МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра фізики та методики її навчання

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА КОНСТАНТА ЧИСЛО ЕЙЛЕРА У ЗАГАЛЬНОМУ І ТЕОРЕТИЧНОМУ КУРСАХ ФІЗИКИ ТА АСТРОФІЗИКИ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “магістр”

Виконала: студентка 2 курсу, групи 15-211М
Спеціальності 014 Середня освіта (Фізика)
Освітньо-професійної програми
Середня освіта (Фізика)
Журавльова Ірина Олександрівна

Керівник
доктор пед. наук, кандидат фіз.-мат. наук
проф. Кузьменков С.Г.

Рецензент
кандидат фіз.-мат. наук
доц. Бистрянцева А.М.

Херсон-2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Всесвіт можна охарактеризувати певними числами – фундаментальними константами. Величини, що не змінюють свого значення протягом певного часу – константи. Прикладами математичних констант можна назвати число π, число Ейлера *e*, константу Піфагора $\sqrt{2}$, коефіцієнти многочленів, уявну одиницю *i*; масу протона m_p ,гравітаційну сталу *G*, швидкість світла *c* тощо.

За допомогою основних чисел, що відносять до фундаментальних констант, можна описати все: і ріст сніжинок, і вибух гранати, і рух галактик [1].

На запитання, що таке число *e*, можна отримати відповідь: *e* – це основа натуральних логарифмів, що можна визначити так [3, 9, 28]:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \approx 2{,}7183\ldots$$

Число Ейлера *e* відносять до десяти фундаментальних констант, на яких тримається світ [1].

Ранню історію світової константи *e* дослідили у своїх роботах Я. Бернуллі та В. Отред. Крім того, з даним числом працювали, Дж. Неппер автор роботи «Опис дивовижної таблиці логарифмів» [1], Ґ. Лейбніц, Х. Гюйґенс, Л. Ейлер, Дж. Стірлінґ, В. Ефрос та ін. Л. Ейлер відкрив число у 1736 році, описавши особливе число у своїй книзі «Mechanica». Леонарда Ейлера вважають найпродуктивнішим математиком за всю історію. Його роботи підштовхували до нових відкриттів інших вчених. Один з найкращих фізиків, Річард Фейнман, у лекціях з фізики [28] назвав формулу Ейлера «примітною формулою в математиці» [1,26]. Ще один відомий математик, Майкл Атья, назвав дану формулу «… математичним аналогом фрази Гамлета – «бути чи не бути» – дуже короткою, стислою, але водночас надзвичайно глибокою» [1,30,26].

Число e вважають свого роду двійником π. Якщо π відповідає за простір, то e – за час, і також проявляє себе майже повсюди. π та e трансцендентні числа, їх не можна виразити через дроби та корені [1, 27].

Число e використовують для розрахунків степеневого приросту. Іншими словами, ми використовуємо число Ейлера, коли бачимо швидкий зріст чи зменшення [1, 27, 31].

Актуальність дослідження полягає у висвітленні зв'язку математичної константи числа Ейлера e з фізичними та астрономічними закономірностями. Його невід'ємну властивість під час поширення електромагнітних хвиль у вакуумі, описом яких є експоненціальна функція. Розв'язання диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, за наявності уявної частини функції, у якій присутні гармонічні коливання, що не гаснуть. А також, визначення важливості трансцендентного числа у стабільності Сонячної системи та факту, що e – єдине число, що пригнічує резонанс. Представляє інтерес аналіз твердження, що «глобальне масштабування за числом Ейлера стабілізує весь Всесвіт [31, 37], від атомів до галактик та міжгалактичного простору».

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дипломна робота виконувалась відповідно до тематичного плану наукових досліджень кафедри фізики та методики її навчання: «Інноваційні освітні технології навчання фізики та астрономії у закладах освіти різних рівнів» (реєстраційний номер №0119U101144 від 19.03.2019).

Мета дослідження полягає у розкритті причин поширеності числа Ейлера у фізичних законах і теоріях, визначенні зв'язку числа e з фізичними та астрономічними закономірностями.

Для досягнення мети слід вирішити **наступні завдання:**

- Підбір та аналіз літератури з теми дослідження.

- Опрацювання способів введення числа *e*.
- Розгляд основних тверджень, що стосуються числа Ейлера та фізичних, астрономічних закономірностей.
- Застосування одержаних результатів для розв’язання задач з використанням числа *e*.

Об'єкт дослідження – число Ейлера *e*.

Предмет дослідження – задачі, у процесі розв’язання яких використовують число *e*, а також формули та закони, у яких невід’ємною частиною є число Ейлера.

Для досягнення поставленої мети у ході дослідження було використано наступні **методи**: аналіз і синтез науково-методичних та теоретичних джерел з фізики, математики, астрономії; вивчення нормативних документів, законів та положень; аналіз теоретичних та практичних методик підготовки студентів фізико-математичних факультетів; вивчення низки означень числа Ейлера та способів його виникнення та введення.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в уточненні причин появи числа Ейлера у конкретних фізичних законах і теоріях.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що теоретичний та практичний матеріал роботи може використовуватись викладачами у процесі формування цілісної природничо-наукової картини світу, а також студентами під час підготовки до практичних та семінарських занять з математичного аналізу, фізики, астрономії та астрофізики.

Апробація результатів дослідження – основні положення проведеної роботи доповідалися на засіданнях кафедри фізики та методики її вивчення, підготовлена стаття на основі завдань наукової роботи до альманаху «Магістерські студії».

РОЗДІЛ 1
ЧИСЛО ЕЙЛЕРА ЯК ОДНА З ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ КОНСТАНТ У СУЧАСНІЙ НАУЦІ

1.1. Огляд загальних фундаментальних констант

Математична константа – величина, значення якої не змінюється. Це головна відмінність від змінної. Як правило, це дійсне або комплексне число, яке виводять у самій математиці, тому на відміну від фізичних констант, математичні не залежать від фізичних вимірювань [3, 8].

До констант можемо віднести число π, число Ейлера e, константу Піфагора $\sqrt{2}$, уявну одиницю i, константу Фейгенбаума δ. Визначені сталі – це інваріанти, що є точними безрозмірними числами в математиці й наближеними вимірними величинами в експериментальній науці [20]. У математиці також використовують невизначені сталі, що мають довільне значення, не змінюючи при цьому суттєвих властивостей математичного об'єкта [3].

Для зручності використання констант, у математиці прийняті символи, такі як 1 та π. Константи, як математичний об'єкт, визначають строго. Поняття константи залежить від основних чисел, натуральних чисел N, що визначають з використання теорії множин. Раціональними числами Q є всі дроби цілих чисел $(a, b) \in N,\ b \neq 0$. У математичному записі, $Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$. Відповідно, дійсні числа R можна утворити з раціональних Q, комплексні C – із дійсних R [1, 3].

У природничих науках, константи представляють десятковими числами. Фізична константа, може мати власну точність і одиниці вимірювання. Вона характеризує не окремі тіла чи процеси, а фізичні властивості нашого світу в цілому. Фундаментальні фізичні константи використовують у загальній і теоретичній фізиці під час математичного опису навколишнього світу. Їх відкриття вважають видатним досягненням фізичної науки, оскільки фізичні константи надають нам найбільш загальні, основоположні властивості спостережуваного Всесвіту. Тобто, фундаментальними слід вважати константи, що наведені у таблиці 1.1 [18, 19].

