\varphi(i).$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції, рівність (1.1) виконується для довільного натурального *n*.

Теорему доведемо.

РОЗДІЛ 2. ВЛАСТИВОСТІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ШТЕРНА-БРОКО ТА ФАРЕЯ

2.1. Властивості послідовностей Штерна-Броко

Вище описані правила дозволяють легко побудувати дерево Штерна-Броко і помітити багато цікавих закономірностей.

Наступні міркування, викладені в дипломній роботі, ґрунтуються на першому способі побудови дерева Штерна-Броко.

Властивість 1 (Фарея-Коші) [8]. *Якщо* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b} < \frac{c}{d})$ — *послідовні дроби, отримані на деякому* n*-му кроці побудови дерева Штерна-Броко, то*

$$bc - ad = 1. \tag{2.1}$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції по n (кроках побудови).

Для $n = 1$ матимемо:

$S_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$, $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$ — твердження виконується.

Припустимо, що твердження виконується для двох довільних послідовних дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b} < \frac{c}{d})$ дерева Штерна-Броко, отриманих на n-ому кроці побудови, тобто:

$$bc - ad = 1.$$

Покажемо справедливість даного твердження для $(n+1)$-го кроку побудови. За алгоритмом побудови дерева Штерна-Броко матимемо:

$$\left\{\ldots, \frac{a}{b}; \frac{a+c}{b+d}; \frac{c}{d}; \ldots\right\}.$$

Для дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{a+c}{b+d}$ обчислимо

$$b(a+c)-a(b+d)=ab+bc-ab-ad=bc-ad=1.$$

Аналогічно, для дробів $\dfrac{a+c}{b+d}$ і $\dfrac{c}{d}$ обчислимо

$$c(b+d)-d(a+c)=bc-ad=1.$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції, дане твердження виконується для двох послідовних дробів $\dfrac{a}{b}$ і $\dfrac{c}{d}$, отриманих на n-му кроці побудови дерева Штерна-Броко.

Властивість доведено.

Наслідок 1. $НСД(b,d)=1$.

Доведення. Для доведення використаємо метод від супротивного.

Припустимо, що b і d не взаємно прості і нехай вони діляться на деяке число x, тоді з властивостей *НСД* маємо рівності:

$$b=xb_1,\;\; d=xd_1.$$

Тоді за властивістю 1

$$xb_1c-xad_1=1,$$

що рівносильно

$$x(b_1c-ad_1)=1.$$

Очевидно, що остання не можлива для натуральних чисел a, c, b_1, d_1.

Наслідок доведено.

Властивість 2 [4]. *Медіанта двох сусідніх дробів знаходиться між ними*:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

Доведення. Зведемо дані нерівності до спільного знаменника. Отримаємо

$$\frac{ad(b+d)}{bd(b+d)}<\frac{bd(a+c)}{bd(b+d)}<\frac{cb(b+d)}{db(b+d)},$$

що рівносильно

$$ad(b+d) < bd(a+c) < cb(b+d). \qquad (2.2)$$

Розглянемо ліву з нерівностей (2). Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки. Отримаємо: $ad < bc$. Тоді, згідно з рівністю (1), остання нерівність рівносильна наступній правильній нерівності: $-1 < 0$.

Розглянемо праву з нерівностей (2). Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки. Отримаємо: $ad < bc$, що рівносильно, згідно з (1), правильній нерівності: $-1 < 0$.

Властивість доведено.

<u>Наслідок 2 [4].</u> На кожному кроці побудови всі дроби знаходяться у порядку зростання.

<u>Наслідок 3 [4].</u> Медіанта двох сусідніх дробів не є їх точною серединою, а лежить десь між ними.

Теорема 2.1. *Якщо $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b} < \frac{c}{d})$ — послідовні дроби, отримані на n-му кроці побудови дерева Штерна-Броко, то* $b + d \ge n$.

Доведення. Якщо $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b} < \frac{c}{d})$ два сусідні дроби , отримані на *n*-му кроці побудови дерева Штерна-Броко, то з попередньої властивості маємо: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Але дріб $\frac{a+c}{b+d}$ одержується на $(n+1)$-му кроці побудови, з чого і випливає, що $b + d \ge n$.

Теорему доведено.

Властивість 3 [3]. *Кожен дріб зустрічається в дереві Штерна-Броко тільки один раз.*

Доведення. Використаємо метод від супротивного. Припустивши супротивне, отримаємо протиріччя з наслідком 2.

Властивість доведена.

Властивість 4 [4]. *Всі дроби дерева Штерна-Броко нескоротні.*

Доведення. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що на деякому кроці побудови зустрічається скоротний дріб:

$$\left\{\dots,\frac{a}{b},\frac{xc}{xd},\dots\right\}.$$

За першою властивістю, маємо:

$$bcx - adx = 1,$$

$$x(bc - ad) = 1.$$

Очевидно, що остання рівність не можлива для натуральних чисел a, b, c, d, x.

Властивість доведено.

Властивість 5. *У дереві Штерна-Броко знаходиться вся множина нескоротних дробів (множина нескоротних раціональних чисел).*

Доведення. Для доведення даної властивості потрібно взяти алгоритм , згідно з яким за скінченну кількість кроків серед дробів дерева Штерна-Броко можна знайти довільне раціональне число $\frac{x}{y}$.

З того що всі дроби дерева Штена-Броко впорядковані, причому, на кожному кроці побудови розташовані у порядку зростання, випливає, що для довільної вершини дерева у її лівому піддереві будуть розташовані дроби, менші за неї, а в правому піддереві — більші.

З останніх міркувань отримуємо наступні алгоритми пошуку довільного раціонального числа у дереві Штерна-Броко. Порівнюємо шуканий дріб $\frac{x}{y}$ з коренем дерева: якщо $\frac{x}{y} < \frac{1}{1}$, то переходимо в ліве піддерево кореня і продовжуємо порівняння; якщо $\frac{x}{y} > \frac{1}{1}$, то переходимо в праве піддерево кореня і продовжуємо порівняння з відповідною вершиною. Якщо $\frac{x}{y} = \frac{1}{1}$ — пошук закінчено.

Цей алгоритм можна розуміти наступним чином. Нехай $[\frac{a}{b};\frac{c}{d}]$— відрізок, в якому ми шукаємо дріб $\frac{x}{y}$. На початковому етапі $\frac{a}{b}=\frac{0}{1}$, $\frac{c}{d}=\frac{1}{0}$. На кожному наступному кроці дріб $\frac{x}{y}$ порівнюється з медіантою кінців відрізка $[\frac{a}{b};\frac{c}{d}]$, тобто з дробом $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ і в залежності від результатів порівняння або зупиняється, або продовжується на відрізку $[\frac{a}{b};\frac{a+c}{b+d}]$, або продовжується на відрізку $[\frac{a+c}{b+d};\frac{c}{d}]$.

Якщо алгоритм пошуку продовжується, то мають місце наступні нерівності

$$\frac{a}{b}<\frac{x}{y}<\frac{c}{d} \tag{2.3}$$

Ліва з нерівностей (2.3) рівносильна наступним нерівностям

$$ay-bx<0 \Leftrightarrow bx-ay>0 \Leftrightarrow bx-ay\geq 1,$$

оскільки $a,b,x,y\in N$.

Права з нерівностей (1) рівносильна наступним нерівностям

$$dx-cy<0 \Leftrightarrow cy-dx>0 \Leftrightarrow cy-dx\geq 1,$$

оскільки $c,d,x,y\in N$.

Таким чином, система нерівностей (1) рівносильна такій системі

$$\begin{cases} bx-ay\geq 1, \\ cy-dx\geq 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Помножимо ліву та праву частини: першої з нерівностей (2) на $c+d>0$ другої з нерівностей (2) на — $a+b>0$ додамо їх почленно. В результаті отримаємо

$$(c+d)(bx-ay)+(a+b)(cy-dx)\geq a+b+c+d,$$

$$bcx-ady-adx+bcy\geq a+b+c+d,$$

$$bcx-ady-adx+bcy\geq a+b+c+d,$$

$$(bc-ad)x+(bc-ad)y \ge a+b+c+d.$$

Враховуючи властивість 1 (Фарея-Коші), остання нерівність набуде вигляду

$$x+y \ge a+b+c+d.$$

Оскільки на хоча б одна із змінних a,b,c,d строго зростає, то алгоритм пошуку дробу $\frac{x}{y}$ буде мати не більше ніж $x+y$ кроків.

Властивість доведено

Властивість 6. *Нехай* Q_n *— кількість дробів у множині* S_n, $n \in \mathrm{N}$. *Тоді має місце рівність*

$$Q_n = 2Q_{n-1} - 1, \text{ де } Q_0 = 2.$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції по n (кроках побудови). Для $n=1$ матимемо:

$$Q_1 = 2Q_0 - 1 = 3$$

– твердження виконується.

Припустимо, що твердження виконується $n=k$:

$$Q_k = 2Q_{n-1} - 1.$$

Покажемо справедливість даного твердження для $(k+1)$-го кроку побудови.

Враховуючи те, що кількість дробів Q_{k+1}, отриманих на $(k+1)$-му кроці побудови дорівнює

$$Q_{k+1} = Q_k + (Q_k - 1) = 2Q_k - 1,$$

приходимо до висновку, що, згідно з принципом математичної індукції, дане твердження виконується для довільної послідовності дробів, отриманих на n-му кроці побудови дерева Штерна-Броко.

Властивість доведено.

Властивість 7. *Для довільного* $n \in N_0$ *виконується рівність*

$$Q_n = 1 + 2^n.$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції по n (кроках побудови). Для $n=0$ матимемо:

$$Q_0 = 1 + 2^0 = 2$$

– твердження, очевидно, виконується.

Припустимо, що твердження виконується $n=k$: $Q_k = 1 + 2^k$.

Покажемо справедливість твердження для $n=(k+1)$.

Враховуючи властивість 6, для $(k+1)$-го кроку побудови одержимо:

$$Q_{k+1} = 2Q_k - 1 = 2(1+2^k) - 1 = 1 + 2^{k+1}.$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції, дане твердження виконується для довільної послідовності дробів, отриманих на n-му кроці побудови дерева Штерна-Броко.

Властивість доведено.

Властивість 8. *На деякому n-му, $n \in \mathrm{N}_0$ кроці побудови дерева Штерна-Броко для довільного дробу $\frac{a}{b} \in S_n$ $(\frac{a}{b} \neq \frac{1}{1})$ завжди знайдеться обернений до нього дріб.*

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції по n (кроках побудови).

Для $n=0$ матимемо $S_0 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$ — твердження виконується.

