МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ФУНКТОРТИ exp_2 ТА exp_3 НА КАТЕГОРІЇЇ КОМПАКТІВ ТА НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка 4 курсу
Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)»
Карпенко Катерина Вікторівна
Керівник доктор фізико-математичних наук, професор
Савченко Олександр Григорович
Рецензент кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонського філіалу Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
Штанько Олександр Дмитрович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Топологія - порівняно молодий і дуже важливий розділ математики. Відомий французький математик Андре Вейль сказав, що за душу кожного математика борються ангел топології і диявол абстрактної алгебри, висловивши цим, по-перше, незвичайну витонченість і красу топології і по-друге, те, що вся сучасна математика є химерним переплетенням ідей топології і алгебри (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [1].

Почавши свою діяльність як галузь геометрії, топологія швидко прижилася в багатьох інших областях математики. Здається майже правильним стверджувати, що топологія - це особливий стан душі і має свої цілі.

Топологію можна однозначно назвати продуктом останніх двох століть та слід зазначити, що ще раніше було зроблено кілька відкриттів, які тісно пов'язані з топологією. Одним з найбільших, безсумнівно, є формула, яка встановлює зв'язок між вершинами, ребрами та гранями простого багатогранника: це було помічено вже Декартом у 1640 р. Згодом заново відкрито та використано Ейлером у 1752 р. Характерні риси топологічного твердження, в цій формулі стали очевидними набагато пізніше - після того, як Пуанкаре побачив одну з центральних теорем топології у «формулі Ейлера» та її узагальненнях. Тим не менш, без прибільшення можна сказати, що топологія як розділ науки заснована в кінці XIX століття А. Пуанкаре. Процес побудови топології і розв'язання її внутрішніх задач виявився складним і довгим: він продовжується не менше 70-80 років. Незважаючи на проблеми топології, було багато науковців, які присвятили життя її дослідженню, такі як, П.С. Александров, Є.В. Щепін, В.Г.Болтянський, В.А.Єфремович, Л.Б. Шапиро, В.В. Федорчук та інші [13].

Метою дослідження є аналіз поведінки функторів на категорії компактів та неперервних відображень.

Завдання дослідження:

1) аналіз наукової літератури з дослідження поведінки функторів;

2) можливість ознайомлення здобувачів середньої освіти з прикладами просторів, що виникають під дією функторів експоненціального типу.

Об'єкт дослідження: функтори експоненціального типу.

Предмет дослідження: компакти, що виникають під дією функторів exp_2 та exp_3.

РОЗДІЛ 1
ПОНЯТТЯ “ФУНКТОРИ НА КАТЕГОРІЇ КОМПАКТІВ ТА НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ”

1.1 Метрика Хаусдорфа

За словами "ми безперервно деформуємо тіло" стоїть деяке реальне фізичне сприйняття. Але безперервність деформації означає, що ми якось, нехай інтуїтивно, порівнюємо між собою фази деформації, оцінюємо їх близькість. Вибір конкретної оцінки цієї близькості можна зробити багатьма способами. Ми зараз зупинимося на одному з них [2].

Зауважимо насамперед, що відстань між множинами в якості такої оцінки нам не підходить: наприклад, множини можуть перетинатися (і тому відстань між ними буде дорівнювати нулю) і сильно відрізнятися один від одного за рахунок віддалених частин. Отже, оцінка повинна бути такою, що близькість однієї множини у всіх своїх частинах трохи означатиме до іншої. Перекладаючи цю фразу на мову математичних формул, ми приходимо до відхилення $\alpha(F_1, F_2)$ множини F_2 в метричному просторі:

$\alpha(F_1, F_2) = inf\{\varepsilon: \varepsilon > 0, F_2 \subset O_\varepsilon F_1\}$, де

$O_\varepsilon F = \{y: y \in X, inf\{p(y,t): t \in F\} < \varepsilon\}$ – ε – окіл множини F.

Легко навести приклад ситуації, коли значення відхилення нескінченне. Є й інші приклади, які говорять про те, що для того щоб за цією оцінкою стояла реальна геометрія, треба накласти деякі обмеження на розглянуті множини.

Позначимо через $\exp X$ множину всіх замкнутих підмножин топологічного простору X, а через $exp_c X -$ множину всіх бікомпактних замкнутих підмножин простору X. Будемо розглядати відхилення α на множині $exp_c X$ всіх компактних підмножин метричного простору X, тобто вважатимемо, що в написаній вище формулі F_1 і $F_2 -$ які лежать у просторі X компакти. В цьому випадку значення $\alpha(F_1, F_2)$ звичайне: сімейство $\{O_\varepsilon F_1 : \varepsilon > 0\}$ є відкритим покриттям простору X, і в силу компактності множини F_2 з нього можна виділити кінцеву підродину, що покриває множину F_2. Ця підродина впорядкована ставленням включення (тобто з будь-яких двох його елементів один лежить в іншому), тому має максимальний елемент $O_\delta F_1$; очевидно, $\alpha(F_1, F_2) \leq \delta$. Відзначимо інші властивості відхилення α:

для довільних компактних підмножин F_1, F_2 і F_3 простору X

1) $\alpha(F_1, F_2) \geq 0$,
2) $\alpha(F_1, F_2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $F_2 \subset F_1$,
3) $\alpha(F_1, F_3) \leq \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3)$.

Доведення цих властивостей прості. У деяких поясненнях потребує лише третє. Наведемо їх. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Множина F_2 лежить в $(\alpha(F_1, F_2) + \varepsilon) -$ околиці множини F_1, а множина $F_3 -$ в $(\alpha(F_2, F_3) + \varepsilon) -$ в околиці множини F_2. З аксіоми трикутника випливає, що будь-яка точка множини F_3 віддалена від множини F_1 на відстань, меншу ніж $\delta = \alpha(F_1, F_2) + \varepsilon + \alpha(F_2, F_3) + \varepsilon$. (тобто для довільної точки $x \in F_3$ знайдеться точка $y \in F_1$ для якої $p(x, y) < \delta$, $\varepsilon -$ околиця множини), і таким чином, $\alpha(F_1, F_3) \leq \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3) + 2\varepsilon$. Але так як це правильно при будь-якому $\varepsilon > 0$, то ми отримуємо 3).

Відстанню Хаусдорфа між двома компактними підмножинами F_1 і F_2 метричного простору X назвемо тепер число

$p_H(F_1, F_2) = max\{\alpha(F_1, F_2), \alpha(F_2, F_1)\}$.

Серед перерахованих вище властивостей відхилення немає властивості симетрії. Воно ним і не володіє і тому не є метрикою. На відміну від відхилення функції $p_H -$ симетричне, і з властивостей відхилення слідує, що вона є метрикою на множині $exp_c X$.

Ми розглянули одну з можливих оцінок близькості множин. Вона, з одного боку, має очевидну геометричну основу і, природно, виникає в цілому ряді завдань, а з іншого - дає нам приклад окремого випадку фундаментальної математичної теорії - топології метричних просторів (Федорчук В.В., Филиппов В.В.) [6].

1.2 Функтор експоненти

Останнім часом намітилася тенденція вивчення загальних властивостей коваріантних функторів, що діють в Comp. У роботах Е.В. Щепина побудована розгорнута і дуже змістовна загальна теорія функторів. Він виділив ряд природних і малоограничених властивостей функтора і дав Означення нормального функтора, що має велику роль. Так, застосовуючи до вивчення нормальних функторів створений ним же метод незліченних зворотних спектрів, Е.В. Щепин досліджував властивості просторів виду $F(K^{\tau})$, де F - нормальний функтор, K - компакт і τ - непарний кардинал.

