МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДЕЯКІ РІЗНОМАНІТНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала студентка 2 курсу
Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійна програма «Середня освіта (Математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти
Потапова Альона Ігорівна

Керівник кандидат фізико-математичних наук, доцент Плоткін Я.Д.
Рецензент доктор педагогічних наук, професор Шерман М.І.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Розв'язання функціональних рівнянь, їх теорія, є одним із найстаріших і до сих пір одним із найменш розроблених питань аналізу. Це пояснюється тим, що питання про розв'язання функціональних рівнянь дуже складне, у виді їх різноманіття і загальності. Приклади функціональних рівнянь зустрічаються вже у працях таких математиків, як Д'Аламбер, Ейлер, Лагранж [8]. Більш загальне уявлення цієї теорії дав нам французький математик Г. Монж, який у 1773 році, зустрівшись із необхідністю розв'язання функціональних рівнянь в теорії кривих поверхонь, намагався звести розв'язання цих рівнянь до розв'язання рівнянь у скінченних різницях, теорія яких була на той час розроблена в деякій мірі. У тому ж році з'явилася робота П.С. Лапласа, який поширив метод Монжа [17] на доволі широкий клас рівнянь.

Особливий інтерес до функціональних рівнянь став проявляти з 1821 року, коли О. Коші знайшов «загальний» розв'язок функціонального рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

до якого Д'Аламбер привів у 1769 році обгрунтування закону додавання сил. З іменем Коші пов'язано введення і розв'язанння багатьох функціональних рівнянь.

Одне із рівнянь Коші було використано Лобачевським. Лобачевський визначив кут паралельності $f(x)=tg\frac{1}{2}\pi(x)=e^{-\frac{x}{k}}$, як розв'язок функціонального рівняння $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$.

Ряд найважливіших функціональних рівнянь був розв'язаний в 1826 – 1827 роках норвежцем Абелем, який привів їх розв'язання до розв'язання диференціальних рівнянь [11]. В більш пізній час до теорії функціональних рівнянь стали застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної.

Багато уваги приділили функціональним рівнянням Вейєрштрасс, Бебедж, Пінчерле, Лівенцов, Сінцов, Колмогоров і Ацель.

Не дивлячись на великий проміжок часу від початку вивчення функціональних рівнянь до нашого часу (приблизно 200 років), немає єдиної теорії функціональних рівнянь, є дуже мало загальних методів їх розв'язання, немає критерію існування і єдиності розв'язків. Крім того, багато окремих функціональних рівнянь залишаються і сьогодні нерозв'язаними.

Об'єктом дослідження виступає теорія функції, а **предметом** дослідження – клас функціональних рівнянь, які встановлюють зв'язок між значеннями функції в різних точках.

Мета дослідження – розглянути основні методі розв'язання функціональних рівнянь, які пов'язані як з методами математичного аналізу, так і з застосуванням алгебраїчного апарату.

Відповідно до мети дослідження визначені такі **завдання**:

1. Підбір та вивчення навчального матеріалу з різних джерел інформації, літератури з метою обґрунтування постановки задачі дослідження.

2. Розгляд основних положень, що стосуються розв'язання функціональних рівнянь на різних класах функцій.

3. Розгляд методів розв'язування функціональних рівнянь із застосуванням апарату математичного аналізу, а також із залученням групового підходу та теорії матриць та перетворень.

Основні **методи дослідження**, що використовувалися у роботі, – це метод граничного переходу, метод диференціювання та метод математичної індукції.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що було систематизовано та узагальнено основні відомості, які стосуються методів розв'язування функціональних рівнянь. **Практичне значення** роботи полягає у розкритті можливості застосовування теорії матриць та групового підходу до відшукання розв'язків функціональних рівнянь.

Робота складається з трьох розділів. Перший розділ даної роботи містить основні відомості, які стосуються розв'язання функціональних рівнянь на основних класах адитивних функцій. Положення цього розділу є допоміжними при розгляді основної задачі дослідження. В другому розділі розглянуто питання, що стосується деяких методів розв'язання функціональних рівнянь. Зокрема, в ньому наведено алгоритми та приклади застосування матриць та дробово-лінійних виразів, а також деяких положень з теорії груп до відшукання розв'язків функціональних рівнянь. Третій розділ присвячено деяких методам математичного аналізу розв'язання функціональних рівнянь. Так, в ньому розкрито питання застосування граничного переходу, диференціювання та так званого методу Коші для відшукання розв'язків функціональних рівнянь.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів, а також вчителями загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій.

РОЗДІЛ 1
ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КОШІ ТА ЙОГО РОЗВ'ЯЗОК НА РІЗНИХ КЛАСАХ ФУНКЦІЙ

1.1. Огляд стану проблеми дослідження

Поняття функції є важливим в сучасній математиці. Як відомо, числовою функцією f називається відображення підмножини D множини R над підмножиною E множини R.

Множна $D = D(f)$ називається *областю визначення*, а $E = E(f)$ – множиною значень функції f.

Число вихідних, основних функцій, що вивчаються у курсі математики, порівняно не велике. До них, наприклад, належать лінійна, степенева, показникова, деякі тригонометричні функції. Багато інших функцій отримуємо з основних за допомогою композиції [16].

Так, функція $f(x) = \sin(2x+1)$ є композицією лінійної $g(x) = 2x + 1$ і тригонометричної $h(x) = \sin x$ функцій, тобто

$$f(x) = h\big(g(x)\big) = h \circ g(x).$$

Функція $f(x) = lgarcsin\, x$ отримана в результаті композиції функцій $g(x) \arcsin x$ і $h(x) = \lg x$. Звернемо увагу на те, що в області визначення композиції $h \circ g$ входять ті значення x із $D(g)$, для яких $g(x) \in D(h)$. В останньому прикладі $D(g) = [-1; 1]$, $D(h) =]0; \infty[$. А якщо $\arcsin x > 0$ при $x \in]0; 1]$, то $D(f) =]0; 1]$.

Композицією дробово-лінійних функцій $g(x) = \frac{-2x+1}{3x+2}$ та $h(x) = \frac{3x-2}{-x+4}$ є функція

$$f(x) = (h\big(g(x)\big) = \frac{3\dfrac{-2x+1}{3x+2} - 2}{-\dfrac{-2x+1}{3x+2} + 4} = \frac{-12x+1}{3x+2}, \qquad x \neq -\frac{2}{3}.$$

Тут $D(f) = R\{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\}$.

Не складно переконатися в тому, що композиція $g \circ h$ в загальному випадку не дорівнює $h \circ g$. В той же час для будь-яких функцій f, g, h маємо $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, що безпосередньо виходить з визначення композиції.

В рівняннях, які зазвичай розв'язують і в школі, треба знайти числове значення деякої змінної. Разом з тим в збірниках олімпіадних та конкурсних задач часто зустрічаються «незвичайні» рівняння, де в якості невідомих виступають функції.

Наприклад,

$$2f(1-x) + 1 = xf(x), \qquad x \in R;$$

$$xf(x) + f\left(\frac{4}{2-x}\right) = x, \;\; x \in R\{0; 2\}.$$

В цих рівняннях шукані функції пов'язані з невідомими за допомогою операції композиції. Такі рівняння називаються *функціональними*. Втім, «незвичайність» цих рівнянь для учнів полягає скоріше за все в постановці задачі: знайти функцію, що задовольняє рівняння. Адже функціональними рівняннями $f(x) = -f(x), f(-x) = -f(x), f(x+a) = f(x)$ задають такі відомі властивості функцій, як парність, непарність, періодичність [6].

Багато функціональних рівнянь не визначають конкретну функцію, а задають широкий клас функцій. Так, рівнянню

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

задовольняють функції $y = \sin x\,, y = \cos x\,, y = tg\,x,\; y = \sin x + \cos x$ і багато інших, наприклад, $y = g(\sin x)\,, y = g(\cos x)$, де g – довільні функції.

В інших випадках клас функцій, що задовольняють функціональному рівнянню, цілком зрозумілий. Наприклад, функції виду $f(x) = \mathrm{a}\sin x + b\cos x$ при довільних $a \in R,\; b \in R$ і лише вони задовольняють функціональному рівнянню $f(x+y) + f(x-y) = f(x)\cos y$.

Зазвичай розрізняють частинний і загальний розв'язки функціонального рівняння. *Частинним розв'язком* функціонального рівняння є функція або система функцій, що задовольняють рівнянню в заданій області визначення. *Загальний розв'язок* складає сукупність усіх функцій, що задовольняють рівнянню.

Звичайно, розв'язання функціонального рівняння залежить від того, в якому класі функцій воно розв'язується. Так, загальний розв'язок рівнянь

$$f(2x) = 2f(x)$$

в класі функцій, що визначені при всіх дійних x і мають неперервні похідні, має вид $f(x) = kx, k \in R$. Якщо ж послабити умови, що накладені на шукані функції, то з'являться й інші розв'язки. Наприклад, даному рівнянню задовольняє функція $f(x) = x\ tgx\ (\pi\ \log_2 x)$.

Функціональні рівняння почали вивчати більше 200 років тому. Обґрунтування закону додавання сил привело до розв'язання функціонального рівняння $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$ яке прийнято називати рівнянням д'Аламбера [23].

О. Коші (1789-1857) розглянув ряд рівнянь, що є характеристичними властивостями лінійної, показникової, логарифмічної, степеневої функцій [18]. Ці приклади свідчать про важливість функціональних рівнянь для побудови різних аксіоматичних теорій. У зв'язку з цим розглянемо більш детально, як використовував Н.І. Лобачевський функціональне рівняння для отримання формули кута паралельності в неевклідовій геометрії.

Як відомо, в геометрії Лобачевського аксіома про те, що через кожну точку, що не лежить на дній прямій, проходить тільки одна пряма, що лежить з даною прямою в одній площині і не перетинає її, замінена аксіомою: через точку, що не лежить на даній прямій проходять хоча б дві прямі, що лежать з даною прямою в одній площині і не перетинає її.

Розглянемо пряму $A'A$, точку P поза прямою, перпендикуляр PQ до $(A'A)$, пряму $B'B$, що проходить через точку P і перпендикулярну [PQ].

Змінна точка M переміщується вздовж променя QA в напрямку, вказаному стрілкою. Пряма PM не доже досягти положення (PB), оскільки

$(B'B)$ не перетинає $(A'A)$, і, таким чином, є деяке граничне положення (PT), до якого наближається (PM), коли M необмежено віддаляється за променем QA. Зміст аксіоми паралельності Лобачевського полягає в тому, то (PT) утворює з (PQ) деякий гострий кут α $\left(\widehat{QPT} = \alpha, \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Цей кут називається кутом паралельності. Він є монотонно-спадною функцією довжини x відрізка PQ: $\alpha = \prod(x)$.

Формула

$$f(x) = tg\ \frac{\prod(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$$

для кута паралельності була отримана Лобачевським з функціонального рівняння

$$(f(x))^2 = f(x+y)f(x-y).$$

Ряд геометричних задач, що приводять до функціональних рівнянь, розглядав англійський математик Ч. Баббедж (1892-1871) [7]. Він вивчав, наприклад, періодичні криві другого порядку, що визначаються наступною властивістю для будь-якої пари точок кривої: якщо абсциса другої точки дорівнює ординаті першої, то ордината другої точки дорівнює абсцисі першої. Нехай така крива є графіком функції $y = f(x)$; $(x, f(x))$ – довільна її точка. Тоді, згідно умові, точка з абсцисою $f(x)$ має ординату x. Тож,

$$f\big(f(x)\big) = x.$$

Даному функціональному рівнянню задовольняються також функції:

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [0; |a|], \qquad f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0.$$

1.2. Адитивні функції

Одним з найбільш досліджуваних в математиці є функціональне *рівняння Коші.*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad D(f) = R. \qquad (1.1)$$

Воно виражає так звану «властивість адитивності» [14]: значення адитивної функції від суми двох чисел дорівнює сумі її значень від кожного з цих чисел. Легко перевірити, що лінійна однорідна функція $f(x) = ax$ задовольняє рівнянню (1.1). Дійсно,

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

В той же час функції $\ln x$, $x^2, \sin x$ та інші властивостями адитивності не володіють.

Виникає питання, чи існує адитивна функція, що визначена за дійних значень аргументу і відмінна від однорідної лінійної. Іншими словами, чи має функціональне рівняння (1.1) розв'язок, який не збігається з функцією

$$f(x) = ax?$$

Якщо функція $f(x)$ задовольняє рівнянню (1.1), то, замінюючи послідовно y на $x, 2x, 3x$, отримаємо:

$$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x),$$
$$f(3x) = f(x) + f(2x) = 3f(x),$$
$$f(4x) = f(x) + f(3x) = 4f(x).$$

Методом математичної індукції переконаємося, що рівність

$$f(nx) = nf(x) \qquad (1.2)$$

виконується для деяких натуральних n.

