МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП’ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

УМОВИ КОНСЕРВАТИВНОСТІ МАТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ РЯДІВ ТА ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти “бакалавр”

Виконала: студентка 4 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»

Гаран Ірина Олегівна

Керівник кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кузьмич Валерій Іванович

Рецензент старший вчитель, вчитель вищої категорії

Херсонської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів

№ 44 Херсонської міської ради

Перегняк Олександр Адамович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність. На сучасному етапі розвитку математичної освіти в Україна, яка керується чинними нормативно-правовими документами, важливим є формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики у процесі навчання в педагогічних закладах вищої освіти, що обумовлюється специфікою педагогічної підготовки, своєрідністю математичного знання й майбутньою професійною діяльністю.

Серед освітніх компонент освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)», які забезпечують якісну підготовку майбутнього педагога, важливе місце посідає математичний аналіз, що сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти розуміння наукових ідей та методів математики, які слугують основами шкільного курсу математики.

Однією з основних тем у курсі математичного аналізу є вивчення рядів та послідовностей, які широко використовують в математичних дослідження, зокрема під час побудови практичних чисельних методів. Ряди відіграють вагому роль у вирішенні різних математичних проблем, зокрема, під час розв'язування алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, обчисленні значень інтегралів і функцій, при наближеному інтегруванні диференціальних рівнянь.

Актуальність даної теми зумовлена розглядом нового підходу до вивчення збіжності рядів та послідовностей в курсі математичного аналізу, а саме застосування методів підсумовування при вивченні збіжності рядів, що сприяє формуванню професійної компетентності майбутніх вчителів математики в закладах вищої освіти.

Методи підсумовування під час дослідження збіжності рядів вперше почали використовувати Бор, Шур, Чезаро, Харді, Чемпен, Бромвич та інші математики, які заклали підґрунтя для подальшого розвитку теорії рядів, основні ідеї викладені в їхніх працях [1-6]. Досі залишається важливою проблема збіжності рядів, особливо зараз є актуальним знаходження нових методів їх підсумовування.

Зазначені вище чинники слугують обґрунтуванням вибору теми дослідження «Умови консервативності матричних перетворень рядів та послідовностей».

Метою кваліфікаційної роботи (проєкту) є розгляд та систематизація основних ознак збіжності та підсумовуваності рядів, встановлення зв'язків даної теми дослідження з теоретичними основами шкільного курсу математики.

Для досягнення поставленої мети було сформульовані такі **завдання**:

- Проаналізувати наукову та навчально-методичну літературу, шкільну практику з метою уточнення категоріального апарату проблеми дослідження.
- Розглянути основні ознаки збіжності та підсумовуваності числових та знакозмінних рядів.
- Дослідити зв'язок даної теми зі шкільним курсом математики.

Об'єкт: числові ряди (додатні та знакозмінні).

Предмет: методи підсумовування числових рядів.

Дана кваліфікаційна робота (проєкт) складається зі вступу, трьох розділів, висновку і списку використаних джерел. Перший розділ «Збіжність числових рядів» містить загальні поняття та означення теорії рядів та класичні ознаки збіжності рядів, які вивчають в курсі математичного аналізу за освітньо-професійною програмою «Середня освіта (Математика)» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. У другому розділі «Консервативні матричні методи підсумовування рядів» розглядаються основні методи підсумовування розбіжних рядів, умови їх консервативності та множники підсумовуваності рядів. У третьому розділі «Поняття збіжності послідовності у шкільному курсі математики» розглянуто застосування поняття збіжності послідовності у шкільному курсі математики.

РОЗДІЛ 1

ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

1.1 Числові ряди. Основні поняття, означення та властивості збіжних числових рядів

Нехай задана деяка нескінченна послідовність чисел

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Означення 1.1 Числовим рядом або просто рядом називається вираз (сума) виду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1.1)$$

де $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ - дійсні або комплексні числа, які називають членами ряду, u_n – загальним або n-м членом ряду (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Розглянемо суми скінченого числа членів ряду:

$$U_1 = u_1; \qquad U_2 = u_1 + u_2; \qquad U_n = u_1 + u_2 + \cdots u_n.$$

Означення 1.2 Сума перших n членів ряду називається n-ю частинною (або частковою) сумою ряду и позначається через U_n, тобто $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Означення 1.3 Скінчена або нескінчена границя U частинної суми U_n ряду (1.1) при $n \to \infty$*:*

$$U = \lim_{n \to \infty} U_n$$

називається сумою ряду і позначається

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Якщо ряд має скінчену суму, його називають збіжним, в іншому випадку (тобто якщо сума дорівнює $\pm\infty$, або суми взагалі немає) – розбіжним (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Означення 1.4 Якщо в ряді (1.1) відкинути перші m членів, то отримаємо ряд:

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n \quad (1.2)$$

який називається залишком ряду (1.1) після m-го члена (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Із збіжності ряду (1.1) слідує збіжність будь-якого його залишку (1.2) та навпаки.

Ряди мають такі важливі властивості:

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$, де c – деяке число, до того ж виконується рівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n = c \cdot U,$$

де U – сума ряду.

2. Двоє збіжних рядів

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

і

$$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

можна почленно додавати або віднімати, так що ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

також збігається і його сума дорівнює $\mathrm{A} \pm \mathrm{B}$ (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

3. *Необхідна умова збіжності ряду.* Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_m$ збіжний, то його загальний член u_n прямує до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty} u_m = 0$ (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Умова $\lim_{n\to\infty} u_m = 0$ є лише необхідною для збіжності ряду, але не достатньою. Таким чином, можуть існують розбіжні ряди, для яких дана умова виконується.