Термін (функтор) означає коваріантний функтор, який діє на підставі категорії Comp в цю ж категорію. Наступні означення дав Є.В. Щепін.

Означення. Функтор F називається безперервним, якщо для будь-якого зворотного спектру $S = \left\{X_\alpha, p_\alpha^\beta; U\right\}$ визначено зворотний спектр $F(S) = \left\{F(X_\alpha), F(p_\alpha^\beta); U\right\}$ і породжений відображеннями $F(p_\alpha): F(\lim_{\leftarrow} S) \to F(X_\alpha)$, де p_α суть наскрізних проекцій з $\lim_{\leftarrow} S$ в X_α, відображення $\lim_{\leftarrow} F(p_\alpha)$ з простору $F(\lim_{\leftarrow} S)$ в простір $\lim_{\leftarrow} F(S)$ є гомеоморфізмом (Є.В. Щепін) [7].

Означення. Функтор F називається зберігаючим вагу, якщо $wF(X) = Wx$ для будь-якого нескінченного бікомпакта X.

Означення. Функтор F називається мономорфним, якщо для будь-якого вкладення i бікомпакта X в бікомпакт Y відображення $F(i): F(X) \to F(Y)$ також є вкладенням (Є.В. Щепін) [7].

Умова мономорфності функтора F дозволяє вважати $F(A)$ підпростором $F(X)$, якщо $A \leq X$. Ототожнення $F(A)$ з підпростору $F(X)$ здійснюється вкладенням $F(i)$, де $i: A \to X$- тотожне вкладення. Надалі будемо розглядати тільки мономорфні функтори.

Означення. Функтор F називається епіморфним, якщо він зберігає сюр'єктівность відображень бікомпактов (Є.В. Щепін) [7].

Означення. Функтор F називається зберігаючим перетин, якщо для будь-якого сімейства $\{X_\alpha : \alpha \in U\}$ замкнутих підмножин довільного бікомпакта X маємо $\bigcap_{\alpha \in U} F(X_\alpha) = F(\bigcap_{\alpha \in U} X_\alpha)$ (Є.В. Щепін) [7].

Означення. Функтор F називається зберігаючим прообрази, якщо для будь-якого безперервного відображення f бікомпакта X в бікомпакт Y і для будь-якого замкнутої підмножини $B \leq Y$ маємо $F(f^{-1}B) = F(f)^{-1}F(B)$ (Є.В. Щепін) [7].

Означення. Коваріантний функтор

$F: Comp \to Comp$ називається нормальним, якщо він безперервний, зберігає вагу, перетин і прообрази, мономорфний і епіморфний і переводить одноточковий простір в одноточковий, а порожній - в порожній.

Однак, як показав М.М. Заричний , не всі умови, складові. Означення нормального функтора, є незалежними - можна відмовитися від умови мономорфності і збереження перетинів (Заричний М.М.) [11].

Нехай $f: X \to Y -$ безперервне відображення. Для $C \in \exp X$ покладемо $(\exp f)(C) = f(C)$. Множина C як замкнута підмножина бікомпакта X саме є бікомпактом. Його безперервний образ $f(C)$ також бікомпактний. Але біокомпакт замкнутий у всякому осяжному Хаусдорфовому просторі. Отже, $f(C)$ замкнуто в Y, тобто $f(C) \in \exp Y$. Тим самим визначено відображення $\exp f$: $\exp X \to \exp Y$. Так, певне відображення $\exp f$ безперервне. Це випливає з автоматично перевіреної рівності

$(\exp f)^{-1}(O\langle U_1, \dots U_n\rangle) = O\langle f^{-1}(U_1), \dots f^{-1}(U_n)\rangle$.

Для довільного топологічного простору X позначимо через id_x тотожне відображення простору X на себе. Для довільних відображень $f: X \to Y$ і $g: Y \to Z$ через $g^\circ f: X \to Z$ позначимо їх композицію, тобто результат послідовного виконання цих відображень. Так звана теорема про безперервність складної функції свідчить, що композиція неперервних відображень неперервна (В.В. Федорчук, В.В. Филиппов) [4].

Операція exp застосована до бікомпактів і їх безперервним відображенням, володіє наступними очевидними властивостями:

1) $\exp(id_x) = id_{\exp x}$;

2) $\exp(g^\circ f) = \exp g^\circ \exp f$.

Таким чином, операція exp зіставляє кожному бікомпакту X бікомпакт $\exp X$, кожному безперервному відображенню $f: X \to Y$ безперервне відображення $exp\, f: exp\, X \to exp\, Y$, і при цьому виконані умови 1) і 2). Все це можна переформулювати наступним чином: операція exp є (коваріантним) функтором, чинним на сукупності (або на категорії) Comp всіх бікомпактов і всіх їх неперервних відображень. Функтор цей називається функтором експоненти, або функтором гіперпростору замкнутих множин (Федорчук В.В., Филиппов В.В.) [6].

Підфунктори функтора експоненти

Для бікомпакта X через $exp^c X$ позначимо множину тих $A \in \exp X$, які зв'язні. Множина $exp^c X$ є замкнутою підмножиною експоненти $\exp X$. Справді, візьмемо $A \in \exp X / A \in \exp X$. Множину A в силу його незв'язності можна представити у вигляді диз'юнктної суми двох непорожніх замкнутих підмножин A_1 і A_2. Але в бікомпакті будь-які дві замкнуті множини, які не перетинаються можна укласти в околиці, що не перетинаються. Візьмемо такі околиці U_1 і U_2 множин A_1 і A_2. Тоді множина $O\langle U_1, U_2\rangle$ буде околицею A в $\exp X$, яка не перетинається з

$exp^c X$, оскільки всякий континіум, що лежить в сумі двох відкритих множин , що не перетинаються, повинен лежати в одному з доданків (Федорчук В.В.) [5].

Отже, множина $exp^c X$ замкнута в бікомпакті $\exp X$ і, отже, саме вона є бікомпактом. Бікомпакт цей називається гіперпростором континуумів бікомпакта X, або його континуальною експонентою. Нехай тепер $f: X \to Y -$ безперервне відображення. Позначимо через $exp^c f$ обмеження відображення $expf: expX \to expY$ на бікомпакт $exp^c X$. Оскільки безперервний образ зв'язкової множини зв'язний, відображення $exp^c f$ переводить бікомпакт $expX$ в бікомпакт $expY$. Легко перевірити також, що для континуальної експоненти виконані умови функторіальності:

1) $exp^c(id_x) = id_{exp^c X}$;
2) $exp^c(g^\circ f) = exp^c g^\circ exp^c f$.

Таким чином, операція exp^c є коваріантним функтором в категорії бікомпактов. Називається він функтором континуальної експоненти.

Оскільки для будь-якого бікомпакта X бікомпакт $exp^c X$, природно, вкладений в бікомпакт $expX$, а для всякого безперервного відображення $f: X \to Y$ коммутативна діаграма

$$\exp X \xrightarrow{\exp f} \exp Y$$

$$exp^c X \xrightarrow{exp^c f} exp^c Y,$$

функтор континуальної експоненти exp^c є підфунктором функтора експоненти exp.