Припустимо, що для $n = k-1$ справедливо:

$$S_{k-1} = \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_{2^{k-2}}}{b_{2^{k-2}}}, \frac{1}{1}, \frac{b_{2^{k-2}}}{a_{2^{k-2}}}, \ldots, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_1}{a_1}\right\}.$$

Покажемо правильність даного твердження для $n=k$-го кроку побудови.

Для послідовності S_k, рахуючи зліва на право, розглянемо i-ту $(1 \le i \le 2^{k-2})$ медіанту, утворену сусідніми дробами послідовності S_{k-1}, одержимо

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{a_i}{b_i} \oplus \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i + a_{i+1}}{b_i + b_{i+1}}.$$

Аналогічно, але рахуючи справа наліво, розглянемо i-ту $(1 \le i \le 2^{k-2})$ медіанту послідовності S_k, утворену сусідніми дробами послідовності S_{k-1}, одержимо $\frac{b_i}{a_i} \oplus \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}} = \frac{b_i + b_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} = \frac{B_i}{A_i}$.

Отже, згідно з принципом математичної індукції, дане твердження виконується для довільної послідовності дробів S_n, отриманих на n-му кроці побудови дерева Штерна-Броко.

Властивість доведено.

<u>Наслідок 4.</u> Взаємно обернені дроби послідовності S_n симетричні відносно дробу $\frac{1}{1}$.

Властивість 9. *Нехай C_n, $n \in N_0$ — сума чисельників дробів дерева Штерна-Броко, отриманих на n-му кроці побудови. Тоді мають місце рівності*

$$C_n = C_{n-1} + 3^{n-1} = \frac{3^n + 1}{2}, \text{ де } C_0 = 1, \ n \in N. \tag{2.5}$$

Доведення.

Розглянемо різницеве рівняння

$$C_n - C_{n-1} = 3^{n-1}. \tag{2.6}$$

Воно є неоднорідним, а його характеристичне рівняння має вигляд [7]

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \text{ і } \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1.$$

Тоді загальний розв’язок рівняння (4) має вигляд $C_{n-1} = a_1 \cdot 1^{n-1} + a_2 \cdot 3^{n-1}$.

Невідомі коефіцієнти a_1 і a_2 знайдемо з початкових умов: $C_0 = 1$, $C_1 = 2$. Одержимо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1, \\ a_1 + 3a_2 = 2, \end{cases}$$

звідки $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Тоді $C_{n-1} = \frac{3^{n-1}+1}{2}$ і рівність (2.6) має місце.

Властивість доведено.

З властивостей 8 та 9 випливає наступне твердження.

<u>Наслідок 5.</u> *Сума чисельників дробів, одержаних на деякому n-му ($n \in N_0$) кроці побудови дерева Штерна-Броко, дорівнює сумі їх знаменників.*

<u>*Означення 1.23*</u>. Дріб виду $\frac{a_n}{b_n}$ будемо називати *максимальним дробом* з множини S_n $(2 \le n \in \mathrm{N})$, якщо для довільного дробу $\frac{x}{y} \in S_n$ $(\frac{x}{y} \ne \frac{a_n}{b_n})$ має місце нерівність: $\frac{x}{y} < \frac{a_n}{b_n}$.

Властивість 10 (про зв'язок дробів дерева Штерна-Броко з послідовністю Фібоначчі). *Якщо* $\frac{a_n}{b_n}$ *— максимальний дріб, отриманий на n-му кроці побудови дерева Штерна-Броко, то*

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \oplus \frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \tag{2.7}$$

де $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $2 \le n \in \mathrm{N}$.

Доведення. З першого правила побудови дерева Штерна-Броко зрозуміло, що $\frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{0} = \frac{u_1}{u_0}$, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1} = \frac{u_2}{u_1}$.

Перевіримо правильність рівності (5) для $n = 2$. Зрозуміло, що

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \oplus \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{1} \oplus \frac{1}{0} = \frac{2}{1} = \frac{u_3}{u_2}.$$

Припустимо, що для $n=k$ рівності (5) має місце, тобто

$$\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}\oplus\frac{a_{k-2}}{b_{k-2}}=\frac{u_{k+1}}{u_k}.$$

Розглянемо $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ – максимальний дріб з множини S_{k+1}. Тоді,

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\frac{a_k}{b_k}\oplus\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}=\frac{u_{k+1}}{u_k}\oplus\frac{u_k}{u_{k-1}}=\frac{u_{k+1}+u_k}{u_k+u_{k-1}}=\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}.$$

Отже, рівність (5) правильного для довільного натурального $n\geq 2$.

Властивість доведено.

<u>Наслідок 6.</u> Дріб $\frac{b_n}{a_n}\in S_n$ *є оберненим до дробу* $\frac{a_n}{b_n}$*, причому* $\frac{b_n}{a_n}=\frac{u_n}{u_{n+1}}$.

Властивість 11 (про зв'язок дробів дерева Штерна-Броко з золотим відношенням). *Якщо* $\frac{a_n}{b_n}$ *— максимальний дріб, отриманий на n-му кроці побудови дерева Штерна-Броко, то*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\varphi, \tag{2.8}$$

де $u_0=0$, $u_1=1$, $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$, $2\leq n\in\mathrm{N}$, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золоте відношення.

Інколи, (насправді, дуже рідко) число φ називають «золотим числом» або «числом Фідія».

Доведення. Перейшовши до границі в обох частинах рівності (6), одержимо $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\varphi.$

Властивість доведено.

2.2. Зв'язок послідовностей Штерна-Броко та Фарея

Послідовності Фарея володіють безліччю власних цікавих властивостей, однак найбільш очевидний їх зв'язок з деревом Штерна-Броко: фактично, послідовність Фарея утворюється видаленням деяких гілок з дерева. Або можна говорити, що для отримання послідовності Фарея потрібно взяти безліч дробів, одержуваних при побудові дерева Штерна-Броко на нескінченній ітерації, і залишити в цій множині дроби із знаменниками, які не перевищують n і чисельниками, що не перевищують знаменники.

Теорема 2.2 (про зв'язок послідовностей Штерна-Броко та Фарея). *Послідовність Фарея повністю міститься в дереві Штерна-Броко.*

Доведення. В дереві Штерна-Броко знаходять всі дроби з піввідрізка $[0,+\infty)$, а в послідовністі Фарея містяться всі раціональні дроби з відрізка $[0,1]$. Очевидно, що відрізок $[0,1]$ повністю належить піввідрізку $[0,+\infty)$.

Теорему доведено.

Наслідок 7. Послідовність Фарея утворюється шляхом відкидання дробу $\frac{1}{0}$ та правого піддерева дерева Штерна-Броко.

Оскільки, послідовність Фарея міститься в дереві Штерна-Броко, то вона володіє деякими розглянутими властивостями останнього. Продублюємо спільні властивості послідовностей Штерна-Броко та Фарея в термінах останнього, доведення яких аналогічне.

Властивість 1' (Фарея-Коші) [11]. *Якщо* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b}<\frac{c}{d})$ — *послідовні дроби дерева Фарея* n*-го порядку, то*

$$bc-ad=1.$$

Наслідок 1. $НСД(b,d)=1$.

Властивість 2$'$. *Медіанта двох сусідніх дробів знаходиться між ними*:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Наслідок 2$'$. На кожному кроці побудови всі дроби знаходяться у порядку зростання.

Наслідок 3$'$ Медіанта двох сусідніх дробів не є їх точною серединою, а лежить десь між ними.

Властивість 3$'$. *Якщо* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b} < \frac{c}{d})$ *— послідовні дроби дерева Фарея* n*-го порядку, то* $b + d \geq n$.

Властивість 4$'$. *Кожен дріб з відрізка* $[0,1]$ *зустрічається в дереві Фарея тільки один раз.*

Окрім перелічених, дерево Фарея має ряд самостійних властивостей [15-18]

2.3. Геометрична інтерпретація послідовностей Фарея (кола Форда)

Геометричні інтерпретації дозволяють конкретизувати абстрактні математичні ідеї та подивитись на об'єкти дослідження з іншого боку. Хорошим прикладом для геометричної інтерпретації дробів послідовностей Фарея є кола Форда.

Кола Форда являють собою особливий випадок взаємного розташування кіл. Системи таких кіл вивчалися ще Аполлонієм Пергським, в честь якого називається задача Аполлонія [15]. Суть задачі Аполлонія – *побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, що дотикається до трьох заданих кіл*.

У XVII столітті Рене Декарт довів теорему про зв'язок між величинами, оберненими радіусам взаємно дотичних кіл, і розв'язав попередню задачу [15].

Кола Форда також з'являлися в Сангаку (Sangaku або San Gaku) – збірка геометричних головоломок японських математиків у вигляді дерев'яних табличок. Одна з головоломок, представлена на табличці 1824 року в префектурі Гунма[1] (Gunma Prefecture), присвячена трьом взаємно дотичним колам, які мають спільну дотичну (рис. 6).

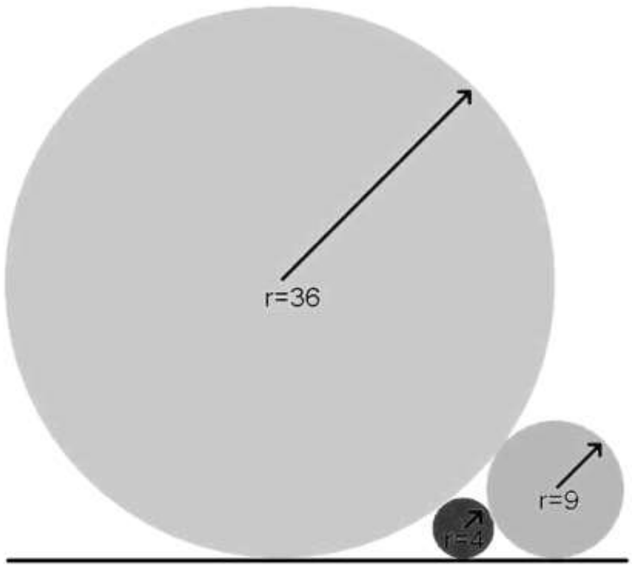


Рис. 6

Враховуючи розмір двох зовнішніх великих кіл, потрібно визначити розмір малого кола між ними. Розв'язання цієї головоломки приводить до кіл Форда [16].

Кола Форда названі так на честь Лестера Рендольф Форда-старшого (Lester Randolph Ford, Sr.) — американського математика, який народився в 1886 році. Він отримав докторський ступінь в галузі математики у Гарвардському університеті 1917 року. Термін «кола Форда» був введений ним 1938 року в статті під назвою «Fractions» [4] та детально описаний у статті [14].