4. *Достатня умова розбіжності ряду.* Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ або ця границя не існує, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

1.2 Додатні ряди, їх властивості та ознаки збіжності

Означення 1.5 Числовий ряд (1.1) називається додатним, якщо всі члени ряду – додатні:

$$u_1 > 0, u_2 > 0, \dots, u_n > 0, \dots .$$

Послідовність частинних сум додатного ряду – зростаюча послідовність. Додатний числовий ряд завжди має суму; ця сума буде скінченною (і ряд буде збігатися), якщо часткові суми ряду обмежені зверху, і нескінченною (а ряд – розбіжним) в противному випадку (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Збіжність (або розбіжність) додатного числового ряду часто встановлюють, порівнюючи даний числовий ряд з іншим, який є збіжним (або розбіжним) числовим рядом. В основу такого порівняння закладена наступні теореми.

Теорема 1.1 Нехай маємо два додатні числові ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.3}$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{1.4}$$

Якщо, хоча б, починаючи з деякого місця, (скажімо, для $n > N$), виконується нерівність: $a_n \leq b_n$, то із збіжності ряду (1.4) випливає збіжність ряду (1.3) або із розбіжності ряду (1.3) слідує розбіжність ряду (1.4) (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Теорема 1.2 Якщо існує границя

$$lim \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty), \quad b_n \neq 0,$$

то із збіжності ряду (1.4), при $K < +\infty$, випливає збіжність ряду (1.3), а із розбіжності першого ряду, при $K > 0$, випливає розбіжність другого. [Таким чином, при $0 < K < +\infty$ обоє рядів збігаються або розбігаються одночасно] (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Теорема 1.3 Якщо, починаючи хоча б із якогось місця (скажімо, для $n > N$ *)*, виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad a_n, b_n \neq 0 \tag{1.5}$$

то зі збіжності ряду (1.5) випливає збіжність ряду (1.4) або із розбіжності ряду (1.3) випливає розбіжність ряду (1.5) (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Теорема 1.4 (ознака Д'Аламбера) Розглянемо для ряду (1.4) варіанту

$$\mathfrak{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Якщо для достатньо великих n, виконується нерівність

$$\mathfrak{D}_n \leq q,$$

де $q = const$, менша одиниці, то ряд збігається, якщо ж, починаючи з деякого місця,

$$\mathfrak{D}_n \geq 1,$$

то ряд розбігається (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Тут розбіжність прямо випливає із порушення необхідної умови збіжності: якщо $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ або $a_{n+1} \geq a_n$, то a_n не може прямувати до нуля.

Ознаки Д'Аламбера має такий вигляд у граничній формі: у випадку, коли варіанта $\mathfrak{D}_n$ має скінчену або нескінчену границю

$$\lim \mathfrak{D}_n = \mathfrak{D},$$

ряд (1.1) збігається при $\mathfrak{D} < 1$ і розбігається - при $\mathfrak{D} > 1$.

Якщо $\mathfrak{D} = 1$, то ряд може як збігатися, так і розбігатися.

Варіанта $\mathfrak{D}_n$ називається варіантою Д'Аламбера

Теорема 1.5 (ознака Коші) Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд збігається, а при $q > 1$ – розбігається. Якщо $q = 1$, то ряд може бути як збіжним так і розбіжним (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Ознаку Коші зручно використовувати у тому випадку, коли загальний член ряду містить показникові функції від n, з яких легко добувається корінь n-го степеня.

Теорема 1.6 (ознака Раабе). Якщо, при достатньо великих n, виконується нерівність

$$\mathcal{R}_n \geq r,$$

де r – постійне число, більше одиниці, то ряд збігається, якщо ж, починаючи з деякого місця,

$$\mathcal{R}_n \leq r,$$

то ряд розбіжний (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

$\mathcal{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ – варіанта Раабе.

У граничній формі ознаку Раабе має вигляд: якщо $lim\,\mathcal{R}_n = \mathcal{R}$ - скінчена або нескінчена границя варіанта $\mathcal{R}_n$, при $\mathcal{R} > 1$ ряд збігається, а при $\mathcal{R} < 1$ ряд розбігається. Якщо $\mathcal{R} = 1$, то ряд може бути як збіжним так і розбіжним.

Теорема 1.7 (ознака Куммера) Нехай

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

довільна послідовність додатних чисел, така, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

розбігається. Складемо з ряду (1.4) варіанту

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}.$$

Якщо *(для $n > N$)* виконується нерівність

$$K_n \geq \delta,$$

де δ – постійне додатне число, то ряд збігається. Якщо ж *(для $n > N$)*

$$\mathcal{K}_n \leq 0,$$

то ряд розбігається (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Сформулюємо ознаку Куммера у граничній: якщо варіанта $\mathcal{K}_n$ має скінчену або нескінчену границю

$$\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K},$$

то при $\mathcal{K} > 0$ ряд збігається, а при $\mathcal{K} < 0$ – розбігається.

Теорема 1.8 (ознака Бертрана) Якщо варіанта $\mathfrak{B}_n$ має скінчену або нескінчену границю

$$\mathfrak{B} = lim\mathfrak{B}_n,$$

то ряд (1.1) збігається при $\mathfrak{B} > 1$ і розбігається - при $\mathfrak{B} < 1$.

Теорема 1.9 (ознака Гаусса) Припустимо, що для даного ряду (1.4) відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ може бути представлене у вигляді:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

де λ *і* μ – константи, а θ_n є обмежена величина: $|\theta_n| \leq L$; тоді ряд збігається, якщо $\lambda > 1$ або якщо $\lambda = 1,\ \mu > 1$, і розбігається – якщо $\lambda < 1$ або $\lambda = 1, \mu \leq 1$ (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Теорема 1.10 (інтегральна ознака Маклорена - Коші) Якщо функція $f(x)$ неперервна, монотонно спадає і додатна при $x \geq a$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

а) збігається, коли збігається невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто якщо він дорівнює деякій скінченній величині;

б) розбігається, коли вказаний інтеграл розбігається, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty.$$

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена a_n ряду дискретну змінну n на неперервну змінну x, причому нижня межа a дорівнює початковому значенню n для даного ряду.