Таблиця 1.1

Фундаментальні математичні і фізичні константи

Константа	Числове значення	Автор і рік введення	Автор і рік вимірювання
π	3,141593	У.Джонс, 1706, Л.Ейлер, 1736	?
e	2,718282	Л.Ейлер, 1736	Л.Ейлер, 1736
c	$299792458\frac{м}{с}$	Дж.Максвел, 1864	О.Рьомер, 1676
G	$6{,}673(10)\cdot 10^{-11}\ \frac{м^3}{кг\cdot с^2}$	І.Ньютон, 1687	Г.Кавендіш,1798
e	$1{,}602176\cdot 10^{-19}\,Кл$	Дж.Стоней, 1891	Р.Міллікен, 1906-1916
$\hbar$	$1{,}054573\cdot 10^{-34}\,Дж\cdot с$	М.Планк, 1900	Р.Міллікен, 1914
m_e	$9{,}109382\cdot 10^{-31}\,кг$	Дж.Томсон, 1897	Р.Толмен, Т.Стюарт, 1916
m_p	$1{,}672622\cdot 10^{-27}\,кг$	Е.Резерфод, 1919	Е.Резерфод, 1919
m_n	$1{,}674927\cdot 10^{-27}\,кг$	Е.Резерфод, У.Харкінс, 1920	Дж.Чедвик, 1932
N	3	І.Кант, 1747	Аристотель, IV ст..до н.е.
H	$(71\pm 10)\,км/(с\cdot Мпк)$	Е.Габбл, 1929	Е.Габбл, 1929

1.2. Введення і визначення числа Ейлера *e*.

Число e називають числом Ейлера або числом Непера, що грає надзвичайно важливу роль у диференціальному та інтегральному численнях, також у багатьох галузях математики і фізики. Число e відкрив Леонард Ейлер, але математик Якоб Бернуллі також працював з ним, коли рахував складний відсоток. Із вивчення складних відсотків бере початок приблизне значення числа $e = 2{,}71828...$, і є границею для $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при тому, коли n прямує до нескінченності. Але Бернуллі не називав число 2,71828 числом *e*. Ейлер, працюючи з даним числом підніс функцію e в степінь x, результати своєї роботи описав у книзі «Analysis of Infinity» [1, 27, 31].

Також число *e* можна розрахувати як суму нескінченного ряду:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \qquad (1.1)$$

Неявно константу спостерігають у публікаціях Непера 1618 року, тому і називають іноді «неперовим». Неявно, тому що автор навів лише таблицю натуральних логарифмів, а саму константу не визначив. Але вищезгадана назва не зовсім коректна, адже у Непера логарифм числа x дорівнював $10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right)$ [3, 13].

Перше відоме використання цієї константи, де її позначали літерою *b*, зустрічають в листах Ґотфріда Лейбніца Християну Гюйґенсу, 1690 – 1691 роки. Літеру *e* почав використовувати Леонард Ейлер, у 1736 році, описавши особливе число у своїй книзі «Mechanica». Відповідно, e називають числом Ейлера. Хоча згодом деякі учені використовували літеру *c*, літеру *e* застосовували частіше, що на сучасному етапі є загальноприйнятим [31].

Чому обрали саме літеру *e*, точно невідомо. Це пов'язують з тим, що з неї починається слово *exponential,* що в перекладі означає «показниковий», «експоненціальний». Інше припущення полягає в тому, що літери *a*, *b*, *c* і *d* досить широко використовували в інших цілях, *e* була першою «вільною» літерою. Неправдоподібним є припущення, що Ейлер обрав її як першу літеру свого прізвища (німецькою *Euler*) [26, 30].

Розглянемо, які значення приймає друга чудова границя. Якщо геометрична ідея числа π – це відношення довжини кола до його діаметра, то *e* – основа натуральних логарифмів. Тому, число *e* за означенням – границя функції $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ за $x\to\infty$ [3, 31].

Таблиця 1.2

Значення другої чудової границі

x	y	=
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	2
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2,25
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$	2,3703703702…
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$	2,5937424601…
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$	2,7048138294…
1000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$	2,7169239322…
∞	$\lim\limits_{x\to\infty}$	2,7182818284590…

Але подібне означення другої чудової границі не наочне.

Тому, розглянемо поведінку наступної функції $y = k^x$ [31]. Функція має унікальні властивості для $k = e$, графічно матиме вигляд (рисунок 1.1):

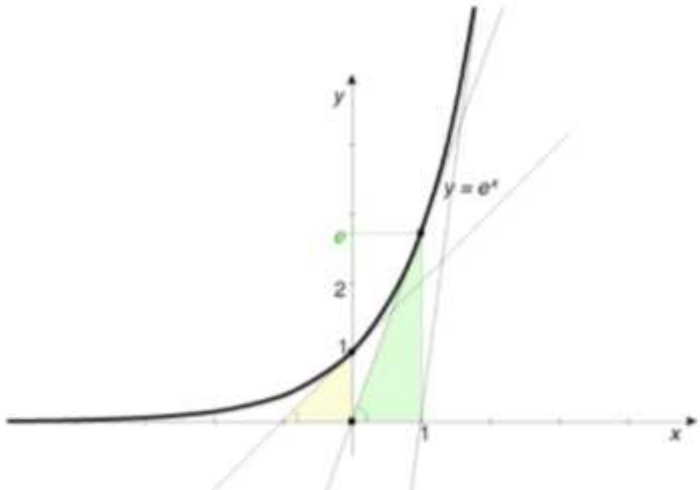


Рис. 1.1. Графік функції $y = k^x$

Далі розглянемо положення дотичних:

Таблиця 1.3.

Положення дотичних функції $y = k^x$

Точка	*Значення e*	*Дотична*
1	$e^1 = e$	у точці $x = 1$, проходить до осі абсцис під $\angle tg = e$
0	$e^0 = 1$	у точці $x = 0$, проходить до осі абсцис під $\angle tg = 1$

У точці 2 значення функції e^2 знову збігається з тангенсом кута нахилу дотичної до неї. У результаті, маємо, що дотичні перетинають вісь абсцис у точках -1, 0, 1, 2 і т. д. Серед усіх функцій $y = k^x$ (наприклад, $y = 2^x, y = 10^x$, $y = \pi^x$) функція $y = e^x$ – єдина, має такі властивості, тобто, щоб тангенс кута її нахилу в кожній її точці збігався із значенням самої функції. Отже, за означенням, значення цієї функції збігається із значенням її похідної в цій точці: $\left(e^x\right)' = e^x$. Тому, саме число $e = 2{,}7182818284590...$ слід підносити до степеню, щоб отримати вищезазначені результати.

Нині число Ейлера *e* визначають як $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828.$

Використавши формулу бінома Ньютона [2,10], можна отримати числовий ряд для обчислення числа *e*:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\binom{n}{0}\cdot 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{1}{1!}\cdot 1 + \tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{3!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right) + \cdots\right) =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \cdots. \tag{1.2}$$

РОЗДІЛ 2
ЗНАЧУЩІСТЬ ЧИСЛА ЕЙЛЕРА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Застосування числа *e* в диференціальному та інтегральному численні

Експоненціальна функція є функцією виду: $f(x) = ab^x$, де b – дійсне невід'ємне число, що не дорівнює 1, x – показник степені. Для дійсних чисел c і d функція форми також є експоненціальною функцією, адже її можна записати наступним чином: $f(x) = ab^{cx+d}$ [29, 30].

Експоненціальні функції – функції дійсної змінної, тому характеризуються тим, що швидкість зростання похідної такої функції прямо пропорційна значенню функції. Константа пропорційності такого відношення є натуральним логарифмом з основою b: $\frac{d}{dx}b^x = b^x \log_e b$ [13, 27, 31].

Для $b>1$, функція зростає і функція завжди невід'ємна, для $b<0$ – функція спадна, але для $b=1$ функція стала.