З’ясуємо суть геометричного геометричної інтерпретації дробів за допомогою кіл Форда.

На прямій Ox координатної площини xOy побудуємо точку $x=\frac{a}{b}$, де a і b — цілі числа. Побудуємо коло, з центром у точці $\left(\frac{a}{b};\frac{1}{2b^2}\right)$ і радіусом $\frac{1}{2b^2}$, що проходить через точку $\left(x=\frac{a}{b};0\right)$ (дотикається осі Ox) (Рис. 7).

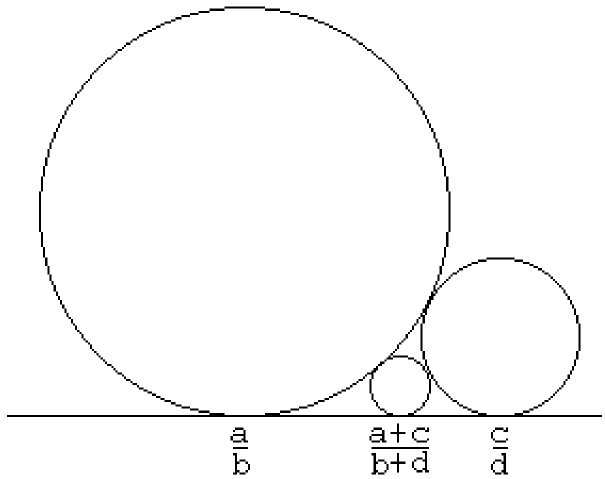


Рис. 7.

Розглянемо декілька прикладів таких кіл. В таблиці 2 подані вихідні умови, а на рис.8 зображені відповідні кола.

Таблиця 2.

	$x=\frac{a}{b}$	$y=\frac{1}{2b^2}$
Коло L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
Коло M	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{18}$
Коло N	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{32}$
Коло O	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{18}$

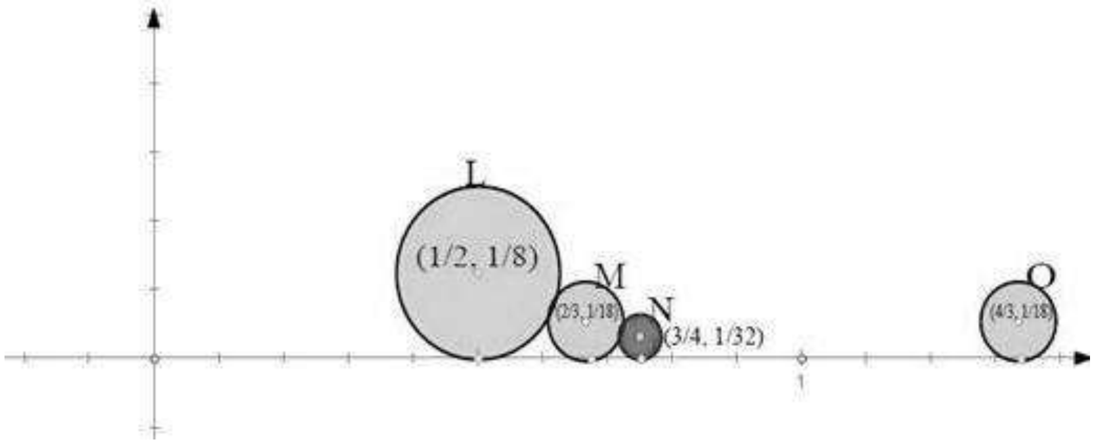


Рис. 8.

<u>Означення 2.5</u>. *Колом Форда, що відповідає дробу* $\frac{a}{b}$ називають коло з центром у точці $\left(\frac{a}{b}; \frac{1}{2b^2}\right)$ і радіусом $\frac{1}{2b^2}$, що проходить через точку $\left(x = \frac{a}{b}; 0\right)$, де $\frac{a}{b}$ — нескоротний правильний дріб.

Позначають, коло Форда, що відповідає дробу $\frac{a}{b}$ через $\gamma\left[\frac{a}{b}\right]$ або $\gamma[a,b]$.

Кожне коло Форда дотикається до прямої $y = 0$. Причому, два довільні кола Форда або дотикаються, або не дотикаються.

Побудова кіл описаним вище способом дозволяє помітити багато закономірностей. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.3. *Два довільні кола Форда або дотикаються, або не дотикаються.*

Доведення. Нехай дано два кола Форда $\gamma\left[\frac{a}{b}\right]$ *і* $\gamma\left[\frac{c}{d}\right]$ з центрами P і Q відповідно (Рис. 9).

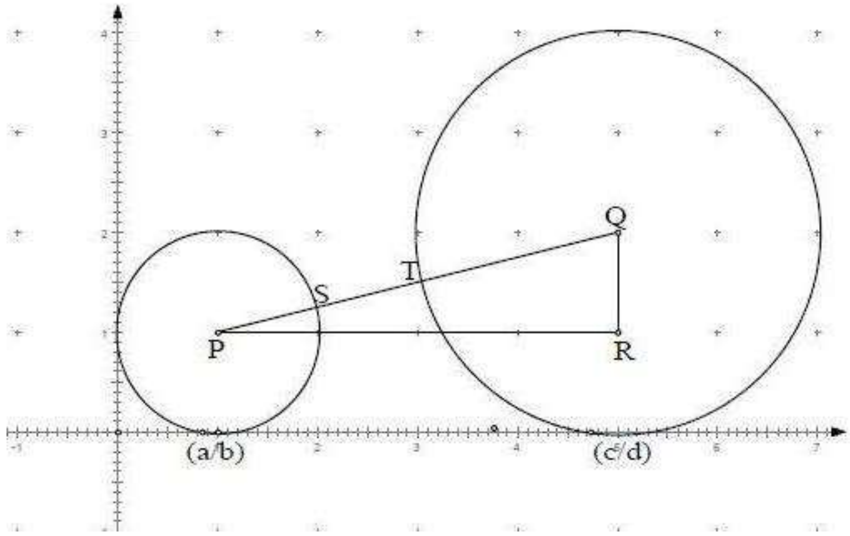


Рис. 9.

З'єднаємо радіуси заданих кіл відрізком PQ, позначимо через S і T — точки перетину відрізка PQ з колами $\gamma\left[\frac{a}{b}\right]$ i $\gamma\left[\frac{c}{d}\right]$ відповідно. Через точку Q проведемо перпендикуляр до осі Ox. Через точку P проведемо пряму, паралельно осі Ox до перетину з попередньо проведеним перпендикуляром — одержимо відрізок PR.

Розглянемо прямокутний трикутник QRP, $\angle \mathrm{R} = 90^{\circ}$. За теоремою Піфагора матимемо

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PR}^2 + QR^2,$$

$$\mathrm{PQ}^2 = \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2b^2}\right)^2,$$

$$\mathrm{PQ}^2 = \left(\frac{1}{2d^2} + \frac{1}{2b^2}\right)^2 - \frac{(cb-ad)^2 - 1}{d^2b^2},$$

$$\mathrm{PQ}^2 = (\mathrm{PS} + TQ)^2 - \frac{(cb-ad)^2 - 1}{d^2b^2}.$$

З останньої рівності можемо зробити наступні висновки. Якщо

- $|bc - ad| > 1$, то $\mathrm{PQ} > \mathrm{PS} + TQ$, тобто кола не дотикаються;
- $|bc - ad| = 1$, то $\mathrm{PQ} = \mathrm{PS} + TQ$, і два кола дотикаються;

- $|bc - ad| < 1$, то представлення відповідних кіл Форда неможливе (неможлива геометрична інтерпретація відповідних дробів).

Теорему доведено.

Зауваження. *За допомогою кіл Форда можливо геометрично інтерпретувати поняття «медіантне додавання дробів» та встановити взаємозв'язок з послідовностями Фарея.*

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.4 (про зв'язок кіл Форда з послідовностями Фарея). *Нехай* $\gamma_1\left[\frac{a}{b}\right]$ *і* $\gamma_2\left[\frac{c}{d}\right]$ *— кола Форда. Якщо* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b} < \frac{c}{d})$ *— послідовні дроби, отримані на деякому* n*-му кроці побудови послідовності Фарея, то* γ_1 *і* γ_2 *дотикаються.*

Доведення. Нехай дано два кола Форда $\gamma_1\left[\frac{a}{b}\right]$ і $\gamma_2\left[\frac{c}{d}\right]$ з центрами P і Q відповідно (Рис. 10).

З'єднаємо радіуси отриманих кіл — одержимо відрізок PQ. Через точку Q проведемо перпендикуляр до осі Ox. Через точку P проведемо пряму, паралельно осі Ox, до перетину з попередньо проведеним перпендикуляром — одержимо відрізок PR.

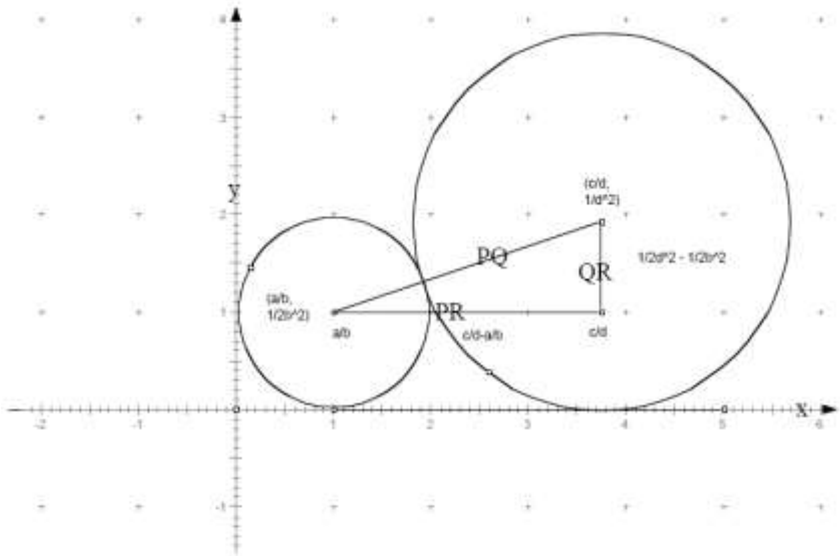


Рис. 10.