Тепер для натурального n позначимо через $exp_n X$ множину всіх не більше ніж $n-$ точкових підмножин X. Будь-яка кінцева підмножина Хаусдорфового простору замкнута в ньому. Отже, $exp_n X \subset expX$. Множина $exp_n X$, що розглядається як підпростір експоненти $expX$, замкнута. Насправді, якщо $A \in \exp X / exp_n X$, то існують $n+1$ різних точок $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$. У цих точках, згідно хаудорфовості простору X, знайдуться попарно непересічні околиці $U_1, \dots, U_{n+1}$. Тоді множина $O = O\langle U_1, \dots, U_{n+1}, \mathrm{X}\rangle$ є околицею A в $expX$. У той же час будь-який елемент $B \in O$ повинен перетинатися з усіма U_i і, отже, повинен містити принаймні $n+1$ точку. Таким чином, $O \cap exp_n X = \emptyset$. Отже, множина $exp_n X$ замкнена в $expX$ і, отже, є бікомпактом (Федорчук В.В., Филиппов В.В.) [6].

Для безперервного відображення $f: X \to Y$, вважаючи $exp_n f$ рівним обмеженню відображення $expf$ на бікомпакт $exp_n X$, отримуємо безперервне відображення

$$exp_n f: exp_n X \to exp_n Y.$$

Ясно також, операція exp_n задовольняє умовам 1) і 2) функторіальності і є коваріантним функтором, то цей функтор називається функтором гіперсиметричного $n-$ степеня. Функтор гіперсиметричного $n-$ степеня exp_n так само, як і функтор континуальної експоненти, є підфунктором функтора експоненти exp.

Особливий інтерес представляє випадок $n = 1$. Якщо ми не будемо розрізняти точки простору X і його одноточкові підмножини (що часто і робиться), то отримаємо природне ототожнення множин X і $exp_1 X$. Ототожнення це є гомеоморфізм. Особливо легко угледіти це в разі метричного компакта X: відстані між точками x і y і одноточковими множинами $\{x\}$ і $\{y\}$ однакові. Але і в неметризуємому випадку топологічность відображення

$$\{\cdot\}: X \to exp_1 X$$

перевіряється дуже легко (Пасынков Б.А., Федорчук В.В.) [3].

Таким чином, тотожний функтор Id, природно, ізоморфний функтору exp_1 і, отже, є підфунктором експоненти. Більш того, має місце наступна діаграма включень згаданих тут підфункторів експоненти:

$$exp_2 \subset \cdots \subset exp_n \subset \cdots exp$$

$$Id = exp_1 \quad \subset \quad exp^c \ (1) .$$

1.3 Приклади просторів, що виникають під дією функторів експоненціального типу

Введення в поняття топологічних просторів служить не тільки хорошим інструментом для конструювання нових топологічних об'єктів, але і дає цікаві методи досліджень топологічних просторів і їх неперервних відображень. Можливість подати цей простір X у вигляді більш простих просторів і навіть у вигляді безперервного способу найчастіше гарантує нам досить хороші властивості простору X. Але в даний момент нас в першу чергу цікавлять функціональні властивості (Федорчук В.В., Филиппов В.В.) [6].

Для цього кардинального числа k (кінечного або нескінченного) операція зведення просторів в k - у ступінь триває до коваріантного функтора в категорії топологічних просторів. Цей k - степенний функтор ми будемо позначати через Π^k, хоча простір $\Pi^k X$ і відображення $\Pi^k f$ часто зручніше позначати природними символами X^k і f^k. Відображення

$$f^k : X^k \to Y^k$$

визначається покоординатно: точці $x \in X^k$ з координатами $x_a, a \in k$ ставиться у відповідність точка $f^k(x) = y$ з координатами $y_a = f(x_a)$.

Тотожний функтор, природно, ізоморфний підфунктору статечного функтора Π^k для всякого k. Цей ізоморфізм здійснюється за допомогою діагонального вкладення простору X в його k - у ступінь X^k, що ставить у відповідність точці $x \in X$ точку з X^k, всі координати якої дорівнюють x.

Тепер обмежимося випадком натуральних $k = n$ і бікомпактних X. Розглянемо відображення

$$\pi_n : X^n \to exp_n X \,,$$

воно ставить у відповідність точці $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ множину її координат. Неважко переконається в тому, що π_n є безперервним відображенням бікомпакта X^n на бікомпакт $exp_n X$. Таким чином, гіперсиметрична n - му степеню бікомпакта X є фактор-простором його n - го степеня щодо розбиття, яке породжується наступним відношенням еквівалентності: точки $x, y \in X^n$ еквівалентні, якщо вони мають однакові множини координат. Цей факт з урахуванням того, що для будь-якого безперервного відображення $f : X \to Y$ коммутативна

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\pi_n x"'] & Y^n \arrow[d, "\pi_n y"] \\ exp_n X \arrow[r, "exp_n f"] & exp_n Y \end{tikzcd}$$

діаграма формулюють таким чином: функтор exp_n гіперсиметричного n - го степеня є фактор-функтором функтора Π^n зведення до n - го степеня.

Зведемо інші приклади фактор-функторів функтора Π^n. На n - степені X^n бікомпакта X діє симетрична група S_n всіх перестановок як група перестановок координат. Множину орбіт цієї дії з фактор-топологією позначимо через $SP^n X$. Таким чином, точки простору $SP^n X -$ це кінечні підмножини (класи еквівалентності) X^n. При цьому дві точки $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ вважаються еквівалентними, якщо існує така перестановка $\sigma \epsilon S_n$, що $y_i = x_{\sigma(i)}$ (Федорчук В.В., Филиппов В.В.) [6].

Простір $SP^n X$ називається n - м симетричним степенем простору X. Тепер ми можемо пояснити, чому $exp_n X$ називається гіперсиметричним степенем простору X. Назвемо відносини еквівалентності, за допомогою яких простори $SP^n X$ і $exp_n X$ виходять з X^n відповідно відносинами симетричної і гіперсиметричної еквівалентності. Різні симетрично еквівалентні точки з X^n будуть і гіперсиметрично еквівалентні. Так, для $x \neq y$ точки $(x, x, y), (x, y, y) \in X^3$ гіперсиметрично еквівалентні, але не еквівалентні симетрично. Отже, ставлення гіперсиметричної еквівалентності сильніше відносини симетричної еквівалентності. Сильніше в тому сенсі, що його класи еквівалентності більші. Тому це відношення називається ставленням симетричної, або гіперсиметричної, еквівалентності, а відповідний йому простір $exp_n X -$ гіперсиметричним степенем.

Нехай $f: X \to Y$ безперервне відображення. Для класу еквівалентності $[(x_1, \ldots, x_n)] \in SP^n X$ покладемо $SP^n f[(x_1, \ldots, x_n)] = [(f(x_1), \ldots, f(x_n))] =..$

Тим самим виразимо відображення $SP^n f: SP^n X \to SP^n Y$.

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\pi_n^s x"'] & Y^n \arrow[d, "\pi_n^s y"] \\ SP^n X \arrow[r, "SP^n f"] & SP^n Y \end{tikzcd}$$

Його безперервність випливає з коммутативности діаграми і факторних відображень $\pi_n^s x$ і $\pi_n^s y$, що визначаються відносинами симетричної еквівалентності на X^n і Y^n.

Легко перевірити, що так побудована операція SP^n є коваріантним функтором в категорії бікомпактов. Функтор цей називається функтором n - го симетричного степеня. Коммутативність тільки що наведеної діаграми показує, що функтор SP^n є фактор - функтором функтора зведення n - го степеня (Федорчук В.В., Филиппов В.В.) [6].