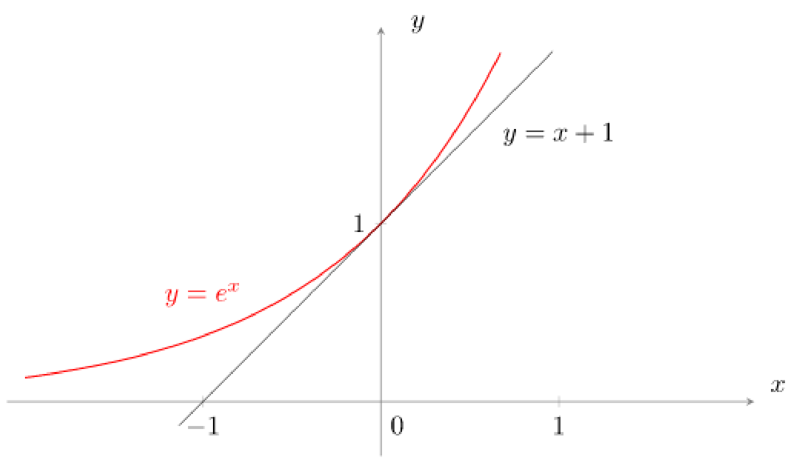


Рис. 2.1. Графік функції $y = e^x$ та її дотичної

Константа $e = 2{,}71828..$ є унікальною базою, для якої коефіцієнт пропорційності дорівнює 1, тому функція є власною похідною:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \log_e e = e^x .$$

Також функцію e^x називають «природною експоненціальною функцією» або просто «експоненціальною функцією» [31]. Оскільки, будь-яку експоненціальну функцію можна записати в термінах природної експоненти як, з обчислювальної та концептуальної точок зору, зручно звести вивчення експоненціальних функцій до цієї конкретної. Відтак, природну експоненту позначають: $\exp(x) b^x = e^{x \log_e b}$, $x \to e^x$ або $x \to \exp x$ [31, 32].

Позначення $\exp(x) b^x = e^{x \log_e b}$ зазвичай використовують для більш простих показників степеню, а $x \to e^x$ переважно, коли показник степеню є складним виразом. Оскільки x зростає, то і графік є зростаючим. Графік завжди перебуває вище осі x і стає найбільш близьким до осі за найбільших від'ємних x, тому вісь x є горизонтальною асимптотою. Рівняння означає, що нахил дотичної до графіка в кожній точці дорівнює його y – координати у цій точці. Тому його обернена функція – натуральний логарифм [31, 35].

$$y = e^x \frac{d}{dx} e^x = e^x \log, \ln, \log_e .$$

Експоненціальна функція задовольняє фундаментальну мультиплікативну тотожність: $e^{x+y} = e^x e^y$ для всіх $x, y \in$ R.

Подібна функція виникає щоразу, коли зростає або зменшується зі швидкістю, пропорційної її поточному значенню [31, 34].

2.2. Комбінаторне значення числа Ейлера

Число e ірраціональне, трансцендентне число. Друга чудова границя виникла внаслідок розв'язування задачі про складні відсотки, спрощений варіант якої формулюють подібним чином:

Задача 1

На депозит у банк кладуть 1 гривню під 100% річних, причому, відсоток нараховують у кінці строку. У результаті, клієнт банку отримаєте 2 гривні. Яку суму отримає клієнт, якщо відсотки нараховуватимуть протягом року періодично (наприклад, двічі на рік, щокварталу, щомісяця, щотижня і т. д.) і він докладатимете нараховані відсотки до депозиту [27, 31]?

Розв'язання виглядатиме наступним чином:

- Якщо відсоток нараховують двічі на рік, то в кінці першого періоду клієнт отримає 50% $\left(\frac{100\%}{2}\right)$, що зразу ж додасть до депозиту. Відсотки за друге півріччя нарахують вже на суму 1,5 грн. У результаті в кінці строку: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2{,}25$ грн.

- Якщо виплату відсотків поділити на 4 однакові частини, то отримаємо, відповідно $(1+0{,}25)^4=2{,}4414$ грн.

- Якщо виплата буде щомісячною, то результат матиме вигляд: $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=2{,}613035$ грн.

- Для довільного n кінцева сума буде $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Узагальнення цієї задачі (з довільною відсотковою ставкою p та початковою сумою s) легко звести до вже існуючої [27, 31].

2.3. Розв'язування задач за допомогою числа e

Задача 1

Зв'язок π і e. Напишіть відому формулу, що пов'язує числа π, e та уявну одиницю i [18].

Розв'язання:

З формули Ейлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ за $z = \pi$, матимемо $e^{i\pi} = -1$ [4].

Задача 2

Обчислення числа *e*. Відоме розкладання функції e^x у степеневий ряд за формулою Маклорена: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$ де залишковий член у формі члена Логранжа не перевищує $R_{n+1}(x) < \frac{e}{(n+1)!}$ [18].

Розв'язання:

Підставляючи у ряд розкладання e^x за формулою Маклорена $x = 1$, отримуємо

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1),$$

де

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Проаналізувавши розв'язання задач 2 і 3, запишемо доведення формули Ейлера з використанням формули Маклорена. Розкладемо функцію e^{ix} у ряд Тейлора в околицях точки $a=0$ (у ряд Маклорена) за степенем x, отримуємо:

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+...=$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)+i\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right),$$

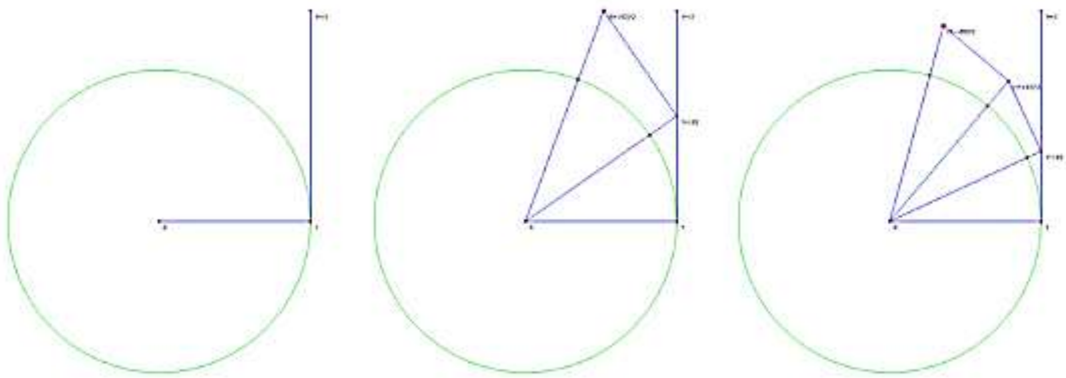
але

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...=\cos x$$

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=\sin x$$

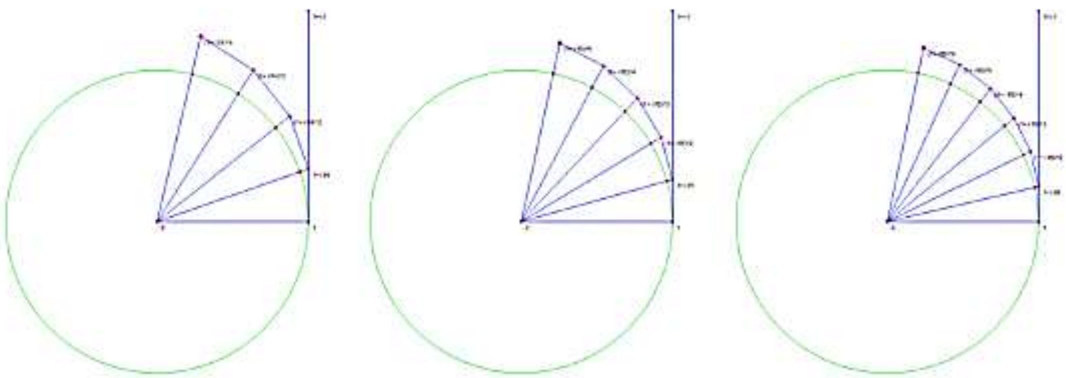
Тому, $e^x=\cos x+i\sin x$, що і слід було довести.