Припускаючи, що (1.2) вірне для деякого натурального числа n, доведемо справедливість його для $n+1$:

$$f\big((n+1)x\big) = f(x+nx) = f(x) + f(nx) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x).$$

Тож, (1.2) виконується для всіх дійсних x і натуральних n. Далі, поклавши в (1.2) $x = 1$, отримаємо $f(n) = nf \quad (1.1)$. Замінюючи в (1.1) x на $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$, отримаємо $f(m) = nf\left(\frac{m}{n}\right)$. Крім того, $f(m) = mf(1)$. Звідси

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1). \qquad (1.3)$$

Переконаємося, що формула (1.3), що дає значення будь-якої адитивної функції f, може буде використана для всіх раціональних значень аргументу (а не тільки для додатних). Дійсно, в силу (1.1), $f(x+0) =$

$f(x)+f(0)$, тобто $f(x)=f(x)+f(0), f(0)=0f(1)$. Застосовуючи знову властивість адитивності функції $f(x)$, отримаємо

$$0=f(x-x)=f(x)+f(-x),$$

$$f(-x)=-f(x). \qquad (1.4)$$

З рівностей (1.4) і (1.3) при будь-якому додатному раціональному x отримаємо $f(-x)=-f(x)=-xf(1)$, тобто (1.3) доведено для всіх $x\in Q$.

Одночасно доведено, що будь-який розв'язок рівняння (1.1) – непарна функція, адже рівність (1.4) виконується для всіх дійсних x.

Наведені вище міркування не свідчать про те, що лінійні однорідні функції вичерпують множину розв'язків рівняння (1.1). Дійсно, рівність (1.3) доведена тільки для раціональних значень x. І хоча кожне дійсне число можна «наблизити» раціональним з будь-яким степенем точності [2], тим не менш не можна стверджувати, що не існує інших функції, визначених на множині дійсних чисел, що задовольняють рівнянню (1.1). Адитивну функцію, відмінну від лінійної однорідної, побудував у 1905 р. німецький математик Г. Гамель [16]. Він ввів множину, що називається тепер базисом Гамеля. Це множина G дійсних чисел має властивість, що кожне дійсне число x може бути представлене, до того ж єдиним способом, у вигляді

$$x=n_1g_1+n_2g_2+\cdots+n_kg_k,$$

де $n_1,n_2,\dots,n_k\in Z, g_1,g_2,\dots,g_k\in G$.

Довільно задавши значення функції $f(x)$ в точках множини G, можна однозначно продовжити її на всю числову пряму за допомогою рівностей (1.1), (1.2), (1.4):

$$f(x)=f(n_1g_1+n_2g_2+\cdots+n_kg_k)=$$

$$=n_1f(g_1)+n_2f(g_2)+\cdots+n_kf(g_k).$$

Такими функціями вичерпуються усі розв'язки рівняння (1.1).

1. *Клас неперервних функцій*. Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці $x_0\in D(f)$, якщо $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Якщо функція f неперервна в кожній точці проміжку, що входить в область визначення функції, то вона називається *неперервною* на цьому проміжку [21].

Наприклад, функція $\sin x, e^x$– неперервні на всій числовій прямій, $\ln x -$ на проміжку $(0; \infty)$, функція $\frac{1}{x}$ неперервна на проміжках $(-\infty; 0), (0; \infty)$.

Знайдемо неперервні функції, що визначені для всіх дійсних x і задовольняють рівнянню (1.1). Вже доведено, що $f(x) = xf$ (1.1) при всіх раціональних x шуканої функції f.

Нехай тепер x – будь-яке ірраціональне число. Відомо, що існує послідовність раціональних чисел $r_1, \ldots r_n, \ldots$, що збігається до x, тобто $x = \lim_{n\to\infty} r_n$ (наприклад, послідовність десяткових наближень до нестачі). Як вже доведено, $f(r_n) = r_n f(1), n \in N$. Перейдемо тепер до границі при $n \to \infty$. Справа отримаємо $xf(1)$. Зліва ж, враховуючи неперервність функції f, отримаємо $\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(x)$. Тож, $f(x) = ax,$ де $a = f(1)$.

Безпосередньо підстановкою було перевірено, що ця функція задовольняє рівнянню (1.1).

Передбачалося, що функція $f(x)$, що задовольняє умові адитивності, неперервна на всій числовій прямій. Виявляється, достатньо було припустити, що вона неперервна хоча б в одній точці. Доведемо, що якщо функція адитивна і неперервна при $x = x_0$, то вона неперервна при всіх x. Дійсно, для довільного $x' \in R$

$$\lim_{x\to x'} f(x) = \lim_{x-x'+x_0\to x_0} f((x - x' + x_0) + (x' - x_0)).$$

Зауважимо, що якщо $x \to x'$, то $x - x' \to 0, x - x' + x_0 \to x_0$.

Позначивши $x - x' + x_0 = t$, в силу адитивності отримаємо

$$\lim_{t\to x_0} f(t) + f(x' - x_0) = f(x_0) + f(x' - x_0) =$$

$$= f\big(x_0 + (x' - x_0)\big) = f(x').$$

Тож, $\lim_{x\to x'} f(x) = f(x')$, тобто функція $f(x)$ неперервна при будь-якому $x' \in R$.

2. *Клас монотонних функцій*. З курсу математичного аналізу відомо, що функція f називається *зростаючою* (неспадною) на множині Е, якщо для будь-яких x_1 та x_2, що належать множині Е, з $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1) < f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) \leq f(x_2)$). Функція f називається *спадною* (незростаючою) на множині Е, якщо для будь-яких x_1 та x_2, що належать множині Е, з $x_1 > x_2$ випливає $f(x_1) > f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) \geq f(x_2)$). Неспадні та незростаючі функції називають *монотонними* [7]. Наприклад, функції $x \to ax$ (при $a > 0$), $x \to x^n$ (при натуральних n), $x \to a^x$(при $a > 1$) зростають на всій числовій прямій. Функції $x \to \log_a x$ (при $0 < a < 1$), $x \to -x^2$спадають на додатній півпрямій $]0; \infty[$.

Знайдемо розв'язок функціонального рівняння (1.1) в класі монотонних функцій. Нехай $f(x)$ не спадає при всіх $x \in R$. Доведено, що $f(x) = xf$ (1.1) для всіх раціональних x. Якщо x – раціональне число, то для будь-якого натурального числа q знайдеться таке ціле число p, що

$$\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}. \qquad (1.5)$$

Наприклад, для дійсного числа $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n + 10^{-n}$.

Якщо $f(x)$ – неспадна функція, то з (1.5) маємо

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{p+1}{q}\right),$$

або $a \cdot \frac{p}{q} \leq f(x) \leq a \cdot \frac{p+1}{q}$, де $a = f(1)$.

Оскільки $f(0) = 0,$ то $f(1) \geq 0$ (використана умова монотонності f). Якщо $a > 0,$ то $\frac{p}{q} \leq \frac{f(x)}{a} \leq \frac{p+1}{q}$. Звідси, порівнюючи з (1.5), маємо $\frac{f(x)}{a} = x$, $f(x) = ax$. Якщо ж $a = 0,$ то з нерівності $0 \cdot \frac{p}{q} \leq f(x) \leq 0 \cdot \frac{p+1}{q}$ випливає, що $f(x) = 0$. Тож, якщо $f(x)$ – неспадна функція, то $f(x) = ax$.

Аналогічно розв'язується рівняння (1.1) за умови, що $f(x)$ – незростаюча функція.

3. *Клас обмежених функцій*. Функція f на множині E називається:

а) *обмеженою зверху* (рис.2), якщо існує таке число m, що при всіх значеннях $x \in E$ має місце нерівність

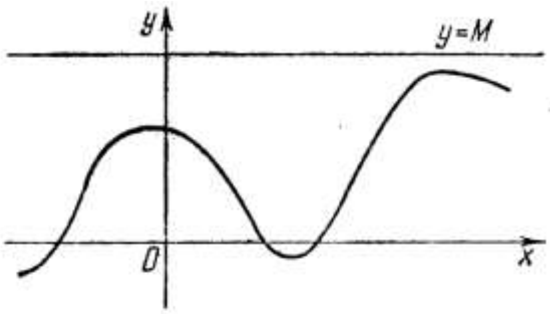

Рис. 2

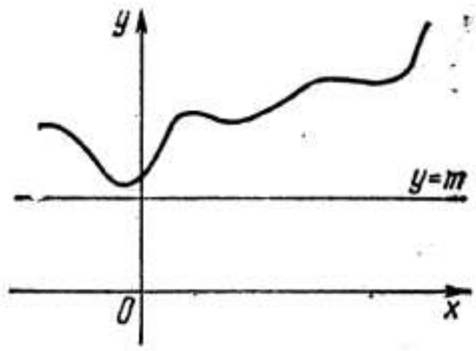

Рис. 3

$$f(x) \leq M;$$

б) *обмежена знизу* (рис. 3), якщо існує таке число m, що при всіх значення $x \in E$ має місце нерівність

$$f(x) \geq m;$$

в) *обмеженою* (рис. 4), якщо вона обмежена зверху і знизу.

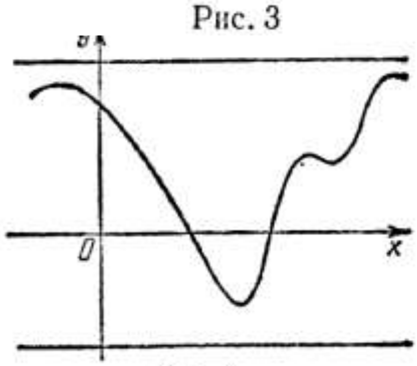

Рис. 4

Так, функції $x \to \sin x, x \to \cos x$ обмежені на всій множині $R: |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$; функція $x \to 2^x$ на множині $]-\infty; \infty[$ обмежена знизу числом 0, адже $2^x > 0$. На півпрямій $]-\infty; 0]$ функція обмежена, адже $0 < 2 \leq 1$, якщо $x \leq 0$. Функція $x \to \frac{1}{x}$ не обмежена в області її визначення.

Покажемо, що адитивна функція $f(x)$ обмежена зверху хоча б на одному інтервалі $]a; b[$, тоді вона – лінійна однорідна функція.

Розглянемо функцію

$$g(x) = f(x) - xf(1). \qquad (1.6)$$

Як випливає з рівності (1.3), вона перетворюється в нуль для всіх раціональних x. Крім того, $g(x)$ – адитивна. Дійсно,

$$g(x+y) = f(x+y) - (x+y)f(1) = f(x) + f(y) - xf(1) - yf(1) =$$
$$= g(x) + g(y).$$

Тому

$$g(x+r) = g(x) + g(r) = g(x)$$

для всіх раціональних r. Функція $g(x)$ обмежена зверху на проміжку $]a;b[$. Насправді, якщо $f(x) < M$ для всіх $x \in]a;b[$, то

$$g(x) < M', \qquad (7)$$

де $M' = M + |f(1)| \max\{|a|;|b|\}$.

Рис. 5

Переконаємося, що функція $g(x)$ на всій числовій прямій може приймати тільки ті значення, які вона приймає на $]a;b[$.

Нехай x – будь-яке дійсне число. Позначивши через r десяткове наближення з нестачею числа $b-x$, що перевершує $a-x$ (рис. 5), отримаємо

$a-x<r<b-x$, звідки $a<r+x<b$. Але $g(x+r)=g(x)$ для $r \in Q$. Тим самим показано, що $g(x)$ обмежена зверху на множині $]-\infty;\infty[$. Звідси випливає, що функція $g(x)$ тотожно дорівнює нулю. Дійсно, нехай існує дійсне число x_0 таке, що $g(x_0)=A, A \neq 0$. Тоді, якщо $g(x)$ – адитивна функція, то із (1.2) маємо

$$g(nx_0) = ng(x_0) = nA, \quad n \in Z.$$

Підібравши n так, що $nA > M'$, отримаємо $g(nx_0) > M'$, що суперечить обмеженості $g(x)$. Тож, $g(x)=0$ при всіх значеннях x. Тому з рівності (1.6) отримаємо $f(x)=ax$, де $a=f(1)$.

4. *Клас диференційованих функцій*. Як відомо, функція, що має похідну в кожній точці деякого проміжку, називається *диференційованою* на цьому проміжку [15].

Функція $x \to \sin x$ диференційована на всій числовій прямій, $x \to \sqrt{x}$ диференційована на проміжку $]0;\infty[$, $x \to |x|$ диференційована при всіх $x \neq 0$ тощо.

Легко перевірити, що якщо функція $f(x)$ диференційована в точці

x_0, то вона неперервна в точці. Як показує приклад функції $f(x) = |x|$, обернене твердження, взагалі, неправильне. Тому клас диференційованих функцій вужче класу неперервних функцій. Отже, розв'язком рівняння Коші

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

в класі диференційованих функцій є лінійна однорідна функція. Тим не менш, метод розв'язання рівняння Коші в припущенні диференційованості $f(x)$ представляє інтерес з огляду на його простоту. При фіксованому $y \in R$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ є функція змінної $x \in R$. З огляду на їх рівність, рівні і їх похідні (за змінною x). Продиференціювавши обидві частини рівності (1.1), отримаємо

$$f'(x+y) = f'(x) \qquad (1.8)$$

($\left(f(y)\right)' = 0$, як довільна постійна). Рівність (1.8) виконується для будь-яких $x \in R, y \in R$, адже y можна було обрати довільно. Поклавши в (8) $x = 0$, прийдемо до тотожності

$$f'(y) = f'(0) = c \ (1.9)$$

для всіх $y \in R$. Тож, $f'(x)$ – постійна функція. Тому її первісна

$$f(x) = cx + b, \qquad (1.10)$$

де b – деяке дійсне число. Перевірка показує, що (1.10) задовольняє (1.1) лише при $b = 0, c \in R$.

1.3. Застосування рівняння Коші

Поряд з рівнянням адитивності, Коші розглядав розв'язки трьох рівнянь:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y),$$

які також іноді називають *рівняннями Коші*. Як побачимо далі, їх розв'язками є відомі елементарні функції (показникова, логарифмічна, степенева [19]). Розглянемо, по черзі, кожне з цих рівнянь.