Наприклад, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\, ln^2 n}$. Тоді $f(x) = \frac{1}{x\, ln^2 x}$, $a = 2$, і будемо розглядати невласний інтеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\, ln^2 x}$ (Станішевський С.О.) [9].

1.3 Знакозмінні ряди, їх властивості та ознаки збіжності

Окрім додатних рядів на практиці зустрічаються знакозмінні та знакопочергові ряди.

Означення 1.6 Знакозмінним рядом називають ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad (1.6)$$

у якого частина членів ряду мають додатні значення, а інші – від'ємні.

У випадку, коли сусідні члени ряду (1.6) мають протилежні знаки, ряд називається знакопочерговим. Такий ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1^{n+1})\, a_n == a_1 - a_2 + a_2 - \cdots + a_{2k+1} - a_{2+2} + \cdots,$$

$(a_n > 0, n \in N)$, якщо його перший член додатний.

Теорема 1.11 (ознака Лейбниця) Границя загального члена рівна нулю

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

якщо для членів знакопочергового ряду виконується умова

$$a_{n+1} < a_n, \forall n.$$

Розглянемо поняття абсолютної та відносної збіжності для знакозмінних рядів.

Означення 1.7 Ряд (1.6) збіжний абсолютно, якщо збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \qquad (1.7)$$

Означення 1.8 Ряд (1.6) називається умовно збіжним у випадках, коли ряд (1.7) є розбіжним, а ряд (1.6) – збіжним.

Для того, щоб ввести наступні ознаки збіжності знакозмінних рядів, розглянемо ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots, \qquad (1.8)$$

який складається із послідовностей чисел $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, таких що $a_n, b_n \in R$

Теорема 1.12 (ознака Абеля) Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (1.9)$$

збігається, а послідовність $\{a_n\}$ є монотонною та обмеженою:

$$|a_n| \leq K \ (n = 1, 2, 3, \dots),$$

то збігається і ряд (1.8) (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Теорема 1.13 (ознака Діріхле) Якщо послідовність часткових сум ряду (1.9) обмежена

$$|B_n| \leq M \ (n = 1, 2, 3, \dots),$$

а послідовність $\{a_n\}$ є монотонною і, прямуючою до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд (1.8) збігається (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

РОЗДІЛ 2

КОНСЕРВАТИВНІ МАТРИЧНІ МЕТОДИ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

2.1 Основні поняття та означення теорії підсумовування рядів

В XVII–XVIII століттях деякі вчені-математики почали використовувати в своїх дослідження розбіжні ряди. Зазначимо, що створення теорії розбіжних рядів відбулося пізніше, ніж в аналізі почали застосовувати розбіжні ряди. Протягом довгого часу більшість математиків, серед яких були Бернуллі, Лейбниц, Лагранж, Д`Аламбер та інші, безуспішно сперечалися щодо того, чому дорівнює сума розбіжного ряду. Одним із перших, хто зацікавився на ґрунтовному рівні розбіжними рядами був Л. Ейлер. Він прийшов до висновку, що у математиці не має чіткого визначення суми ряду. У 1743 році Л. Ейлер запропонував змінити погляд на сприйняття поняття «суми» ряду, як результату додавання всіх його членів, із загально прийнятого на, здавалося б, йому суперечне, а саме: «сумою деякого нескінченого ряду є скінчений вираз, із розкладу якого виникає цей ряд» (Харди Г.Х.) [10].

З означення Ейлера слідує, що сума ряду

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{2.1}$$

дорівнює 0,5, оскільки ряд (2.1) отримується при $x = -1$ із розкладу функції:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Деяких математиків обурювало це означення. Так швейцарський математик Микола Бернуллі у 1743 році в листі до Ейлера запитував, чи може один і той же ряд виникнути з двох різних виразів. Але Ейлер стверджував, що так бути не може, бо він мав на увазі в цьому означені розкладання в степені ряди.

Згодом Ейлер навів приклад, в якому за його означенням будь-який правильний дріб $\frac{m}{n}$ може бути сумою ряду (2.1), виходячи із розкладу:

$$\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}}{1+x+\cdots+x^{n-1}}=\frac{1-x^m}{1-x^n}=1-x^m+x^n-x^{m+n}+x^{2n}-\cdots,$$

в тому числі, число $\frac{2}{3}$ і розкладу

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}=\frac{1-x^2}{1-x^3}=1-x^2+x^3-x^5+x^6-\cdots \qquad (2.2)$$

при $x=1$. Це протиріччя розв’язав французький математик Жозеф-Луї Лагранж. Поклавши $x=1$ із степного ряду (2.2), отримаємо:

$$\frac{2}{3}=1+0-1+1+0-1+1-\cdots,$$

тому останній ряд не є рядом (2.1), а містить нулі членами ряду.

Ці події заклали підґрунтя для подальшого зародження теорії множників збіжності, а у більш загальному випадку – множників підсумовуваності рядів, яка почала активно розвиватися в кінці XIX – на початку XX століття завдяки її ефективності при отриманні ознак збіжності та підсумовуваності рядів.