Доцільно розглянути наочну демонстрацію. Відомо, що $e^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, нижче наведені зображення, що демонструють, що границя $e^{i\varphi}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n$ відповідає точці, яка розташована на одиночному колі і довжина дуги від цієї точки до точки 1 дорівнює φ. Частково це пов’язано з тим, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ [27, 31].



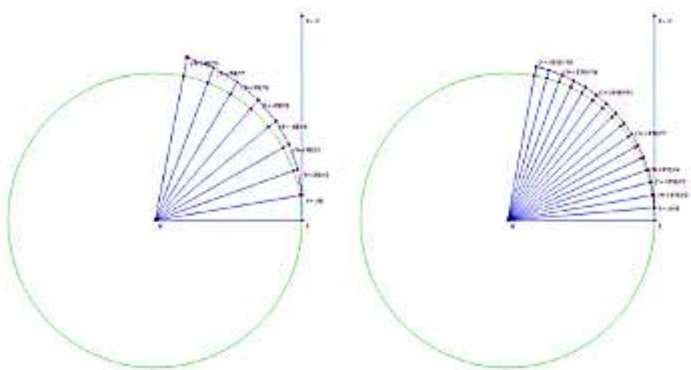
n=1 n=2 n=3

Рис. 2.2. Розташування дуги до точки 1



n=4 n=5 n=6

Рис. 2.3. Розташування дуги до точки 2



n=8 n=16

Рис. 2.4. Розташування дуги до точки 3

РОЗДІЛ 3
ЧИСЛО ЕЙЛЕРА У ФІЗИЧНИХ ТА АСТРОНОМІЧНИХ ЗАКОНОМІРНОСТЯХ

3.1. Трансценденте число *e* як основа функції комплексної змінної: однорідність часу та простору

Математичне визначення числа *e* за допомогою ряду не прояснює його зв'язок з будь-якими фізичними чи природними явищами. Тому розглянемо стандартне явище поширення електромагнітних хвиль у вакуумі. Відомо, що хвилю, яка не гасне в часі, можна описати за допомогою косинусоїди або як суму синусоїди та косинусоїди. У математиці, фізиці, електротехніці подібну хвилю, амплітуда якої дорівнює 1, описує експоненціальна функція $e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t$, де β – частота гармонічних коливань. Це відома математична формула – формула Ейлера. Незвична форма числа *e* з її показником вказує на наявність коливань, що описує косинусоїда та синусоїда [9].

Незатухаюча хвиля демонструє дотримання збереження закону енергії для електромагнітної хвилі у вакуумі. Така ситуація існує за «пружної» взаємодії хвилі з середовищем без втрати її енергії. Б. Горобець висловлював подібне наступним чином, «якщо перенести початок відліку по осі часу, енергія хвилі збережеться, тому що у гармонійної хвилі залишається та сама амплітуда і частота, тобто енергетичні одиниці, а зміниться лише її фаза, частина періоду, що віддалена від нового початку відліку. Але фаза на енергію не впливає через однорідність часу в результаті зміни початку відліку». Тобто, паралельне перенесення системи координат законне в силу однорідності часу *t*. Тепер може бути зрозуміло, чому однорідність за часом призводить до закону збереження енергії [9, 18].

Наступним чином можна охарактеризувати число e як основу функції комплексної змінної, що відображає два основних закони збереження: енергії – через однорідність часу, імпульсу – через однорідність простору.

Число e входить до формули Ейлера та міститься у формулі хвильової функції. Це пояснив автор статті «Світові константи π та e у Природі» Б. Горобець [9]. Він дійшов висновку, що «лінійні та лінеаризовані процеси зберігають лінійність завдяки однорідності простору та часу». Математично лінійний процес описують за допомогою функції, що є розв’язком диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами. А її ядром є наведена вище формула Ейлера. Тому розв’язок містить комплексну функцію з основою e, таку саму, як рівняння хвилі. Адже, лише функція e^x не змінюється за будь-якого числа під час диференціювання та інтегрування [9].

Напишемо розв’язок диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, який описує поширення гармонічної хвилі в середовищі з урахуванням непружних взаємодій з нею, що призводить до розсіювання енергії або ж до накопичення енергії від зовнішніх джерел [31].

$$f(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \tag{3.1}$$

Формулу Ейлера помножили на змінну величину $e^{\alpha t}$, що є амплітудою, яка змінюється у часі. У загальному випадку будь-якої хвилі «поведінка» амплітуди залежить від знаку коефіцієнту α за змінної t (часу): якщо $\alpha > 0$, амплітуда коливань зростає, $\alpha < 0$ – затухає за експонентою [31].

Уявимо, що $\beta = 0$, тобто видалимо множник з числом i у розв’язанні, що містить формулу Ейлера. Від коливань залишиться лише «амплітуда», що гасне за експонентою.

Для ілюстрації вищезгаданих випадків Б. Горобець пропонує уявити маятник [8]. «У порожньому просторі маятник коливається без загасання. У просторі з середовищем, що чинить опір, коливання відбуваються з експоненціальним загасанням амплітуди. Якщо ж відхилити не дуже масивний маятник у в'язкому середовищі, то він плавно сповільнятиметься до стану рівноваги» [9].

Принцип математично виглядає наступним чином: $\Delta I \approx I \Delta t$, де I – сигнал, а Δt – інтервал часу, за який проходить приріст сигналу ΔI. Якщо поділити обидві частини на I та проінтегрувати, отримаємо $\ln I \approx kt$. Закон експоненціального приросту або спаду сигнала, що має вигляд: $I \approx e^{kt}$ та залежить від знаку k. Відтак, закон пропорційності приросту величини самої величини приводить до числа e [9].

Під час розв’язання диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, за наявності лише уявної частини функції $\alpha = 0,\ \beta = 0$, у яких присутні гармонічні коливання, що не гаснуть, отримаємо формулу Ейлера: $e^{i\pi} = -1$. Геометричною моделлю експоненти з уявним показником степеню буде рух по колу з постійною за абсолютним значенням швидкості (рис. 3.1) [31].

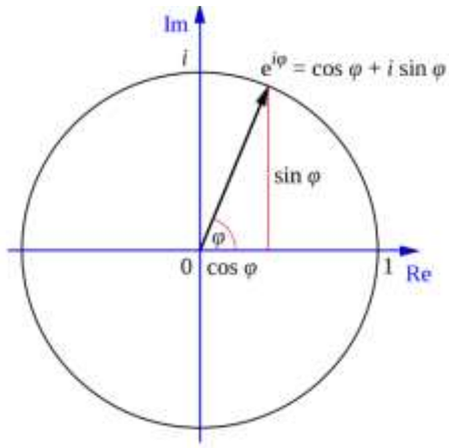


Рис. 3.1 Графік тотожності Ейлера

Фізичний зміст формули полягає у відображенні властивості простору-часу – їх однорідності та ізотропності.

Розглянутий граничний випадок хвилі, з нульовою частотою, але з плавно спадною або зростаючою за експонентою амплітудою, характеризує низку процесів, пов'язаних із сферами живої і неживої природи: приріст снігової кулі, молюска (рис. 3.2), луски соснових шишок (рис. 3.3), де можна порахувати кількість спіралей, що йдуть проти і за годинниковою стрілкою, фінансової піраміди, зменшення пам'яті з часом, збільшення числа бактерій в організмі, спіралей суцвіття у соняшнику (рис. 3.4), фізіологічна залежність відчуття від сили роздратування.