Знайдемо розв'язок рівняння

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad (1.11)$$

у класі монотонних функцій, визначених на дійсній числовій прямій.

Покажемо спочатку, що якщо функція, яка задовольняє рівняння (1.11), хоча б в одній точці x_0 перетворюється у 0, то вона тотожно рівна нулю. Дійсно, $f(x) = f\big((x - x_0) + x_0\big) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$. Зауважимо, що $f(x) \equiv 0$ є розв'язком рівняння (1.11).

Нехай тепер $f(x) \not\equiv 0$. Замінивши у(1) $x \to \frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2}$, отримаємо

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0 .$$

Таким чином, розв'язок рівняння (1.11), що не дорівнює нулю, є функцією, яка приймає строго додатні значення при усіх $x \in R$.

Прологарифмуємо рівняння (1.11) припустивши, що воно має розв'язки. Отримаємо

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y). \quad (1.12)$$

Якщо функція $f(x)$ неспадна, то функція $g(x) = \ln f(x)$ також неспадна. Дійсно, якщо $x_1 > x_2$, то $f(x_1) \geq f(x_1), \ln f(x_1) \geq \ln f(x_2)$. Аналогічно, якщо $f(x)$ – незростаюча, то й $g(x)$ – незростаюча.

Рівняння (1.12) перепишемо у вигляді

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Розв'язком останнього рівняння у класі монотонних функцій є $g(x) = \ cx$. Отже, $\ln f(x) = cx, f(x) = e^{cx}$.

Перевірка показує, що для будь-якого c функція $f(x) = e^{cx}$ є розв'язком (1.11).

Рівняння (1.11) аналогічно може бути розв'язано у класі функцій, неперервних при усіх $x \in R$. Результат отримується той самий. Проте довелося знадобилася б теорема про те, що композиція двох неперервних функцій –неперервна функція [5].

Розв'язок теореми (1.11) зведений до рівняння адитивності. Аналогічно розв'язується рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y). \quad (1.13)$$

Це рівняння будемо розглядати у класі монотонних функцій, визначених при додатних значеннях аргументу. Покладемо $x = e^t, g(t) = f(e^t)$, звідси $t = \ln x$, $f(x) = g(\ln x)$. Так як функція e^t – зростаюча, а функція $f(x)$ –монотонна, то $g(t) = f(e^t)$ – також монотонна.

Функція $g(t)$ задовольняє рівнянню адитивності. Дійсно,

$$g(t + u) = f(e^{t+u}) = f(e^t \cdot e^u) = f(e^t) + f(e^u) = g(t) + g(u).$$

Розв'язком рівняння (1.13) у класі монотонних функцій є функція $g(t) = ct$. Звідси $f(x) = c \ln x$.

Розв'язок рівняння (1.13) знайдено у припущені, що $f(x)$ – монотонна та визначена при $x > 0$.

Якщо існує функція, яка визначена при $x = 0$ і задовольняє рівняння (1.13), то при $y = 0$

$$f(0) = f(x) + f(y),$$

тобто $f(x) \equiv 0, x \in R$.

Припустимо, що рівняння (1.13) має розв'язки серед функцій, визначених при усіх $x \neq 0$. Тоді, поклавши спочатку $x = y = t$, а потім $x = y = -t$, отримаємо:

$$f(t^2) = 2f(t),$$

$$f(t^2) = 2f(-t),$$

звідки

$$f(-t) = f(t),$$

Тобто тільки парні функції, які визначені при $x \in R\backslash\{0\}$ можуть задовольняти рівнянню (1.13). Якщо $f(x)$ – монотонна при $x > 0$, то, як показано раніше, $f(x) = c \ln x$для додатних x. Якщо $x < 0$, то $f(x) = f(-x) = c \ln(-x)$. Тож, $f(x) = c \ln|x|, x \neq 0$.

Функціональні рівняння Коші з успіхом використовуються при розв'язуванні деяких математичних задач.

Задача 1.1. Знайти усі неперервні функції $f(x)$, визначені на проміжку $]0;\infty[$, для яких різниця $f(x_1y)-f(x_2y)$ при довільних допустимих значеннях x_1 і x_2 не залежить від y.

За умовою, вираз $f(xy)-f(y)(x_1=x, x_2=1)$ не залежить від y. Тому

$$f(xy)-f(y)=f(x)-f(1)$$

Поклавши, $g(x)=f(x)-f(1)$, отримаємо функціональне рівняння Коші

$$g(xy)=g(x)+g(y).$$

Відомо, що у класі неперервних функцій $g(x)=c\ln x$ [26]. Звідси $f(x)=c\ln x+b$, де $b=f(1)$. Перевірка показує, що умову задачі задовольняють функції $f(x)=c\ln x+b$ при довільних b і c.

Розглянемо задачу 1.2, враховуючи, що x_1 і x_2 є різними фіксованими числами. Так як $f(x_1,y)-f(x_2y)$ не залежать від y, тоді $f(x_1,y)-f(x_2y)=c$. Нехай $x_2y=x$, тоді $f(ax)=f(x)+c$, де $a=\frac{x_1}{x_2}\neq 1$, $a>0$ c- стала. Замінивши x на e^x, отримаємо

$$f\left(e^{x+\ln a}\right)-c=f(e^x)\ x\in R. \qquad (1.14)$$

Віднімаючи від обох частин $\frac{cx}{\ln a}$, отримаємо

$$f\left(e^{x+\ln a}\right)-\frac{c(x+\ln a)}{\ln a}=f(e^x)\ x-\frac{cx}{\ln a},$$

або

$$g(x+\ln a)=g(x), \qquad (1.15)$$

де $g(x)=f(e^x)-\frac{cx}{\ln a}$. Рівняння (1.15) задовольняють періодичні з періодом $\ln a^1$ функції [11]. Звідси $f(x)=g(\ln x)+\frac{cx}{\ln a}$.

При перевірці переконуємося, що функція виду $f(x)=g(\ln x)+\alpha\ln x$, де α – довільна константа, а $g(x)$ – неперервна періодична з періодом $\ln\frac{x_1}{x_2}$ функція, володіють необхідною властивістю.

Розв’язування багатьох функціональних рівнянь зводиться до рівняння Коші.

Задача 1.2. Відомо, що сума дійсних чисел володіє сполучною властивістю:

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

для будь-яких $x, y, z \in R$. потрібно знайти усі неперервні функції $f(x)$, які «зберігають» сполучність, тобто

$$f(x+y)+f(z)=f(x)+f(y+z). \quad (1.16)$$

Перепишемо (1.16) у вигляді

$$f(x+y)-f(x)=f(y+z)-f(z).$$

Легко побачити, що ліва частина не залежить від x, тобто

$$f(x+y)-f(x)=g(y).$$

При $x=0$ маємо $f(y)=g(y)+a\,, a=f(0)$. маємо функціональне рівняння Коші

$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

Його неперервним розв’язком є функції $g(x)=cx$. Таким чином, $f(x)=cx+a$, де a і c – довільні константи.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Метод підстановок

Вище були знайдені розв'язки функціональних рівнянь у припущені, що шукана функція задовольняє умові неперервності, або монотонності, або володіє деякими іншими властивостями. Перейдемо до розгляду методу, який, з одного боку, дозволяє розв'язати функціональне рівняння без таких істотних обмежень, а з іншого, є досить елементарним.

Задача 2.1. Знайти функцію $f(x)$, яка визначена при усіх дійсних $x \neq\ a, x \neq 0$, і задовольняє рівнянню

$$(a-x)f(x)-2xf(a-x)=1. \quad (2.1)$$

Якщо така функція існує, то замість xможемо підставляти у рівняння (2.1) будь-який вираз, яке не виходить за границі області визначення функції. Замінивши x на a, отримаємо рівняння

$$xf(a-x)-2(a-x)f(x)=1, \quad (2.2)$$

яке містить ті ж самі функції $f(x)$ і $f(a-x)$. Розв'язавши (2.1) і (2.2) як систему рівнянь відносно невідомих $f(x0$ і $f(a-x)$, отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{x-a}\ , x \neq 0.$$

Перевіркою переконуємося, що ця функція задовольняє умові задачі: $(a-x)\frac{1}{x-a}-2x\frac{1}{a-x-a}=1$.

Сенс методу, який використовується при розв'язуванні задачі 2.1, полягає у наступному. Припустимо, що рівняння має розв'язок. Застосовуємо до змінних, які входять у функціональне рівняння, деякі підстановки. Отримуємо систему рівнянь, одним з невідомих якої є шукана функція. Після розв'язку системи безпосередньою перевіркою потрібно переконатися, що знайдена функція задовольняє умовам задачі.

Основна складність при використані цього методу у підборі вдалих підстановок.

У першу чергу викладемо прийоми розв'язків деяких функціональних рівнянь, у яких одна з двох змінних x або y зустрічається і самостійно, тобто поза функції f.

Задача 2.2. Знайти функцію, визначену при усіх дійсних x і яка задовольняє рівняння

$$f(xy) = y^k f(x). \quad (2.3)$$

Вважаючи $x = 1$, отримаємо $f(y) = y^k f(1)$. Позначимо $f(1) = c$. Тоді $f(y) = cy^k$. Ця функція задовольняє рівнянню (2.3) при будь-якому значенні c. Дійсно, $f(xy) = c(xy)^k = y^k cx^k = y^k f(x)$.

Розглянуте рівняння характеризується тим, що y у правій частині стоїть не під знаком функції f. У той же час у лівій частині x і y разом знаходяться під знаком шуканої функції. Підстановка $x = 1$ дозволяє отримати вираз $f(y)$.

Аналогічно розв'язується функціональне рівняння

$$f(x+y) + f(y-x) - (y+2)f(x) + y(x^2 - 2y) = 0,$$

$$D(f) = R. \quad (2.4)$$

У результаті підстановки $x = 0$ отримуємо

$$f(y) = y^2 + \frac{a}{2}y + a. \quad (2.5)$$

де $a = f(0)$. Перевірка показує, що вираз (2.5) дає розв'язок функціонального рівняння тільки при $a = 0$. Остаточно отримаємо $f(x) = x^2$(неважливо як позначити змінну).

Хочеться підкреслити, що перевірка є складовою частиною розв'язування функціонального рівняння. Адже усі перетворення, зроблені у припущені, що існує функція, яка задовольняє дане рівняння. І та обставина, що у процесі розв'язування отримано деякий вираз для $f(x)$, свідчить тільки про те, що якщо існує розв'язок рівняння, то він обов'язково має знайдений вид.

Так, розв'язуючи рівняння

$$f(xy) = \sin y \cdot f(x), D(f) = R,$$

підстановкою $x = 1$, отримаємо $f(y) = a \sin y$, де $a = f(1)$.

У результаті перевірки переконуємося, що тільки при $a = 0$ отримаємо функцію, яка задовольняє рівняння: $f(x) \equiv 0$.

Спроба розв’язати рівняння $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$ підстановкою $y = 0$ (або $x = 0$) не вдалася. Проте, якщо зробимо заміну $x + y = z, x - y == t$, то отримаємо

$$f(z) - f(t) = z^2 - t^2,$$

яке відразу розв’язується підстановкою $t = 0$.

Задача 2.3. Розв’язати функціональне рівняння.

$$f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)(1 + y) = 2xy(3y - x^2). \quad (2.6)$$

Якщо не вказана область визначення шуканої функції $f(x)$, то припускається, що $D(f) = R$.

Метод, який пропонувався у минулій задачі, не дає розв’язку функціонального рівняння. Якщо покладемо $x = 0$, то разом з $f(y)$ виділиться $f(-y)$. При $y = 0$ також не отримаємо бажаного результату.

Виконаємо послідовні підстановки $x = 0, y = t, x = t - 1, y = 1, x = -1, y = t - 1$. Отримаємо систему рівнянь

$$f(t) + f(-t) - 2a(1 + t) = 0,$$

$$f(t - 2)f(t) = -2(t - 1)(2t - t^2 - 4),$$

$$f(t - 2) + f(-t) - 2bt = -2(t - 1)(3t - 4),$$

де $a = f(0), b = f(-1)$.

Виключаючи $f(-t), f(t - 2)$(для цього достатньо від суми перших двох рівнянь відняти трете), отримаємо

$$2f(t) = 2t^3 + 2t(a - b - 1) + 2a.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що тільки при $a = 0, b = -1$ функція $f(t) = t^3 + t(a - b - 1) + a$ задовольняє рівнянню (2.6). Отже, $f(x) = x^3$ є єдиним розв’язком рівняння (2.6).

При розв’язанні задачі 2.3 вагомим фактором було те, що при $y = -1$

доданок $2f(x)(1+y)$ перетворюється у 0. Цей метод застосовується до рівнянь, для яких існує таке значення $y=y_0$, що член, який складає $f(x)$, стає рваним 0. Якщо дана умова виконана, підстановки $x=0, y=t, x=y_0+t, y==y_0, y=y_0+t$ призводять до системи трьох рівнянь відносно невідомих $f(t), f(-t), f(2y_0+y)$. З цієї системи виключаємо $f(-t)$ та $f(2y_0+t)$, якщо це можливо, отримавши тим самим вираз для $f(t)$. Цей вираз складає не більше двох сталих $a=f(0)$ і $b=f(y_0)$. Перевірка дозволяє визначити значення a і b, при яких знайдений клас функцій дійсно є розв'язком.