Розглянемо прямокутний трикутник QRP, $\angle R = 90^\circ$. За теоремою Піфагора матимемо

$$\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{2d^2}-\frac{1}{2b^2}\right)^2=\left(\frac{1}{2d^2}+\frac{1}{2b^2}\right)^2,$$

$$\frac{c^2}{d^2}-\frac{2ac}{bd}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{1}{4d^4}-\frac{2}{4b^2d^2}+\frac{1}{4b^4}=\frac{1}{4d^4}+\frac{2}{4b^2d^2}+\frac{1}{4b^4}.$$

Після елементарних математичних перетворень, отримаємо

$$\frac{c^2}{d^2}-\frac{2ac}{bd}+\frac{a^2}{b^2}+=\frac{4}{4b^2d^2}.$$

Отриманий вираз зведемо до спільного знаменника, матимемо

$$a^2d^2-2abcd+b^2c^2=1$$

та, використавши відповідну формулу скороченого множення, одержимо

$$(ad-bc)^2=1.$$

Отже, $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ $(\frac{a}{b}<\frac{c}{d})$ — послідовні дроби, отримані на деякому n-му кроці побудови послідовності Фарея.

Теорему доведено.

2.4. Геометрична інтерпретація дробів послідовностей Фарея за допомогою решіток і паралелограмів.

Нехай маємо прямокутну декартову систему координат. Кожному дробу $\frac{a}{b}$ з n-ої послідовності Фарея поставимо у відповідність точку (b,a) (Рис. 11). В результаті таких побудов отримаємо решітку.

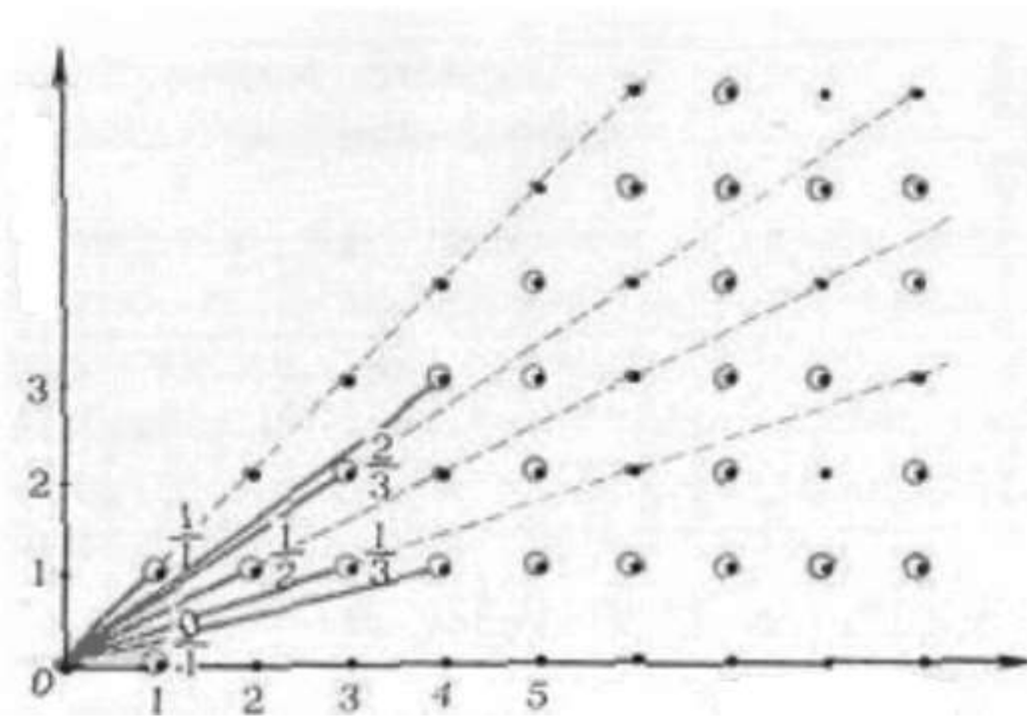


Рис. 11.

О з н а ч е н н я 2.6. *Решіткою* (*цілочисельною решіткою*) називається сукупність цілочисельних точок на координатній площині.

О з н а ч е н н я 2.7. Точка координатної площини називається *цілочисельною*, якщо обидві її координати є цілими числами.

Замість поняття «точка» ми інколи будемо говорити дріб.

Сформулюємо декілька властивостей дробів на «геометричній мові».

1. *Дроби* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ *рівні лише в тому випадку, коли точки* $A(b;a)$, $B(d;c)$

(Кожному дробу $\frac{a}{b}$ з n-ої послідовності Фарея поставимо у відповідність точку (b,a) тобто $A(b;a)$, $B(d;c)$) *лежать на одному промені з початком в точці* O (*початок координат*). *Найближчий* (*лівіший*) *дріб до точки* O *є нескоротним дробом.*

Припустимо, що $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

2. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, *коли промінь* OA *утворює більший кут з віссю* Ox, *ніж промінь* OB.

3. *Медіанті двох дробів* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ *відповідає четверта вершина паралелограма, побудованого на цих точках —* $C(b+d;a+b)$ (Рис. 12).

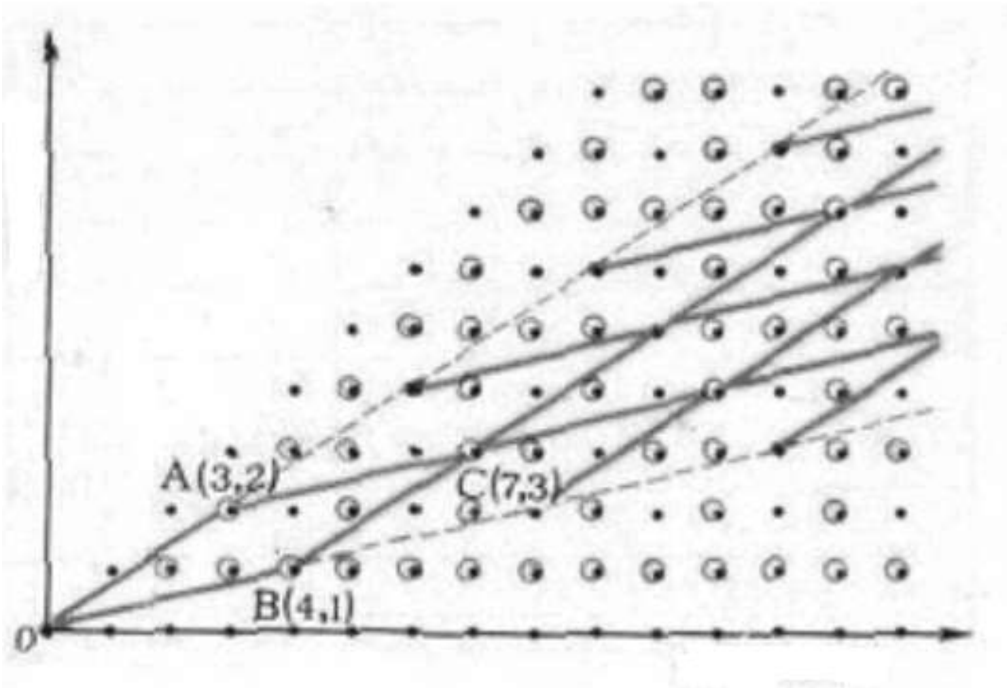


Рис. 12.

Зауваження. *Записавши у векторній формі рівність трикутника* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ *бачимо, що співзвучність термінів «медіанта» і «медіана» не випадкова. Відрізок* OC *є медіаною трикутника* OAB.

4. *Має місце рівність*: $|bc - ad| = 2S_{\triangleleft AOB} = S_{OACB}$, де $A(b;a)$, $B(d;c)$, $C(b+d;a+b)$.

5. *Якщо* $|bc - ad| = 1$, *то всередині та на сторонах паралелограма* $OACB$ *немає точок, окрім вершин*.

Розглянемо рисунки 12 та 13. На рисунках кут $\angle OAB$ розбитий прямими на паралелограми, які конгруентні паралелограму $OACB$.

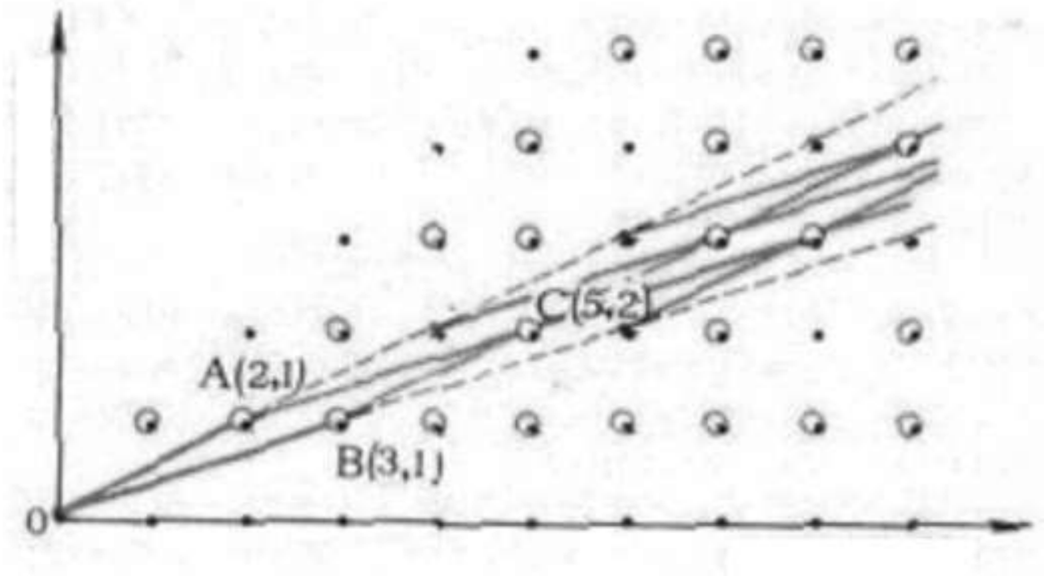


Рис. 13.

Але на рис. 12, де площа паралелограма $OACB$ більше, ніж на рис. 13, багато дробів в середині $\angle OAB$ не є вершинами цих паралелограмів. А на рис. 13 будь-який дріб в середині $\angle OAB$ є вершиною такого паралелограма, що для будь-якої точки $A=(b,a)$ знайдуться $x, y \in N$ для яких має місце рівність

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OM} + y \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Остання векторна рівність еквівалентна системі рівностей

$$\begin{cases} px + ry = m, \\ qx + sy = n. \end{cases}$$

Розглянемо опуклий многокутник, який має ненульову площу.

<u>*Означення 2.8*</u>. *Опуклим* називається многокутник, що задовольняють одну з умов:

– многокутник знаходиться по одну сторону від прямої, що містить довільну його сторону;
– всі внутрішні кути многокутника менші 180°;
– будь-яка пряма, що не містить вершин і сторін многокутника перетинає границю многокутника у двох точках.