Рис. 3.2. Приклад завитків раковин молюсків

Рис. 3.3. Завитки луски соснових шишок

Рис. 3.4. Суцвіття соняшника

Рис. 3.5. Алоє спіральне

Рис. 3.6. Циклон в атмосфері Землі

Рис. 3.7. Спіральна галактика

Подібними різноманітними явищами «керує» експонента, іншими словами, число *e*, що має місце в основі показникової функції. Адже всі вищезгадані процеси підпорядковуються одному фундаментальному принципу: «приріст величини пропорційний самій величині» [9].

Окрім цього, можна розглянути рис. 3.5, що є змістовним відображення поєднанням науки і природи.

Рис. 3.8. Математична майстерня

3.2. Космологічна значущість числа Ейлера *е*

Природні системи надзвичайно складні, але поряд з цим, вони вражають стабільністю, що їм притаманна. Наприклад, Сонячна система розміщує понад 800 тисяч тіл, що обертаються один навколо одного. Якщо більшість тіл гравітаційно пов'язані, то класичні моделі передбачають довготривалі вкрай нестабільні стани, що суперечать фізичній реальності в Сонячній системі. Враховуючи рушійний потенціал резонансу, стабільність даної системи викликає сумніви. Минулого століття розробили вдосконалені моделі, що пояснюють певні особливості формування Сонячної системи. Однак, метричні характеристики системи непередбачувані. Справа у тому, що закони Кеплера, рівняння поля Ейнштейна та Закон всесвітнього тяжіння дають нескінченне різноманіття орбіт [37].

Насправді, планети в позасонячній системі, наприклад Траппіст 1, Кеплер 20, мають майже однакові орбіти, як деякі супутники Юпітера, Сатурна, Урана і Нептуна. Але чому переважають подібні орбіти, якщо є низка нескінченних можливостей. До сьогодні не було переконливих пояснень подібним орбітальним періодам, – 87,97 днів (Меркурій), 224,70 днів (Венера), 365,25 днів (Земля), 687,97 днів (Марс), 4,60 років (Церера), 11,87 років (Юпітер), 29,46 років (Сатурн), 84,02 років (Уран), 164,80 років (Нептун) та 248,00 років (Плутон). У звичайних моделях вони видаються випадковими. Крім того, небесна механіка не знає жодного закону, що відносять до періодів обертання планет. Але якщо періоди обертання випадкові, то чому Місяць і Сонце; Земля, Марс та плутоїд Еріда; Юпітер, Сатурн і астероїд Церера мають подібні періоди обертання [36]?

Окрім вищезгаданого, випадково з’являються, не лише орбітальний та обертальний періоди, а також цикл осьової прецесії Землі (25,770 років), період зміни кута нахилу (41,000 років), а також цикли апсидальної прецесіїі та ексцентриситету орбіти (обидва 112,000 років). Подібний недолік не лише зі сторони астрофізики.

Згідно теоретичної побудови, що пояснює спонтанне порушення симетрії в квантовій теорії поля, механізму Хіггса, утворення маси частинок полягає в тому, що походження самої маси Хіггса не з’ясовано і це призводить до замкненого кола [37]. У його основі взаємодія частинок зі спеціальним полем Хіггса, унаслідок якої безмасові частинки набувають масу. Завдяки такому полю симетричний стан Всесвіту втрачає стійкість, тому Всесвіт переходить у несиметричний стан.

Крім того, немає переконливого пояснення, чому відношення маси протона до електрона має бути близьким до 1836. У стандартній моделі електрон стабільний, тому що це найменш масивна частинка з ненульовою електрикою заряду. Його розпад порушує збереження заряду. Але яким чином виникає стійкість елементарного електричного заряду? Протон стабільний, оскільки він найлегший баріон і баріонне число збережено. Однак, подібна відповідь лише породжує питання: чому протон найлегший баріон? Щоб знайти відповідь, вводять кварки, що порушують збереження цілого елементарного електричного заряду [37].

Вимірювання космічного мікрохвильового випромінювання є важливими для космології, будь-яка із запропонованих моделей Всесвіту має це пояснювати. У космології Великого Вибуху з'являється її нинішня середня температура 2,725 К, що може бути випадковою, оскільки вимірювання космічного мікрохвильового випромінювання інтерпретується як залишок з ранньої стадії спостережуваного Всесвіту, коли зір і планет не існувало, а Всесвіт був щільнішим [19, 37].

Вимірювання – це джерело даних, що дають змогу підтверджувати теоретичні моделі реальності. Результати вимірювання – це відношення двох фізичних величин, де одна з них – стала величина, що називають одиницею виміру. Загалом, це співвідношення є реальною величиною, що може наближатись до раціонального, ірраціонального, алгебраїчного або трансцендентного числа. Різниця між цими числами – це важливий аспект стабільності в складних системах. Наприклад, цілі і раціональні коефіцієнти частоти забезпечують резонансу взаємодію, що може дестабілізувати систему [19].

Щодо стабільності Сонячної системи, можна очікувати, що співвідношення будь-яких двох орбітальних періодів не буде раціональним. Однак, немає можливості точно знати тип числа. Які є можливості з'ясувати, чи співвідношення орбітальних періодів Венери та Землі апроксимує раціональне, ірраціональне, алгебраїчне або трансцендентне число?

Враховуючи рушійний потенціал резонансу, стабільність Сонячної системи може викликати сумніви. Різниця між раціональними, ірраціональними алгебраїчним та трансцендентними числа – не лише питання математики. Це також важливий аспект стабільності у складних природних системах [37].

Якби співвідношення будь-яких двох орбітальних періодів було раціональним числом, періодична гравітаційна взаємодія поступово поглиблювала орбітальні рухи і, зрештою, спричинила б резонансну катастрофу, що може дестабілізувати Сонячну систему. Таким чином, тривала стабільність у складних динамічних системах можлива лише за умови уникнення співвідношення частот цілого числа. Очевидно, що ірраціональні числа не можна представити як відношення цілих чисел, тобто, вони не повинні спричиняти дестабілізуючу резонансну взаємодію.

Алгебраїчні ірраціональні числа, наприклад, $\sqrt{2}$ не достатньо запобігають резонансу, оскільки можуть трансформуватися на раціональні числа у результаті дії множення. У випадку $\sqrt{2}$ як коефіцієнт частоти кожна парна гармоніка є цілим числом, оскільки $\sqrt{2}\sqrt{2}=2$ [37, 38].

Однак існує тип ірраціональних чисел, званих трансцендентними, що не є коренями цілих чи раціональних чисел. Вони не можуть бути перетворені в раціональні чи цілі числа у результаті множення, отже, не забезпечують резонансної взаємодії. Насправді частоти реальних періодичних процесів не є сталими. Їх часову зміну описують прискореннями, похідними частот. Природно, прискорення теж не є сталими [37, 38].

Цікавим фактом є те, що лише одне трансцендентне число, котре пригнічує резонанс: число Ейлера $e = 2{,}71828...$, воно є основою природної експоненціальної функції e^x, єдиної функції, що є похідною від самої себе [37, 38].

Проаналізувавши Сонячну систему, ми зараз вирушаємо у більш віддалені райони Чумацького Шляху. Однак ми повинні врахувати, що вимірювання відстані за допомогою паралактичної тріангуляції є досить точним лише до 500 світлових років. Зі збільшенням відстаней застосовують непрямі методи, що нівелюють різницю між фактами та модельними твердженнями [37, 40].

У наш час немає точних вимірювань відстані до Галактичного центру, але 26 000 св.р. = 2,46 10^{20} м здається прийнятною оцінкою. Натуральний логарифм цієї відстані, поділений на довжину хвилі протона, близький до цілого числа 83 [37].

$$\ln\left(\frac{R_{\text{ГЦ–Сонце}}}{\lambda_{\text{протона}}}\right) = \ln\left(\frac{2,46\cdot 10^{20}\,\text{м}}{2{,}103089\cdot 10^{-16}\,\text{м}}\right) = 83{,}05. \qquad (3.2)$$

Якщо поточне вимірювання правильне, це означало б, що Сонячна система обертається навколо Галактичного центру на відстані, що дозволяє уникати резонансної взаємодії з ним.