Отже, функтор SP^n виходить за допомогою факторизації функтора Π^n. У свою чергу, факторізуючи функтор SP^n, можна отримати функтор exp_n. Справді, клас симетричної еквівалентності $[(x_1, \ldots, x_n)]$ однозначно визначає його клас гіперсиметричної еквівалентності $[(x_1, \ldots, x_n)]^{hs}$. Тим самим визначено відображення

$$\pi_n^h: SP^n X \to exp_n X,$$

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_n^s"'] & & exp_n X \\ & SP^n X \arrow[ur, "\pi_n^h"'] & \end{tikzcd}$$

яке представляє функтор exp_n, як фактор – функтора SP^n. Ясно також, що для будь-якого бікопакта коммутативна діаграма

Поняття симетричного степеня допускає узагальнення. Нехай $G -$ довільна підгрупа групи S_n. Тоді вона також діє на X^n, як група перестановок координат. Відповідно на X^n виникає ставлення $G -$ симетричної еквівалентності. Фактор - простір X^n по відношенню $G -$ симетричного ступеня простору X і позначається через $SP_G^n X$. Операція SP_G^n також є коваріантним функтором в категорії бікомпактов, званим функтором $G -$ симетричного степеня. Якщо $G = S_n$, то $SP_G^n = SP^n$. Якщо ж група G складається тільки з одиничного елемента, то $SP_G^n = \Pi^n$. Більш того, якщо $G_1, G_2 -$ такі підгрупи симетричної групи S_n, що $G_1 \subset G_2$, то виникає наступна послідовність природно визначаються факторизацию функторів:

$\Pi^n \to SP_{G_1}^n \to SP_{G_2}^n \to SP^n$. (Шапиро Л.Б.) [8]

Приклад 1

$X -$ відрізок $[0,1]$ числової прямої R. Знайдемо симметричний 2-степінь $SP^2X = exp_2X$. Для цього скористаємося тим, що функтор exp_2 є фактор - функтором функтора Π^2. Відображення $\pi^2: X^2 \to exp_2X$ складається в тому, що пари точок (x, y) і (y, x) "склеюються". Склеювання це може здійснити кожен читач. Треба взяти квадратний аркуш паперу, який зображає одиничний квадрат площини, накреслити на ньому діагональ Δ, що складається з точок виду (x, x), зігнути квадрат вздовж цієї діагоналі аж до суміщення двох рівнобедрених прямокутних трикутників T_1і T_2 і склеїти ці трикутники (див. на рис.1). Трикутник, що вийшов від такого склеювання квадрата, і буде зображувати 2-й симетричний степінь відрізка.

Цей результат можна отримати і по-іншому. Діагональ Δ розбиває квадрат I^2 на два симетричних трикутника T_1і T_2:

$$T_1 = \{(x, y) \in I^2 : x \geq y\},$$

$$T_2 = \{(x, y) \in I^2 : x \leq y\}.$$

Тоді відображення π_2, обмежене тільки на трикутник T_1, буде взаємно однозначним безперервним відображенням компакта T_1 на Хаусдорфовий простір $exp_2 I$. Такі відображення обов’язково повинні бути гомеоморфними.

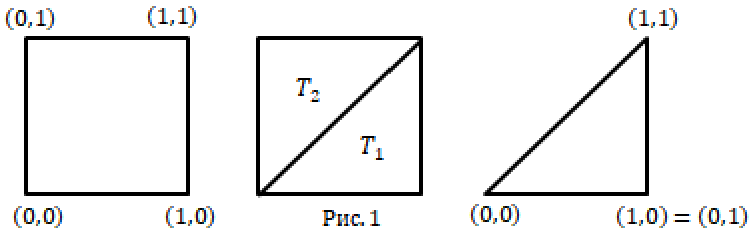


Рис. 1

Отже, ми ще раз продемонстрували, що симетричний квадрат $exp_2 I$, природно ототожнюється з половиною квадрата I^2.

Приклад 2

Покажемо, що симетричний квадрат кола $SP^2S^1 = exp_2S^1$ гомеоморфНИЙ листу Мебіуса. Нагадаємо, що лист Мебіуса виходить з квадрата, якщо ототожнити центрально симетричні точки двох протилежних його сторін. Так, якщо в якості квадрата взяти одиничний квадрат площини $I^2 = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1\}$, то ототожнюються пари точок $(0, y)$ і $(1,1 - y)$ (рис.1.1).

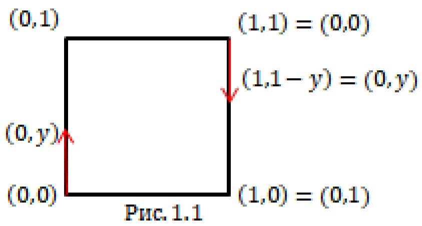


Рис. 1.1

Одним з найцікавіших топологічних властивостей листа Мебіуса є те, що він представляє собою односторонню поверхню. Локально, в кожній своїй точці лист Мебіуса має дві сторони. Але якщо в якомусь місці ви почнете зафарбовувати одну зі сторін аркуша Мебіуса в якийсь колір, то продовжуючи цей процес безперервно, ви закрасите в цей колір весь лист Мебіуса. Цікаво відзначити, що якщо за аналогією з листом Мебіуса ви склеєте таку ж смужку паперу, перевернувши один з його кінців двічі, то ви отримаєте хоча і перекручену, але двосторонню поверхню. Поверхня ця гомеоморфна циліндру (смужці, склеєної без будь-яких перекручень) і відрізняється від звичайного циліндра тільки своїм розташуванням в тривимірному евклідовому просторі.

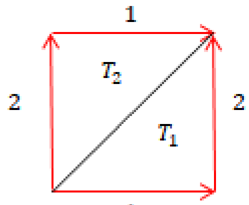


Рис. 1.2

Отже, чому ж компакт exp_2S^1 гомеоморфний листу Мебіуса? Окружність S^1 вдає із себе відрізок з ототожненими кінцями. Відповідно квадрат окружності - тор – який отримується зі звичайного квадрата, ототожненням пар протилежних, однаково спрямованих його сторін (рис. 1.2).

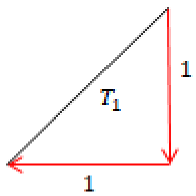


Рис. 1.3

Відображення $\pi_2 : S^1 \times S^1 \to exp_2S^1$, як і в попередньому прикладі, ототожнює верхній трикутник T_2 квадрата, який зображує тор на рис 1.2, з його нижнім трикутником T_1. При цьому верхня сторона 1 ототожнюється з правою стороною 2, а ліва сторона 2 - з нижньою стороною 1. Таким чином, компакт exp_2S^1 виходить з прямокутного трикутника T_1, катети якого ототожнені зображенню на рис. 1.3

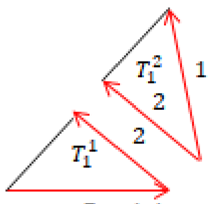


Рис. 1.4

способом. Ми покажемо, що склеєний таким чином трикутник збігається з листом Мебіуса, спочатку розрізавши цей трикутник, а потім склеївши в іншій послідовності. Розріжемо трикутник T_1 по висоті, опущеної з прямого кута на гіпотенузу, і задамо нумерацію і напрямок сторін двох отриманих трикутників T_1^1 і T_1^2, склейка яких дає шуканий компакт exp_2S^1 (рис. 1.4).