Для обчислення площі такого многокутника можна скористатися наступним твердженням.

Теорема 2.5 (Піка). *Нехай* L *— число цілочисельних точок всередині многокутника,* B *— кількість цілочисельних точок на його межі* (*границі*), S *— його площа. Тоді справедлива формула Піка*

$$S = L + \frac{B}{2} - 1.$$

Нариклад, для многокутника в якого $L = 23$, $B = 7$ (рис. 14), площа буде рівна $S = 23 + \frac{7}{2} - 1 = 25{,}5$ квадратних одиниць.

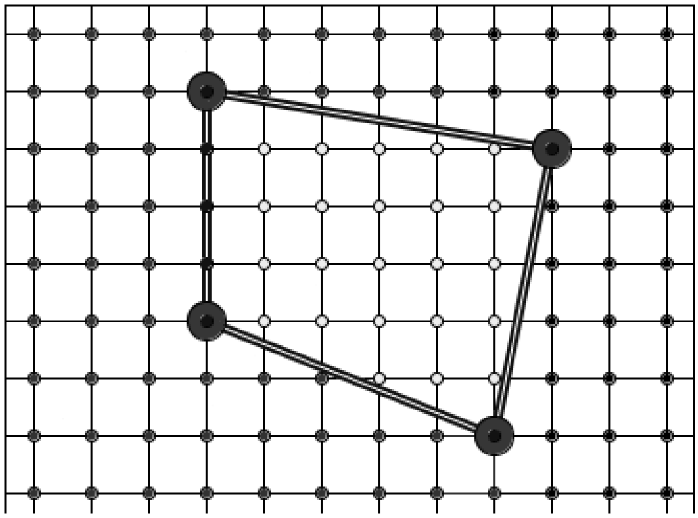


Рис. 14.

Можна помітити деякі закономірності між дробами послідовності Фарея та формулою Піка. Має місце наступне твердження.

Теорема 2.6 (про зв'язок дробів послідовності Фарея з формулою Піка). *Якщо* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$) *— послідовні дроби дерева Фарея* n*-го порядку, то* $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}$, де $A(a,b)$, $B(c,d)$, $O(0,0)$.

Доведення. Кожному дробу $\frac{a}{b}$ з послідовності Фарея поставимо у відповідність точку (a,b). Якщо $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ — сусідні члени послідовності

Фарея, то трикутник з вершинами $(0,0)$, (a,b) і (c,d) не містить цілочисельних точок, відмінних від вершин. Дійсно, якщо цілочислена точка (p,q) належала цьому трикутнику, то числа p і q не перевищували б n і дріб $\frac{p}{q}$ лежав між $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$. Згідно теореми (площа трикутника з вершинами в точках $(0,0)$, (x_1, y_1) і (x_2, y_2) рівна $\frac{1}{2}|x_1y_1 - x_2y_2|$) його площа рівна $\frac{1}{2}|ad - bc|$, а вираз під модулем дорівнює нулю.

Теорему доведено.

Задача. *За допомогою теореми Піка довести властивість 1'* (*Фарея-Коші*) [8].

Розв'язання. Якщо $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ — сусідні члени послідовності Фарея, то трикутник з вершинами $(0,0)$, (a,b) і (c,d) не містить цілочисельних точок, відмінних від вершин.

З одного боку, за формулою Піка, $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}$

З іншого боку $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}|ad - bc|$.

Прирівнявши праві частини, отримали доведення властивості 1' (Фарея-Коші).

Ми навели приклад побудови невеликої, але гарної теорії рядів Фарея. Цю теорію можна будувати на самому початку вивчення цілих чисел, не спираючись на основну теорему арифметики (про можливість розкладу натурального числа на прості множники). Сама ця теорія може бути виведена із властивостей дерева Фарея.

Ряди Фарея, а також зображення дробів на решітці корисні для обґрунтування такого питання як наближення дійсних чисел дробами з невеликими знаменниками.

РОЗДІЛ 3. ПОСЛІДОВНОСТІ ШТЕРА-БРОКО ТА ФАРЕЯ В МАТЕМАТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

3.1. Основні поняття теорії континуант

<u>*Означення 3.1*</u>. *Континуантою індексу* n називається многочлен n-ого порядку $K_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, який визначається початковими умовами

$$K_{-1} = 0,$$

$$K_0 = 1,$$

та рекурентним співвідношенням:

$$K_n(x_1, x_2, ..., x_n) = K_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})x_n + K_{n-2}(x_1, x_2, ..., x_{n-2}).$$

Запишемо декілька наступних континуант, які слідують після K_0:

$$K_1(x_1) = x_1,$$

$$K_2(x_1, x_2) = x_1x_2 + 1,$$

$$K_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1 + x_3,$$

$$K_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 + 1.$$

Континуанти є основою для вивчення континуальних (неперервних) дробів — виразів виду

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_n} + \ldots}}}}.$$

Також континуанта може бути визначена наступним чином.

<u>*Означення 3.2*</u>. *Континуантою* n*-ого порядку* називається визначник тридіагональної матриці

$$K_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det\begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Означення 3.3. *Тридіагональною матрицею* або *матрицею Якобі* називають матрицю наступного виду:

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & C_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & C_3 & B_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-1} & C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n & C_n \end{pmatrix}$$

Теорема 3.1. *Континуанта* $K_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *дорівнює сумі всеможливих добутків елементів* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *один з яких містить всі ці елементи, а інші отримуються з нього викиданням однієї або кількох пар співмножників із сусідніми номерами* (*якщо викинули всі співмножники, то вважається, що залишилась 1*).

Теорема 3.2. *Число доданків у континуанті* K_n *дорівнює сумі доданків у континуантах* K_{n-1} *і* K_{n-2}. *Тобто континуанта* K_n *містить* u_{n+1} *доданок, де* u_{n+1} — $(n+1)$ *число Фібоначчі*.

Наслідок. Має місце рівність

$$K_n(1,1,\dots,1) = u_{n+1}. \tag{3.1}$$

У наступних міркуваннях, викладених в дипломній роботі, замість K_n будемо писати K, оскільки число змінних зрозуміло за виразом. Наприклад, $K(x_1, x_2) = K_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 + 1$. Зрозуміло, що у таких формулах, як наприклад (3.1) нижній індекс необхідний.

Континуанти тісно пов’язані з неперервними дробами, від яких і отримали свою назву. Розглянемо наступну теорему.

Теорема 3.3 (про зв'язок континуант з ланцюговими дробами).

Ланцюговий дріб пов'язаний з континуантою n*-ого порядку наступною рівністю*

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_n}}}}}=\frac{K_n(a_1,\ldots,a_n)}{K_{n-1}(a_2,\ldots,a_n)}. \qquad (3.2)$$

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції по *n*.

Для $n=2$ матимемо:

$a_1=\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2}=\frac{K_2(a_1,a_2)}{K_1(a_2)}$ – твердження виконується.

Припустимо, що твердження теореми виконується для $k-1$-ого, тобто:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_{k-1}}}}}}=\frac{K_{k-1}(a_1,\ldots,a_{k-1})}{K_{k-2}(a_2,\ldots,a_{k-1})}.$$

Покажемо справедливість даного твердження для (k)-го кроку побудови.

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{a_{k-1}+\cfrac{1}{a_k}}}}}}=\frac{K_k(a_1,\ldots,a_{n-1}+\frac{1}{a_k})}{K_{k-1}(a_2,\ldots,a_{k-1}+\frac{1}{a_k})}=$$

$$=\frac{(a_{k-1}+\frac{1}{a_k})K(a_1,\ldots,a_{k-2})+K(a_1,\ldots,a_{k-3})}{(a_{k-1}+\frac{1}{a_k})K(a_2,\ldots,a_{k-3})}=$$

$$=\frac{K(a_1,\dots,a_{k-1})+\dfrac{1}{a_k}K(a_1,\dots,a_{k-2})}{K(a_2,\dots,a_{k-1})+\dfrac{1}{a_k}K(a_2,\dots,a_{k-2})}=\frac{K(a_1,\dots,a_k)}{K(a_2,\dots,a_k)}.$$

Отже, згідно з принципом математичної індукції, ланцюговий дріб пов'язаний з континуантою n-ого порядку рівністю (9).

Теорему доведено.

3.2. Представлення елементів дерева Штерна-Броко за допомогою ланцюгових дробів

Введемо позначення: $f(S)$ – це функція, яка визначає положення всіх дробів дерева Штерна-Броко (де S – набір символів R і L якими ми позначаємо шлях до деякого дробу). Кожна вершина дерева може бути представлена у вигляді послідовності за допомогою символів L і R, де L — означає один перехід від центрального дробу $\frac{1}{1}$ вліво, R— вправо. Наприклад, у такому вигляді

$$R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\dots R^{a_{n-2}}L^{a_{n-1}} \tag{3.3}$$

де $a_0 \geq 0,\ a_{n-1} \geq 0,\ a_i \geq 1,\ i=\overline{1,n-2},\ n$ - парне.

Також, дерево Штерна-Броко може бути представлене за допомогою квадратних матриць.

Запишемо дроби $\frac{1}{0}$ і $\frac{0}{1}$ у вигляді квадратної матриці, помінявши рядки місцями:

$$M(E)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Те, що ми поміняли місцями рядки в матриці нічого не змінило (якщо у визначнику поміняти місцями два довільні рядки, то значення матриці не зміниться). Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.4. *Дві матриці*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} —$$

є відповідно лівим і правим кроком побудови дерева Штерна-Броко.

Доведення. Два послідовні дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ можна представити у вигляді

$$\left\{ \ldots; \frac{a}{b}; \frac{a+b}{b+d}; \frac{c}{d}; \ldots \right\} \tag{3.4}$$

Відомо, що дві матриці перемножуються за формулою:

$$\begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & v \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by+dx & bv+dz \\ ay+cx & av+cz \end{pmatrix}$$

Використовуючи цю формулу запишемо ліву частину рівності (3.4) так:

$$\begin{pmatrix} b & b+d \\ a & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Взявши матрицю, яка відповідає двом послідовним дробам $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ та помноживши її на деяку матрицю, в результаті отримуємо матрицю, дробами якої є $\frac{a}{b}$ та $\frac{a+c}{b+d}$, причому останній є медіантою $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$.

Таким чином, матриця $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є лівим кроком побудови.

Аналогічно, для правої частини рівності (11):

$$\begin{pmatrix} b+d & d \\ a+c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким чином, матриця $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ є правим кроком побудови.

Теорему доведено.