Галактика Андромеди M31, розташована на відстані 2,5 млн св.р. = 2,365 10^{22} м [26] від Чумацького Шляху. Натуральний логарифм цієї відстані, поділений на довжину хвилі електрона, близький до цілого числа 80 [37, 38].

$$\ln(\frac{R_{\text{ЧШ}-\text{M31}}}{\lambda_{\text{електрона}}}) = \ln(\frac{2,365\cdot 10^{22}\text{м}}{3,861593\cdot 10^{-13}\text{м}}) = 80,10. \quad (3.3)$$

Для досягнення стабільності, що відповідає цілому логарифму 80, відстань від M31 до Чумацьго Шляху має зменшитися на 240 000 св.р. до 2,26 млн світлових років:

$$\lambda_{\text{electron}} \cdot e^{80} = 2,26\cdot 10^{6}\text{св.р.} \quad (3.4)$$

M31 наближається (точніше, 2,5 млн років тому наближалася) до Чумацького Шляху зі швидкістю приблизно 100 кілометрів на секунду, як свідчать вимірювання блакитного зміщення [27]. Якщо ця швидкість стала, поточна відстань до M31 має бути вже на 1000 світлових років коротшою, ніж відстань 2,5 мільйонів років, яку ми можемо виміряти сьогодні.

За стандартними модельними розрахунками передбачається, що обидві галактики зіткнуться через кілька мільярдів років [36, 37]. Беручи до уваги стабілізуючу функцію числа Ейлера, ми очікуємо, що після досягнення цілого логарифму числа 80 підхід буде завершено, а відстань між обома галактиками стабілізується на рівні 2,26 мільйона світлових років. Відтак, врахування числа Ейлера як інгібітора резонансу та універсального стабілізатора може повністю змінити прогнози.

Космічне мікрохвильове фонове випромінювання традиційно трактується як залишок з ранньої стадії спостережуваного Всесвіту, коли зір і планет ще не існувало, а Всесвіт був щільнішим і більш гарячим. Слід визнати, що в розробці існують альтернативні моделі [36], що пропонують пояснення космічного мікрохвильового фонового випромінювання, які не стосуються стандартних космологічних сценаріїв. Однак, традиційно дані випромінювання вважають критично важливими для космології, оскільки будь-яка запропонована модель Всесвіту повинна пояснювати це випромінювання.

Якщо цей космічний фоновий процес є стабільним, його середня температура 2,725 К [36, 38] має відповідати цілому степені числа Ейлера. Насправді відношення температури космічного мікрохвильового випромінювання до протонного чорного тіла близьке до логарифму відношення температури космічного мікрохвильового фонового випромінювання до температури протона, це -29, що наведено у формулі (3.5):

$$\ln\left(\frac{T_{\text{КМФВ}}}{T_{\text{протона}}}\right) = \ln\left(\frac{2,725\text{K}}{1,08881\cdot 10^{13}\text{K}}\right) = -29,01. \tag{3.5}$$

Отже, космічний фон здається стабільним, а поточна температура космічного мікрохвильового фонового випромінювання не випадкова.

Припускають, що глобальне масштабування за числом Ейлера стабілізує весь Всесвіт [30], від атомів до галактик та міжгалактичного простору. У цьому випадку будь-яке лінійне (нелогарифмічне) спостереження за дуже масштабними структурами виявить ефект збільшення, що виглядає як експоненціальне розширення Всесвіту. У той же час будь-яке лінійне спостереження за дуже дрібномасштабними структурами виявить ефект масштабування, який виглядає як експоненціальне стиснення до очевидної просторово-часової особливості [36,37].

Розгляд числа Ейлера як сповільнювача резонансу та універсального стабілізатора додає новий аспект нашого розуміння еволюції Всесвіту, пояснюючи не тільки стабільність сонячної орбітальної системи, а й стабільність її траєкторії через галактику.

На прикладі зближення M31 і Чумацького Шляху, розглядаємо число Ейлера як стабілізатор, що може повністю змінити прогнози. Застосовуючи глобальне масштабування за числом e до планетних систем, маємо можливість ідентифікувати стабілізовані астрофізичні процеси та передбачити еволюцію систем, які перебувають на етапі формування [36].

Ми показали, що поточна космічна фонова температура не випадкова і виявляє також космологічне значення числа Ейлера.

Стабілізуючи співвідношення протон-електрон, число Ейлера забезпечує утворення атомів. Число Ейлера стабілізує діапазон біологічних частот аж до субатомного масштабу і вкладає їх в динаміку Сонячної системи [11, 38].

Нарешті, очевидне розширення Всесвіту може виявитись переконливим наслідком стабілізуючої ролі числа Ейлера та його цілих чисел.

3.3. Число Ейлера та закони класичної фізики і квантової механіки

Задача 1

Визначити хвильові функції та енергетичний спектр частинки масою m в одновимірній потенціальній ямі з абсолютно непрозорими стінками завширшки l, якщо

$$U(x) = \begin{cases} 0, 0 < x < l \\ \infty, x < 0, x > l \end{cases}$$

Розв'язання:

Задача стосується граничного випадку, коли $U_0 \to \infty$. Оскільки, частинка не може мати нескінченної великої енергії, слід вважати, що вона не може проникати в області $x \le 0, x \ge 1$, тобто може перебувати лише в області $0 < x < 1$, де $U(x) = 0$ [18].

Тому рівняння Шрьодінгера для неї має мати вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \qquad (3.6)$$

або

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \qquad (3.7)$$

Це елементарне (лінійне, однорідне, зі сталими коефіцієнтами) диференціальне рівняння, його загальним розв'язком у комплексній формі є

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Відповідно, за $x \le 0$, та $x \ge 1$ маємо $\psi(x) = 0$, з чого прослідковуємо граничні умови $\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$ [2].

Застосовуючи умову $\psi(l) = 0$, дістаємо $\psi(0) = A + B = 0$, звідки $A = -B$ тоді

$$\psi(x) = A\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = 2i\sin kx = C\sin kx. \qquad (3.8)$$

З початкової умови $\psi(l) = 0$ знаходимо

$$\psi(l) = C\sin kl = 0\,. \tag{3.9}$$

Тобто, $kl = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Однак при $n = 0$ маємо $k = 0$ і $\psi(x) \equiv 0$, а це означає, що стану з $n = 0$ не існує. Крім того, при $n < 0$ дістаємо $k < 0$ і $\psi(x) < 0$. Проте, зміна знаку хвильової функції квантового стану частинки не змінює, тому слід вважати, що $n = 1, 2, 3\ldots$.

Відтак,

$$k = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.10}$$

І відповідно до (3.7) маємо

$$E = E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 k^2}{2ml^2}\,. \tag{3.11}$$

Враховуючи (3.10), хвильова функція (3.8) набирає вигляду

$$\psi_n(x) = C\sin\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{3.12}$$

А з умови її нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_n(x)\right|^2 dx = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = 1 \tag{3.13}$$

випливає, що $C = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$, тобто

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (3.14)$$

Але чому саме *e*, а не будь-яке інше число має місце в основі функції, яку шукають як розв'язок рівняння хвилі у вигляді диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами [9]? Тому що, лише функція e^x не змінює значення за будь-якого числа інтегрувань і диференціювань. Це необхідно, щоб після підстановки в рівняння його розв'язку воно перетворилося у тотожність. Дійсно, у початкове диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами підставляють функцію e^x та всі її похідні. З математичної точки зору, сталі коефіцієнти при експоненті «не заважають» диференціюванню, залишаючись такими самими, а всі e^x скорочуються, у результаті чого, отримуємо алгебраїчне рівняння. Розв'язки останнього входять як сталі коефіцієнти в експоненту і приводять диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами до необхідної тотожності. З фізичної точки зору, коефіцієнти у хвильовому рівнянні у формі диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами є сталими, адже сталими є закони перебігу процесів в однорідному часі-просторі [9].