Тепер ми склеїмо сторони 1 трикутників T_1^1 і T_1^2. Поєднати ці сторони рухом в площині, не накладаючи трикутники один на одного, не можна. Тому перевернемо трикутник T_1^1, відбивши його відносно сторони 1, а

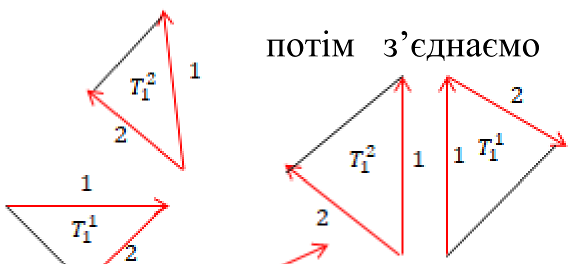


Рис. 1.5

потім з'єднаємо сторони 1 рухом перевернутого трикутника T_1^1 в площині (рис. 1.5). Після склеювання сторін 1 ми отримуємо квадрат, у якого залишається склеїти пару протилежних сторін 2, спрямованих в різні боки. Цим і завершується доведення гомеоморфності листа Мебіуса симетричному квадрату окружності.

Приклад 3

Тепер обчислимо континуальну експоненту $exp^c S^1$ окружності. Підконтинуумами окружності є її дуги (в тому числі і нульової довжини) і сама окружність. Але на відміну від підконтинуумів відрізка будь-яка пара точок x_1, x_2 окружності S^1 визначає пару взаємно додаткових дуг, кінцями яких є точки x_1, x_2.

Побудуємо гомеоморфизм r кола B^2 на $exp^c S^1$. Центру кола B^2 поставимо у відповідність найбільший підконтинуум окружності S^1, тобто саму цю окружність. Нехай тепер точка $x \epsilon B^2$. Віддалена від центра на відстань $a > 0$. Проведемо через точку x радіус R_x кола B^2, кінець його позначимо $\varphi(x)$. Тепер поставимо у відповідність точці x дугу окружності S^1 довжиною $2\pi(1-a)$ з центром в точці $\varphi(x)$.Легко бачити, що так побудоване відображення $r: B^2 \to exp^c S^1$ безперервне і взаємно однозначне, тобто є гомеоморфізмом.

Гомеоморфізм r володіє тією властивістю, що і точки окружності S^1 він залишає на місці, тобто його можна розглядати як багатозначну ретракцію кола B^2 на його кордон S^1. Ця конструкція допускає природне узагальнення на більш високі розмірності і грає важливу роль в геометричній топології.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ У ВИВЧЕННІ ФУНКТОРІВ EXP_2 ТА EXP_3

У середині XIX століття виникла абсолютно нова тенденція в геометрії, якій судилося стати однією з головних рушійних сил сучасної математики. Предметом нової галузі, яка називається топологія (або аналіз situs), є вивчення властивостей геометричних фігур, які зберігаються навіть тоді, коли ці фігури зазнають таких перетворень, що руйнують всі їх метричні та проективні властивості [12].

Топологію напрочуд важко визначити. Її опис набагато складніший за ті формулювання, які пропонуються визнаними довідниками та енциклопедіями для арифметики ("Наука про позитивні реальні числа" - Новий колегіальний словник Вебстера або "Мистецтво маніпулювання числовими значеннями та їх взаємозв'язками" - Енциклопедія Britannica) або геометрією ("Вивчення [математичних] властивостей простору" - Енциклопедія Britannica). Марк Барр загалом визначає математику як щось, "що має на меті тримати факти в стані оніміння, поки ми безпристрасно вивчаємо взаємозв'язок між ними", що особливо застосовується до алгебри (Энгелькинг Р.) [10].

Одним з найбільших геометрів цієї ери був А. Ф. Мебіус (1790-1868), людина, яка через свою скромність у науковій кар'єрі мала особливий успіх: він служив астрономом в одній з німецьких обсерваторій другого рівня. У віці шістдесяти восьми років він подарував Паризькій академії мемуари про «односторонні» поверхні, що містять деякі найдивовижніші факти з нової галузі геометрії. Як і багато інших важливих наукових праць, його рукопис лежав на полицях Академії кілька років, поки не склалися обставини, щоб його опублікував сам автор. Незалежно від Мебіуса астроном І. Лістинг

(1808-1882) з Геттінгіна зробив подібні відкриття і під впливом Гауса в 1847 р. видав невеличку книжку "Vorstudien zur Topologie". Коли Бернхард Ріманн (1826-1866) прибув до Геттінгена, щоб стати там студентом, математична атмосфера університету цього міста вже була насичена пильною цікавістю до нових і старих геометричних ідей. Незабаром він зрозумів, що саме в них слід шукати підказку до найглибших властивостей аналітичних функцій складної змінної. Пізніший розвиток топології, мабуть, зобов'язаний чимось більше, ніж чудовим спорудженням ріманової теорії функцій, в якій топологічні поняття є найбільш фундаментальними [13].

У певному сенсі топологія - це наука, яка вивчає безперервність: починаючи з неперервності простору або форм, вона переходить до узагальнень, які потім, за аналогією, ведуть до нового розуміння безперервності та "звичайного" простору, як ми уявимо це, залишається далеко позаду. Справжні топологи уникають всяких зображень, відчуваючи до них деяку недовіру. Це пов’язано з тим, що неможливо і безглуздо зобразити «простори», які їх займають. Однак нам буде легше дійти до розуміння їх цілей, до топологічної точки зору на певні форми (або "пробіли"), якщо ми почнемо з того, що можна побачити і доторкнутися.

Тополога цікавлять ті властивості «об’єктів» (досі інтерпретованих нами в геометричному сенсі), які є найбільш стійкими, тобто здатними протистояти деформаціям стиснення та натягу (Борисенко О.А.) [9].

Спочатку унікальність методів, що використовуються в новій галузі, не дозволила представити отримані тут результати у традиційній дедуктивній формі, характерній для елементарної геометрії.

Оскільки на перших кроках у невідомому районі ідеал бездоганної строгості зовсім не потрібний і навіть мало важливий, ми іноді не поспішаємо звертатися безпосередньо до інтуїції здобувачів середньої освіти [13].

Як ви гадаєте з чого починаються великі відкриття? Звісно, з чогось цікавого, дивного і незрозумілого. А ще вони починаються з маленьких відкриттів, які діти роблять щодня. Щось несподіване можна побачити кожного дня, треба лише вміти побачити і зрозуміло пояснити діткам.

Пояснення мають бути не "дитячими", а саме науковими, бо дошкільнята і маленькі школярі — справжні дослідники, науковці-початківці.

Що ж таке лінія? Діти вже з 1-го класу мають чіткі уявлення і поняття про такі геометричні фігури, як точка, пряма лінія, відрізок прямої, ламана лінія, кут, многокутник, круг. При цьому система вправ і задач геометричного змісту і методика роботи над ними повинні сприяти розвитку просторових уявлень у дітей, умінь спостерігати, порівнювати, абстрагувати й узагальнювати. Досить інтенсивно розвивається лінія геометричних величин, їх вимірювання й обчислення [14].

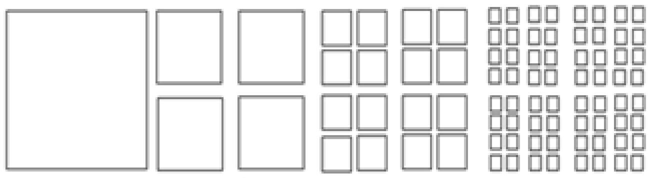


Рис.2.1

Евклід визначає лінію як "довжину без ширини". Це, звичайно, не Означення, а лише наочне опис ліній. Наступний приклад показує, однак, що це опис навряд чи можна вважати удачним [21].