Ідея одержання ознак збіжності рядів за допомогою множників збіжності полягає в тому, що члени a_n досліджуваного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (2.3)$$

представляють у вигляді добутку: $a_n=\varepsilon_n u_n$, де $\{\varepsilon_n\}$ – деяка числова послідовність, тобто, замість ряду (2.3) розглядають ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n. \qquad (2.4)$$

Якщо поведінка ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (2.5)$$

нам відома, то збіжність ряду (2.4), а отже і ряду (2.3), залежить лише від послідовності $\{\varepsilon_n\}$. У випадку збіжності ряду (2.4) числа ε_n називаються множниками збіжності ряду (2.3).

Класичним прикладом теорем про знаходження множників збіжності може бути наступна теорема Дедекінда-Адамара.

Теорема 2.1 а) Ряд (2.4) збігається при будь-якому збіжному ряді (2.5) тоді і лише тоді, коли збігається ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|. \tag{2.6}$$

б) Ряд (2.4) збігається при будь-якому обмеженому ряді (2.5) тоді і лише тоді, коли збігається ряд (2.6) і виконується умова: $lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Узагальненням поняття збіжності ряду є поняття його підсумовуваності деяким методом. Такі методи, зокрема, можуть визначатись нескінченими дискретними матрицями $A = (a_{n,k})$. Якщо для ряду (2.5) ряд $t_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n a_{n,k}$ збігається при кожному значенні $n = 1,2, \dots$ і, крім того, виконується рівність $lim_{n\to\infty} t_n = U$, то кажуть, що ряд (2.5) підсумовується до числа U методом A з матрицею перетворення ряду в послідовність, або коротко записують: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = U(A)$.

У випадку, коли вивчається не збіжність, а підсумовуваність ряду деяким методом підсумовування рядів, відповідні множники називають множниками підсумовуваності.

Використовуючи методи знаходження множників підсумовування, можна знаходити різні типи множників підсумовування без застосування загальних теорем теорії рядів. До основних таких методів належать, зокрема, безпосередній метод, який полягає у наступному: припустивши, що ряд (2.5) є підсумовуваним методом $\mathcal{A}$, встановити достатні умови для чисел ε_n і довести, що при виконанні цих умов ряд (2.4) буде підсумовуваним методом $\mathcal{B}$ (множники підсумовуваності типу $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$). Необхідність умов для чисел ε_n доводиться методом від супротивного, а саме, доводиться, що при невиконанні розглянутої умови для чисел ε_n існує хоча б один ряд (2.5) такий, що для нього ряд (2.4) не підсумовується методом $\mathcal{B}$ (Барон С.) [11].

2.2 Дискретні та напівнеперервні матричні перетворення

Наведемо загальні означення основних понять теорії підсумовування рядів (послідовностей). Для цього розглянемо деяку множину рядів $\acute{A}$.

Нескінчену суму чисел $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ (числовий ряд) будемо позначати: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, або коротко $\sum u_n$, а через $\{U_n\}$ - послідовність його частинних сум: $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Означення 2.1 Якщо для будь-якого ряду $\sum u_n \in \acute{A}$ за деяким правилом A поставити у відповідність число

$$A\{\sum u_n\}, \tag{2.7}$$

то кажуть, що на множині $\acute{A}$ визначений метод підсумовування, який позначають A (Барон С.) [11].

Означення 2.2 Число (2.7) називається A-сумою ряду

$$\sum u_n. \tag{2.8}$$

Означення 2.3 Множина $\acute{A}$ називається полем підсумовування метода A.

Таким чином, кажуть, що метод A підсумовує ряд (2.8) до суми (2.7), або ряд (2.8) підсумовується методом A до суми (2.7), або ряд (2.8) A-підсумований до суми (2.7).

Зауваження 2.1 Узагальнена сума ряду залежить від вибору метода A, тобто, при зміні правила A може змінитись його узагальнена сума.

Існує два типи методів, що зберігають збіжність.

1. Метод A називається регулярним, якщо він зберігає суму будь-якого збіжного ряду. Звідси слідує, що метод є регулярним, якщо він підсумовує всі збіжні ряди до їх звичайної суми.

Якщо регулярний метод A підсумовує до ∞ будь-який ряд $\sum u_n = \infty$, то метод A називається цілком регулярним.

2. Метод A називається нерегулярним, якщо він не зберігає суму деякого збіжного ряду.

Метод A називається методом, який породжує збіжність, якщо $\acute{A} \supset m$, тобто метод підсумовує всі обмежені послідовності.

Означення 2.4 Метод підсумовування A називається лінійним, якщо для будь-яких сталих λ та μ

$$A\left\{\sum(\lambda u_n + \mu v_n)\right\} = \lambda A\left\{\sum u_n\right\} + \mu A\left\{\sum v_n\right\},$$

до того ж з існування правої частини слідує існування лівої (Барон С.) [11].

2.3 Класичні методи підсумовування рядів

В результаті узагальнення методу середніх арифметичних сформувалися класичні методи підсумовування рядів. До таких методів можна віднести методи підсумовування Гьольдера, Чезаро, Хаусдорфа, Абеля-Пуассона, Ейлера-Кноппа та інші. Розглянемо детально деякі з цих методів.

2.3.1 Метод середніх арифметичних

Позначимо метод середніх арифметичних H або $(H, 1)$.

Означення 2.5 Послідовність

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \tag{2.9}$$

називається підсумованою методом середніх арифметичних до числа $\acute{U}$, якщо послідовність

$$H_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U_k$$

збігається до $\acute{U}$ (Барон С.) [11].

2.3.2 Метод Чезаро

Означення 2.6 Вираз виду

$$S_n^0 = U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

якщо $\alpha \geq 1$, то

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1}$$

називається чезаровською сумою порядку α ряду

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n. \tag{2.10}$$

Для визначення методу Чезаро також застосовують біноміальні коефіцієнти, які називають числами Чезаро –

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Числа Чезаро є коефіцієнтами біноміального ряду (Маркушевич А.И) [12]

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum A_n^\alpha x^n$$

Означення 2.7 Відношення чезаровських сум порядку α до біноміальних коефіцієнтів називається чезаровським середнім та позначається

$$\sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha}.$$

Метод Чезаро. Якщо існує скінчення границя

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha = \acute{U},$$

то кажуть, що ряд (2.9) підсумовується методом Чезаро порядку α до числа $\acute{U}$ (Барон С.) [11].