Теорема 3.5. *Використовуючи квадратні матриці та символи L і R Матричним еквівалентом виразу (10) є*

$$\begin{pmatrix} K_{n-2}(a_1,\ldots,a_{n-2}) & K_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}) \\ K_{n-1}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2}) & K_n(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Доведення. Наприклад,

$$R^{a}L^{b}R^{c}L^{d}=\begin{pmatrix} bc+1 & bcd+b+d \\ abc+a+c & abcd+ab+ad+cd+1 \end{pmatrix}$$

Скористаємося формулою

$$f(S)=f\begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix}=\frac{m+m'}{n+n'}$$

запишемо вираз в замкнутій формі для дробу з дерева Штерна-Броко, R і L представленням якого є вираз (10):

$$f(R^{a_0},\ldots,L^{a_{n-1}})=\frac{K_{n+1}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},1)}{K_n(a_1,\ldots,a_{n-1},1)} \qquad (3.5)$$

Це теорема Халфена. Наприклад, щоб знайти дріб для $LRRL$ припускаємо, що $a_0=0$, $a_1=1$, $a_3=1$, $n=4$. Тоді за формулою (3.4) і скориставшись

формулою $K_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+1)=K_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,1)$, отримаємо:

$$\frac{K(0,1,2,1,1)}{K(1,2,1,1)}=\frac{K(2,1,1)}{K(1,2,1,1)}=\frac{K(2,2)}{K(3,2)}=\frac{5}{7}$$

Порівняння

$f(R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\ldots R^{a_{n-2}}L^{a_{n-1}})=\dfrac{K_{n+1}(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},1)}{K_n(a_1,\ldots,a_{n-1},1)}$ і

$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}}=\dfrac{K(a_0,a_1,a_2,a_3)}{K(a_1,a_2,a_3)}$ показує, що відповідний дріб дерева Штерна-Броко може бути представлений у вигляді неперервного дробу:

$$f(R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\ldots R^{a_{n-2}}L^{a_{n-1}})=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{1}}}}}$$

Теорему доведено.

Таким чином, можна переходити від неперервних дробів до відповідних вершин дерева Штерна-Броко. Наприклад,

$$f(LRRL) = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$$

Ірраціональні числа визначають нескінченні шляхи в дереві Штерна-Броко і вони можуть бути представлені у вигляді нескінченного рядка наборів символів L і R. Якщо таким нескінченним набором для числа α є $R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \ldots$, то числу α відповідає неперервний дріб

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots}}}}}$$

Подібний нескінченний неперервний дріб може бути отриманий наступним чином. Нехай $\alpha_0 = \alpha$, при $k \geq 0$ отримаємо

$$a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \; \alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}$$

Числа a_k називаються «неповними частками» числа α. Якщо α - раціональне число, наприклад $\frac{m}{n}$, то цей процес перебирає частки за допомогою алгоритму Евкліда і зупиняється. (при $\alpha_{k+1} = \infty$)

Раціональна чи ірраціональна ейлерова константа γ? Відповіді на це питання немає. Деяку інформацію про цю знамениту нерозв'язну проблему можна отримати пошукавши число γ в дереві Штерна-Броко: якщо воно раціональне — ми знайдемо його, а якщо ірраціональне — то ми знайдемо всі найкращі ірраціональні наближення до нього. Неперервний дріб для числа γ починається з наступних неповних часток.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8

a_k	0	1	1	2	1	2	1	4	3

Тому й представлення дробів дерева Штерна-Броко починається символів $LRLLRLLRLL\,LLRRRL\ldots$ — ніякої очевидної закономірності. Обчислення Річарда Брента показують [39], якщо γ — раціональне число, то його знаменник має більше 10000 десятинних знаків. Тому ніхто й не вірить, що γ — раціональне, тим не менш досі ніхто не міг довести, що воно таким не є.

3.3. Хеш-функція на основі двійкового дерева

Як відомо, у комп'ютері вся інформація відображається у двійкових кодах. Оскільки на сьогоднішній день збільшується інформаційний потік у системах зв'язку і у комп'ютерних мережах, задача стиснення на рівні двійкових кодів є актуальною.

Для стиснення розроблені та використовуються різні методи — від застосування методів Шеннога, Фано, Хаффмана до арифметичного кодування та інших. Однак важливу роль у методах перетворення кодів відіграє специфіка стискування інформації. Цей пункт присвячений питання стиснення інформації без втрат з використанням хеш-функції та дробів дерева Штерна-Броко.

Означення 3.4. Хеш-функцією (*hash function*) $h(M)$ в криптографії називається деяка функція, яка відображає аргумент довільної скінченної довжини в образ фіксованої довжини.

Такі перетворення також називаються хешуванням або функціями згортки, M — вихідним повідомленням або прообразом, а $h(M)$ — результатом, хешем, хеш-кодом або дайджестом (зведенням) повідомлення (від англ. *message digest — дайджест повідомлення*).

Одне з основних застосувань хеш-функції полягає в утворенні стисненого образу даного повідомлення, який використовується для його цифрового запису.

Хешування застосовується для побудови асоціативних масивів, пошуку дублікатів в серіях наборів даних і побудови досить унікальних ідентифікаторів для наборів даних, контрольне підсумовування з метою виявлення випадкових або навмисних помилок при зберіганні або передачі, для зберігання паролів в системах захисту, при виробленні електронного підпису.

Якщо у двох рядків хеш-коди різні, рядки гарантовано розрізняються, якщо однакові — рядки, ймовірно, збігаються. У загальному випадку однозначної відповідності між вихідними даними і хеш-кодом немає через те, що кількість значень хеш-функції завжди менша, ніж кількість варіантів вхідних даних. Отже, існує багато вхідних повідомлень, які приводять до однакових хеш-кодів. Такі ситуації називаються *колізіями*. Ймовірність виникнення колізій відіграє важливу роль в оцінці якості хеш-функцій.

У криптографії хеш-функція вважається хорошою, якщо важко утворити два прообрази з однаковим значенням хеш-функції, при цьому, у «виходу» функції немає явної залежності від «входу».

Означення 3.5. *Колізією хеш-функції* $h(M)$ називається пара аргументів (два різних вхідних блоки даних) X і Y, яким відповідає одне й теж значення хеш-функції: $h(X) = h(Y)$.

Якщо кількість пар таких аргументів дорівнює *r*, то говорять про *колізію кратності* r.

Колізії існують для більшості хеш-функцій, але частота їх виникнення близька до теоретичного мінімуму.

Означення 3.6. Хеш-функція $h(M)$ називається *криптографічно стійкою*, якщо вона задовольняє трьом наступним вимогам:

1. *Незворотність*: для заданого значення хеш-функції m має бути

важко (практично неможливо) знайти блок даних X, для якого $h(X) = m$;

2. *Стійкість до колізій першого роду*: для заданого повідомлення X має бути практично неможливо підібрати друге повідомлення Y, таке, що $h(X) = h(Y)$;
3. *Стійкість до колізій другого роду*: має бути практично неможливо підібрати пару повідомлень Y та Y', які мають однаковий хеш.

На описаних вище вимогах, ґрунтується більшість застосувань хеш-функцій в криптографії.

У окремих випадках, коли маємо безліч різних вхідних даних, можна задати ін'єктивну хеш-функцію, яка за визначенням не повинна мати колізії (бути вільною від колізій). Однак для хеш-функцій, що приймають вхід змінної довжини і повертають хеш постійної довжини, колізії зобов'язані існувати. Оскільки хоча б для одного значення хеш-функції існує відповідна йому множина вхідних даних (повний прообраз) — і будь-які два набори даних з цієї множини утворюють колізію.

Існує безліч алгоритмів хешування з різними властивостями (розрядність, обчислювальна складність, криптостійкість і т. п.). Вибір тієї або іншої хеш-функції визначається специфікою розв'язуваної задачі.

Цікаві можливості побудови хеш-функції для числових даних надає двійкове дерево Штерна-Броко. В даному випадку хеш-функція повинна бути стійкою як в сенсі її зворотності, так і в сенсі виникнення колізій при її обчисленні.

Розглянемо двійкове дерево Штерна-Броко, отримане за допомогою першого способу побудови. Як вже зазначалося вище (див. 2.1), основна властивість дерева полягає в тому, що в ньому представлені всі раціональні числа, причому кожне — тільки один раз.

Пронумеруємо вершини дерева, починаючи від кореня — дробу $\frac{1}{1}$, позначаючи нулями переміщення по лівих гілках дерева, а одиницями — по правих.

Наприклад, дріб $\frac{2}{3}$ буде мати двійковий номер 01, а дріб $\frac{3}{1}$ — двійковий номер 11, дріб $\frac{2}{5}$ — двійковий номер 001, дріб $\frac{5}{3}$ — двійковий номер 101 і т.д. (див. рис.15). Таким чином, ми отримали можливість ставити у відповідність двом числам (чисельнику і знаменнику дробу) одне число — номер дробу.

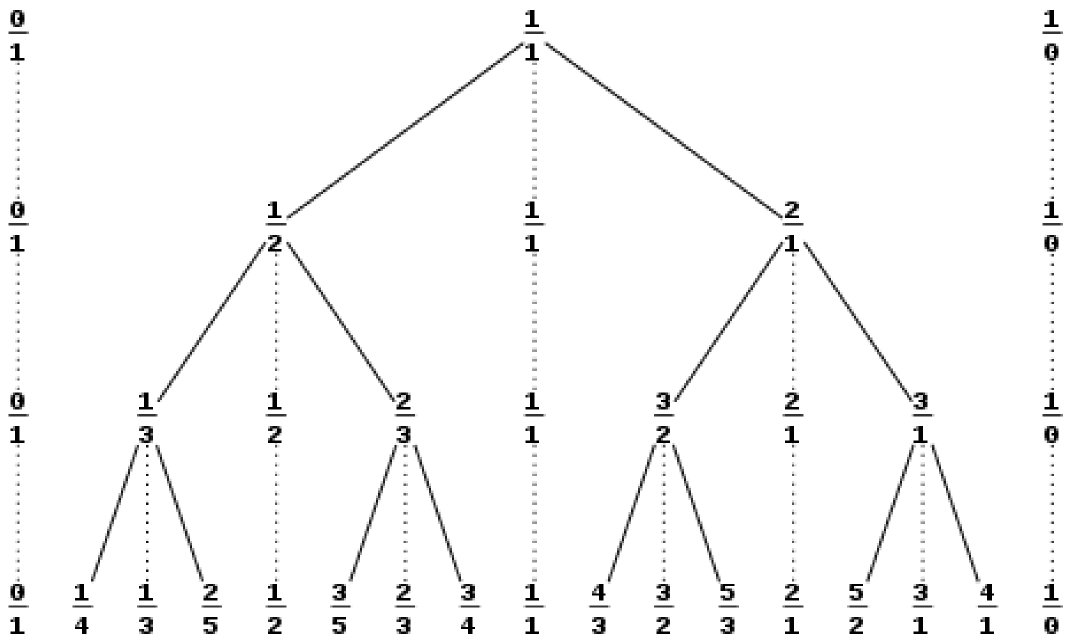


Рис.15

Одна з властивостей такої відповідності полягає в тому, що номери деяких дробів мають у своєму записі провідні нулі.