Приклад 1. Візьмемо квадрат, який має площу 1 (рис.2.1, а) і відкинемо з нього хрест (рис. 2.1, б), причому ширину смужок хреста підберемо так, щоб площа хреста дорівнювала $\frac{1}{4}$. В кожному з решти квадратів знову виріжемо по хресту (рис. 2.1, в), причому так, щоб сума площ хрестів дорівнювала $\frac{1}{8}$. В кожному з решти 16 маленьких квадратів знову викинемо по хресту (рис. 2.1,г) так, щоб сума площ шматків, які відкидаються дорівнювала $\frac{1}{16}$, і т.д. Позначимо через A "граничну фігуру", тобто перетин $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$, де $A_n -$ фігура, яка залишається після проведення n етапів побудови. Фігура A "розсипається" на окремі точки (бо квадратики, які залишаються робляться все менше) і тим не меньше площа – позитивна. Справді, спочатку ми викинули з квадрата $\frac{1}{4}$ його площі, потім $\frac{1}{8}$, потім $\frac{1}{16}$ і т.д. У межі у нас залишається фігура A, що має площу $1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots)$. Так як сума нескінченної спадної геометричної прогресії, записаної в дужках, дорівнює $\frac{1}{2}$, то площа граничної фігури A дорівнює $\frac{1}{2}$.

Побудуємо тепер просту дугу (тобто фігуру, гомеоморфними відрізку), яка проходить через всі крапки множини A. Для цього візьмемо вигнуту смужку, яка містить чотири квадрати, отриманих на першому етапі побудови (рис. 2.2, а). Потім зробимо смужку вужчої і зігнутої, так що вона буде містити всі квадрати, отримані на другому етапі (рис. 2.2, б), потім на третьому (рис. 2.2, в) і т.д.

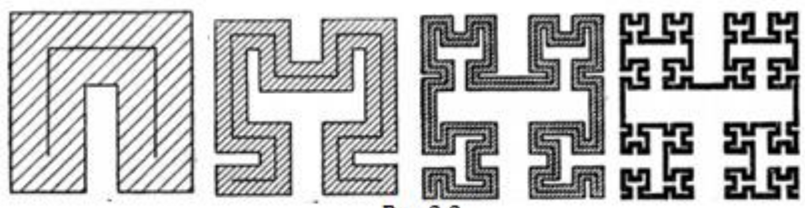


Рис. 2.2

Після n етапів цієї побудови ми отримуємо смужку B_n, яка міститься в попередніх смужках і містить фігуру A_n (а отже, і фігуру A). Перетин $B_1 \cap B_2 \cap \ldots$ цих смужок, тобто їх "граничну фігуру" позначимо через B; вона також містить A, і тому площа фігури B не менше $\frac{1}{2}$. Рис 2.2 наочно показує, що B є надзвичайно "звивистою" лінією (простою дугою). Ця лінія має позитивну площу, тобто навряд чи може бути названа "довжиною без ширини" (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [1].

Евклід дає також опис лінії як "межі поверхні". Однак і поняття "межа", як ми зараз побачимо, таїть в собі багато несподіваного. Ми звикли вважати, що до кожної ділянки лінії площина примикає "з двох сторін". Наприклад, якщо $l -$ проста замкнута лінія, то обидві області, U

і V, що визначаються лінією l, примикають до неї на всьому проміжку (тобто як завгодно близько до будь-якої точку $x \in l$ є і точки області U і точки області V).

Здається "наочно очевидним", що лінія не може мати спільного кордону більш ніж з двома областями на площині, які примикають до цієї лінії на всьому її проміжку.

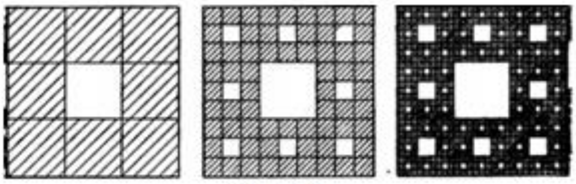


Рис. 2.3

Приклад 2. Цікавий приклад лінії був побудований польським математиком Серпінським. Розділимо квадрат на дев'ять квадратів і викинемо середній з них (рис. 2.3, а). Кожен з восьми квадратів, які залишилися знову розділимо на дев'ять квадратиків і викинемо середній (рис. 2.3, б). Потім так само зробимо з кожним з решти квадратиків (рис. 2.3, в) і т.д. У межі ми отримаємо деяку одновимірну фігуру C, тобто лінію ("килим Серпінського").

Фігура C є універсальною плоскою лінією: якщо лінія l вкладена в площину, то вона вкладена в килим Серпінського, тобто існує лінія $l` \subset C$, гомеоморфна l. Ясно, що лінії, які не вкладені в площину, не можуть бути вкладені і в килим Серпінського, (рис 2.4), в який, як довів австрійський математик Менгер, можна вкласти будь-яку лінію.

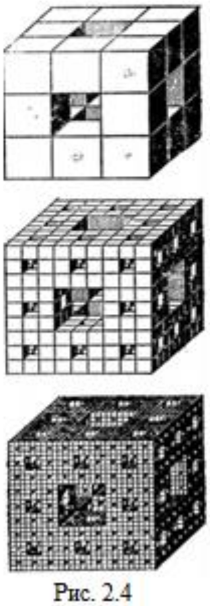


Рис. 2.4

Приклад 3. Нехай точка, яка рухається, пробігає фігуру літери Ф двома способами, показаними на (рис.2.5) (суцільною лінією вказано шлях, пройдений в певний момент, а штриховою - подальший рух). В обох випадках точка пробігає одну і ту ж множину, тобто "слід" точки, яка рухається однаковий, але шляхи різні.

Дамо точне Означення поняття шляху. Нехай в деякій фігурі А рухається точка, починаючи від моменту $t = 0$ до моменту $t = 1$. Для кожного моменту t, де $0 \leq t \leq 1$, відомо положення $a(t)$ точки, яка рухається, тобто кожній точці t відрізка $[0,1]$ поставлена в відповідність точка $a(t) \in A$. Виходить відображення відрізка $[0,1]$ в фігуру A, причому відображення безперервне, так як точка A "безперервно" переміщається зі зміною t. Це відображення і являє собою шлях. Ми приходимо до наступного

Означення: всяке безперервне відображення відрізка $[0,1]$ в фігуру A називається шляхом (в цій фігурі).

Будь-яку просту дугу можна уявляти собі як шлях (адже проста дуга виходить за допомогою гомеоморфного відображення відрізка, а гомеоморфні відображення безперервні). Зокрема, лінію, яку розглянуто в прикладі 1 можна розглядати як "слід рухомої точки". Уже це показує, що поняття шляху є не надто простим. Наступний приклад ще більш підтверджує це.