Метод Чезаро порядку α позначають через C^α або (C,α). Таким чином,

$$C^\alpha\{\sum u_n\} = \lim_{n\to\infty} \delta_n^\alpha.$$

Теорема 2.2 Метод (C,α) регулярний, якщо $Re\alpha > 0$ або $\alpha = 0$ (Барон С.) [11].

Теорема 2.3 Якщо $Re\beta > Re\alpha > -1$, то $(C,\beta) \supset (C,\alpha)$ і обидва методи сумісні (Барон С.) [11].

2.3.3 Метод Абеля-Пуассона

Метод Абеля-Пуассона є напівнеперервним методом підсумовування рядів, який також застосовують до підсумовування рядів Фур'є.

Означення 2.8 Ряд (1.1) називається підсумованим методом Абеля-Пуассона (А-підсумованим) до числа $\acute{U}$, якщо степеневий ряд

$$f(x) = \sum u_n x^n$$

збігається при $|x| < 1$ і

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \sum u_n x^n = \acute{U}$$

(Барон С.)[11].

Означення 2.8 можна сформулювати інакше: послідовність (2.9) називається A-підсумованою до числа $\acute{U}$, якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$$

збігається при $|x| < 1$ та

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (1-x) \sum U_n x^n = \acute{U}$$

(Барон С.)[11].

Теорема 2.4 Метод A регулярний (Барон С.) [11].

Теорема 2.5 Якщо $Re\alpha > -1$, то $A \supset C^{\alpha}$ і обидва методи сумісні (Барон С.) [11].

Математики Чемпен та Кнопп запропонували доведення теореми 2.5 для будь-яких $\alpha > -1$ в своїх працях [13-15], Фробениус довів дану теорему при $\alpha = 1$ у статті [16], а Гьольдер – при $\alpha > 1$ у праці [17].

2.4 Умови консервативності матричних методів підсумовування

В теорії рядів виділяється три загальних методи, за допомогою яких розглядуване матричне перетворення переводить один клас послідовностей в інший.

Розглядають наступні види матричних перетворень.

Нехай $\acute{\text{Å}} = (\lambda_{nk})$ – нескінченна матриця $n, k = 0,1, \ldots$. Утворимо для послідовності (U_n) нову послідовність $\left(\acute{U}_n\right)$ з

$$\acute{U}_n = \sum_k \lambda_{nk} U_k \tag{A}$$

Означення 2.9 Послідовність (U_n) називається підсумованою методом Ǻ до суми $\acute{U}$, якщо $\acute{U}_n$ існують за будь-яких $n = 0,1, \ldots$ та $lim\, \acute{U}_n = \acute{U}$ (Барон С.) [11].

Матричне перетворенням (А) переводить послідовність в послідовність.

Наведемо приклади інших матричних перетворень:

$$\acute{U}_n = \sum_k \alpha_{nk} U_k \tag{B}$$

перетворення ряду в послідовність;

$$\acute{u}_n = \sum_k \overline{\alpha_{nk}} u_k \tag{C}$$

перетворення ряду в ряд;

$$\acute{u}_n = \sum_k \overline{\lambda_{nk}} U_k \tag{D}$$

перетворення послідовності в ряд.

Означення 2.10 Матричне перетворення, яке переводить всі збіжні послідовності або ряди в збіжні послідовності, називається перетворенням, що зберігає збіжність (Барон С.) [11].

Означення 2.11 Матричне перетворення називається регулярним, якщо зі збіжності послідовності (U_k) або ряду $\sum u_n$ завжди слідує збіжність послідовності $\left(\acute{U}_n\right)$ і

$$\lim \acute{U}_n = \lim U_k.$$

Теорема 2.6 Для того, щоб перетворення (А) існувало і зберігало збіжність, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

1) існує $\lim_n \lambda_{nk} = \lambda_k$;

2) існує $\lim\limits_n \sum_k \lambda_{nk} = \lambda_k$;

3) $\sum_k |\lambda_{nk}| = o(1)$ (Барон С.)[11].

Теорема 2.7 Для того, щоб перетворення (A) було регулярним, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови 1) - 3) теореми 2.6 із $\lambda_k = 0$ та $\lambda = 1$.

Теорема 2.8 Для того, щоб перетворення (B) існувало і зберігало збіжність, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

1) існує $\lim_n \alpha_{nk} = \alpha_k$;

2) $\sum_k |\Delta\alpha_{nk}| = o(1)$.

При цьому, якщо

$$\sum u_k = U,$$

то

$$\lim \acute{U}_n = \alpha_0 U + \sum (\Delta\alpha_k)(U_k - U) = \left(\alpha_0 - \sum \Delta\alpha_k\right) U + \sum (\Delta\alpha_k) U_k$$

(Барон С.)[11].

Зауваження 2.2 Для того, щоб перетворення (B) було регулярним, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови 1) та 2) теореми 2.8 при $\alpha_k = 1$.

Теорема 2.9 Для того, щоб перетворення (A) існувало і переводило всі обмежені послідовності (U_k) в збіжні послідовності $\left(\acute{U}_n\right)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

1) існує $\lim_n \lambda_{nk} = \lambda_k$;

2) $\sum_k |\lambda_{nk}| = o(1)$;

3) $\lim_n \sum_k |\lambda_{nk} - \lambda_k| = 0$.