Проілюструємо описаний метод ще на одному прикладі.

Задача 2.4. Розв'язати рівняння

$$f(x+y)=f(x-y)=2f(x)\cos y$$

Зауважимо, що при $y=\frac{\pi}{2}$ зникає член, який містить $f(x)$. Виконуючи послідовно заміни $x=0, y=t; x=\frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t$, отримаємо систему рівнянь

$$f(t)=f(-t)=2a\cos t$$

$$f(\pi+t)+f(t)=0$$

$$f(\pi+t)+f(-t)=-2b\sin t$$

де $a=f(0), b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Звідси

$$f(t)=a\cos t+b\sin t,$$

Перевірка показує, що знайдений вираз є розв'язком задачі 2.4 при будь-яких a і b.

Вкажемо інші набори підстановок, застосування яких дозволить розв'язати деякі типи функціональних рівнянь, які мають $f\big(x+\ y\big), f\big(x-\ y\big), f(x), f(y), x, y$.

Для розв'язування функціонального рівняння

$$f(x)f(x+y)=(f(y))^2(f(x-y))^2e^{y+4} \qquad (2.7)$$

слід виконати підстановки $x=0, y=t; x=0, y=-t$.

Застосуванням підстановок $x=0, y=t; x=t, y=2t; x=t, y=-2t$

розв'язуємо рівняння

$$f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y. \quad (2.8)$$

Зауважимо, що метод, який застосовувався для розв'язання задач 2.3 і 2.4, не приводить до бажаного результату при розв'язування рівняння (2.8), так як не можна вказати значення змінної y, при якому зникає член з $f(x)$.

За допомогою послідовного застосування підстановок $x=0, y=t; x=t, y=2t$; можливо розв'язати функціональне рівняння

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2. \quad (2.9)$$

До рівнянь цього типу приводять рівняння, які складаються з $f(xy), f\left(\frac{x}{y}\right), f(x), f(y), x, y$. Для цього достатньо зробити заміну $x= e^z, y= e^t$. Наприклад, рівняння

$$g(xy)+2g\left(\frac{x}{y}\right)=3g(x)-\ln y, y>0, x>0, \quad (2.10)$$

зводиться до рівняння (2.8), де $f(t)=g(e^t)$.Разом з тим рівняння (2.10) розв'язується безпосередньо застосуванням набору підстановок $x=1, y=t, y=t^2, x=t, y=\frac{1}{t^2}$.

Можливі і інші прийоми зведення функціональних рівнянь до рівнянь описаного виду [21]. Так в рівняннях, які мають $f(x+ay), f(x(a+1)y), f(y), y,\ x,\ a\in Z$, достатньо виконати заміну $x+ay=y, y=z$.

2.2. Групи та функціональні рівняння

В задачі 2.1 у рівнянні $(a-x)f(x)-2xf(a-x)=1$ під знаком невідомої функції f стоїть функція $g_1=x$ і $g_2=a-x$. У результаті заміни x на $a-x$ отримано ще одне рівняння, яке має ті ж самі функції $f(x)$ та $f(a-\ x)$. Функції g_1 і g_2 утворюють групу відносно композиції функцій. Поняття групи дозволяє у деяких випадках обрати раціональні підстановки для розв'язування функціональних рівнянь.

Становлення теорії груп відбулося на початку XIX століття під час дослідження питань про розв'язування алгебраїчних рівнянь і пов'язано з ім'ям видатного французького математика Є. Галуа (1811-1832) [4]. У подальшому теорія груп знайшла застосування у геометрії, фізиці, кристалографії та стала математичним апаратом для вивчення всіляких проявів симетрії у математиці та природознавстві.

В основі визначення груп лежить поняття *алгебраїчної операції*. Численні приклади алгебраїчних операцій дає шкільний курс математики. Це відомі арифметичні операції додавання, віднімання, множення дійсних чисел, додавання векторів на площині, композиція переміщення, операції додавання, віднімання, множення многочленів. У всіх випадках алгебраїчна операція кожній упорядкованій парі a і b елементів довільної множини G ставить у відповідність єдиний елемент c тієї ж множини. Операцію часто позначають символами $+, \ . \ ,*,\cdot$ і так далі, пишуть $a * b = c$. Елемент c називають добутком a та b.

Зауважимо, що у поданих прикладах результат виконання операції над будь-якими двома елементами множини також будуть елементами цієї множини [17]. У той же час віднімання, ділення на множині натуральних чисел N не можна вважати алгебраїчними операціями, оскільки виконання цих дій може вивести за межі множини N.

Добутки $a * b$ і $b * a$ можуть виявитися однаковими або різними. Наприклад, сума $\vec{a} + \vec{b}$ будь-яких векторів дорівнює $\vec{b} + \vec{a}$; $ab = ba$ для звичайного множення дійсних чисел. Якщо $a * b = b * a$ для будь-яких елементів a і b множини G, то опе-

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b

рацію «*» називають *комутативною.* Від-

Таблиця 2.1

a	a	b	e
b	b	e	a

німання на множині цілих чисел не є комутативною операцією.

Якщо для довільних елементів a, b, c з множини G маємо $(a * b) * c =$ $= a * (b * c)$, то операцію «*» називають *асоціативною*. Композиція переміщень простору, композиція відображень множини на множині, додавання і множення дійсних чисел є асоціативними алгебраїчними операціями [14]. Операція ділення додатних чисел не асоціативна.

Перейдемо до визначення групи.

Групою називається множина G, в якій визначена алгебраїчна операція (назвемо її множенням), яка задовольняє наступним властивостям:

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$для будь-яких a, b, c з множини G (властивість асоціативності операції);

2) існує одиничний елемент $e \in G$ такий, що для всіх $a \in G$ маємо $a * e = e * a = a$;

3) для кожного $a \in G$ існує обернений елемент $a^{-1} \in G$ такий, що $a * a^{-1} = = a^{-1} * a = e$.

Досить поширений табличний спосіб завдання груп на скінченній множині. Якщо $G = \{e, a, b\}$, то операцію множення, щодо якої G – група, можна задати таблиця 2.1.

Наведемо приклади скінченних груп, визначених на деяких множинах функцій дійсного аргументу, щодо композиції.

Приклад. Функції $f_1 = x$, $f_2 = \frac{x-1}{x+1}$, $f_3 = -\frac{1}{x}$, $f_4 = \frac{x+1}{1-x}$ визначені на $R \setminus \{0, -1, 1\}$, утворюють групу четвертого порядку. Тут

$$f_2{\circ}f_3 = f_2\big(f_3(x)\big) = \frac{-\dfrac{1}{x}-1}{-\dfrac{1}{x}+1} = \frac{x+1}{1-x} = f_4,$$

$$f_4{\circ}f_2 = f_4\big(f_2(x)\big) = \frac{\dfrac{x-1}{x+1}+1}{1-\dfrac{x-1}{x+1}} = x = f_1.$$

Результати всіх "множень" занесемо до таблиці 2.2.

У наведеному прикладі групи одиничним елементом є функція $f_1 = x$ з вказаною областю визначення. Це неважко помітити, розглядаючи табл. 2.2, де рядок і стовпець, відповідні x, повторюють входи таблиці.

Функції f_2і f_4 є взаємно-оберненими елементами групи: $f_2{\circ}f_4 = f_4{\circ}f_2 = f_1$. В кожному рядку і кожному стовпці таблиці множення стоять всі елементи групи в деякому порядку.

Покажемо, як цей і подібні йому приклади груп можуть бути використані при вирішенні функціональних рівнянь.

Нехай у функціональному рівнянні

$$a_0g(f_0) + a_1g(f_1) + \cdots + a_{n-1}g(f_{n-1}) = b \qquad (2.11)$$

вирази $f_0(x) = x$, $f_1(x)$, $f_{n-1}(x)$, що стоять під знаком невідомої функції $g\ (x)$, є елементами скінченної групи порядку n щодо композиції функцій. Коефіцієнти рівняння (2.11) a_0, a_1,..., a_{n-1}, b у загальному випадку залежать від x. деякі з них можуть дорівнювати 0. Припустимо, що рівняння (2.11) має розв'язок. Замінимо x на $f_1(x)$. Ця заміна рівносильна множенню всіх елементів групи на f_1. В результаті послідовність функцій f_0, f_1, …, f_{n-1} перейде в послідовність $f_0{\circ}f_1, f_1{\circ}f_1, f_2{\circ}f_1, \dots, f_{n-1}{\circ}f_1$, що складається з усіх елементів групи. Звертаємо увага на те, що отримані елементи другого стовпця таблиці множення (відповідного f_1,).

Проведена заміна перевела рівняння (2.11) – лінійне щодо невідомих $g(f_0), g(f_1), \dots, g(f_{n-1})$ в нове лінійне рівняння відносно тих самих невідомих.Замінюючи далі $x \to f_2(x)$, $x \to f_3(x)$,…, $x \to$

$f_{n-1}(x)$, отримаємо

Таблиця 2.2

$\circ$	x	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$
x	x	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$
$\frac{x-1}{x+1}$	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	x
$-\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	x	$\frac{x-1}{x+1}$
$\frac{x+1}{1-x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	x	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$

систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

Розв'язуючи цю систему, знаходимо невідому функцію $g(f_0) = g\ (x)$, якщо, звичайно, система має розв'язок. Безпосередньою перевіркою слід переконатися, що отримана функція задовольняє вихідному рівнянню. Розглянутий метод обмежує область визначення функції, так як доводиться відкидати ті значення аргументу, при яких елементи групи не мають сенсу.

Завдання 2.1. Знайти функцію $f(\,x)$, визначену на множині дійсних чисел, відмінних від $0, 1, -1$, і яка задовільняє рівняння

$$x\,f(x) + 2\,f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \qquad (2.12)$$

Вирази, що стоять під знаком невідомої функції f, є елементами групи, заданої табл. 2.2. Замінюючи послідовно x на $\frac{x-1}{x+1}$, $-\frac{1}{x}$, $\frac{x+1}{1-x}$, отримаємо систему

$$\begin{cases} x\,f(x) + 2\,f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 1, \\ \dfrac{x-1}{x+1}\,f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) + 2\,f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1, \\ -\dfrac{1}{x}\,f\,\left(-\dfrac{1}{x}\right) + 2\,f\,\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) = 1, \\ \dfrac{x+1}{1-x}\,f\,\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right) + 2\,f(x) = 1. \end{cases}$$

Послідовно виключаючи невідомі $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $f\ \left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, маємо

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)},\quad x\neq -1.$$

Міркування випливали з припущення, що розв’язок рівняння (2.4) існує. Підставляючи в (2.4) отриману функцію, переконаємося, що вона задовольняє рівнянню.

Завдання 2.2. Знайти функцію $f(\,x), x\neq 0, x\neq a,$ що задовольняє рівняння

$$f(x)+f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)=x \qquad (2.13)$$

де a – постійна, відмінна від 0.

Неважко перевірити, що вирази $x, \frac{a^2}{a-x}$ разом з $\frac{ax-a^2}{x}$ складають групу з табл. 2.3. Тут $x\in R\backslash\{0,a\}$. Міркуючи аналогічно розв'язанню задачі 2.1, отримаємо систему

$$\begin{cases} f(x)+f\left(\dfrac{a^2}{a-x}\right)=x \\ f\left(\dfrac{a^2}{a-x}\right)+f\left(\dfrac{ax-a^2}{x}\right)=\dfrac{a^2}{a-x} \\ f\left(\dfrac{ax-a^2}{x}\right)+f(x)=\dfrac{ax-a^2}{x} \end{cases}$$

З неї знаходимо $f(x)=\frac{x^3-a^2x+a^3}{2x(x-a)}$. Перевірка показує, що ця функція задовольняє рівнянню.

Іноді у функціональному рівнянні вирази, що стоять під знаком невідомої функції, є значеннями елементів деякої групи від однієї і тієї ж функції g [17]. Після заміни $g\,(x)$ на x отримуємо рівняння, яке розв’язується викладеним вище методом.

Таблиця 2.3

$\cdot$	x	$\dfrac{a^2}{a-x}$	$\dfrac{ax-a^2}{x}$
x	x	$\dfrac{a^2}{a-x}$	$\dfrac{ax-a^2}{x}$

$\dfrac{a^2}{a-x}$	$\dfrac{a^2}{a-x}$	$\dfrac{ax-a^2}{x}$	x
$\dfrac{ax-a^2}{x}$	$\dfrac{ax-a^2}{x}$	x	$\dfrac{a^2}{a-x}$

Під знаком невідомої функції f можуть стояти не елементи групи, а більш складні вирази, утворені них. Для розв'язування таких рівнянь доводиться вгадувати, з елементів якої групи утворені ці вирази і значеннями яких функцій вони є.

Повернемося знову до групи четвертого порядку, заданої табл. 2.2. При уважному розгляді можна виявити, що

$$f_2^1 = f_2$$

$$f_2^2 = f_2 \circ f_2 = f_3$$

$$f_2^3 = f_2 \circ f_2 \circ f_2 = f_4$$

$$f_2^5 = f_2 \circ f_2 \circ f_2 \circ f = f_1$$

Таким чином, всі елементи цієї групи є " степенями " одного і того ж елемента f_2. Цей елемент називають *утворюючим*, а саму групу – *циклічною четвертого порядку.*

Зазвичай, з області визначення кожного елемента групи виключаються ті значення x, при яких хоча б один елемент не має сенсу. Цей набір груп можна значно розширити шляхом наступних нескладних побудов.