Задача 2

Ймовірність розпаду радіоактивного атома за час Δt дорівнює $\lambda\Delta t$. Ймовірність розпаду не залежить від того, як довго атом вже існує, не розпадаючись, тому λ від часу не залежить (λ - так звана стала розпаду). Яка ймовірність розпаду атома за час *t*? Знайдіть також співвідношення між сталою розпаду λ та періодом піврозпаду [18,19].

Розв'язання:

Подія, яка полягає в тому, що атом (насправді, ядро атома) розпадається за час *t* фактично означає, що атом не розпадеться за весь час, попередній до *t* і розпадеться саме у момент *t*. Ймовірність того, що атом не розпадеться за час Δt дорівнює $1-\lambda\Delta t$:

$$\left(1-\lambda\Delta t\right)\frac{t}{\Delta t}. \qquad (3.15)$$

Переходячи до границі за $\Delta t \to 0$, отримуємо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(1-\lambda\Delta t\right)^{\frac{t}{\Delta t}} = \lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{-\lambda t\alpha} =$$

$$=\left[\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \qquad (3.16)$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P = 1-e^{-\lambda t}. \qquad (3.17)$$

Якщо ймовірність того, що атом не розпадеться за час *T*, дорівнює точно ½, то величину називають часом (періодом) піврозпаду атома. Покладаючи в (3.12), що *P* = 1/2, знаходимо

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \qquad (3.18)$$

Закон радіоактивного розпаду можна також отримати, виходячи з очевидного припущення, що зміна кількості радіоактивних ядер з часом прямо пропорційна кількості самих ядер:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \qquad (3.19)$$

де λ має той самий зміст, що і раніше, а саме – сталої розпаду [2].

Розділяючи в цьому рівнянні змінні, інтегруємо. Тоді матимемо:

$$\ln N = -\lambda t + C, \qquad (3.20)$$

де C – стала інтегрування.

Покладаючи в початковий момент часу t = 0 кількість $N = N_0$, остаточно дістаємо

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad (3.21)$$

Розглянемо принципи астрофотометрії та формулу Погсона. Астрофотометрія – розділ астрофізики, завданням якого є вимірювання кількості світлової енергії, що надходить до спостерігача від небесних світил. Основним поняттям фотометрії вважають світловий потік. Світловим потоком називають кількість променистої енергії, що проходить за одиницю часу через задану площину. Світлова енергія, яка падає за одиницю часу на одиничну площу певної поверхні, називають освітленістю E цієї поверхні [2, 3].

В астрономії блиском небесного світила називають освітленість, яку це світило створює в пункті спостереження на площині, що перпендикулярна до його променів. Із визначення інтенсивності світла I отримуємо, що на будь-яких відстанях від джерела r_1 і r_2 освітленості E_1 і E_2 змінюються пропорційно квадратам цих відстаней:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad (3.22)$$

У фізиці освітленість вимірюють у люксах. Але в астрономії прийнято вживати позасистему одиницю – видиму зоряну величину світла, що позначають *m*. Тому кажуть «блиск зорі» натомість «освітленість зорі», окрім того, «блиск зорі дорівнює певній кількості зоряних величин» [2, 3].

Точні вимірювання вказують на такий взаємозв'язок між видимою зоряною величиною *m* зорі та освітленістю *E,* яку ця зоря створює:

$$m = m_0 - 2{,}5\lg E \quad , \qquad (3.23)$$

де $m_0 = -13{,}89^m$ – зоряна величина, що відповідає освітленості в 1 люкс. Ця залежність (через логарифм) є наслідком особливостей сприйняття подразнень органами відчуттів людини: у випадку, якщо подразнення (освітленість зіниці ока) зростають у геометричній прогресії, то зорові відчуття (зоряні величини) – в арифметичній. У цьому полягає суть психофізіологічного закону Вебера-Фехнера, сформульованого у середині XIX ст.. Закон можна сформулювати наступним чином: зміна будь-якого відчуття прямо пропорційна відносній зміні подразнювального чинника. Безпосередньо, що освітленість Е – подразнювальний чинник, а зоряна величина m – відчуття (сприйняття) освітленості, за традицією, що походить від Гіппарха, їхні змінні *dE* і *dm* протилежні за знаком, оскільки зі зростанням освітленості *E* зоряна величина m зменшується [2].

Доцільно розглянути наступну задачу:

Задача 3

У 1856 році англійський астроном Норман Погсон, порівнюючи блиск зір різних величин, виявив, що інтервалові в 5 зоряних величин відповідає відношення величини освітленості, яке дорівнює 100. Врешті решт він отримав формулу, яку ми тепер називаємо формулою Погсона:

$$m_2 - m_1 = -2{,}51g\left(E_2 / E_1\right), \tag{3.22}$$

де m_1 і m_2 – зоряні величини двох зір,

а E_1 та E_2 – освітленості, які створюють ці зорі на Землі відповідно.

Отримайте цю формулу, застосовуючи психофізіологічний закон Вебера-Фехнера, який можна сформулювати так: зміна будь-якого відчуття прямо пропорційна відносній зміні подразнювального чинника [17,18].

Розв'язання:

Очевидно, що освітленість Е – подразнювальний чинник, а зоряна величина m – відчуття (сприйняття) освітленості, причому за традицією, що походить від Гіппарха, їхні змінні dE І dm протилежні за законом, оскільки із зростанням освітленості E зоряна величина m зменшується. Тоді згідно з законом Вебера-Фехнера:

$$dm = -k\frac{dE}{E} \Rightarrow m - k\ln E + C, \tag{3.23}$$

де k – коефіцієнт пропорційності,

C – стала інтегрування.

Для двох світил з величинами освітленості від них E_1 і E_2 різниця відповідних зоряних величин дорівнює:

$$m_2 - m_1 = -k \ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right). \qquad (3.24)$$

Переходячи до десяткових логарифмів і враховуючи позицію Погсона (щодо п’яти зоряних величин), отримуємо шукану формулу:

$$m_2 - m_1 = -2{,}5 \ln \frac{E_2}{E_1}. \qquad (3.20)$$

Поняття видимої зоряної величини використовують для визначення блиску не лише зір, а й планет, астероїдів, комет, метеорів, природних і штучних супутників Землі, інших планет тощо [2].

Звертаємо увагу на те, що натуральний логарифм є функцією оберненою експоненті, тобто експонента (і/або натуральний логарифм) з’являються там, де діє закон Вебера-Фехнера [17,18].

ВИСНОВКИ

За результатами аналізу наукової літератури з проблеми дослідження було встановлено зв'язок математичної константи числа Ейлера *e* з фізичними та астрономічними закономірностями.

Виконали наступні завдання: підібрали та проаналізували літератури з теми дослідження, опрацювали способи введення числа *e*, розглянули основні твердження, що стосуються числа Ейлера та фізичних, астрономічних закономірностей, а також застосували одержані результати для аналізу розв'язання задач з використанням числа *e*.

Під час роботи розглянуто загальні математичні константи, способи появи, введення та визначення числа *e*. Наприклад, з'ясовано, що друга чудова границя, розв'язком якої є число Ейлера, виникла у процесі розв'язання задачі про складні відсотки. Нами з'ясовано причини поширеності математичної константи *e* у фізичних законах і теоріях, визначено зв'язок *e* з фізичними та астрономічними закономірностями.