При цьому

$$\lim \acute{U}_n = \sum \lambda_k U_k$$

(Барон С.)[11].

Теорема 2.10 Для того, щоб перетворення (A) існувало і переводило всі збіжні до нуля (або всі обмежені) послідовності (U_k) в обмежені послідовності $\left(\acute{U}_n\right)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\sum_{k} |\lambda_{nk}| = o(1)$$

(Барон С.)[11].

Теорема 2.10 належить австрійському математику Х. Хану, який опублікував її у 1922 році в статті [18].

РОЗДІЛ 3

ПОНЯТТЯ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

3.1 Поняття збіжності числової послідовності у діючій програмі, шкільних підручниках та посібниках з математики для загальноосвітніх навчальних закладів

Математична освіта в Україні як складова освітнього процесу в цілому керується такими основними нормативно-правовими документами: законом України «Про освіту» [19], законом України «Про вищу освіту» [20], законом України «Про повну загальну середню освіту» [21], Національною стратегією розвитку освіти в Україні на 2012-2021 рр. [22], Національною доктриною розвитку освіти України у XXI ст. [23], Проєктом концепції математичної освіти України.

На сучасному етапі розвитку математичної освіти в Україна важливим є формування предметної математичної компетентності здобувачів середньої освіти у процесі вивчення математики в закладах середньої освіти, яка підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти (Гаран І.О.) [24].

Відповідно до стандартів шкільної математичної освіти вивчення теми «Ряди» не передбачене шкільною програмою, хоча вже в 9 класі закладається підґрунтя для подальшого вивчення теорії рядів у закладах вищої освіти, а саме, дев'ятикласників ознайомлюють з темою «Числові послідовності», на вивчення якої за освітньою програмою відводиться 10 годин.

Під час засвоєння даної теми в учнів мають сформуватися такі математичні компетентності:

1. Уявлення про числові послідовності та способи їх задання [25].

Автори підручників із алгебри для 9 класу по-різному вводять означення «числової послідовності»:

- Істер О.С. [26] та Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. [27] за допомогою унаочнення, не даючи точного означення. Наприклад, «об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, утворюють послідовності. Так, можна говорити про послідовності сторінок у книзі, букв у слові, поверхів у будинку тощо.» (Істер О.С.) [26];
- Бевз Г.П., Бевз В.Г. [28] та Кравчук В. [29] означують послідовність через функцію: «числова послідовність – це функція, задана на множині всіх або перших n натуральних чисел» (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [28];
- Тарасенкова Н.А. пропонує інший підхід до означення послідовності: «якщо кожному натуральному числу n за деяким правилом поставити у відповідність число a_n, то одержимо послідовність чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ або числову послідовність a_n» (Тарасенкова Н.А.) [30].

Під час викладу навчального матеріалу буде доречно навести здобувачам середньої освіти приклад найвідомішої числової послідовності - послідовність Фібоначчі: 1; 1; 2; 3; 5; 8; …, в якій, починаючи з третього члена, кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх. Дев'ятикласникам можна запропонувати розв'язати такі цікаві задачі, пов'язані з послідовністю Фібоначчі:

а) Дехто посадив пару кроликів у загін, оточений з усіх боків стіною. Скільки пар кроликів за рік може народити ця пара, якщо кожна пара кроликів кожного місяця, починаючи з другого місяця після свого народження, народжує одну пару (Тарасенкова Н.А.) [30]?

б) Нескінченну послідовність чисел $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ називають послідовністю Фібоначчі. Послідовність Фібоначчі можна задати рекурентною формулою: $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_n + 2 = a_n + a_n + 1$. Знайдіть перші десять елементів цієї послідовності (Кравчук В.) [29].

в) Послідовність Фібоначчі можна задати формулою: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. Знайдіть за цією формулою три елементи послідовності (Кравчук В.) [29].

2. Формулювання означень арифметичної та геометричної прогресій та їхніх властивостей [25];
3. Навчитися обчислювати суму перших n членів даних прогресій [25].

3.2 Поняття збіжності числової послідовності у діючих шкільних підручниках з математики для класів з поглибленим її вивченням

Колектив авторів підручника з алгебри для 9 класу, Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. [27], пропонують ознайомити учнів з поняттям «сумування», на основі здобутих знань про знаходження суми перших n елементів послідовності, а саме: «знаходження формули n-го елемента послідовності (S_n) називають сумуванням перших n елементів послідовності (a_n)» (Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.) [27].

Вперше вводиться грецька літера сігма - $\sum$ для запису суми.

Приклад 1. Знайти суму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$.

Розв'язання. Маємо:

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!.$$

Тепер можна записати:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + \big((n+1)! - n!\big) =$$
$$= (n+1)! - 1.$$

Відповідь: $(n+1)!-1$.

В класах математичного профілю тема «Числові послідовності» розширюється і вивчається на більш змістовному рівні. Так вводиться поняття «границя послідовності» та «збіжність послідовності».

Дев'ятикласників підводять до цих понять, розглядаючи числову вісь, на яку попередньо нанесено послідовність чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$$

З рис. 3.1 видно, що точки на координатній осі прямують до одиниці. У підручнику з алгебри для поглибленого вивчення математики Мерзляка А.Г., це пояснюється так: «Зі збільшенням номера n різниця $|a_n - 1|$ стає все меншою та меншою. Починаючи з деякого номера n різниця $|a_n - 1|$ може стати меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа. У цьому разі говорять, що число 1 є границею послідовності a_n і записують $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Послідовність, яка має границю, називають збіжною» (Мерзляк А.Г.) [31]

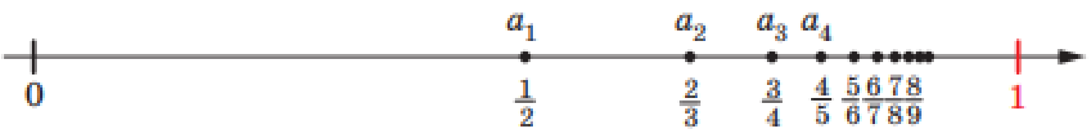

Рисунок 3.1 – Збіжна послідовність.