Нехай $G = \{g_1 = x, g_2, \dots, g_n)$ – скінченна група функцій щодо композиції. Виберемо довільну оборотну функцію $\varphi = \varphi\ (x)$. Позначивши

$$G_\varphi = \{\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi, \varphi^{-1} \circ g_2 \circ \varphi, \dots, \varphi^{-1} \circ g_n \circ \varphi\}.$$

Покажемо, що G_φ – група. Композиція двох довільних елементів G_φ належить множині G_φ. Як відомо, операція композиції має властивість асоціативності [23]. Одиничним елементом в множині G_φ є

$$\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ x \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = x.$$

Якщо g_i і g_k– взаємно-обернені елементи групи G, тобто

$$g_i \circ g_k = g_k \circ g_i = x, \text{ то } (\varphi^{-1} \circ g_i \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ g_k \circ \varphi) = x$$

і $(\varphi^{-1}\circ g_k\circ\varphi)\circ(\varphi^{-1}\circ g_i\circ\varphi) = x$. Отже, для кожного елемента G_φ існує в цій множині обернений елемент.

Наведені побудови можуть звузити область визначення функцій, що входять до групи.

Проілюструємо описану конструкцію на конкретних приклад. Нехай $G = \{x, 1-x\}, \varphi = \varphi(x) = \mathrm{e}^x$. Тоді $\varphi^{-1} = \ln x$;

$$G_\varphi = \{x, In\,(1 - \mathrm{e}^x)\},\ \ x < 0.$$

Якщо $G = \{x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}\}, \varphi = x^n, n$ – непарне, то

$$\varphi^{-1} = \sqrt[n]{x}, G_\varphi = \left\{x, \sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}, \sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right\},\ \ x \neq 0; x \neq 1$$

Розв’яжемо за допомогою побудованих груп наступні завдання.

Завдання 2.3. Знайти розв’язок функціонального рівняння

$In\,(1 - \mathrm{e}^x)\,f\,(x) - 2xf(In\,(1 - \mathrm{e}^x)) = 1,\ x < 0.$ (2.16)

Зробивши заміну $x \to In\,(1 - \mathrm{e}^x)$, отримаємо рівняння

$$xf(In\,(1 - \mathrm{e}^x)) - 2\,(1 - \mathrm{e}^x)\,f\,(x) = 1.$$

Вирішуючи його спільно з (2.16), знайдемо $f\,(x) = -\frac{1}{In\,(1-\mathrm{e}^x)}$

Завдання 2.4. Розв’язати функціональне рівняння

$$f(x) + f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{1+x^n},\qquad x \neq 0,\qquad x \neq 1, (2.17)$$

де n – непарне.

Замінимо послідовно в рівнянні (2.17) $x \to \sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}, x \to \sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$,

Одержимо:

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right) + f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right) = \sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}},$$

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right) + f(x) = \sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}},$$

Звідси

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1+x^n} + \sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}} - \sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}}\right).$$

2.3. Матриці та дробово-лінійні функції

У більшості задач, розглянутих вище, під знаком невідомої функції стояли дробово-лінійні вирази виду $\frac{ax+b}{cx+d}$. Такі дроби повністю визначаються завданням матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, складеної з коефіцієнтів a, b, c, d. Наприклад, виразам

$$\frac{x-2}{-3x+4}, \frac{x+1}{x}, \frac{3x}{5x-2}, x-1, \frac{1}{x}, -x$$

можна поставити у відповідність наступні матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При розв'язанні функціональних рівнянь необхідно знайти композицію функцій $f_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$ та $f_2(x) = \frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$. Знайдемо вираз для $f_1 \circ f_2$:

$$f_1(f_2(x)) = \frac{a_1\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2} + b_1}{c_1\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2} + d_1} =$$

$$= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)}, c_2x + d_2 \neq 0.$$

В результаті отримано вираз для дробово-лінійної функції.

Припустимо, що вирази $c_1x + d_1$ та $c_2x + d_2$ тотожно не дорівнюють нулю, тобто c_1 та $d_{1,}$ а також c_2 та d_2 не рівні нулю одночасно. При цих припущеннях $c_1a_2 + d_1c_2$ та $c_1b_2 + d_1d_2$ у виразі для $f_1(f_2(x))$ разом в нуль не перетворюються, якщо тільки композиція $f_1 \circ f_2$ визначена.

Дійсно, нехай

$$c_1a_2 + d_1c_2 = 0, \quad (2.18)$$

$$c_1b_2 + d_1d_2 = 0. \quad (2.19)$$

Можливі наступні 4 випадки:

1)$c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$; 2) $c_1 \neq 0, d_2 \neq 0$;

3) $c_2 \neq 0, d_1 \neq 0$; 4) $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0$.

Детально розберемо перший випадок. Оскільки $c_2 \neq 0$, то із (2.18) отримаємо

$$d_1 = -\frac{c_1a_2}{c_2},$$

а (2.19) набуде вигляду $c_1b_2 - \frac{c_1a_2}{c_2}d_2 = 0$, або так, як $c_1 \neq 0$, то $c_2b_2 = a_2d_2$. Якщо $b_2 \neq 0$, то $a_2 \neq 0$ та $d_2 \neq 0$. Позначимо $\frac{d_2}{c_2} = \frac{b_2}{a_2} = k$. При цьому функція $f_2(x) = \frac{a_2x+ka_2}{c_2x+kc_2} = \frac{a_2}{c_2}$ при $x \neq -k$. Але $x = -k$ не входить в область визначення $f_2(x)$ так як при цьому $c_2x + d_2 = -c_2\frac{d_2}{c_2} + d_2 = 0$.

Зауважимо, що якщо $f_2(x)$ тотожно дорівнює константі c, то $f_1(f_2(x)) = f_1(c)$. У нашому випадку $c = \frac{a_2}{c_2} = -\frac{d_1}{c_1}$.

Однак знаменник дробу $f_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$ при підстановці $x = -\frac{d_1}{c_1}$ обертається в нуль, тобто $\frac{a_2}{c_2}$ не входить в область визначення $f_1(x)$.

Якщо ж $b_2 = 0$, то $a_2 = 0$ або $d_2 = 0$. При $a_2 = 0$ $d_1 = 0$; $f_2(x) \equiv 0$ і знаменник $c_1x + d_1$ функції $f_1(x)$ перетворюється в нуль. При $d_2 = 0$ $f_2(x) = \frac{a_2x}{c_2x} = \frac{a_2}{c_2}$ (x$\neq 0$, так як знаменник $f_2(x)$ відмінний від нуля). І знову $\frac{a_2}{c_2}$ не входить в область визначення $f_1(x)$. Випадки 2) - 4) досліджуються аналогічно.

Функції $f_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$ ставиться у відповідність матриця $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, функції $f_2(x) = \frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$ – матриця $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, а їх композиції

$$f_1{^\circ}f_2(x) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)x + (a_1b_2 + b_1d_2)}$$

відповідає матриця

$$C = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицю C називають *похідною матриць* A і B. При цьому пишуть C = A·B.

Звернімо увагу на характер відповідності між дробово-лінійними функціями і матрицями. Очевидно, одній й тій самій функції $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ відповідає клас матриць виду $\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$, де k – будь-яке дійсне число, відмінне від нуля [25]. Матрицю $kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$ назвемо *добутком* числа $k \;\epsilon\; R$ на матрицю $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Зауважимо, що дві матриці $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ вважаються рівними, якщо рівні їх відповідні елементи

$$a_i = b_i, i = 1,2,3,4.$$

Відзначимо, що функціям, заданим одним і тим же виразом, але які мають різні області визначення, відповідає один і той же клас матриць. Встановлено відповідність між виразами для дробово-лінійних функцій і класами матриць [9]. Легко перевірити, що

$$(kA)B = A(kB) = k(AB) \quad (2.20)$$

для будь-якого числа k і довільних матриць *A і B*.

Відповідність між дробово-лінійними виразами і описаними класами матриць взаємно-однозначна. Ця відповідність зберігається при виконанні дії композиції функцій і множення матриць. Множення матриць має ті ж властивості, що й композиція функцій.

Викладені відомості про матриці дозволяють не тільки спростити знаходження композиції дробово-лінійних функцій, але і вказати нові методи для розв’язування деяких функціональних рівнянь.

Задача 2.4. Знайти функцію f, визначену при

$$x \in R \setminus \left\{-5; \frac{3}{5}; 0; -\frac{1}{3}; 1\right\}$$

і яка задовольняє рівняння

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) - \frac{x+3}{2} f\left(\frac{x+3}{-3x+5}\right) = \frac{x^2-2x-2}{x}. \qquad (2.21)$$

Знайдемо підстановку, що переводить вирази, які стоять під знаком невідомої функції f в рівнянні (2.21), один в одного. Для цього покладемо $\frac{x+3}{-3x+5} = \frac{t}{t-2} \left(x \neq \frac{5}{3}; t \neq 2\right)$. Звідси

$$tx + 3t - 2x - 6 = -3tx + 5t, x = \frac{t+3}{2t-1} \left(t \neq \frac{1}{2}\right).$$

Крім того,

$$\frac{x}{x-2} = \frac{\frac{t+3}{2t-1}}{\frac{t+3}{2t-1} - 2} = \frac{t+3}{-3t+5} \left(t \neq \frac{5}{3}; t \neq \frac{1}{2}\right).$$

Отже, підстановка $x \to \frac{x+3}{2x-1}$ – шукана. Рівняння (2.21) набуде вигляду

$$f\left(\frac{x+3}{-3x+5}\right) - \frac{7x}{4x-2} f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{-11x^2+4x+13}{(x+3)(2x-1)}. \qquad (2.22)$$

У рівнянні (2.21)

$$x \in R \setminus \left\{0; 2; \frac{5}{3}\right\}.$$

Підстановка $x \to \frac{x+3}{2x-1}$ переводить точки $0; 2; \frac{5}{3}$ відповідно в точки $-3; \frac{5}{3}; 2$. Крім того, з характеру підстановки випливає $x \neq \frac{1}{2}$. Тому в рівнянні (2.22) $x \neq -3; \frac{5}{3}; 2; \frac{1}{2}$. Область допустимих значень x в системі, яка складається з рівнянь (2.21) і (2.22), є перетином відповідних областей кожного з рівнянь (2.21) і (2.22), тобто

$$x \in R \setminus \left\{-3; \frac{5}{3}; 2; \frac{1}{2}; 0\right\}.$$

Виключаючи з цієї системи $f\left(\frac{x+3}{-3x+5}\right)$, отримаємо

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{2(x-1)}{x}, \left(x \neq -3; \frac{5}{3}; 2; \frac{1}{2}; 0\right).$$

Позначивши $\frac{x}{x-2} = z$, отримаємо $x = \frac{2z}{z-1} = z$. З умови

$$x \neq -3; \frac{5}{3}; 2; \frac{1}{2}; 0$$

отримуємо

$$z \neq \frac{3}{5}; -5; -\frac{1}{3}; 0,$$

а також $z \neq 1$, що визначається видом підстановки.

Підстановка $x \to \frac{2x}{x-1}$ дає $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Отже, функція $f(x) = \frac{x+1}{x}$ з областю визначення $R \setminus \left\{0; \frac{3}{5}; -5; -\frac{1}{3}; 1\right\}$ є розв'язком задачі 2.4, що і підтверджується перевіркою.

Звуження області визначення шуканої функції видаленням точок $x = -\frac{1}{3}; 1$ викликано методом розв'язання рівняння. Нескладні обчислення показують, що функція $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \neq -5; \frac{3}{5}; 0$ задовольняє вихідному рівнянню.

Дійсно, вважаючи в (2.21) $x = \frac{1}{2}$, отримаємо

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{7}{4} f(1) = -\frac{11}{2}.$$

Значення функції $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \neq -5; \frac{3}{5}; 0$, в точках $-\frac{1}{3}$ $і$ 1 відповідно рівні $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -2;\ f(1) = 2$ і задовольняють наведеним співвідношенням. Більш того, розв'язання рівняння (2.21) у класі функцій таких що

$D(f) = R \setminus \left\{-5; \frac{3}{5}; 0\right\}$ має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, \text{якщо } x \neq 1;\ -\frac{1}{3}; \\ a, \text{якщо } x = 1\ (a \in R); \\ \frac{7}{4}a - \frac{11}{2}, \text{якщо } x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

При розв'язанні задачі 2.4 детально викладені питання, позв'язані з областю визначення шуканої функції.