Нагадаємо, що *провідними нулями* в записі числа за допомогою позиційної системи числення, називається послідовність з одного або більше нулів, яка займає старші розряди.

У результаті цього чисельно рівні номери можуть відповідати різним дробам дерева Штерна-Броко. Наприклад, номери дробів $\frac{2}{3}$ і $\frac{2}{5}$ мають чисельно рівні представлення 01 і 001 відповідно, дроби $\frac{3}{1}$ і $\frac{3}{4}$ також мають чисельно рівні номери 11 і 011 відповідно. Завдяки цьому стає неможливим однозначне зворотне зіставлення і таким чином забезпечується вимога стійкості хеш-функції в сенсі її зворотності.

У наведених прикладах привертає увагу те, що номер дробу не має у своєму записі провідних нулів тоді, коли його чисельник більший за знаменник, тобто дріб — неправильний. Всі неправильні дроби містяться тільки в правому піддереві дерева Штерна-Броко.

У таблиці 1 наведено приклади неправильних дробів, для яких отримані їх двійкові номери, а потім переведені в десяткову систему числення.

Таблиця 3.

Дріб	Номер дробу	Десяткове представлення номеру
$\frac{3}{1}$	11	3
$\frac{5}{3}$	101	5
$\frac{7}{3}$	1100	12
$\frac{11}{7}$	10100	20
$\frac{14}{5}$	110111	55

Дана таблиця показує, як двом десятковим числам (чисельнику і знаменнику дробу) зіставляється одне десяткове число (номер дробу в десятковому представленні). При цьому сумарна кількість розрядів двійкових представлень чисельника і знаменника виявляється більшою кількості розрядів двійкового номера.

Наприклад, чисельник і знаменник дробу $\frac{11}{7}$ мають наступні двійкові представлення $11=1011_2$ і $7=111_2$, що становить в сумі 7 двійкових розрядів. А ось двійкове представлення номера цього дробу 10100 містить всього 5 двійкових розрядів.

На можливості зіставити двом десятковим числам одне, з меншою кількістю розрядів двійкового представлення і ґрунтується алгоритм хеш-функції на основі двійкового дерева Штерна-Броко.

Деякі повідомлення представляються у вигляді послідовності цілих десяткових чисел. Теоретично це завжди можливо, якщо використовувати, наприклад, таблицю кодів ASCII. Кожна пара сусідніх чисел розглядається як чисельник і знаменник деякого дробу і замінюється одним числом. У новоствореній послідовності чисел кожна пара сусідів знову розглядається як дріб і замінюється одним числом. Процес продовжується до тих пір, поки таким чином не буде отримано єдине число з потрібною кількістю розрядів.

Саме це число і розглядається як значення хеш-функції даного повідомлення.

Приклад застосування розглянутої хеш-функції наведено в таблиці 2, кожен рядок якої являє собою вихідне повідомлення, що поступово стискається і містить спочатку 16 чисел.

Таблиця 4.

<table>
<tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">11</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="4">18</td><td colspan="4">5</td><td colspan="4">19</td><td colspan="4">12</td></tr>
<tr><td colspan="8">58</td><td colspan="8">41</td></tr>
<tr><td colspan="16">307</td></tr>
</table>

Кожна пара сусідніх чисел деякого вихідного повідомлення (перший рядок таблиці) розглядається як дріб дерева Штерна-Броко, якому ставиться у відповідність його двійковий номер. Отриманий двійковий номер перетворюється в число десяткової системи числення. Процес продовжується до отримання одного числа, яке слід розглядати як значення хеш-функції даного повідомлення.

Наприклад, скориставшись другою з наведених програм, для дробу $\frac{7}{4}$ отримаємо двійковий номер 1011, що відповідає десятковому числу 11. Для наступного дробу $\frac{5}{4}$ двійковий номер дорівнює 1000, що відповідає десятковому числу 8. У свою чергу, для дробу $\frac{11}{8}$ відповідає номер 10010, що дорівнює 18, і т.д. В останньому рядку таблиці знаходиться значення хеш-функції, рівне десятковому числу 307.

Ефект стиснення, забезпечуваний розглянутою хеш-функцією, оцінюється наступним чином. Підрахувавши кількість конкретних двійкових розрядів, необхідних для подання кожного з чисел даного повідомлення, отримаємо мінімально можливе значення 38. Підрахунок по максимуму припускає використання однакової кількості розрядів для кожного числа повідомлення. Оскільки найбільше число повідомлення, рівне 8, вимагає для свого представлення чотирьох двійкових розрядів, то підрахунок по максимуму дає значення 64. Стисле повідомлення 307 в двійковій формі виглядає як 100110011 і, таким чином, займає всього лише 9 двійкових розрядів.

3.4. Наближення дійсних чисел дробами Фарея

Теорема 3.6. *Якщо інтервал* $(\frac{a}{b};\frac{c}{d})$ *утворений двома раціональними дробами, такими що* $bc-ad=1$, *то*

1) *Довільний раціональний дріб, який лежить в цьому інтервалі, має знаменник більший ніж* b *і* d*;*

2) *Для довільного дійсного числа* α*, яке належить цьому інтервалу, принаймні один з дробів* $\frac{a}{b}$ *або* $\frac{c}{d}$ *, а саме найближчий до* α *є найкращим наближенням.*

Доведення.

1) Нехай дріб $\frac{x}{y}$ такий що $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ і $bc - ad = 1$. Оскільки a, b, x, y — цілі і $b > 0$, $y > 0$ із $bx - ay > 0$ отримуємо $bx - ay \geq 1$, а отже

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{bx - ay}{by} \geq \frac{1}{by}. \tag{3.6}$$

З іншої сторони, оскільки $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} = \frac{1}{bd}. \tag{3.7}$$

Порівнявши (3.6) і (3.7) отримаємо $\frac{1}{by} < \frac{1}{bd}$ так як $y > d$.

Аналогічно, розглядаючи $cy - dx$ і різницю $\frac{c}{d} - \frac{x}{y}$ доводимо що $y > b$.

2) Нехай $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$ і $bc - ad = 1$. Якщо $\frac{a}{b}$ ближче до α, чим $\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}$ — найкраще наближення до α.

Теорему доведено.

Будь-який раціональний дріб $\frac{x}{y}$, який лежить ближче до α, ніж $\frac{a}{b}$, повинен належати інтервалу $(\frac{a}{b}; \frac{c}{d})$ і відповідно до першої частини теореми для неї буде $y > b$. Таким чином, будь-який дріб ближчий до α, чим $\frac{a}{b}$, має знаменник більший чим b, оскільки $\frac{a}{b}$ — найкраще наближення до α.

Якщо $\frac{c}{d}$ ближче до α, ніж $\frac{a}{b}$, то аналогічно отримуємо, що $\frac{c}{d}$ — найкраще наближення до α. Якщо $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ лежать на однаковій відстані від α, то ці два дроби теж найкращим наближенням.

Послідовності Фарея дозволяють знаходити раціональні наближення до дійсних чисел, з точністю до числа, обернено пропорційному до квадрату знаменника.

Теорема 3.7. *З двох сусідніх дробів послідовності Фарея між якими лежить число α, де $0<\alpha<1$, принаймні один дріб $\frac{k}{l}$ відрізняється на абсолютну величину від α на число менше, ніж на $\frac{1}{l^2}$.*

Доведення. Нехай $\frac{a}{b}<\alpha<\frac{c}{d}$, де $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$— послідовні дроби, отримані на деякому n-му кроці побудови послідовності Фарея F_n.

Якщо $\frac{a}{b}\le\alpha<\frac{a+c}{b+d}$, то враховуючи $bc-ad=1.$, отримуємо:

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\le\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}<\frac{1}{b^2}.$$

Аналогічно, якщо $\frac{a+c}{b+d}\le\alpha<\frac{c}{d}$, то отримуємо:

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|<\frac{1}{d^2}.$$

Теорему доведено.

Зауважекння. Якщо $\alpha\notin(0{,}1)$, то можемо застосувати нашу теорему до $\{\alpha\}$, і в знайдій нерівності $\left|\{\alpha\}-\frac{k}{l}\right|<\frac{1}{l^2}$ додати до зменшуваного і відємника в лівій чатині ціле число $[\alpha]=\alpha-\{\alpha\}$.

За допомогою послідовностей Фарея можна доводити теореми про раціональні наближення дійсних чисел. Наведемо приклад.

Теорема 3.8 (Діріхле). *Для довільного дійсного числа* α *і довільного* τ *можна найти раціональний дріб* $\frac{a}{b}$ *такий що*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b\tau}, b \le \tau .$$

Очевидно, досить розглянути випадок, коли $0 \le \alpha < 1$, так як при інших α можна брати $\{\alpha\}$, а потім в кінцевій нерівності поступати аналогічно до попереднього випадку.

Доведення. Нехай $\tau \ge 1$ціле, α, де $0 < \alpha < 1$, лежить між двома сусідніми дробами $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ в послідовності F_τ так, щоб $\frac{a}{b} \le \alpha \le \frac{a+c}{b+d}$. Оскільки $bc - ad = 1$ і $b + d > \tau$ отримуємо

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}\right| = \frac{bc - ad}{b(b+d)} < \frac{1}{b\tau}, \text{ де } b < \tau .$$

Випадок $\frac{a+c}{b+d} \le \alpha \le \frac{c}{d}$розглядається аналогічно.

Теорему доведено.

Дроби Фарея можна розглядати для знаходження найкращих наближень.

Теорема 3.9. *Якщо число* α *лежить між двома сусідніх дробами послідовності Фарея, то хоча б одне з них являє собою найкраще наближення числа* α .

Доведення. $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$— послідовні дроби, отримані на деякому n-му кроці побудови послідовності Фарея F_n. Оскільки $bc - ad = 1$; і відповідно теореми 14 хоча б одна з дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ є найкраще наближення числа α .

Теорему доведено.