3.3 Застосування поняття збіжності при вивченні кола та його властивостей у шкільному курсі математики

Вперше з поняттям «коло» школярів знайомлять в 6 класі під час вивчення теми «Відношення і пропорції». Так за допомогою різних експериментів учням показують, що коли виміряти довжину кола, а також довжину діаметра цього кола, то розділивши першу величину на другу отримаємо число, яке при збільшені точності вимірювань буде необмежено наближатися до деякого сталого числа. Цю закономірність повторно розглядають в курсі геометрії у 9 класі під час вивчення теми «Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга», але вже на більш змістовному рівні, застосовуючи поняття «збіжність».

Наприклад, Істер О.С. формулює це твердження у вигляді теореми.

Теорема (про відношення довжини кола до його діаметра). Відношення довжини кола до довжини діаметра даного кола є сталим для всіх кіл (Істер О.С.) [32].

Доведення цієї теореми проводиться таким чином. Візьмемо два довільних кола, з радіусами R та $\acute{R}$ відповідно і довжинами кіл C та $\acute{\mathrm{C}}$ (рис. 3.2).

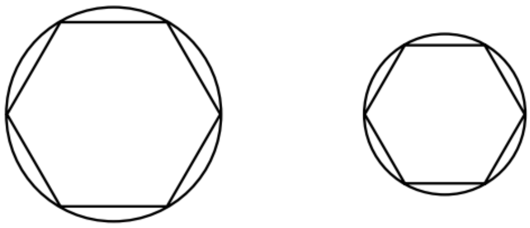

Рисунок 3.2 - Довжина кола.

1) Впишемо в кожне з цих кіл правильні n-кутники зі сторонами a_n і $\acute{a}_n$ та периметрами - P_n і $\acute{P}_n$. До того ж, дані n-кутники матимуть однакову кількість сторін.

2) Маємо: $P_n = na_n = n \cdot 2Rsin\frac{180^0}{n}$ і $\acute{P}_n = n\acute{a}_n = n \cdot 2\acute{R}sin\frac{180^0}{n}$.

3) Тоді: $\frac{P_n}{\acute{P}_n} = \frac{2R}{2\acute{R}}$.

4) Ця рівність є пропорцією при будь-якому значені n. Якщо n збільшувати необмежено, то периметр многокутників P_n і $\acute{P}_n$ постійно

прямуватимуть до довжин відповідних кіл С та Ć. Звідси отримуємо, що: $\frac{С}{Ć} = \frac{2R}{2Ŕ}$, звідси $\frac{С}{2R} = \frac{Ć}{2Ŕ}$.

Отже, якщо поділити довжину кола на діаметр даного кола – отримаємо число, яке є сталим для всіх кіл (Істер О.С.) [32].

Числом, про яке весь цей час йшла мова, є число $\pi \approx 3{,}14$.

З даної теореми слідує, що зі збільшення сторін n-кутника, вписаного в коло, його периметр буде збігатися до довжини цього кола.

Застосовуючи подібний алгоритм, в 9 класі також вводиться поняття «площа круга». Тільки тепер замість периметра n-кутника розглядають його площу. Наприклад, Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. пропонують зробити це так: «Нехай дано круг довільного радіуса R. Впишемо в нього правильний n-кутник $ABCD \dots F$ (рис. 3.3).

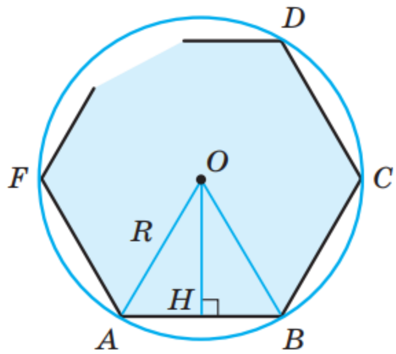

Рисунок 3.3 - Площа круга.

Якщо OH – висота трикутника OAB , то $AH = \frac{1}{2}AB$, $\angle AOH = \frac{180^0}{n}$ і $OH = R\cos\frac{180^0}{n}$. $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}AB \cdot R\cos\frac{180^0}{n}$. Многокутник $ABCD \dots F$ складається з n таких трикутників, тому його площа

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2}AB \cdot R\cos\frac{180^0}{n} = \frac{1}{2}PR \cdot R\cos\frac{180^0}{n},$$

де P – периметри даного многокутника. Якщо число n нескінченно збільшувати, то периметр P наближатиметься до довжини кола $2\pi R$, кут $\frac{180^0}{n}$ – до 0^0, а його косинус – до 1. Тому $S = \pi R \cdot R \cdot 1 = \pi R^2$» (Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.) [33].

Отже, зі збільшенням кількості сторін n-кутника, його площа прямуватиме до площі круга.

ВИСНОВКИ

Сучасний ринок праці вимагає переосмислення поглядів на новий стандарт педагога. Вчитель нового покоління – це людина, яка здатна пристосовуватися до викликів часу. Саме тому в процесі формування професійних компетентностей майбутнього вчителя математики в закладах вищої освіти важливим є застосування нових методів подання теоретичного та практичного матеріалів.

Зазначимо, що всі поставлення завдання під час роботи над темою даної кваліфікаційною роботою (проєктом) були досягнуті:

1) Аналіз наукової та науково-методичної літератури дозволяє зробити висновок, що на сучасному етапі розвитку математичної науки множники підсумовування є провідною ланкою теорії рядів, завдяки їх широкому застосуванню в інших математичних дисциплінах. Особливої актуальності набувають пошуки нових методів підсумовування розбіжних рядів за допомогою множників підсумовування.