Рівняння (2.21) розв'язане, так як знайдена підстановка $x \to \frac{x+3}{2x-1}$, яка переводить дробово-лінійні функції $\frac{x}{x-2}$ і $\frac{x+3}{-3x+5}$ одну в одну. Мовою матриць це означає, що знайдена матриця $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ така, що $AX = kB$; $BX = la$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, k \neq 0, l \neq 0.$$

Задача 2.5. Знайти функцію f визначену при $x \in R \setminus \left\{0; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; -1\right\}$, яка задовольняє рівняння

$$3f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) - 5f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{8}{x-1}. \qquad (2.23)$$

Розв'язуємо матричне рівняння $AX=B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A оберненою є матриця $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Тоді $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Матриця X має вигляд $\begin{pmatrix} k & l \\ m & -k \end{pmatrix}$, тому застосуємо до рівняння (2.23) підстановку $x \to \frac{x}{2x-1}$. Останню зручно виконувати за допомогою матриць. Правій частині рівняння (2.23) відповідає матриця $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Застосування до неї підстановки $x \to \frac{x}{2x-3}$ рівносильне множенню $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ праворуч на $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. В результаті отримаємо $\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Таким чином, з рівняння (2.23) знаходимо

$$3f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) - 5f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) = \frac{16x-8}{-x+1}. \qquad (2.24)$$

Виключивши з системи, складеної з рівнянь (2.23) і (2.24), $f\left(\frac{x}{-3x+2}\right)$, маємо

$$f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right)=\frac{3x-4}{x-1}. \qquad (2.25)$$

З (2.23) бачимо, що $x \neq \frac{2}{3}; 2; 1.$ Підстановка зберегла ці обмеження. Крім того, $x \neq \frac{1}{2}.$ Покладемо $\frac{-x+1}{x-2}=z.$ Так як $x \neq \frac{2}{3}; 2; 1; \frac{1}{2},$ то $z \neq -\frac{1}{4}; 0; -\frac{1}{3}.$ Звідси $x=\frac{2z+1}{z+1}.$ Замінивши $x \to \frac{2x+1}{x+1},$ з (2.25) отримаємо

$$f(x)=\frac{2x-1}{x}, x \neq -\frac{1}{4}; 0; -\frac{1}{3}; -1.$$

Перевірка показує, що ця функція задовольняє умові задачі:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix};$$

$$3\cdot\frac{5x-4}{x-1}-5\cdot\frac{-3x+4}{-x+1}=\frac{8}{x-1}.$$

Як відомо, якщо $\{x, \varphi(x)\}$ –група, то $\{x, g\circ\varphi\circ g^{-1}(x)\}$ – також група [13]. Для розв’язання рівняння (2.24) можна застосувати групову підстановку $x \to g\circ\varphi\circ g^{-1}(x)$. Для реалізації даного методу зручно використовувати матричний апарат.

Задача 2.6. Розв’язати функціональне рівняння

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)+2f\left(\frac{3x+1}{-2x-2}\right)=\frac{x}{2x+2}, \qquad (2.26)$$

де функція $f(x)$ визначена на множині R.

В рівнянні (2.26) функція $g(x)=\frac{x}{x+1}.$ Їй відповідає матриця $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$ Викладений метод застосовується, якщо функція $h(x)=\frac{3x+1}{-2x-2}$ з матрицею $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}$ представлена у вигляді $h(x)=g\circ\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – дробово-лінійна функція, відмінна від константи з матрицею виду $\begin{pmatrix}k & l\\ m & -k\end{pmatrix}.$

Попередньо немає необхідності з’ясовувати, чи наділена функція $h(x)$ вказаною властивістю, як і немає необхідності знаходити функцію

$\varphi(x)$. Виконуючи підстановку $x \to g^{-1}(x)$, переведемо $h(x)$ в функцію $h \circ g^{-1}(x) = g \circ \varphi \circ g^{-1}(x)$, яка має вид $\frac{kx+l}{mx-k}$, тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x)$ такого ж виду.

Знайдемо функцію $h \circ g^{-1}(x)$. Матриця, що їй відповідає, дорівнює $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. В отриманій матриці діагональні елементи 2 і –2 протилежні числа. Отже, функція $\frac{2x+1}{-2}$ є твірним елементом циклічної групи порядку 2.

Підстановка $x \to g^{-1}(x)$ переводить (2.26) в рівняння

$$f(x) + 2f\left(\frac{2x+1}{-2}\right) = \frac{x}{2}\,(x \neq 1). \qquad (2.27)$$

Виконуємо заміну $x \to \frac{2x+1}{-2}$, отримаємо рівняння

$$f\left(\frac{2x+1}{-2}\right) + 2f(x) = \frac{2x+1}{-4}\left(x \neq -\frac{3}{2}\right). \qquad (2.28)$$

Із системи (2.27)-(2.28) $f(x) = \frac{3x+1}{-6}\left(x \neq 1, -\frac{3}{2}\right)$. Усуваємо обмеження на область визначення $f(x)$.

Задача 2.7. Розв'язати функціональне рівняння

$$xf\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + (x-3)f(2x+5) - f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right) = \frac{(x=2)(x+1)}{2x+3}, \qquad (2.29)$$

де функція $f(x)$ визначена на множині $R\backslash\{3; 5; 1; 2; -1\}$.

Позначимо через $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ матриці, які відповідають функціям, що стоять під знаком f в (2.29). Рівняння можна розв'язати, якщо знайти матрицю X, що має вигляд (2.28) і задовольняє співвідношенням $AX = B, BX = kC$. За цих умов $CX = lA$. Отримаємо

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до (2.26), матриця X задовольняє рівнянню $X^3 = kE$. Крім цього,

$$BX = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\mathrm{C}.$$

Отже, підстановка $x \to \frac{x+3}{-x-2}$ переводить вирази, що стоять під знаком f в

(2.29), один в одного. Виконуючи цю підстановку двічі, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xf\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+(x+3)f(2x+5)-f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)=\frac{(x+2)(x+1)}{2x+3}, \\ \frac{x+3}{-x-2}f(2x+5)+\frac{2x+3}{x+2}f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)-f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\frac{x+1}{x(x+2)}, \\ \frac{-2x-3}{x+1}f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)+\frac{x}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-f(2x+5)=-\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знайдемо

$$f(2x+5)=\frac{1}{2x+6}, x\neq -1; 0; -2; -\frac{3}{2}; -3$$

Після заміни $x \to \frac{x-5}{2}$ остаточно отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{x+1}, x\neq 3; 5; 1; 2.$$

Ця функція задовольняє задачі 2.4.

РОЗДІЛ 3
ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

При розв'язуванні рівнянь Коші істотно використовувались основні поняття математичного аналізу такі, як границя послідовності і функцій, неперервність, диференційованість та ін. [8]. Розглянемо деякі загальні методи розв'язування найважливіших класів функціональних рівнянь, заснованих на цих поняттях.

Граничний перехід

Задача 3.1. Розв'язати в класі неперервних функцій рівняння

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x, \qquad (3.1)$$

де $x \in R$.

Замінивши x на $\frac{x-1}{2}$, отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2}. \qquad (3.2)$$

Використовуючи ту ж заміну, із рівняння (3.2) поступово отримаємо

$$\frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{9}f\left(\frac{x-3}{4}\right) + \frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4},$$

$$\frac{1}{9}f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{1}{27}f\left(\frac{x-7}{8}\right) + \frac{5}{27}\cdot\frac{x-7}{8},$$

....

Методом математичної індукції можна довести, що

$$\frac{1}{3^n}f\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{5}{3^{n+1}}\cdot\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}. \qquad (3.3)$$

Склавши всі рівняння, починаючи з (3.2), отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)+\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4}+\dots+\frac{5}{3^{n+1}}$$
$$\cdot\left(\frac{x-2^{n++1}+1}{2^{n+1}}\right)\qquad(3.4)$$

Так як функція $f(x)$ неперервна, то при будь-якому фіксованому x

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x+1}{2^{n+1}}-1\right)=f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+1}{2^{n+1}}-1\right)\right)$$
$$=f(-1)$$

Тут $\lim_{n\to\infty}f\frac{x+1}{2^{n+1}}=0$. Із (3.1) легко помітити, що $f(-1)=-\frac{5}{2}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}f\left(\frac{x-2^{n++1}+1}{2^{n+1}}\right)=0.$$

Ліва частина рівності (3.4) не залежить від n, тому існує її границя при $n\to\infty$. Переходячи до границі в рівності (3.4), при $n\to\infty$ маємо

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4}+\dots+\frac{5}{3^{n+1}}\cdot\frac{x-2^{n++1}+1}{2^{n+1}}\right).\quad(3.5)$$

Права частина (3.5) є сумою трьох нескінченно спадних прогресій [12].

$$\frac{5}{6}x+\frac{5}{36}x+\dots+\frac{5}{6^{n+1}}x+\dots=x,$$
$$-\frac{5}{3}-\frac{5}{9}-\dots-\frac{5}{3^{n+1}}-\dots=-\frac{5}{2},$$
$$\frac{5}{6}+\frac{5}{36}+\dots+\frac{5}{6^{n+1}}+\dots=1.$$

Отже, $f(x)=x-\frac{3}{2}$, що і підтверджується перевіркою.

Проаналізуємо розв'язання задачі 3.1. Для рівняння (3.1) була застосована підстановка, яка перевела вираз, що стоїть під знаком невідомої функції f в одному члені рівняння, у вираз, який стоїть під знаком f в другому члені. Ця підстановка була повторена n раз. Отримали систему n лінійних рівнянь. Поступово виключаючи невідомі, отримаємо рівняння виду

$$f(x)=a_nf\big(b_n(x)\big)+c_n(x),$$

де a_n, $b_n(x)$, $c_n(x)$ – члени деяких послідовностей, n – фіксоване натуральне число.

В нашому випадку

$$a_n = \frac{1}{3^{n+1}},\ b_n(x) = \frac{x-2^{n++1}+1}{2^{n+1}},\ c_n(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2} + \frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4} + \cdots + \frac{5}{3^{n+1}}\cdot \frac{x-2^{n++1}+1}{2^{n+1}}.$$

Якщо існують границі при $n \to \infty$ послідовностей (a_n), $(b_n(x))$, $\big(c_n(x)\big)$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(x)$ є константою, то граничним переходом, використовуючи неперервність $f(x)$, знаходимо вираз для $f(x)$. Як завжди, перевірка є складовою частиною розв'язку.

Аналогічно задачі 3.1 можуть бути розв'язані в класі неперервних функцій рівняння виду

$$f(kx+b) = mf(x) + P(x),$$

$$f(kx+b) = f(x)\cdot a^{P(x)},$$

де $k > 1, |m| < 1, P(x)$ – многочлен, $a > 0$.

Задача 3.2. Знайти всі неперервні функції, визначені на множині дійсних чисел, що задовольняють рівнянню

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x$$

Позначивши $f(x) - x$ через $g(x)$, отримаємо

$$g(x^2) = -g(x). \qquad (3.6)$$

Нехай $x > 0$. Виконаємо в рівнянні (3.6) n раз заміну $x \to \sqrt{x}$. Тоді

$$g(x) = -g\big(\sqrt{x}\big),$$

$$-g\big(\sqrt{x}\big) = g\big(\sqrt[4]{x}\big),$$

....

$$(-1)^{n-1} g\big(\sqrt[2n-1]{x}\big) = (-1)^n g\big(\sqrt[2n]{x}\big).$$

Склавши рівняння, отримаємо

$$g(x) = (-1)^n g\big(\sqrt[2n]{x}\big).$$

Щоб позбутися від «незручного» множника $(-1)^n$, виконаємо заміну $x \to \sqrt[2n]{x}$

$$g(x) = (-1)^n g\left(\sqrt[2n]{x}\right) = g\left(\sqrt[4n]{x}\right). \qquad (2.7)$$

При будь-якому $x > 0$, враховуючи неперервність функцій $\ln x$ і e^x, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4n]{x} = e^{\ln \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4n]{x}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[4n]{x}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{lnx}{4n}} = e^0 = 1.$$

В силу неперервності $g(x)$, граничним переходом із (3.7) отримаємо

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(\sqrt[4n]{x}) = g\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[4n]{x}\right) = g(1).$$

Із (3.6) легко отримати

$$g(1) = g(0) = 0, \text{тобто за } x \geq 0 \ g(x) = 0.$$

Функція $g(x)$ – парна. Дійсно,

$$g(-x) = -g((-x)^2) = -g(x^2) = g(x).$$

Тому $g(x) = 0$ і за $x < 0$. Отже, умові задачі задовольняє єдина функція $f(x) = x$.

Задача 3.3. Розв'язати функціональне рівняння

$$f(2x +) + \frac{1}{9} f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3} f(x) + x, x \,\epsilon\, R, \qquad (3.8)$$

в класі неперервних функцій.

Виконавши заміну $x \to \frac{x-1}{2}$, отримаємо

$$f(x) + \frac{1}{9} f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{x-1}{2}. \qquad (3.9)$$

Складаючи (3.8) з рівнянням (3.9), помноженим на $\frac{1}{3}$, отримаємо

$$f(2x+1) + \frac{1}{27} f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{7-x}{6}$$

Це рівняння розв'язується аналогічно рівнянню (3.1). Знайдемо підстановку, що переводить $2x+1$ в $\frac{x-3}{4}$. Для цього покладемо $2x + 1 = \frac{t-3}{4}$

Звідси $x = \frac{t-7}{8}$. Виконавши n раз підстановку $x \to \frac{x-7}{8}$, отримаємо систему рівнянь, з якої знаходимо

$$f(2x+1) + (-1)^n \frac{1}{3^{3(n+1)}} f\left(\frac{x - 2^{3n+2} + 1}{2^{3n+2}}\right)$$

$$= \frac{7x-1}{6} + \cdots + (-1)^n \left(\frac{7x + 7 - 2^{3(n+1)}}{6^{3n+1}}\right).$$

Звідси при $n \to \infty$

$$f(2x+1) = \frac{36x}{31} - \frac{27}{217} \text{ або } f(x) = \frac{18}{31}x - \frac{153}{217},$$

що і підтверджується перевіркою.

В рівнянні (3.8) три доданки містять невідому функцію. Подібним образом розв’язується рівняння виду

$$f(kx+b) + \frac{1}{m^2} f\left(\frac{x-b}{k}\right) = \frac{1}{m} f(x) + P(x),$$

де $k > 1, m \geq 1, P(x) -$ многочлен.