Теорема 3.10. *Якщо число* α *лежить між двома сусідніх дробами* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ *послідовності Фарея* F_n, *то серед нескоротних дробів із* *знаменником найкращим наближенням до числа α є дріб $\frac{a+c}{b+d}$. Даний дріб є найкращим наближенням тоді і тільки тоді, коли $b+d=n+1$і відстань від цього дробу до числа α не більше відстані від $\frac{a}{b}$ до $\frac{c}{d}$.*

Доведення.

В послідовності Фарея F_{n+1}. може тільки один дріб зі знаменником $n+1$належати інтервалу $(\frac{a}{b};\frac{c}{d})$, а саме дріб $\frac{a+c}{b+d}$ при $b+d=n+1$.

Достатність. При $b+d=n+1$, крім $\frac{a+c}{b+d}$, в інтервалі $(\frac{a}{b};\frac{c}{d})$ немає інших дробів зі знаменниками менше рівно $n+1$, а якщо відстань від α до дробу $\frac{a+c}{b+d}$не більше, ніж від $\frac{a}{b}$ до $\frac{c}{d}$, тоді воно не більше, ніж відстань доα від всіх дробів, які розташовані поза цим інтервалом.

Необхідність. Якщо $\frac{a+c}{b+d}$, де $b+d=n+1$— найкраще наближення до α , то $\frac{a+c}{b+d}$повинно бути не більше від α , чим дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$.

Теорему доведено.

Якщо на інтервалі $(\frac{0}{1};\frac{1}{1})$послідовно будувати медіанти, відбираючи інтервали, які містять в собі α $(0<\alpha<1)$, то згідно останньої теореми, можна знайти всі найкращі наближення. Мається на увазі, що при збільшенні номеру n, дроби в $n+1$ послідовності з'являються тільки в якості медіанти двох сусідніх дробів.

Якщо α не належить інтервалу $(0;1)$, то замість α розглядаємо $\alpha'=\{\alpha\}$.

Приклад. Знайти всі найкращі наближення до $\ln 10 = 2{,}30258..$ зі знаменником $n\le 30$. Візьмемо$\alpha'=\{\ln 10\}=0{,}30258...,$ $0<\alpha'<\frac{1}{2}$. Точки $\frac{0}{1}$ і $\frac{1}{2}$ і їх медіанта $\frac{1}{3}$і є найкращим наближенням в F_3; $0<\alpha'<\frac{1}{3}$.

Медіанта $\frac{1}{4}$ не є найкращим наближенням, так як вона знаходиться на більшій відстані від α', чим $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4} < \alpha' < \frac{1}{3}$.

Наступна медіанта — $\frac{2}{7}$ ближче до α', чим $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{4}$, так як є найкращим наближенням; $\frac{2}{7} < \alpha' < \frac{1}{3}$.

Медіанта $\frac{3}{10}$ ближче до α', чим $\frac{2}{7}$ і $\frac{1}{3}$, так як є найкращим наближенням; $\frac{3}{10} < \alpha' < \frac{1}{3}$.

Медіанта $\frac{4}{13}$ не є найкращим наближенням; $\frac{3}{10} < \alpha' < \frac{4}{13}$.

Медіанта $\frac{7}{23}$ ближче до α', чим $\frac{3}{10}$ і $\frac{4}{13}$, так як є найкращим наближенням.

Продовжуючи процес далі, знаходимо кращі наближення до α': $\frac{10}{33}, \frac{13}{43}, \frac{23}{76}$.

$\ln 10 = 2 + \alpha'$, тому найкращим до $\ln 10$ наближенням до зі знаменником $n \leq 30$, тобто наступні числа $2, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{16}{7}, \frac{23}{10}, \frac{53}{23}, \frac{76}{33}, \frac{99}{43}, \frac{175}{76}$.

ВИСНОВКИ

В роботі систематизовано основні теоретичні відомості про послідовності Штерна-Броко та Фарея, запропоновано доведення відомих властивостей та отримано ряд самостійних результатів. Для послідовності Штерна-Броко n-го порядку отримано аналітичну і рекурентну формули підрахунку кількості Q_n та суми C_n знаменників і чисельників дробів цієї послідовності. Встановлено, що сума чисельників дробів, одержаних на деякому кроці побудови дерева Штерна-Броко, дорівнює сумі їх знаменників. Доведено, що для кожного довільного дробу, окрім $\frac{1}{1}$, завжди знайдеться обернений до нього дріб на будь-якому кроці побудови дерева Штерна-Броко. Встановлено, що взаємно обернені дроби послідовостей Штерна-Броко симетричні відносно дробу $\frac{1}{1}$. Знайдено формулу зв’язку дробів дерева Штерна-Броко з членами класичної послідовністю Фібоначчі та золотим відношенням. Встановлено, що послідовності Фарея отримуються з дерева Штерна-Броко шляхом вилучення правого піддерева його кореня. Отримано формулу для обчислення довжини L_n послідовності Фарея n-го порядку. Доведено твердження, яке дозволяє для наперед заданого дробу послідовності Фарея n-го порядку вказати наступний за ним дріб. Продемонстровано геометричну інтерпретацію дробів послідовностей Фарея за допомогою кіл Форда та за допомогою решіток і паралелограмів. Наведено формулу, яка встановлює взаємозв’язок з дробами послідовності Фарея та теоремою Піка. Встановлено формулу зв’язку континуант з ланцюговими дробами. Зібрано і систематизовано застосування послідовностей Штера-Броко та Фарея в математичних дослідженнях. Показано представлення елементів дерева Штерна-Броко за допомогою ланцюгових дробів та одиничних матриць.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. 0 Perron Die Lehre von den Kettenbruechen / / Stuttgart (1957)
2. A Brocot Calcul des Rouages par Approximations,Nouvelles Methodes // Pans (1892)
3. A Denjo "Sur quelques points de la theone d»s fonctions "// CR Acad Sci Paris, 194 (1932) 44-46
4. А Я Хинчин Цепные дроби // М Физматлит (1960)
5. *Amen J., Green Sh., Schmidt A.* Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem // MAT Exam Expository Papers, 2006. — 7. — 27 p.
6. *Brent R. P.* Computation of the regular contined fraction for Euler's constant // Mathematics of Computation, 1977. — 31. — pp. 771–777.
7. *Brocot A.* Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode // Revue Chonométrique, 1861. — 3. — pp. 186–194.
8. *Conway J.H, Guy R.K.* The Book of Numbers. — New York: Springer-Verlag, 1996. — pp. 152–156.
9. Coxeter, H. S. M. The problem of Apollonius // The American Mathematical Monthly, 1968. — 75. — pp. 5–15.
10. E Landau, "Pnmzahlen"// Zwei Bd , Ilnd ed , with an Appendix by Dr Paul T Bateman, Chelsea, New York (1953)
11. Farey, J "On a Curious Property of Vulgar Fractions "// London, Edinburgh and Dublin Phil Mag 47, 385 (1816)
12. *Ford L.R.* Fractions // The American Mathematical Monthly, 1938. — 45 (9). — pp. 586–601.
13. *Kesseböhmer M., Stratmann B.O.,* Stern–Brocot pressure and multifractal spectra in ergodic theory of numbers // Stoch. Dyn., 2004. — 4(1). —pp. 77–84.
14. Lagarias J.C., Tresser C.P. A walk along the branches of the extended Farey tree. // IBM Journal of Research and Develoment, 1995. — Vol. 39. No.3. — pp. 283–294.

15.Minkowski H Gesammelte Abhandlungen vol 2 (1911)

16.*P*erron O. Die lehre von den Kettenbruechen. — Stuttgart, 1957.

17.*Stern M.* Über eine zahlentheoretische Funktion // Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1858. — 55. — pp. 193–220.

18.Stern, M A "Uber eine zahlentheoretische Funktion "// J reше angew Math 55, 193-220 (1858)

19.*Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. — М.: Мир, 2006. — С. 105–108.

20.Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX ст.– М.: Наука, 1986. – 188 с.

21.*Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998. — С. 140–176, 337, 414, 567.

22.Душистова А. А., Мощевитин Н. Г. О производной функции Минковского ?(*x*) //Фундамент. и прикл. мат.—2010.—Т. 16, вып. 6.—С. 33—44.

23.Душистова А.А. О разбиении отрезка [0,1], порожденном последовательностями Броко. // Математический сборник, 2007, № 5, Том 198, стр. 65-94.

24.Душистова А.А., Мощевитин Н.Г. О производной функции Минковского ?(*x*). // Рукопись депонирована в ВИНИТИ 02.11.07 № 1018-В2007, 14 с.

25.*Електронний ресурс*. Ford Circle. Режим доступу: [http://mathworld.wolfram.com/FordCircle.html].

26.*Електронний ресурс*. Дерево Штерна-Броко. Ряд Фарея. Режим доступу: [http://e-maxx.ru/algo/stern_brocot_farey].

27.Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст.: Пер. с нем. – М.-Л.: Гостехиздат, 1975. – 224 с

28.Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии / Под ред. В.А. Успенского. – М.: Наука, 1991. – 224 с.

29.Кон П. Универсальная алгебра. – М.: Мир, 1968. – 246 с.

30.*Кривель И.А., Моргун А.Н.* Хэш-функция на основе двоичного дерева // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Збірник наукових праць. — Том 3. — Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2006. — С. 364–367.

31.*Макоха А.Н., Сахнюк П.А., Червяков Н.И.* Дискретная математика: Учеб.пособие. —М.:ФИЗМАЛИТ, 2005. — С. 24–31.

32.*Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М: МЦНМО, 2007. — 608 с.

33.Прасолов В.В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. - 2005. – 560с.

34.*Романко В. К.* Разностные уравнения. — М.: БИНОМ, 2006. — 112 с.

35.*Ростовцев А.Г., Маховенко Е.Б.* Теоретическая криптография. — М.: Профессионал, 2005. — 490 с.

36. *Сизый С. В.* Лекции по теории чисел: Учебное пособие для математических специальностей. — Екатеринбург: Уральский государственный университет им. А. М. Горького. — 1999. — 136 с. — С.22–45.

37. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа [Текст]/ В. И. Соболев. – М.: Изд-во Наука, 1968. – 281с.

38. Устинов А.В., Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел для математических школ. Сборник задач для математических школ. - М.:МЦНМО,2002. – 264 с.

39. *Фомичев В.М.* Дискретная математика и криптология. Курс лекций. — М.: Диалог-МИФИ, 2003. — 400 с.
40. *Чандрасекхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — С. 14–17. из отношения равенства и идеальные числа Платона. ΣΧΟΛΗ, 2 (2008). — С. 55–74.
41. Ядренко М.Й. Дискретна математика: навчальний посібник. – К.: МП «ТВіТС», 2004.-245с.