Було уточнено наступний категоріальний апарат теми дослідження.

Числова послідовність - це функція, задана на множині всіх або перших n натуральних чисел (Бевз Г.П., Бевз В.Г.) [28].

Числовий ряд - вираз виду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

де $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ - дійсні або комплексні числа, які називають членами ряду, u_n – загальним або n-м членом ряду (Фихтенгольц Г. М.) [7-8].

Матричним перетворенням називається таке перетворення, в результаті якого, під час дії нескінченної матриці $\acute{\text{Å}} = (\lambda_{nk})$ на послідовність чи ряд, утворюється нова послідовність або ряд. До найбільш використовуваних матричних перетворень належать: перетворення послідовності в послідовність, ряду в ряд, ряду в послідовність та навпаки.

Консервативним або зберігаючим збіжність називається метод підсумовування, який підсумовує всі збіжні ряди або послідовності.

2) Також в роботі узагальнено та систематизовано основні ознаки збіжності числових рядів, а саме: ознаки порівняння, ознаки Д'Аламбера, Коші, Раабе, Куммера, Бертрана, Гаусса, інтегральна ознака Маклорена-Коші та методи підсумовування рядів, до яких належать: метод середніх арифметичних, методи Чезаро, Абеля-Пуассона та інші.

Проведене дослідження акцентує увагу на тому, при вивчені теми «Числові ряди» в програмі обов'язкової освітньої компоненти «Математичний аналіз» досліджувати ряди на збіжність можна не тільки за допомогою основних ознак збіжності, але й із застосуванням методів підсумовування.

3) Розглянутий у кваліфікаційній роботі фактичний матеріал має тісний зв'язок з відповідним матеріалом шкільного курсу математики. Зокрема, у курсі геометрії при отриманні формул довжини кола та площі круга істотно використовується поняття граничного переходу та границі числової послідовності. Окремі властивості збіжності розглянуті у кваліфікаційній роботі можуть бути використані при вивченні геометричної прогресії, визначеного інтеграла та інших понять, що використовують граничний перехід.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bohr H. Sur la serie de Dirichlet. C. r. Acad. sci. 1909. No 148. P. 75-80.
2. Schur I. Uber lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine und angew. Math.. 1921. No 151. P. 79-111.
3. Cesaro E. Sur la multiplication des series. Bull. Sci. math. 1890. Vol. 1. No 2. P. 114-120.
4. Hardy G.H. Generalisation of a theorem in the theory of divergent series. Proc. London Math. Soc. 1908. No 6. P. 255-264.
5. Chapman S. On non-integral orders of summability of series and integrals. Proc. London Math., Soc.. 1911. Vol. 2. No 9. P. 369-409.
6. Bromwich T.J. On the limits of certain infinite series and integrals. Math. Ann. 1908. No 65. P. 350-369.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: ФМЛ, 1970. 800 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 2. Издательство «Наука». г. Москва, 1968. 464 с.
9. Станішевський С.О. Ряди та їх застосування / укл. С.О. Станішевський, С.М. Мордовцев, А.В. Якуніна, Л.О. Бистрова, В.С. Ситникова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. Х.: ХНАМГ, 2009. 123 с.
10. Харди Г.Х. Расходящиеся ряды. Изд-во иностранной литературы. г. Москва, 1951. 504 с.
11. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977, 280 с.
12. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Москва-Ленинград, 1950.
13. Knopp K. Multiplikation divergenter Reihen. Arch. Math. und. Phys. Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. 1907. No 7. P. 1-12.
14. Knopp K., Lorentz G.G. Beitrage zur absoluten Limitierung. Arch. Math. 1949. No 2. P. 10-16.

15. Knopp K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin, 1924.
16. Frobenius G. Ueber die Leibnitzsche Reihe. J. reine und angew. Math. 1880. No 89. P. 262-264.
17. Holder O. Grenzwerte von Reihen an der Konvergenzgrenze. Math. Ann. 1882. No 20. P. 535-549.
18. Hahn H. Uber Folgen linearer Operationen. Monatsh. Math. und Phys. 1922. No 32. P. 3-88.
19. Про освіту: Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text
20. Про вищу освіту: Закон України від 01.07.2014 № 1556-VII. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text
21. Про повну загальну середню освіту: Закон України від 16.01.2020 № 463-IX.URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text
22. Про Національну стратегію розвитку освіти в Україні на період до 2021 року: Указ Президента України від 25.06.2013 № 344/2013. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/344/2013#Text
23. Про національну доктрину розвитку освіти: Указ Президента України від 17.04.2002 № 347/2002
URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/347/2002#Text
24. Гаран І.О. Вивчення збіжності числових рядів за допомогою множників збіжності. Пошук молодих. Випуск 20: Збірник матеріалів Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції «Інноваційні технології навчання природничо-математичних дисциплін у закладах загальної середньої та вищої освіти», (Херсон, 16 червня 2020 року.). Херсон: Видавництво ХДУ, 2020. С. 11-12.
25. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів (Математика. 5-9 класи), 2017.
URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx

26. Істер О.С. Алгебра: підручник для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 264 с.

27. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х. : Гімназія, 2017. 272 с.

28. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

29. Кравчук В.Р., Підручна М. В., Янченко Г.М. Алгебра: підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль: Підручники і посібники, 2017. 264 с.

30. Тарасенкова Н. А. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

31. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів Х. : Гімназія, 2017. 416 с.

32. Істер О.С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ.: Генеза, 2017. 240 с.

33. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.