Диференціювання

В деяких випадках для знаходження розв’язку функціонального рівняння доцільно продиференціювати обидві частини рівняння, якщо, звісно, похідна існує. В результаті отримаємо функціональне рівняння, яке містить і похідну невідомої функції [24]. Розв’яжемо це рівняння відносно похідної. Тоді невідома функція є однією із первісних для знайденої похідної. Цей метод вже використовувався при розв’язуванні рівнянь Коші в класі диференційованих функцій.

Задача 3.4. Знайти в класі функцій, що мають неперервні похідні, розв’язок рівняння

$$f(3x+2) = 3f(x), x\epsilon\, R. \qquad (3.10)$$

Спроби розв’язати рівняння методом граничного переходу не призведуть до бажаного результату. Ліва і права частини (3.10) є функціями від x. Продиференціюємо (3.10) і після скорочення отримаємо

$$f'(3x+2) = f'(x).$$

Це рівняння вже можна розв’язати методом граничного переходу. Виконавши підстановку $x \to \frac{x-2}{3}$, отримаємо ланцюг рівностей

$$f'(x) = f'\left(\frac{x-2}{3}\right) = f'\left(\frac{x-8}{9}\right) = \cdots = f'\left(\frac{x-3^n+1}{3^n}\right).$$

З огляду неперервності $f'(x)$, за $n \to \infty$, маємо

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{x-3^n+1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{x+1}{3^n} - 1\right) = f'(-1).$$

Отже, $f'(x) = k$, де $k = f'(-1)$. Первісна функція $f(x) = kx + b$. Підставивши в (3.10) $x = -1$, отримаємо $f(-1) = 0$. Крім того, $f(-1) = -k + b$, тобто $k = b$.

Легко перевірити, що $f(x) = k(x+1)$ задовольняє умові при довільному k.

При розв'язуванні ряду задач до бажаючого результату приводить повторне диференціювання обох функціональних рівнянь [19].

Задача 3.5. В класі функцій, що мають неперервні другі похідні, знайти розв'язок рівняння

$$f(5x+1) = 25f(x), x \epsilon R. \qquad (3.11)$$

Припускаючи, що рівняння (3.11) має розв'язок, двічі продиференціюємо обидві його частини. Маємо

$$f'(5x+1) = 5f'(x), \qquad (3.12)$$

$$f''(5x+1) = f''(x). \qquad (3.13)$$

Замінюючи поступово n разів $x \to \frac{x-1}{5}$, отримаємо із рівності (3.13)

$$f''(x) = f''\left(\frac{x-1}{5}\right) = f''\left(\frac{x-6}{25}\right) = \cdots = f\left(\frac{x - \frac{5^n-1}{4}}{5^n}\right).$$

При $n \to \infty$, маємо

$$f''(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x - \frac{5^n-1}{4}}{5^n}\right) = f''\left(-\frac{1}{4}\right) = a.$$

Первісна функція $f'(x) = ax + b$. Підставляючи в (3.12) $x = -\frac{1}{4}$, отримаєм $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$. Крім того, $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = a \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + b$, тобто $a = 4b$, $f'(x) = b(4x+1)$. Міркуючи аналогічно, отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{4}b(4x+1)^2 + c, f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 = c,$$

$$f(x) = \frac{1}{4}b(4x+1)^2.$$

Легко перевірити, що якщо $f(x)$ є розв'язком рівняння (3.11), то і $kf(x)$ задовольняє цьому рівнянню при будь-якій константі k. Таким чином, розв'язком задачі є функції $f(x) = k(4x+1)^2$ і тільки вони.

Розглянемо задачу, де похідну існуючої функції знаходять, виходячи з умови.

Задача 3.6. Знайти функції, визначені при $x > 0$, що має похідні і задовольняє рівнянню

$$f(xy) = f(x)f(y). \qquad (3.14)$$

Очевидно, $f(x) = 0$ є одним із розв'язків задачі. Далі виключимо цей тривіальний випадок.

Нехай $f(x)$ задовольняє (3.14) і $f(\alpha) \neq 0$ при деякому α. Тоді з (3.14) при $y = \frac{\alpha}{x}$ отримаємо

$$f(x) \cdot f\left(\frac{\alpha}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{\alpha}{x}\right) = f(\alpha) \neq 0.$$

Звідси, $f(x) \neq 0$ при всіх $x > 0$. Крім того, $f(x)$ строго додатна, так як $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. За умовою

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

існує при всіх $x > 0$. Скористаємось тим, що $f(x)$ задовольняє (3.14), отримаємо

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x + (1 + \frac{h}{x})\right) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x)\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x)}{x} \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - 1}{\frac{h}{x}}.$$

При $h \to 0$ і будь-якому фіксованому x дріб $\frac{h}{x}$ прямує до *0*.

Так як $f'(x)$ існує, то існує і $lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-1}{\frac{h}{x}}$, який не залежить від x. Позначимо його через с. Тоді

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{c}{x}. \qquad (3.15)$$

Помітивши, що $(ln\, f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, знайдемо первісну функції обох частин (3.15):

$$ln\, f(x)=c\, ln\, x+b. \qquad (3.16)$$

При $y=1$ з (3.14) отримаємо $f(x)\equiv 0$ або $f(1)=1$. Остання умова з (3.16) отримаємо $b=0$. Остаточно, $f(x)\equiv 0$ або ж $f(x)=x^c$ при довільному c.

Задача 3.7. Знайти диференційовану функцію $f(x)$, що переводить довільну арифметичну прогресію a,b,c в арифметичну прогресію $f(a),f(b),f(c)$.

Нехай $a=x,y$ – різниця прогресії. Тоді $b=x+y, c=x+2y$. Для того, щоб $f(x),f(x+y),f(x+2y)$ складали арифметичну прогресію, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $x,y\in R$

$$f(x)+f(x+2y)=2f(x+y). \qquad (3.17)$$

Диференціюючи обидві частини (17) при у при фіксованому х, отримаємо

$$f'(x+2y)\cdot 2=2f'(x+y) \qquad (3.18)$$

(похідна $f(x)$ дорівнює 0 як похідна константи).

Рівняння (3.18) справедливе для будь-яких $x,y\in R,$ так як x можна було обрати довільну. Поклавши в (3.18) $x=-y$, отримаємо $f'(y)=f'(0)$ для всіх $y\in R$. Позначимо $f'(0)$ через k.

Таким чином, похідна функції похідна $f(x)$ константа; $f(x)=kx+l$.

Перевірка показує, що лінійні функції $f(x)=kx+l$ при довільних $k,l\in R$ задовольняють умові задачі.

Метод Коші

Метод, за допомогою якого розв’язується рівняння адитивності неперервних функцій, є одним з небагатьох спільних методів розв'язання функціональних рівнянь. Він може бути успішно використаний у розв'язанні широкого класу рівнянь, зокрема

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y),$$

$$f(x+y) = f(x)+f(y)+f(x)\cdot f(y),$$

$$f(x+y) = f(y)\cdot f(x)^{1-\ln f(y)},$$

$$f(x+y) = f(x)^{\ln f(y)},$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)},$$

$$f(x+y) = \frac{f(x)\cdot f(y)}{f(x)+f(y)}$$

па ін.. Цей метод часто називають методом Коші [27]. Його застосовують для знаходження неперервних розв'язків функціональних рівнянь. Його значення полягає у наступному. Розв'язання за допомогою спеціально підібраних підстановок шукають поступово для натуральних, раціональних значень аргументу x, далі граничним переходом – для додатних дійсних значень аргументу.

Задача 3.8. Знайти всі неперервні функції, для яких

$$f(x+y) = f(x)+f(y)+f(x)f(y). \qquad (3.19)$$

Припустимо, що існує неперервна функція, визначена по всій числовій прямій, що задовольняє (3.19).

Замінивши у послідовно на $x, 2x, 3x, \ldots$ отримаємо:

$$f(2x) = 2f(x)+f^2(x) = (f(x)+1)^2-1,$$

$$f(3x) = 3f(x)+3f^2(x)+f^3(x) = (f(x)+1)^3-1$$

$$f(4x) = (f(x)+1)^4-1$$

…………………

Методом математичної індукції впевнимося в тому, що

$$f(nx) = (f(x)+1)^n-1 \qquad (3.20)$$

для $n \in N, x \in R$. Дійсно,

$$f\big((n+1)x\big) = f(x+nx) = f(x) + f(nx) + f(x)f(nx)$$
$$= f(x) + (f(x)+1)^n - 1 + f(x)((f(x)+1)^n - 1)$$
$$= (f(x)+1)^{n+1} - 1.$$

Тоді (3.20) виконується для всіх дійсних x і натуральних n. Далі поклавши в (3.20) $x = 1$ і позначивши $f(1) = \alpha$, отримаємо

$$f(n) = (\alpha+1)^n - 1.$$

Замінивши в (3.20) x *на* $\frac{m}{n}$, $m \in N, n \in N$, отримаємо

$$f(m) = (f\left(\frac{m}{n}\right) + 1)^n - 1.$$

Окрім того $f(m) = (\alpha+1)^n - 1$. Звідси, враховуючи, що

$$1 + f(x) = (1 + f\left(\frac{x}{2}\right))^2 \geq 0,$$

маємо

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (\alpha+1)^{\frac{m}{n}} - 1.$$

Отже, для додатних раціональних x розв'язком (3.19) є

$$f(x) = (\alpha+1)^n - 1.$$

Нехай тепер x – будь-яке додатне ірраціональне число. Відомо, що існує послідовність раціональних чисел $r_{1,}\ r_{2,} \dots, r_{n,}$ ..., що збігається до нього [2]. Тільки що було доведено, що

$$f\left(r_{1,}\right) = (\alpha+1)^{r_{1,}} - 1,$$
$$f\left(r_{2,}\right) = (\alpha+1)^{r_{2,}} - 1,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f(r_n) = (\alpha+1)^{r_n} - 1,$$

Послідовність $(f(r_n))$ збігається, так як $lim_{n\to\infty} r_n = x,$ *а* $f(x)$ – неперервна. Маємо

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{r_n\to x} f(r_n) = f(x).$$

Так як показникова функція $(1+\alpha)^x$ неперервна, то

$$\lim_{n\to\infty}((1+\alpha)^{r_n} - 1) = (1+\alpha)^x \text{ -}1.$$

Отже,

$$f(x) = (1+\alpha)^x - 1, x > 0, x \in R.$$

Виходячи з того, що область визначення $f(x)$ має 0 і від’ємні числа, то поклавши в (3.19) $x = 0$, знайдемо

$$f(y) = f(0) + f(x) + f(0)f(y),$$

тобто або $f(y) \equiv -1,$ або $f(0) = 0.$

При $y = -x, x > 0,$ з (3.19) отримаємо

$$\begin{aligned} 0 &= f(x-x) = f(x) + f(-x) + f(x)f(-x) \\ &= (1+\alpha)^x - 1 + f(-x) + ((1+\alpha)^x - 1)f(-x) \\ &= (1+\alpha)^x - 1 + f(-x)(1+\alpha)^x. \end{aligned}$$

Звідси

$$f(-x) = \frac{1-(1+\alpha)^x}{(1+\alpha)^x} = (1+\alpha)^{-x} - 1, x > 0.$$

Отже, $f(x) = (1+\alpha)^x - 1$ або $f(x) \equiv -1$. Безпосередньою підстановкою впевнимося, що ці функції задовольняють рівнянню (3.19):

$$-1 = (-1) + (-1) + (-1)(-1)$$

і

$$\begin{aligned} &(1+\alpha)^x - 1 + (1+\alpha)^y - 1 + ((1+\alpha)^x - 1\,)((1+\alpha)^y - 1) \\ &= (1+\alpha)^x + (1+\alpha)^y - 2 + (1+\alpha)^{x+y} - (1+\alpha)^x - (1+\alpha)^y \\ &+ 1 = (1+\alpha)^{x+y} = 1. \end{aligned}$$

Основна ідея методу Коші використані при розв’язанні наступної задачі.

Задача 3.9. Знайти неперервні функції $f: R \to R_+$, що переводять члени арифметичної прогресії $x, x+y, x+2y$ у відповідні члени геометричної прогресії $f(x), f(x+y), f(x+2y)$.

Використовуючи характеристичну властивість геометричної прогресії [3], отримаємо функціональне рівняння

$$\big(f(x+y)\big)^2 = f(x)\cdot(x+2y).$$

Заміною $x \to x - y$ воно зводиться до рівняння Лобачевського [17]:

$$\big(f(x)\big)^2 = f(x-y)f(x+y) \qquad (3.21)$$

Застосовуючи підстановку $x \to \frac{x}{2}, y \to \frac{x}{2}$ і позначимо $f(0) = a, a \neq 0,$ і $f(1) = b, b \neq 0,$ отримаємо $f(x)f(0) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, звідки

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{af(x)}. \qquad (3.22)$$

При $x = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$ звідси послідовно отримаємо:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{af(1)} = \sqrt{ab} = ac^{\frac{1}{2}}, c = \frac{b}{a},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{af\left(\frac{1}{2}\right)} = ac^{\frac{1}{4}},$$

………………………………………………..