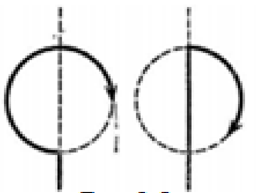


Рис. 2.5

Приклад 4. Покажемо, що можна побудувати шлях, який проходить через кожну точку квадрата. Іншими словами, існує безперервне відображення відрізка на весь квадрат; такі шляхи називаються кривими Пеано. Для одержання кривої Пеано побудуємо в квадраті Q все більш звиваючі "смужки-лабіринти": будемо ділити квадрат на $4, 16, 64, \dots, 4^n, \dots$ конгруентних квадратиків (рис. 2.6), а потім заберемо деякі з їх сторін (рис.2.7) , причому перегородки, залишені на якомусь етапі побудови, зберігаються і на всіх наступних. Середні лінії цих смужок (штрихова лінія на рис. 2.7) і дадуть в межі шлях, яким заповнюють весь квадрат Q, тобто криву Пеано. Більш точно цей шлях можна визначити наступним чином. Розглянемо безперервне відображення відрізка $[0,1]$ на першу штриховану ламану лінію (рис. 2.7, а), при якій відрізок $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

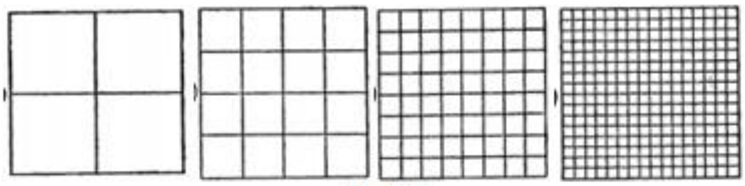


Рис. 2.6

відображається на частину цієї ламаної, що лежить в лівій нижній чверті великого квадрата, відрізок $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ на частину, що лежить в лівому верхньому квадраті, а відрізки $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ і $[\frac{3}{4}, 1]$ на частини, що лежать в правих (верхньому і нижньому) квадратах. Це відображення позначимо через $f_1(t)$ (де $0 \leq t \leq 1$). Далі, через $f_2(t)$ позначимо відображення відрізка $[0,1]$ на другу штриховую ламану (рис. 2.7, б), при якій відрізки $\left[0, \frac{1}{16}\right], \left[\frac{1}{16}, \frac{2}{16}\right], \dots, \left[\frac{15}{16}, 1\right]$ відображаються на послідовні частини цієї ламаної, що лежать в шістнадцяти квадратах другого етапу. Аналогічно, $f_3(t)$ буде відображенням відрізка $[0,1]$ на пунктирну

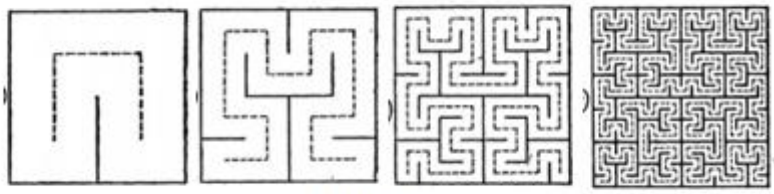


Рис.2. 7

ламану третього етапу (рис. 2.7, в) і т.д. Межа послідовності функцій $f_1(t), f_2(t), f_3(t),\dots$ є відображенням $f_1[0,1] \to Q$, тобто деякий шлях в квадраті Q: це і є крива Пеано. Легко пояснити, що ця межа існує. Візьмемо, наприклад, точку $\frac{1}{3} \in [0,1]$. Так як $\frac{1}{3}$ лежить у другій чверті відрізка $[0,1]$, тобто $\frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, то точка $f_1\left(\frac{1}{3}\right)$ лежить в лівому верхньому квадраті на (рис 2.6, а). Далі, так як $\frac{1}{3} \in \left[\frac{5}{16}, \frac{6}{16}\right]$ то $f_2\left(\frac{1}{3}\right)$ лежить в шостому по порядку квадраті, яка пробігає штриховану ламаної на (рис. 2.7, б) (тобто в лівому верхньому квадраті на (рис. 2.6, б). Так як $\frac{1}{3} \in \left[\frac{21}{64}, \frac{22}{64}\right]$, то $f_3\left(\frac{1}{3}\right)$ лежить в 22-му квадраті, пробігає штриховану ламаної на (рис. 6, в) (тобто в лівому верхньому квадраті на (рис. 2.6, в)), і т.д.

Межа цієї послідовності квадратів, які зменшуються (вкладених послідовно один в інший), тобто, в даному випадку, ліва верхня вершина квадрата і є точка $f\left(\frac{1}{3}\right)$ Таким же чином визначається точка $f(t)$ для будь-якого $t \in [0,1]$.

Зауважимо, що крива Пеано не є простою дугою, вона має нескінченно багато точок "склеювання" (тобто в квадраті є нескінченно багато точок, через які побудований шлях $f(t)$, який проходить більш, ніж один раз).

Наступній приклад ми можемо розглянути на математичному гуртку в 9 класі для розширення знань з математики і розвитку мислення. Залучення здобувачів середньої освіти до гурткової роботи краще здійснювати на уроці. Можна їм запропонувати цікаву задачу і запропонувати продовжити цю роботу на засіданнях гуртка. Так ми можемо підготувати здобувачів середньої освіти до вивчення нового розділу “Стереометрія” (А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С.Якір) [16].

Курс стереометрії вивчається в 10-11 класах, там розглядаються: властивості фігур у просторі (паралельність і перпендикулярність прямих і площин, многогранники і тіла обертання). Геометричні побудови включають безпосередні і уявні побудови, які застосовуються у разі зображення просторових геометричних фігур, побудови тіл обертання та перерізів многогранників (А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський) [17], (Слєпкань З.І.) [19].

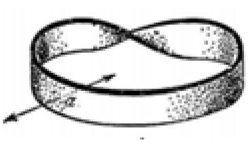


Рис. 2.8(а)

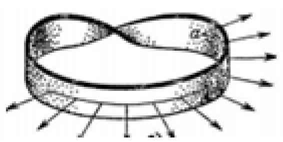


Рис. 2.8(б)

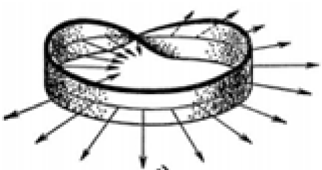


Рис. 2.8(в)

Приклад 5. Цікавий приклад поверхні було зафіксовано в роботах німецьких математиків Мебіуса і Лістинга. Приклад має такий вигляд: стрічка прямокутної форми (рис. 2.8, а) один раз перекручується, (рис. 2.8, б, в) а потім склеюються її кінці. Отримана поверхня (рис. 2.8, г) називається стрічкою Мебіуса, вона має лише одну сторону. Наприклад, якщо ми будемо переміщати пензлик по стрічці Мебіуса (рис. 2.9), ми прийдемо до того самого місця, з якого починали зафарбовування, але зі зворотного боку. Переміщаючи пензлик далі, ми замалюємо всю стрічку Мебіуса і переконаємося, що у неї тільки одна сторона (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [1].

Зрозуміло, наочний опис односторонньої поверхні за допомогою "фарбування" можливо лише для "товстої поверхні", виготовленої з деякого матеріалу; математично ж поверхня не має товщини. Тому наведемо інший опис "однобічності". У кожній точці a стрічки Мебіуса можна провести два протилежних вектора, перпендикулярних до неї в цій точці (рис. 2.9, а). Ці вектори називають нормалями до стрічки Мебіуса в точці a. Виберемо одну з них і почнемо переміщати точку a разом з нормаллю по стрічці Мебіуса (рис. 2.9, б). Коли точка a обійде всю стрічку Мебіуса, що переміщається нормаль перейде не в своє початкове положення, а в протилежне (рис. 2.9, в). Отже, на стрічці Мьобіуса існує такий собі замкнений шлях (обхід), що при проходженні цього шляху нормаль до поверхні приходить в стан, протилежний первісному.