Константа *e* та формула Ейлера характеризуються широким застосуванням під час розв'язання диференціальних рівнянь, які описують гармонічні коливання, що не гаснуть, а також згасаючі коливання. Трансцендентне число *e* являється важливим аспектом стабільності Сонячної системи. Число Ейлера є невід'ємною частиною у разі розв'язання багатьох задач квантової механіки (в роботі розглянута задача про рух частинки у потенціальній ямі), задач фізики атомного ядра (закон радіоактивного розпаду) та задач астрономії (формула Погсона, яка пов'язує зоряні величини і освітленості).

Приміром може слугувати той факт, що число Ейлера може стабілізувати Всесвіт, адже поточна космічна фонова температура не випадкова і виявляє важливе космологічне значення числа Ейлера.

Аналізуючи наслідки закону Вебера-Фехнера, прослідковуємо, що відчуття пропорційне логарифму подразнювального чинника (у даному випадку променевої енергії зорі). Експоненціальний і логарифмічний закони приросту величини оптимальні для розвитку багатьох живих організмів. Подібні речі можемо наглядно спостерігати у випадку формування логарифмічних спіралей у раковинах молюсків, рядах насіння у соняшнику, луски у соснових шишках тощо. Логарифмічні спіралі чудово описують такі явища неживої природи, як циклони в атмосфері Землі і візерунки рукавів у спіральних галактиках.

Підсумовуючи причини появи числа Ейлера у фізиці і астрономії можна зробити висновок, що число Ейлера з'являється у фізичних і астрономічних законах і теоріях як:

1) друга чудова границя;
2) результат інтегрування диференціальних рівнянь, в яких зміна якоїсь величини (з часом) пропорційна самій величині;
3) розв'язок лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами;
4) наслідок закону Вебера-Фехнера.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. 10 чисел, на которых держится мир. *Помощь в математике*: веб-сайт. URL: https://www.math.com.ua/articles/10numbers.html (дата звернення: 15.08.2020)
2. Андрієвський С.М., Кузьменков С.Г., Захожай В.А., Климишин І.А. Загальна астрономія: підручник. Харків: ПромАрт, 2019, 524 с.
3. Бронштейн Н., Семендяев К. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов: справочник. Москва, 1986. 544 с.
4. Вакарчук І. Квантова механіка: підручник. Вид. 4-те, допов. Львів, 2012. 872 с.
5. Венгер Є., Грибань В., Мельничук О.. Збірник задач з квантової механіки: навч. посіб. Київ, 2003. 231 с.
6. Виленкин Н. Комбинаторика. Москва.: Наука, 1969, 331 с.
7. Виленкин Н., Виленкин А., Виленкин П. Комбинаторика. Москва:ФИМА, МЦНМО, 2006. 400 с.
8. Гладкий А. Числа: натуральные, рациональные, действительные, комплексные: учеб. пособ. для общеобразовательной школы. Москва, 2000, 147 с.
9. Горобец Б. Мировые константы π и e в Природе. *Земля и Вселенная.* 2003. № 5. С. 69-76.
10. Деза Е. Специальные числа натурального ряда: учебн. пособ. Москва, 2011. 240с.
11. Демидович Б.. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие. Изд. 14-е, испр. Москва, 1998. 624 с.
12. Дичко І. Антропний принцип у Всесвіті. *Світогляд*. 2017. №1, т. 63. С.74-77.
13. Жуков А. Вездесущее число π: уч. пос. Москва, 2007. 216 с.
14. Зорич В. Математический анализ ч. I. Москва, 1981. 544 с.
15. Зорич В. Математический анализ. ч. II. Москва, 1984. 640 с.

16. Кобушкін О. Квантова механіка: навч. посіб. Київ, 2016. 253 с.
17. Кузьменков С. Антропний принцип як стрижнева ідея фундаменталізації астрономічної освіти. *Фізика та астрономія в школі.* 2011. № 4. С. 20-24.
18. Кузьменков С. Спецкурс «Фундаментальні фізичні та математичні константи» як крок до фундаменталізації фізичної та астрономічної освіти. *Зб. наукових праць. Педагогічні науки.* 2014. Вип. 66. С. 207-213.
19. Кузьменков С. Зорі: Астрономічні задачі з розв'язаннями: навч. посіб. Київ, 2010. 206 с.
20. Кузьменков С., Сокол В. Сонячна система. Збірник задач з астрофізики. Вид. 2-ге, випр. Херсон, 2004, 216 с.
21. Литцман В. Веселое и занимательное о числах и фигурах. Москва:Физматгиз, 1963. 280 с.
22. Окунь Л. Фундаментальные константы физики. *Успехи физических наук.* 1991. № 9, т. 161. С. 177-194.
23. Перфилев М. Комбинаторное значение числа Эйлера. *Международный научно-исследовательский журнал.* 2019. № 8. С. 25-28.
24. Розенталь И. Вселенная и частицы. Москва: Знание, 1990. 64 с.
25. Розенталь И. Физические закономерности и численные значения фундаментальных постоянных. *УФН.* 1980. Вып.2, т.131. С. 239-256.
26. Рубаков В. Антропный принцип. *Троицкий вариант.* 2018. № 262. С. 1-2.
27. Самая красивая теорема математики: тождество Ейлера: веб-сайт. URL: https://habr.com/ru/post/454136/ (дата звернення: 23.05. 2020)
28. Спиридонов О. Фундаментальные физические постоянные: учеб. пособие для вузов. Москва, 1991. 238с.

29. Фейман Р. Фейнмановские лекции по физике: Задачи и упражнения с ответами и решениями / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Москва: Мир, 1969. 624с.
30. Фихтенгольц Г. Основы математического анализа: веб-сайт: URL:http://www.library.ugatu.ac.ru/pdf/teach/Fikhtengolts_Osn_mat_analiz_9izd_CH2_2016.pdf (дата звернення: 04.09.2020)
31. Формула Эйлера и приближенные методы: веб-сайт. URL: https://written.ru/articles/science/complex_exponent (дата звернення: 21.05.2020)
32. Швай О. Комбінаторні задачі: навч. посіб. Ч.1. Луцьк, 2018. 142 с.
33. Яловега І., Сидоров М., Гончаров Д. Складні проценти та число *e* – методологія міждисциплінарного зв'язку математики та економіки. *Економіка*. 2016. Вип. 16. С.110-122.
34. Andreoua S., Lambrighta J. A Reflection of Euler's Constant and Its Applications. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies.* 2012. Vol. 3, № 4. P. 371-380.
35. *e* is everywhere. Naturephysics URL: https://www.nature.com/articles/s41567-019-0655-9
36. Khattri S. K., Witkowski A. The Euler's number and some means. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences. 2012. № 28. P. 369-377. URL:* https://ibi.au.edu.tw/var/file/18/1018/img/2828/28(4)8-3(369-377).pdf (дата звернення: 10.09.2020)
37. Muller H. On the Cosmological Significance of Euler's Number. *Progress in physics*. 2019. Vol. 15, № 1. P. 17-21.
38. Muller H. The Physics of Transcendental Numbers. *Progress in physics*. 2019. Vol. 15, № 3. P. 148-155.
39. Nunemacher J. On Computing Euler's Constant. *Mathematics magazine.* 1992. Vol. 65, № 5. P. 312-322.

40. Ries A. Atomic Weights Confirm Bipolar Model of Oscillations in a Chain System. *Progress in physics*. 2010. Vol. 4. P. 63-67.

41. Ries A., Fook M.V. L.Fractal Structure of Nature’s Preferred Masses: Application of the Model of Oscillations in a Chain System. *Progress in physics*. 2010. Vol. 4. P. 82-89.