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = ac^{\frac{1}{2^n}}, n \in N.$$

Покажемо що $f\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = ac^{\frac{2k-1}{2^n}}$, при $k \in N, n \in N$. Спочатку проведемо індукцію по n для правильних дробів виду $\frac{2k-1}{2^n}$ при фіксованому k. Якщо $n = 1$, то

$$k = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{af(1)} = \sqrt{ab} = ac^{\frac{1}{2}}.$$

Припускаючи справедливість рівності, що $\mathrm{f}\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = ac^{\frac{2k-1}{2^n}}$, покажемо, що воно виконується для дробів виду $\frac{2k-1}{2^{n+1}}$:

$$f\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = \sqrt{ac^{\frac{2k-1}{2^n}}} = \sqrt{aac^{ac^{\frac{2k-1}{2^n}}}} = ac^{ac^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}}$$

Тепер впевнимося, що відношення мають місце при довільному $k \in N$. При $k = 1$ воно вже доведено. Нехай воно виконується для правильних дробів виду $\frac{s}{2^n}$, де s – непарне. Тоді воно має місце для $\frac{2k+1}{2^n}$. Дійсно, поклавши в (3.21) $x = \frac{2k+1}{2^n}, y = \frac{k}{2^n}$, отримаємо

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) f\left(\frac{1}{2^n}\right) = (f(\frac{k+1}{2^n}))^2$$

або

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)ac^{\frac{1}{2^n}}. = a^2c^{\frac{2k+2}{2^n}}$$

(якщо парне число, то дріб можна скоротити).

Тож

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = ac^{\frac{2k+1}{2^n},}. \qquad (3.23)$$

Нехай тепер x – довільне дійсне число з проміжку $[0;1]$. Воно подано у вигляді нескінченного десяткового дробу

$$x = 0,a_1a_2 \dots a_n \dots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots,$$

де. $a_i = 0,1,\dots,9$ $(i = 1,2,\dots,n,\dots)$.

Аналогічно дійсне число $x \in [0;1]$ можна записати у вигляді

$$x = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \dots + \frac{p_n}{2^n} + \dots,$$

де $p_i = 0;1(i = 1,2,\dots,n\dots)$. Цей запис називають розкладом x у двійковий дріб [25]. Число x є границею послідовності її «двійкових наближень»:

$$x_1 = \frac{p_1}{2}, x_2 = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2}, \dots, x_n = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \dots + \frac{p_n}{2^n}, \dots$$

Легко помітити, що можна подати у вигляді

$$x_n = \frac{s}{2^n}, s \le 2^n.$$

Використовуючи неперервність функції $f(x)$ і c^x,переходячи до границі в обох частинах (3.23), отримаємо

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{s}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{s}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} a\overline{c2^n} = \lim_{n\to\infty} ac^{x_n}$$
$$= ac^{n\to\infty} = ac^x,$$

Тобто

$$f(x) = ac^x, x \in [0;1]. \qquad (3.24)$$

Нехай тепер $x \in [0;\infty[$. Очевидно, знайдеться таке n, що $\frac{x}{2^n} \in [0;1]$. З (3.22) послідовно маємо

$$(f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right))^2 = af\left(\frac{x}{2^n}\right) = a^{\frac{3}{2}}f^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \cdots = a^{\frac{2^{n+1}-1}{2^n}}f^{\frac{1}{2n}}(x).$$

Звідси, використовуючи (3.24),

$$a^2c^{\frac{x}{2^n}} = a^{2-\frac{1}{2^n}}\overline{f^{2n}}(x),$$

або, підносячи обидві частини до степеня 2^n, отримаємо для всіх $x \geq 0$ $f(x) = ac^x$.

Поклавши в (3.21) $x = 0$, отримаємо для $y > 0$

$$f(y)f(-y) = (f(0))^2 = a^2, f(-y) = \frac{a^2}{f(y)} = \frac{a^2}{ac^y} = ac^{-y}.$$

Таким чином, якщо існують функції, що задовольняють умові задачі, то вони мають вигляд $f(x) = ac^x, x \in R$.

Підставляючи знайдені функції в (3.21), побачимо, що вони справді далі задовольняють умову при довільній константі a.

Циклічність та неперервність

Вище розглядались розв'язки функціональних рівнянь вигляду

$$f^2(x) = x \qquad (3.25)$$

таких, що $f^k(x) \neq x$ при $k < n$. Ці розв'язки утворюють елементи циклічних груп $n -$ го порядку.

Так, функції $\frac{1}{x}$; $\sqrt{1-x^2}, x \in [0;1]; a - x$ є твірними елементами циклічних груп другого порядку. Функції $\frac{1}{2-4x}, x \neq 0$; $\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}, x \neq 1$, породжують циклічні групи третього порядку. Циклічна група з твірними елементом $\frac{x-1}{x+1}, x \neq 0; 1$, має четвертий порядок.

Звісно, звертає увагу на себе те, що серед наведених розв'язків при $n \geq 3$ немає жодної неперервної функції. Виявляється, марно шукати неперервні розв'язки рівняння (3.25) для $n \geq 3$. Доведемо це твердження.

Нехай $g(x)$ – неперервна на деякому проміжку А функція $g : A \to A, g^m(x) = x$. Тоді з рівності $g(x) = g(y)$ випливає

$$x = g^m(x) = g^m(y) = y,$$

тобто для довільних $x, y \in A\, p\, x \neq y$, випливає $g(x) \neq g(y)$. Тому функція $g(x)$ є або строго зростаючою, або строго спадною на А [4]. Якщо

$g(x) -$ зростаюча, то, припускаючи, що $g(x_0) > x_{0,}$ $x_0 \in A$, отримаємо

$$x_{0,} < g(x_0) < g^2(x_0) < \cdots < g^{m-1}(x_0) < g^m(x_0) = x_0$$

що неможливо.

Аналогічний результат має місце, якщо знайдеться така точка $x_1 \in A$, що $g(x_1) < x_1$. Тоді $g(x) = x$ для всіх $x \in A$, а тотожна функція x породжує циклічну групу першого порядку.

Нехай тепер $g(x) -$ спадна на А функція, тоді з нерівності $x < y$ випливає

$$g(x) > g(y), g^2(x) < g^2(y),$$

тобто функція

$$h(x) = g^2(x) = g(g(x))$$

є зростаючою. Для цієї функції

$$h^m = (g^2)^m = (g^m)^2 = x^\circ x = x.$$

Вище було доведено, що якщо $g^m(x) = x$ i $g(x) -$ строго зростаюча функція, то $g(x) = x$. Тому

$$h(x) = g^2(x) = x,$$

$g(x) -$ твірний елемент циклічної групи другого порядку.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянуто основні положення, що стосуються розв'язання функціональних рівнянь на різних класах функцій, а також методів розв'язування функціональних рівнянь із застосуванням апарату математичного аналізу та із залученням групового підходу та теорії матриць та перетворень. Зокрема, можна відмітити наступні важливі положення.

Одним з найбільш досліджуваних в математиці є функціональне рівняння Коші:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad D(f) = R. \ (*)$$

яке виражає так звану «властивість адитивності»: значення адитивної функції від суми двох чисел дорівнює сумі її значень від кожного з цих чисел. Лінійна однорідна функція $f(x) = ax$ задовольняє даному рівнянню. Формула

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$$

що дає значення будь-якої адитивної функції f, може буде використана для всіх раціональних значень аргументу (а не тільки для додатних). Крім того, будь-який розв'язок рівняння (*) – непарна функція.

При розв'язуванні функціональних рівнянь найчастіше застосовують метод підстановок, сенс якого полягає у наступному. Припустимо, що рівняння має розв'язок. Застосовуємо до змінних, які входять у функціональне рівняння, деякі підстановки. Отримуємо систему рівнянь, однією з невідомих якої є шукана функція. Після розв'язування системи безпосередньою перевіркою потрібно переконатися, що знайдена функція задовольняє умовам задачі. Проте основна складність при використані цього методу у підборі вдалих підстановок. В такому випадку для знаходження розв'язку рівняння можна застосувати теорію груп, оскільки іноді у функціональному рівнянні вирази, що стоять під знаком невідомої функції, є значеннями елементів деякої групи від однієї і тієї ж функції. Після заміни цієї функції на x отримуємо рівняння, яке розв'язується викладеним методом підстановки. Крім того, для застосування методу підстановок можна використовувати теорію матриць та композиції дробово-лінійних функцій, що іноді дозволяє більш раціонально розв'язати деякі функціональні рівняння.

При розв'язуванні рівнянь Коші істотно використовуються основні поняття математичного аналізу такі, як границя послідовності і функцій, неперервність, диференційованість та ін. Так, використовуючи неперервність $f(x)$, за допомогою граничного переходу можна знайти вираз для $f(x)$. В деяких випадках для знаходження розв'язку функціонального рівняння доцільно продиференціювати обидві частини рівняння, якщо, звісно, похідна існує. В результаті отримаємо функціональне рівняння, яке містить і похідну невідомої функції. Розв'яжемо це рівняння відносно похідної, тоді невідома функція є однією із первісних для знайденої похідної. Цей метод використовується при розв'язуванні рівнянь Коші в класі диференційованих функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андреев А.А. Функциональные уравнения / Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н., Савин А.Н., Саушкин И.Н. – Самара: В мире науки, 1999. – 128 с.
2. Аносов Д.В. Проблемы модернизации школьного курса математики/ Д,В. Аносов // Математика в школе. – 2000. – № 1. – С. 2-4.
3. Арнольд И.В. Теоретическая арифметика. – М.: ГУПИ, 1938. – 480 с.
4. Ацел Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // Успехи математических наук. – 1956, т. 11. – С. 3-68.
5. Берсенева З.П. О формировании у учащихся понятия алгебраической операции / З.П. Берсенева // Математика в школе. – 1978. – № 5. – С.12-17.
6. Блюмин С.Л. Класс функциональных уравнений типа / С.Л. Блюмин // Фундаментальные исследования. – 2008. – № 3. – С. 104-105.
7. Бродский Я.С. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – К.: Вища школа. Головное издательство, 1983. – 96 с.
8. Виленкин Н.Я. Современные основы школьного курса математики / Виленкин Н.Я., Дуничев К.И., Калужнин Л.А., Столяр А.А. – М.: Просвещение, 1980. – 329 с.
9. Виленкин Н.Я. Алгебра для 9 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1998. – 348 с.
10. Вишенський В.А. Відношення і функції. – К.: Вища школа, 1972. – 112 с.
11. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. Алгебра: Учебник. В 2-х ч. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 416с., ил.

12. Гнеденко Б.В. Статическое мышление и школьное математическое образование // Математика в школе. – 1999. – №6. – С.5-8.
13. Головинский И. А. Ранняя история аналитических итераций и функциональных уравнений. // Историко-математические исследования. М.: Наука, вып. XXV, 1980. – С. 25-51.
14. Гросман І., Магнус В. Группы и их графы. – М.: Мир, 1971. – 276 с.
15. Игнатенко Н. Я. Некоторые проблемы модернизации отечественного и зарубежного школьного математического образования. // Научно-практическая конференция. – Ялта: КГГИ, 1999. – С. 5-10.
16. Ильин В.А. Методы решения функциональных уравнений // Соросовский образовательный журнал, 2001. – № 2. – С. 116 – 120.
17. Карп А.П. Даю уроки математики…: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1992. – 191 с.
18. Концепция математического образования в 12-летней школе // Математика (приложение к «Учительской газете»). – 2000. – №7. – С. 1-5.
19. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов. – М: Просвещение, 1991. – 146 с.
20. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения.– СПб.: Лань, 1997. – 160 с.
21. Мерзляк А. Г., Полянський В. Б., Якір М. С. Алгебра 9: Підручник для класів з поглибленим вивченням математики. – Харків: Гімназія, 2009. – 214 с.
22. Метельский Н.В. Пути совершенствования обучения математике: Проблемы современной методики математики. – Минск: Университетское, 1989. – 160 с.
23. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Сост. Черкасов Р.С., Столяр Е.С. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

24. Монахов В.М. Проблемы дальнейшего развития факультативных занятий по математике // Математика в школе. – 1981. – №6. – С.8-10.
25. Нечепуренко М.И. Итерации вещественных функций и функциональные уравнения. – Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 1997.– 228 с
26. Панамарчук В.Ф. Школа учит мыслить. – М.: Просвещение, 1979. – 144 с.
27. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теорія характеристик и ее применение к аналитическим функциям // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. Бишкек: Илим, 2004. – С. 37–42.
28. Сабирова Х.С. Классификация дифференциальных уравнений по характеристическим свойствам их решений //Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики // Тез. докл. международной научной конференции. – Алматы: КазНУ, 2005. – С. 167.
29. Семенович О.Ф. Геометрія. Аксіоматичний метод. – К.: Радянська школа, 1976. – 166 с.
30. Смышляев В.К. Практикум по решению задач школьной математики. – М: Просвещение, 1978. – 126 с.
31. Трайнин Я.Л. Основания геометрии. – М.: Учпедгиз, 1961. – 186 с.
32. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах: том 1. – М.: Наука, 1968. – С. 157-162.
33. Функциональные уравнения. – К.: Вища школа. Головное издательство, 1983. – 96 с.
34. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 207 с.
35. Birkhoff G.D. General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – 12. – P. 243-28.

36. Carroll M. The Natural Chain of Binary Arithmetic Operations and Generalized Derivatives [arXiv.org/math.HO/0112050]

37. Kuczma M. On the functional equation φn(x) = g(x). Ann. Polon. Math. 11 (1961) 161—175.

38. Kuczma M. Functional equations in a single variable. Polska Akademia Nauk. Monografie matematyczne, t. 46. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1968.

39. Kuczma M. An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Warszawa — Kraków — Katowice: Polish Scientific Publishers & Silesian University, 1985.