Поверхні, які обладають такими підходами, і називаються односторонніми.

Однак, ми вивчаємо не тільки саму поверхню, але і її розташування в просторі.

Тому наведемо "внутрішнє" означення односторонніх поверхонь. Навколо точки a, з якої проведена нормаль, описали невелику окружність і на ній відзначили стрілкою напрямок проти годинникової стрілки (рис. 2.9, а). Якщо точка a переміщається, то разом з нею переміщується і нормаль, а також коло з наявним на ній напрямком

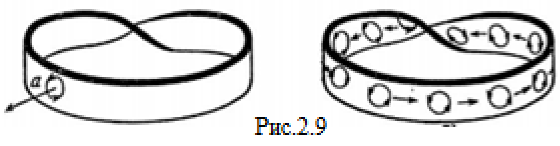


Рис.2.9

Коли ми почнемо обводити окружність по всій стрічці Мебіуса, напрямок на окружності зміниться на протилежний (так як нормаль змінить свій напрямок, (рис. 2.9, б) (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [1].

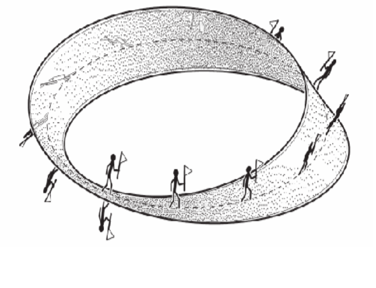
Отже, на стрічці Мебіуса є такий собі замкнений шлях, що при переміщенні окружності впродовж всього шляху напрямок змінюється на протилежний. Такі підходи називаються направляючими орієнтацію (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [1].

Якщо на поверхні немає обходів, які звертають орієнтацію, то вона називається орієнтованою (або двосторонньою). З наочної точки зору орієнтовність можна означити так: всю поверхню можна покрити маленькими колами і вибрати на них такі напрямки, які будуть орієнтовані однаково (Болтянский В.Г., Ефремович В.А.) [1].

Нехай тепер Q_1 і $Q_2 -$ дві поверхні, у кожної з якої є край, гомеоморфний окружності. З’єднавши ("склеївши") краї цих поверхонь, ми отримаємо одну нову поверхню. Кажуть, що діра, наявна в поверхні Q_1, заклеюється поверхнею Q_2 (або навпаки).

А зараз ми можемо ще розглянути лист Мебіуса з “дитячої” точки зору.

Ми ще з дитинства звикли, що всі поверхні мають дві сторони. У самого звичайного листочка з дерева одна із сторін може бути темно-зеленою, інша - світло-зеленою. На одній стороні аркуша в підручнику може бути текст, а зате на другій — яскравий малюнок. Якщо одну сторону аркуша звичайного паперу ми зафарбуємо жовтим кольором, тоді друга його сторона залишиться незмінною, і нічого нам не буде заважати розфарбувати її будь-яким іншим кольором [22].



Візьмемо довгу смужку паперу і склеїмо з неї кільце. Одну його сторону, наприклад, ми можемо розфарбувати зеленим кольором, а іншу — фіолетовим. Нічого незвичайного. Якщо мишка буде бігти по зеленій стороні кільця, то, щоб опинитися на фіолетовій, їй доведеться перелізти через край кільця.

Є кільце - лист Мебіуса, воно має лише одну сторону та один край.

Спробуємо розфарбувати його як кільце. Але нічого не виходить: лист Мебіуса можливо лише розмалювати одним кольором, тому вчені кажуть, що лист Мебіуса має лише одну сторону. А потрапити з однієї точки поверхні листа у будь-яку іншу можна не перетинаючи краю [22].

ВИСНОВКИ

Поставлені завдання виконані і мета досягнута. Проведене дослідження поведінки функторів на категорії компактів та неперервних відображень переконливо свідчить, що функтор експоненти exp_2 від окружності є лист Мебіуса.

Проведене дослідження дозволяє охарактеризувати наступні висновки: 1) аналіз наукової літератури з проблеми дослідження виявив, що набагато легше підмітити існування топологічних властивостей фігур, ніж створити їх "обчислення", тобто розділ математики, який має точні поняття, строгі закони і методи, математичні формули, показує топологічні величини; 2) дослідження показало, що можна ознайомити здобувачів середньої освіти з прикладами просторів, що виникають під дією функторів експоненціального типу. Можемо дати поняття топологічних просторів, і показати, що воно служить не тільки хорошим інструментом для конструювання нових топологічних об'єктів, але і дає цікаві методи досліджень топологічних просторів і їх неперервних відображень. Прийшли до висновку, що більш ефективний спосіб навчання в школі є введення позакласних уроків для розвитку здобувачів середньої освіти, адже вони будуть дуже зацікавленими в дослідах, тому що вони зможуть проводити їх власноруч, а не просто спостерігати за роботою вчителя. За допомогою результатів їх самостійної роботи можна зробити гарні висновки , що сучасна топологія має велике практичне значення. Розвиток топології триває у різних напрямках, а сфера застосування стрімко розширюється.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 160с.
2. Размерность Хаусдорфа URL:
3. Пасынков Б.А., Федорчук В.В. Топология размерности. – М.: Знание, 1984. – 64 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Математика, кибернетика”; №9)
4. Федорчук В.В. Общая топология. Основные структуры / В.В. Федорчук, В.В. Филиппов. – М.: Из-во МГУ, 1998. – 252 с.
5. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q – многообразия // УМН. – 1981. – Т. 36, вып. 3. – С. 177 – 195.
6. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Топология гиперпространств и ее приложения. – М.: Знание, 1989. – 48 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. “Математика, кибернетика”; №4)
7. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов / Е.В.Щепин.-УМН, – 1981.- Т.36.- №3.-С.3-62.
8. Шапиро Л.Б. О некоторых свойствах функторов экспоненциального типа. – В кн.: IV Тираспольский симпозіум по общей топологи и ее приложеним, Кишинев, “Штиинца”, 1979, с. 163-164
9. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія / О.А.Борисенко. – Х.: Основа, 1995.-303 с.
10. Энгелькинг Р. Общая топология . -., “Мир”, 1986.
11. Заричний М.М. Топологія функторів и монад у категорії компактів / М.М. Зарічний. – К.: ИСДО, 1993. – 108 с.
12. Топология URL: https://indicator.ru/label/topologiya

13. Элементы топологии на уроках математики в школе URL: https://works.doklad.ru/view/IB9S-vx4Qz8.html
14. Что такое линия? Кривая Пеано URL: http://stratum.ac.ru/education/textbooks/kgrafic/additional/addit32.html
15. Мерзляк А.Г. Геометрія: підр. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 208 с.
16. Мерзляк А.Г. Геометрія: підр. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 270 с.
17. Мерзляк А.Г. Геометрія: проф. рівень : підр. Для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін.. – Х.: Гімназія, 2019. – 204 с.
18. Навчальні програми для 5-9 класів URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
19. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. Спеціальностей пед.. вузів. – К., 2000. – 512 с.
20. Програми з математики URL: http://www.olenabakal.ml/p/blog-page_63.html
21. Евклідова геометрія URL: https://wm-help.net/lib/b/book/2297999939/45
22. Загадковий лист Мебіуса URL: https://informaciaforall.blogspot.com/2014/07/blog-post_28.html?fbclid=IwAR3Urg4tJc6PWYCNiHMsUPri3ANwQyECq53h7p0gRv3ayuUMF37YSK0dF5k